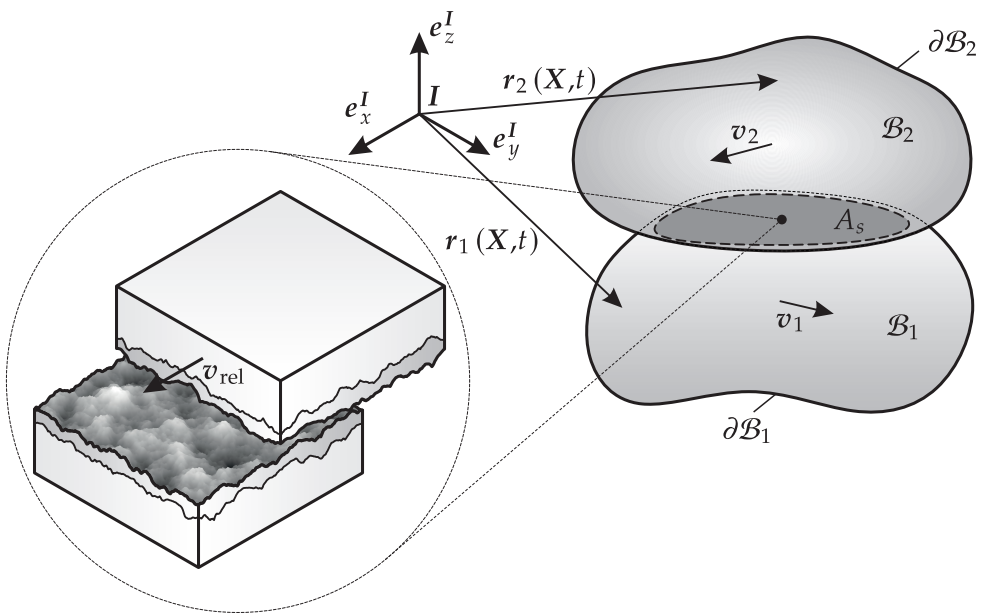


LUKAS JULIAN OESTRINGER

# Thermomechanischer Kontakt und stochastische Dynamik gleitender Körper mit rauen Oberflächen





Lukas Julian Oestinger

**Thermomechanischer Kontakt und stochastische Dynamik  
gleitender Körper mit rauen Oberflächen**

**Karlsruher Institut für Technologie**  
**Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik**  
Band 39

Eine Übersicht aller bisher in dieser Schriftenreihe erschienenen Bände finden Sie am Ende des Buchs.

# **Thermomechanischer Kontakt und stochastische Dynamik gleitender Körper mit rauen Oberflächen**

von  
Lukas Julian Oestinger

Karlsruher Institut für Technologie  
KIT-Fakultät für Maschinenbau

Thermomechanischer Kontakt und stochastische Dynamik  
gleitender Körper mit rauen Oberflächen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften von der KIT-Fakultät für Maschinenbau des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) genehmigte Dissertation

von Lukas Julian Oestinger, M.Sc.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 2023

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Kai Willner

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark  
of Karlsruhe Institute of Technology.

Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding parts marked otherwise, the cover, pictures and graphs –  
is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License  
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2023 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 1614-3914

ISBN 978-3-7315-1297-4

DOI 10.5445/KSP/1000158062







# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats möchte ich mich herzlich bei Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe bedanken, der durch seine stets konstruktive und fundierte Kritik zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Des Weiteren danke ich Prof. Dr.-Ing. habil. Kai Willner für die Übernahme des Korreferats und das gezeigte Interesse an meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin danke ich für die angenehme Zusammenarbeit am Institut. Weiterhin gilt mein Dank den emeritierten Professoren Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig, Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Jens Wittenburg und Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Jörg Wauer, deren rege Teilnahme am Institutsleben und an den jährlichen Seminaren eine große Bereicherung war.

Mein besonderer Dank gilt zudem allen momentanen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Institut für die durchweg angenehme Zusammenarbeit, die Hilfsbereitschaft und die vielen fachlichen, aber auch erfrischend fachfremden Diskussionen und Gespräche. Hervorheben möchte ich an dieser Stelle meinen langjährigen Bürokollegen Simon Schröders, mit dem ich nicht nur die Begeisterung für Forschung und Lehre, sondern auch für raue Oberflächen (vgl. Abbildung 1) teilen konnte. Darüber hinaus sei allen Studenten, deren Bachelor- oder Masterarbeit ich als Betreuer begleiten durfte, für die dabei entstandenen Fragen und spannenden Diskussionen gedankt.

Allen Freundinnen und Freunden danke ich für viele unvergessliche und alltägliche Momente, die mir immer wieder eine willkommene Abwechslung waren.

Zu guter Letzt möchte ich mich von Herzen bei meiner wundervollen Familie – ganz besonders bei Melissa – für die anhaltende Unterstützung und den großen persönlichen Rückhalt bedanken.

Karlsruhe, Februar 2023

Lukas J. Oestringer



**Abbildung 1:** Realisierung einer rauen Oberfläche bei  $46^{\circ}4'57''\text{N}$ ,  $7^{\circ}21'59''\text{O}$

# Kurzfassung

Die Funktionserfüllung vieler technischer Systeme lässt sich auf den gleitenden Kontakt zweier oder mehrerer Körper zurückführen. Hier können zum Beispiel Bremsen, Kupplungen und Gleitlager genannt werden, die praktisch in jedem mobilen oder stationären Antriebssystem zu finden sind. Für die Weiterentwicklung dieser reibungsbehafteten Systeme – sei es aus funktionaler oder ökonomischer Sicht – ist entsprechend ein möglichst umfassendes Verständnis der zugrundeliegenden Zusammenhänge im Kontakt notwendig.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich daher mit der Fragestellung, inwieweit der Reibwert für den Kontakt zweier gleitender metallischer Körper in Abhängigkeit verschiedener physikalischer Parameter bei trockener Reibung berechnet werden kann. Darüber hinausgehende Untersuchungen zu den Auswirkungen des berechneten Reibwerts im Kontext von reibungserregten Schwingungen schließen sich an.

Dafür wird ein thermomechanisches Modell für den Kontakt zweier gleitender Körper mit rauen Oberflächen entwickelt und für verschiedene Kontaktkonfigurationen ausgewertet. Die Modellbildung basiert dabei auf der Halbraumannahme und den quasi-statischen Bilanzgleichungen für einen thermoelastischen Festkörper. Das Simulationsmodell ermöglicht die Berechnung verschiedener kontaktmechanischer Größen wie beispielsweise den Verschiebungen, den Spannungen, dem Temperaturfeld, der tatsächlichen Kontaktfläche und insbesondere dem stochastischen Reibwert. Es ist außerdem in der Lage, die Einflüsse von temperaturabhängigen Materialparametern abzubilden. Die vorliegende Arbeit schließt damit eine in der Literatur noch vorhandene Modellierungslücke und kann als Erweiterung der bisher existierenden Kontaktmodelle angesehen werden. Weiterführende Untersuchungen hinsichtlich den zugrundeliegenden Instabilitätsmechanismen bei reibungserregten Schwingungen unter Einbezug der Erkenntnisse aus den thermomechanischen Simulationen schließen sich an. Hierfür wird der berechnete Reibwert zunächst geeignet parametrisiert und anschließend in ein Minimalmodell eingearbeitet. Die Stabilitätsanalysen zeigen bisher noch nicht in der Literatur bekannte stabilisierende und destabilisierende Auswirkungen des stochastischen Reibwerts auf Systeme mit tribologischen Kontakten.



# Inhaltsverzeichnis

Danksagung . . . . .	I
Kurzfassung . . . . .	III
<b>1 Einleitung . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung – Von der Renaissance bis in das 21. Jahrhundert . . . . .	2
1.3 Struktur und Zielsetzung der Arbeit . . . . .	10
<b>2 Grundlagen . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1 Modellierung und Simulation von rauen Oberflächen und Reibwerten . . . . .	13
2.1.1 Stochastische Prozesse . . . . .	13
2.1.2 Raue Oberflächen . . . . .	17
2.1.3 Reibwerte . . . . .	20
2.2 Thermoelastischer Festkörper . . . . .	23
2.2.1 Lineare Thermoelastizität . . . . .	24
2.2.2 Ausgewählte numerische Methoden . . . . .	29
2.3 Minimalmodelle für reibungserregte Schwingungen . . . . .	37
2.3.1 Negativer Reibwertgradient . . . . .	37
2.3.2 Nicht-konservative Kopplung . . . . .	39
<b>3 Thermomechanischer Kontakt gleitender Körper mit rauen Oberflächen . . . . .</b>	<b>43</b>
3.1 Potentialtheorie . . . . .	46
3.1.1 Mechanische Oberflächenbelastung . . . . .	50
3.1.2 Thermische Oberflächenbelastung . . . . .	52
3.1.3 Superposition für beliebige Oberflächenlasten . . . . .	59
3.2 Verifikation und Diskussion . . . . .	64
3.2.1 Vergleich der Einflussfunktionen . . . . .	64
3.2.2 Verifikation . . . . .	66
3.2.3 Diskussion des Kopplungseinflusses . . . . .	76

3.2.4	Auswirkungen des Einflussradius bei periodischen Lastfällen . . .	79
3.3	Modellbildung und Simulation . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Ergebnisse der thermomechanischen Kontaktsimulationen . . . . .</b>	<b>87</b>
4.1	Isotrope Oberflächen . . . . .	89
4.2	Anisotrope Oberflächen . . . . .	99
4.3	Einordnung der Ergebnisse . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Diskussion im Kontext von reibungserregten Schwingungen . . . . .</b>	<b>111</b>
5.1	Lastabhängiger Reibwert . . . . .	111
5.2	Stochastischer Reibwert . . . . .	112
5.2.1	Reibwertmodellierung . . . . .	112
5.2.2	Nicht-konservative Kopplung mit stochastischem Reibwert . . . .	116
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick . . . . .</b>	<b>123</b>
 <b>Anhang</b>		
<b>A</b>	<b>Poroelastizität . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Einflussfunktionen . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>C</b>	<b>Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>D</b>	<b>Stochastische Stabilitätstheorie . . . . .</b>	<b>139</b>
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	143
	Tabellenverzeichnis . . . . .	147
	Literaturverzeichnis . . . . .	149
	Eigene Publikationen . . . . .	169
	Betreute Abschlussarbeiten . . . . .	171

# 1 Einleitung

Selten lassen sich komplexe physikalische Zusammenhänge durch triviale mathematische Ausdrücke beschreiben. Dass dies bei der Reibkraft

$$F_r = \mu F_n \tag{1.1}$$

so gut gelingt, ist deshalb umso erstaunlicher. Die Reibkraft  $F_r$  beschreibt den Widerstand, der einer Relativbewegung von zwei sich berührenden Körpern entgegenwirkt und als Produkt des Reibwerts  $\mu$  mit der Normalkraft  $F_n$  berechnet werden kann. Die Modellierung der Reibkraft durch Gleichung (1.1) ist heutzutage in jedem kommerziellen Simulationsprogramm hinterlegt und gemeinhin als Coulomb'sches Reibgesetz bekannt. Allerdings gelingt es bisher trotz intensiver Bemühungen nicht, den Reibwert  $\mu$  für beliebige Kontaktkonfigurationen zuverlässig vorherzusagen. Aus diesem Grund beschäftigt sich auch die vorliegende Arbeit mit dieser Thematik. Sie reiht sich damit in die Chronologie tribologischer Forschungsarbeiten ein, deren Ursprünge bis in die Renaissance zurückreichen. Der Fokus der Arbeit liegt dabei auf dem gleitenden Kontakt metallischer Körper mit trockener Reibung, wie sie im Maschinenbau häufig Anwendung finden sowie den damit verbundenen Auswirkungen hinsichtlich reibungserregter Schwingungen. Warum die Berechnung des Reibwerts  $\mu$  nicht nur aus akademischer Sicht von Interesse ist, wird in Unterkapitel 1.1 motiviert. Anschließend folgt ein Literaturüberblick in Unterkapitel 1.2, der sich größtenteils auf den gleitenden Kontakt zweier Körper mit trockener Reibung konzentriert. Kapitel 1 wird nach einer Synthese des Forschungsstandes durch eine Beschreibung von der Struktur und der Zielsetzung der Arbeit in Unterkapitel 1.3 abgeschlossen.

## 1.1 Motivation

Die Funktionserfüllung vieler technischer Systeme lässt sich auf den gleitenden Kontakt zweier oder mehrerer Körper zurückführen. Hier können zum Beispiel Bremsen, Kupplungen und Gleitlager genannt werden, die sich im Allgemeinen in jedem mobilen

oder stationären Antriebssystem finden lassen. Eine Modellierung der Reibkräfte in den jeweiligen tribologischen Kontakten durch Gleichung (1.1) ist in Anbetracht der dort wirkenden komplexen physikalischen Prozesse vorteilhaft. Entsprechend groß ist jedoch auch die Anzahl der Parameter, die einen Einfluss auf den Reibwert oder den zugrundeliegenden tribologischen Kontakt haben [241]. Experimente und Simulationen zeigen unter anderem eine Abhängigkeit des Reibwerts von den beteiligten Werkstoffen, der Gleitgeschwindigkeit, der Temperatur und der Oberflächenstruktur.

Aus der Perspektive des Entwicklungsingenieurs lässt sich davon neben der Werkstoffauswahl und der Betriebstemperatur meist nur die Struktur der Kontaktflächen gezielt beeinflussen. Durch moderne Fertigungsverfahren sind mittlerweile Bearbeitungen der Oberflächen bis in den nm-Bereich möglich [12, 90], eine Gestaltabweichung in Form von Oberflächenrauigkeiten ist dabei dennoch immer vorhanden. Veränderungen der Oberflächenstruktur können zu einer deutlichen Reduktion des Reibwerts führen [90, 221], die Tragfähigkeit erhöhen [37] oder die Dynamik des übergeordneten technischen Systems verbessern [45, 100, 109, 126, 249]. Es lässt sich aber ebenso das Verschleißverhalten beeinflussen [61, 90], der Transport von Schmiermittel steuern [127] oder der Wärmeübertrag und die elektrische Leitfähigkeit zweier sich berührender Körper maßgeblich steigern [61]. In allen Fällen spielt die tatsächliche Kontaktfläche zwischen den beiden Kontaktkörpern eine wesentliche Rolle.

Neben den beschriebenen Einflüssen auf die Funktionalität von technischen Systemen lassen sich auch ökonomische Aspekte der Reibkraft feststellen. Für die Energieverluste aufgrund von unerwünschter Reibung müssen jährlich hunderte Millionen Euro aufgewendet werden [240]. Studien zu den Reibungsverlusten in Personenkraftfahrzeugen [76, 103], in Lastkraftwagen und Bussen [104] sowie in der Bergbauindustrie [105] zeigen, dass Reibungsverluste signifikant zum Energieverbrauch beitragen. Schätzungsweise 20 % des weltweiten Energiebedarfs werden aufgrund von parasitären Reibungsverlusten verursacht [106]. Diese tragen somit erheblich zu den globalen Treibhausgasemissionen bei.

Für die Weiterentwicklung von technischen Systemen mit Reibung – sei es aus funktionaler oder ökonomischer Sicht – ist in allen Fällen ein möglichst umfassendes Verständnis der zugrundeliegenden Zusammenhänge nötig. Dass dadurch grundsätzlich ein großes Verbesserungspotential vorhanden ist, zeigen die aufgeführten Veröffentlichungen.

## **1.2 Stand der Forschung – Von der Renaissance bis in das 21. Jahrhundert**

Die folgenden Ausführungen konzentrieren sich auf den trockenen Kontakt rauer Körper und orientieren sich für die historischen Entwicklungen zwischen der Renaissance und der Mitte des 20. Jahrhunderts an den Zusammenfassungen [24, 68, 77, 162, 208,



250]. Für den Zeitraum ab dem 19. Jahrhundert bis heute fließen zunehmend auch weitere, als relevant erachtete Veröffentlichungen ein, sodass sich schlussendlich ein möglichst umfassendes Gesamtbild des aktuellen Forschungsstandes ergibt.

Die ersten wissenschaftlichen Untersuchungen auf dem Gebiet der Tribologie werden in die Zeit der Renaissance datiert und sind Leonardo da Vinci (\*1452 – †1519) zugeschrieben. In seinen Experimenten stellt da Vinci eine Proportionalität des Widerstands gegen den Beginn des Gleitens zum Gewicht des Körpers fest, findet jedoch keinen Einfluss der scheinbaren Kontaktfläche. Er versteht dennoch die Oberflächenstruktur als Ursache des Widerstands und schlussfolgert eine kleiner werdende Reibkraft mit glatter werdender Oberfläche.

Erst mit dem Beginn des 18. Jahrhunderts werden weitere Untersuchungen von Guillaume Amontons (\*1663 – †1705) durchgeführt. Er formuliert unabhängig von da Vinci Gesetzmäßigkeiten der Reibung, die aber im Einklang mit dessen Beobachtungen stehen. Zudem sieht Amontons ineinandergreifende Asperiten und eine damit notwendige Hebungsarbeit als Ursache für den Widerstand gegen den Beginn des Gleitens an und rückt damit die Interaktion der Oberflächenstrukturen als Ursprung für Reibung in den Vordergrund. Eine Vorstellung, die ebenfalls von Philippe de la Hire (\*1640 – †1718) geteilt wird, der mit seiner Arbeit die Resultate Amontons bestätigt. Insbesondere vermutet de la Hire, dass für den Beginn des Gleitens unter anderem auch die Zerstörung einzelner Asperiten notwendig sein könnte. Aus heutiger Sicht kann dies als plastische Verformung und damit permanente Oberflächenveränderung interpretiert werden. Mit John Theophilus Desaguliers (\*1683 – †1744) entsteht die neben den ineinandergreifenden Asperiten konzeptionell neue Vorstellung der Adhäsion als Ursprung für die Reibkraft. Durch ihn entwickelt sich darüber hinaus erstmals der Gedanke, dass die Reibkraft bei immer glatter werdenden Oberflächen wieder steigen statt fallen könnte. Frühe Modelle von rauen Oberflächen entstehen. Bernard Forrest de Bélidor (\*1697 – †1761) repräsentiert diese als Ansammlung kugelförmiger Asperiten, während Leonhard Euler (\*1707 – †1783) eine Modellierung der Asperiten in der Form von Dreiecken wählt. Euler prägt zudem die Nutzung des griechischen Buchstabens  $\mu$  für den Reibwert und unterscheidet zwischen Haft- und Gleitreibung. Mit den umfangreichen Arbeiten von Charles Augustin Coulomb (\*1736 – †1806) wird schließlich ein neues Kapitel in der Tribologie aufgeschlagen und die Forschungsbemühungen erhalten ein wesentlich komplexeres und größeres Ausmaß. Coulomb untersucht unter anderem den Einfluss von der zeitlichen Dauer der Haftphasen sowie von verschiedenen Umgebungseinflüssen wie beispielsweise Temperatur und Luftfeuchtigkeit. Außerdem interpretiert Coulomb die Asperiten als verformbare Borsten. Erste Versuche, die Abhängigkeiten des Reibwerts in analytischen Zusammenhängen auszudrücken, gehen ebenfalls auf ihn zurück.

Damit besteht bereits zu Anfang der industriellen Revolution Ende des 18. Jahrhunderts eine recht umfangreiche Vorstellung für die Ursachen und Zusammenhänge der Reibkraft, von denen viele Einzug in die Forschungen jüngerer Zeit gefunden haben. Im 19. Jahrhundert sind die Entwicklungen in der Tribologie größtenteils durch die Erforschung der Fluidmechanik geprägt. Mit der nach Osborne Reynolds (\*1842 – †1912) benannten Reynoldsgleichung und den Experimenten von Richard Stribeck (\*1861 – †1950) werden im Bereich der geschmierten Kontakte große Fortschritte erzielt. Der als Stribeck-Kurve bekannte Zusammenhang zwischen Reibkraft und Gleitgeschwindigkeit bei Gleitlagern wird mittlerweile auch oft im Kontext von geschwindigkeitsabhängigen Reibkräften in trockenen Kontakten verwendet. Untersuchungen zu trockenen Kontakten fokussieren sich in dieser Zeit hauptsächlich auf den Übergang der Zustände Haften und Gleiten. Aus zahlreichen Experimenten schließen Henry Charles Fleming Jenkin (\*1833 – †1885) und James Alfred Ewing (\*1855 – †1935) schließlich, dass der Übergang des einen Zustandes in den anderen kontinuierlich ist. Als Ursache für die Reibkraft wird allerdings immer noch die für das Übereinandergleiten der Asperiten notwendige Hebungsbearbeitung angesehen.

Das 19. Jahrhundert beinhaltet ebenso einige Veröffentlichungen, denen aus heutiger Sicht eine große Bedeutung zukommt. Hier sind beispielsweise Joseph Valentin Boussinesq (\*1842 – †1929) und Valentino Cerutti (\*1850 – †1909) zu nennen [119], denen die Herleitung der Fundamentallösungen für normale und tangential Einzelkräfte auf der Oberfläche eines Halbraums gelingt. Ihre Ergebnisse finden in einer Vielzahl von aktuellen Publikationen Anwendung und sind ebenfalls Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Aber auch die Ergebnisse von Heinrich Rudolf Hertz (\*1857 – †1894) [92] zum elastischen Kontakt glatter, nicht-konformer Körper sind aufzuführen, die bis heute viele Forscher zu neuen Erkenntnissen inspirieren. Zum einen können Johnson-Kendall-Roberts [118] und Derjaguin-Muller-Toporov [64, 173] durch die Ergänzung des Hertz-Kontaktes um Adhäsionskräfte deren Einfluss auf die Kontaktfläche zeigen. Zum anderen sei die, jeweils unabhängig von Cesare Cattaneo (\*1912 – †1943) und Raymond David Mindlin (\*1906 – †1987) [169, 170] durchgeführte, Erweiterung des Hertz-Kontaktes um tangential Belastungen erwähnt. Hierdurch wird die auch als partielles Gleiten bezeichnete Übergangsphase zwischen den Zuständen Haften und Gleiten besser verstanden und gleichzeitig ein Zusammenhang der Reibkraft zur Verschiebung und insbesondere zur Vorgeschichte des Kontaktes nachgewiesen. Als partielles Gleiten wird ein Zustand bezeichnet, bei dem Teilgebiete der Kontaktfläche haften, während andere Teilgebiete derselben Kontaktfläche noch oder schon gleiten. Die Ergebnisse von Cattaneo-Mindlin decken sich mit experimentellen Beobachtungen [117], stehen im Einklang mit den Schlussfolgerungen von Jenkin und Ewing und werden auch aktuell erneut diskutiert [75].

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts verändert sich durch die Arbeiten von

Frank Philip Bowden (\*1903 – †1968) und David Tabor (\*1913 – †2005) [36] schließlich dauerhaft die Sicht auf die Vorgänge trockener Reibung. Die tatsächliche, anstatt der scheinbaren Kontaktfläche und die bereits von Desaguliers angedachte Rolle der Adhäsion werden als zentrale Ursachen für den oft linearen Zusammenhang von Normal- und Reibkraft erkannt. Den Ausführungen von Bowden und Tabor folgend, plastifizieren die in Kontakt tretenden Asperiten aufgrund der kleinen tatsächlichen Kontaktfläche und den damit lokal sehr hohen Drücken sofort. Sie schließen daraus, dass die Belastung direkt proportional zur tatsächlichen Kontaktfläche ist. Bei ebenfalls angreifenden, tangentialen Belastungen scheren die Asperiten bei Überschreitung der Versagensscherspannung ab, womit die bereits von da Vinci und Amontons festgestellte, heutzutage als Coulomb'sches Reibgesetz bekannte Proportionalität zwischen Normal- und Reibkraft und ebenso die Unabhängigkeit von der scheinbaren Kontaktfläche für den rein plastischen Lastfall begründet werden kann. Bowden und Tabor schlussfolgern zudem, dass die Adhäsion den im Vergleich zu pflügenden Verlusten oder zur elastischen Hysterese dominierenden Anteil der Reibkraft bei Kontaktkörpern mit Härten in derselben Größenordnung und nominell glatten Oberflächen ausmacht. Zu diesem Ergebnis kommen auch neuere, numerische Untersuchungen [28].

Seit den Arbeiten von Bowden und Tabor lässt sich eine zunehmende Verzweigung der Forschungsgebiete in immer komplexer werdende Teilgebiete feststellen, für die eine chronologische Aufarbeitung nicht weiter zielführend scheint und die in ihrer Gesamtheit auch nicht mehr zu erfassen ist. Für einen Großteil der Forschungsbemühungen im Kontext der Tribologie steht aber ab der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts sowohl die tatsächliche Kontaktfläche als auch die Verteilung der einzelnen Kontaktgebiete im Vordergrund. Konnte für den rein plastischen Kontakt nun die Proportionalität zwischen Normal- und Reibkraft argumentiert werden, gelingt dies für den rein elastischen Kontakt erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Durch fortschreitende Messtechnik sind nun Vermessungen rauer Oberflächen möglich. Ernest James Abbott und Floyd Firestone charakterisieren als erste die Höhenwerte durch die nach ihnen benannte Abbott-Firestone Kurve. Es findet zunehmend eine Interpretation der Oberflächen als zweidimensionales Zufallsfeld statt [152, 153] und für die Charakterisierung werden unter anderem Verteilungsdichte und Leistungsdichtespektrum herangezogen [178]. Durch diese Erkenntnisse modellieren Greenwood und Williamson [88] die Asperiten von rauen Oberflächen als Ansammlung sich nicht beeinflussender Halbkugeln, deren Höhenwerte im Gegensatz zu den Vorstellungen von de Bélidor einer Normalverteilung folgen. Unter Verwendung der Ergebnisse von Hertz berechnen sie eine mit der Normalkraft nahezu proportional ansteigende, tatsächliche Kontaktfläche. Mit der Annahme einer zur Kontaktfläche proportionalen Versagensscherspannung kann damit eine Begründung für die als Coulomb'sches Reibgesetz bekannte Proportionalität zwischen Normal- und Reibkraft im rein elastischen Lastfall gefunden werden. Der

Modellierungsansatz von Greenwood und Williamson verursacht eine hohe Anzahl an Folgearbeiten und erfreut sich auch heute noch großer Beliebtheit. An dieser Stelle sind beispielsweise die Erweiterungen von Bush, Gibson und Thomas [41] sowie von Fuller und Tabor [81] zu nennen, die die ursprüngliche Modellierung von Greenwood und Williamson um repräsentative parabolische Asperiten und Adhäsionskräfte erweitern. Nach Aussagen des Autors Greenwood [89] ist der grundsätzliche Modellierungsgedanke jedoch fehlerhaft. Er verweist auf Arbeiten von John Frederick Archard [8], der bereits einige Jahre vorher raue Oberflächen als selbstähnliche Asperiten mehrerer Größenskalen modelliert und für den rein elastischen Fall eine näherungsweise Proportionalität zwischen tatsächlicher Kontaktfläche und Kontaktlast nachweist. In die Reihe der analytischen Arbeiten für den rein elastischen Kontakt rauher Körper gliedert sich aus jüngerer Zeit Bo Persson [63, 201] ein, dessen Modell als Eingangsgröße das Leistungsdichtespektrum der Oberflächenhöhen beinhaltet und ebenfalls auf eine Proportionalität zwischen tatsächlicher Kontaktfläche und Kontaktlast schließen lässt. Dabei liegen die berechneten Proportionalitätsfaktoren von Bush, Gibson und Thomas sowie Persson zwar in derselben Größenordnung, die genauen Abhängigkeiten werden aber immer noch diskutiert [42, 63, 107, 108, 188]. Zudem lässt sich bereits für nicht-normalverteilte Oberflächenhöhen keine Proportionalität mehr zwischen tatsächlicher Kontaktfläche und Kontaktlast nachweisen [52, 125, 131].

Sowohl die rein elastischen als auch die rein plastischen Modellierungsansätze sind im Rahmen ihrer Annahmen zu verstehen, reale Kontakte stellen im Allgemeinen eine Mischform der beiden Grenzfälle dar. Dennoch basieren die gewonnenen Erkenntnisse und Schlussfolgerungen allesamt auf Oberflächenrauigkeiten. Wohl nicht zuletzt aus diesem Grund gibt es eine Vielzahl an analytischen und durch die seit Ende des 20. Jahrhunderts breit verfügbare Rechenleistung auch numerischen Untersuchungen zu elastischen, plastischen und elastisch-plastischen Kontakten rauher Körper. Dabei hat sich in diesem Bereich mittlerweile neben einigen Simulationen mithilfe der Finite-Elemente-Methode [107, 108] die Rand-Element-Methode weitestgehend durchgesetzt. Es entstehen Arbeiten zu quasi-statischem Normalkontakt mit dem Einfluss von Adhäsion [174, 175], zur Modellierungen von Plastizität mit und ohne Verfestigung [53, 91, 113, 156, 179, 180, 238], zu beschichteten Körpern [195, 196, 254, 255, 261], zu nicht-normalverteilten Oberflächenhöhen [52, 125, 131], zu partiellem Gleiten und tangentialer Belastung [38, 48, 82, 85, 98, 189, 190, 254, 255, 257], zu den Einflüssen der spektralen Komponenten der Oberflächenhöhen [256, 259, 260, 263] sowie zu Berechnungen der resultierenden Kontaktsteifigkeiten [43, 168] und Spannungen [145]. Auch das von Archard [7] eingeführte und nach ihm benannte Verschleiß-Gesetz sei erwähnt, dessen kontaktmechanischer Ursprung ebenfalls Gegenstand aktueller Forschungsbemühungen ist [80]. Die Mehrheit der aufgeführten Arbeiten kommt jedoch nicht mehr ohne numerische Hilfsmittel aus. Außerdem gehen alle Arbeiten entweder

von dem statischen Normalkontakt zweier rauer Körper aus, für den die zweiseitigen Rauigkeiten der Kontaktkörper zu einer resultierenden Rauigkeit zusammengefasst werden können, oder die Rauigkeit eines Kontaktkörpers wird vernachlässigt. Eine konsequente Modellierung im Sinne einer transienten äquivalenten rauen Oberfläche für gleitende Kontakte wurde nicht gefunden. Vielleicht gerade deswegen wird auf ein noch fehlendes Verständnis von gleitenden Kontakten hingewiesen [46]. Die erst kürzlich durchgeführte *Contact Mechanics Challenge* [56, 174–176] zeigt dennoch den enormen Fortschritt in der Kontaktmechanik der letzten Jahrzehnte.

Im Rahmen von gleitenden Kontakten entsteht in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts das Konzept der Blitztemperaturen durch Harmen Blok [31]. Darunter werden lokale, temporäre Temperaturerhöhungen verstanden, die deutlich über der Temperatur des Festkörpers liegen. Sie sind das Resultat von kurzzeitig in Berührung stehenden Asperiten und treten bereits bei geringen Gleitgeschwindigkeiten auf. Neben Nachweisen in Experimenten [191, 223, 234] führen aufbauende Untersuchungen zur Temperaturentwicklung bei gleitenden Kontakten von Jaeger [114] und Archard [9] zu einer Serie von Veröffentlichungen, die sich weitestgehend mit der Abschätzung der mittleren oder maximalen Temperaturerhöhung bei bewegten oder stehenden Wärmequellen mit vordefinierter Ausdehnung auf der Oberfläche eines Halbraums beschäftigen [19, 65, 237]. Auch auf diesem Forschungsgebiet führt die verfügbare Rechenleistung Ende des 20. Jahrhunderts zu einer ganzen Reihe von Arbeiten, die unter anderem die Wärmeverteilung [34, 245], den konvektiven Wärmeaustausch [149], die Wärmeentwicklung in beschichteten Körpern [205, 216, 226, 235], die experimentelle Validierung [55] und die Auswirkungen räumlich verteilter Wärmequellen [4, 54, 151, 243] untersuchen. Die Veröffentlichungen beziehen sich dabei zumeist auf die Sammlung von Wärmeleitungsproblemen von Carslaw und Jaeger [47]. Die Forschungsbemühungen zur Temperaturentwicklung werden in der Regel eher mit dem Verschleiß der Oberflächen als mit den Auswirkungen auf den Reibwert motiviert. Jedoch zeigen diverse Publikationen sowohl einen Einfluss der Temperatur auf die Materialparameter als auch auf die tatsächliche Kontaktfläche [17, 21, 44, 87, 157, 181, 262] und damit sehr wohl einen Zusammenhang der Temperatur zur Reibkraft selbst [51, 171]. Der Einfluss auf die tatsächliche Kontaktfläche wird zum einen durch die direkte Beeinflussung der Materialparameter und zum anderen durch thermoelastische Verformungen der Oberflächenhöhen verursacht. Diese sind im Allgemeinen eng mit der Temperaturentwicklung verbunden. Das Phänomen der thermoelastischen Instabilität wird von James Richard Barber [16, 18, 20] sowohl experimentell als auch analytisch beschrieben und von Dow, Burton und Dundurs [39, 40, 67, 69] weiter untersucht. Nominell glatte Oberflächen treten hierbei an den höchsten Asperiten in Kontakt, die Reibungswärme führt zu einer Ausdehnung der ohnehin

schon in Kontakt stehenden Erhebungen. In der Folge erfahren diese eine ansteigende Belastung und damit einen wachsenden Wärmeeintrag. Dieser Kreislauf setzt sich fort und ist, mittlerweile unter der Bezeichnung *thermoelastic dynamic instability* (TEDI), immer noch Gegenstand aktueller Forschungen [1, 141]. Es findet zunehmend eine Weiterentwicklung von stationären Modellierungen zu transienten Lastfällen statt und grundlegende Kenntnisse über thermomechanische Einflüsse und deren Bedeutung für Reibkontakte entstehen [22, 32, 51, 109, 122, 171]. Neben den bereits genannten Auswirkungen wird auch der Einfluss der Temperatur und der Gleitgeschwindigkeit auf die Versagensspannung der Kontaktkörper erkannt. Veröffentlichungen aus den letzten Jahren beschäftigen sich unter Verwendung numerischer Hilfsmittel mit thermoelastischen Verformungen [60, 142, 146, 148] und Spannungen [147] von rauen Körpern, sowie mit Untersuchungen zu beschichteten Körpern [225, 264] und zu konvektivem Wärmeaustausch [163]. Außerdem entstehen Arbeiten zu thermomechanischen Kontakten [35, 49, 50, 140, 143, 224, 246], die die verschiedenen, bereits erwähnten mechanischen und thermischen Einflüsse in unterschiedlicher Ausprägung kombinieren. Grundsätzlich lassen sich dabei aufgrund der wesentlich komplexeren Zusammenhänge im Vergleich zu rein mechanischen Modellierungen deutlich weniger Veröffentlichungen finden, die jedoch ebenfalls eine konsequente Modellierung im Sinne einer transienten äquivalenten rauen Oberfläche vermissen lassen. Außerdem wird in dem Großteil der Arbeiten ebenfalls auf Mikroebene mit einem Coulomb'schen Reibgesetz gearbeitet. Inwieweit dies physikalisch sinnvoll ist, wird kritisch hinterfragt [75]. Die Komplexität der Modellierung und Simulation von tribologischen Kontakten wird darüber hinaus auch durch den Umfang aktueller Literaturübersichten [86, 162, 241, 250, 251] deutlich.

Parallel zu den Forschungsbemühungen auf Mikroebene findet in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts eine Entwicklung von zwar phänomenologisch motivierten [2, 164, 199, 200, 236], aber dennoch rein empirischen Reibgesetzen statt. Diese greifen häufig auf die Vorstellungen Coulombs von rauen Oberflächen als Ansammlung verformbarer Borsten zurück, weshalb sie des Öfteren unter der Bezeichnung Bürstenmodelle zusammengefasst werden. Grundsätzlich kann hierbei zwischen statischen und dynamischen Reibgesetzen unterschieden werden, wobei sich Letztere durch die Nutzung einer inneren Variable als Differentialgleichung schreiben lassen. Die auf diesem Wege sehr weit entwickelten Reibgesetze beinhalten zumeist sowohl eine Parametrisierung der Stribeck-Kurve im Sinne eines stationären, aber von der Relativgeschwindigkeit abhängigen Grenzfalls als auch eine Modellierung des partiellen Gleitens [197]. Aufgrund der Vielzahl von Reibgesetzen sollen nur einige ausgewählte dynamische Reibgesetze andiskutiert werden, um grundsätzliche Parallelen beider Forschungsgebiete aufzuzeigen. Interessant ist beispielsweise der Vergleich des von Dahl [62]

erdachten dynamischen Reibmodells mit den analytischen Ergebnissen des partiell gleitenden Hertz-Kontaktes von Mindlin [169]. Dahl motiviert sein Modell durch die Analogie zu ideal elastisch-plastischem Materialverhalten. Die zugrundeliegenden Gleichungen beider Modelle lassen sich bei konstanter Last strukturell ineinander überführen [203]. Außerdem modelliert Dahl einen zusätzlichen stochastischen Anteil des Reibwerts als weißes Rauschen, ein Aspekt, der in weiterführenden dynamischen Reibgesetzen nicht mehr aufgegriffen wird. Als Beispiele seien das LuGre-Modell [13], das elasto-plastische-Modell [71] und die Reibmodelle von Dietrich sowie Ruina [211] genannt. Die Vernachlässigung steht im Widerspruch zu Beobachtungen in Experimenten, die den stochastischen Charakter des Reibwerts immer wieder nahelegen [26, 66, 78, 133, 137, 228–230, 265]. Eine systematische Auswertung der experimentellen Daten hinsichtlich qualitativer Eigenschaften des stochastischen Reibwertanteils oder die gezielte Weiterentwicklung eines stochastischen Reibgesetzes wurden in der Literatur jedoch nicht gefunden. Frühe Charakterisierungsansätze von Rabinowicz [214, 215] stellen aber den Zusammenhang der Reibwertschwankungen zu den Oberflächenrauigkeiten her. Und auch neuere Messungen des Reibwerts beziehen die Oberflächenrauigkeit gezielt mit ein [158]. Erwähnenswert sind zudem auch Modellierungen mit temperaturabhängigen Reibwerten [159, 160, 182] sowie Veröffentlichungen zur Dynamik von Reibschwingern unter Berücksichtigung von thermoelastischen Ausdehnungen [212], die die tatsächlichen physikalischen Phänomene zwar stark abstrahieren, aber trotzdem den skalenübergreifenden Charakter von Systemen mit Reibung und die Bedeutung einer thermomechanischen Modellierung unterstreichen. Auf diesem Forschungsgebiet existieren ebenfalls zahlreiche und umfassende Zusammenfassungen in der Literatur [27, 77, 109, 110, 186, 187], die neben der Modellierung des Reibwerts auch auf ihre Folgen eingehen.

Trotz fehlender Weiterentwicklung von stochastischen Reibgesetzen wird die Oberflächenrauigkeit immer wieder in der Modellbildung für dynamische Untersuchungen berücksichtigt. Neben Publikationen zu reinen Vertikalschwingungen von rauen Körpern [93–97, 115, 230, 258], zu Schwingungen von Mehrfreiheitsgradsystemen mit rauen Oberflächen und deterministischen Reibwerten [78, 220, 228] sowie berechneten Reibwerten [25] lassen sich auch Veröffentlichungen zu rein tangentialen Freiheitsgraden mit stochastischem Reibwert im Sinne eines unphysikalischen weißen Rauschens finden [79, 83, 100]. Forschungsbemühungen zu Mehrfreiheitsgradsystemen unter Berücksichtigung eines stochastischen Reibwerts im Sinne eines farbigen und/oder korrelierten Rauschprozess wurden in diesem Zusammenhang nicht gefunden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das interdisziplinäre und mehrere Größenskalen überspannende Forschungsfeld der Tribologie in vielen Bereichen bereits

gut erschlossen ist. Die überwiegende Mehrheit der Arbeiten konzentriert sich jedoch auf den quasi-statischen Normalkontakt. Neben der Vielzahl an Einflussfaktoren treten bei gleitenden Kontakten im Vergleich zu statischen Kontakten zwei Besonderheiten auf. Erstens kann für eine konsequente Modellierung zweier gleitender Körper mit rauen Oberflächen nicht auf eine statische, äquivalente raue Oberfläche zurückgegriffen werden. Der aktuelle Stand der Forschung weist diesbezüglich noch eine Lücke auf. Zweitens werden die Wärmeentwicklung und ihre Folgen für den gleitenden Kontakt von Bedeutung sein. Die Auswirkungen der Temperaturentwicklung auf die Materialparameter und den thermomechanischen Kontakt sind zumindest in der Theorie und aus Experimenten bekannt, detaillierte Simulationsmodelle fehlen jedoch. Um die Einflüsse beider Aspekte auf den Reibwert abzubilden, ist die Verwendung eines vorgegebenen Reibwerts auf Mikroebene zu vermeiden.

Des Weiteren fehlen über das weiße Rauschen hinausgehende Modellierungen des stochastischen Reibwertanteils. Dies liegt neben der nicht vorhandenen Weiterentwicklung von stochastischen Reibgesetzen auch an nicht zielführenden Auswertungen vorhandener Experimente und fehlenden Kontaktsimulationen mit einer konsequenten Modellierung der zweiseitigen Rauigkeit. Eine entsprechende Lücke des Forschungsstandes lässt sich dementsprechend bei weiterführenden Studien zu den Auswirkungen von stochastischen Reibwerten auf die Dynamik von technischen Systemen verorten.

### 1.3 Struktur und Zielsetzung der Arbeit

Nach der erfolgten Motivation und der Zusammenfassung des aktuellen Forschungsstandes schließt eine Beschreibung der Struktur und der Zielsetzung der Arbeit das **Kapitel 1** ab. Dafür werden zunächst die Ziele der Arbeit im Sinne des folgenden, offenen Forschungsbedarfes abgeleitet:

- Die Berechnung des Reibwerts für zwei gleitende Körper mit rauen Oberflächen bei unterschiedlichen Relativgeschwindigkeiten und Lasten.
- Die konsequente Modellierung der Oberflächenrauigkeiten von beiden Kontaktkörpern.
- Die Berücksichtigung von Reibungswärme und thermoelastischen Verformungen.
- Die physikalisch sinnvolle Modellierung und Parametrisierung des stochastischen Reibwertanteils.
- Die Untersuchung der Auswirkungen etwaiger stochastischer Anteile des Reibwerts im Kontext von reibungserregten Schwingungsphänomenen.



Während diese Forschungslücken geschlossen werden, soll zudem der Aspekt einer anschließenden Validierungsmöglichkeit der Simulationsergebnisse durch Experimente sichergestellt sein. Die Oberflächenhöhen im Kontaktbereich können vermessen werden, sodass eine diskrete Menge an  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Werten zur Verfügung steht. Die mittlerweile von modernen Messgeräten erreichbaren Auflösungen von  $128 \times 128$  bis  $2048 \times 2048$  Datenpunkten müssen deshalb als Eingangsgrößen für das Simulationsmodell verwendet werden können. Das Durchführen der Simulationen für Rechengitter in dieser Größenordnung innerhalb vertretbarer Rechenzeiten, auch auf handelsüblichen Computern, kann dabei als untergeordnetes Forschungsziel formuliert werden.

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert. **Kapitel 2** legt zunächst die Grundlagen für die weitere Arbeit. Dazu gehören generelle Aspekte zur Modellierung und Simulation von rauen Oberflächen und Reibwerten in Unterkapitel 2.1. Verschiedene Charakterisierungsmöglichkeiten von stochastischen Prozessen werden in Abschnitt 2.1.1 aufgezeigt und für raue Oberflächen in Abschnitt 2.1.2 und für Reibwerte in Abschnitt 2.1.3 diskutiert. Die beiden letztgenannten Abschnitte beinhalten darüber hinaus mögliche Simulationsverfahren für die Erstellung von rauen Oberflächen und von Reibwerten mit gewünschten Eigenschaften. In Unterkapitel 2.2 schließt sich die Beschreibung von Kontinua im Rahmen eines linear thermoelastischen Materialverhaltens an, die sich in eine Beschreibung unterschiedlicher Lösungsmethoden für die erhaltenen, partiellen Differentialgleichungen in Abschnitt 2.2.1 sowie ausgewählter numerischer Methoden in Abschnitt 2.2.2 gliedert. Ein Überblick zu reibungserregten Schwingungen wird in Unterkapitel 2.3 gegeben. Dafür werden die zugrundeliegenden Mechanismen anhand zweier Minimalmodelle erörtert. Hierzu zählt einerseits der negative Reibwertgradient in Abschnitt 2.3.1 und andererseits die nicht-konservative Kopplung in Abschnitt 2.3.2. Beide Minimalmodelle repräsentieren eine Vielzahl von technischen Systemen.

Die gelegten Grundlagen dienen anschließend in **Kapitel 3** für die thermomechanische Modellierung zweier gleitender Körper mit rauen Oberflächen. Dazu zählt zunächst eine grundsätzliche Beschreibung der getroffenen Annahmen, bevor die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen in Unterkapitel 3.1 für mechanische Oberflächenlasten in Abschnitt 3.1.1, für thermische Oberflächenlasten in Abschnitt 3.1.2 und schließlich für allgemeine Oberflächenlasten in Abschnitt 3.1.3 gelöst werden. Unterkapitel 3.2 beinhaltet neben einer Verifikation der hergeleiteten Lösungen für verschiedene mechanische und thermische Lastfälle durch analytische Vergleichslösungen aus der Literatur auch eine Diskussion der erhaltenen Ergebnisse und ausgewählter, weiterführender Aspekte. Unterkapitel 3.3 vervollständigt schlussendlich die Modellbildung und beschreibt den Simulationsablauf.

Die Ergebnisse der thermomechanischen Kontaktsimulationen werden in **Kapitel 4** für verschiedene Anwendungsfälle vorgestellt und im Sinne des offenen Forschungsbedarfs ausgewertet. Dazu gehören einerseits Kontaktkonfigurationen mit isotropen

Oberflächenstrukturen in Unterkapitel 4.1 und andererseits Kontaktkonfigurationen mit anisotropen Oberflächenstrukturen in Unterkapitel 4.2. Es schließt sich eine Zusammenfassung und ein Vergleich der Ergebnisse in Unterkapitel 4.3 an. Des Weiteren werden die Zusammenhänge zwischen charakteristischer Oberflächeneigenschaften und den erhaltenen kontaktmechanischen Größen herausgearbeitet, bevor die Erweiterung um temperaturabhängige Materialparameter untersucht wird.

Die erhaltenen Ergebnisse werden anschließend in **Kapitel 5** in den Kontext von reibungserregten Schwingungen gestellt. Dies gelingt durch eine Berücksichtigung des berechneten Reibwerts in den Minimalmodellen aus Unterkapitel 2.3, wobei sich die Diskussion in Unterkapitel 5.1 auf den deterministischen und in Unterkapitel 5.2 auf den stochastischen Reibwertanteil konzentriert. Für Letzteren erfolgt zunächst die im Sinne des offenen Forschungsbedarfs liegende Modellierung des stochastischen Reibwertanteils in Abschnitt 5.2.1, bevor die Auswirkungen auf reibungserregte Schwingungen in Abschnitt 5.2.2 herausgearbeitet werden. Beide Unterkapitel beinhalten eine Stabilitätsanalyse des stationären Betriebspunktes durch jeweils geeignete Methoden. Die Ergebnisse werden insbesondere vor dem Hintergrund bereits bekannter oder eventuell neuer Instabilitätsmechanismen bei technischen Systemen mit trockener Reibung ausgewertet.

Die Arbeit schließt in **Kapitel 6** mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick ab.

## 2 Grundlagen

Dieses Kapitel setzt die Grundlagen für die weiteren Ausführungen. Es knüpft dabei an den Stand der Forschung an und zeigt zunächst in Unterkapitel 2.1 verschiedene Modellierungs- und Simulationsmöglichkeiten für raue Oberflächen und Reibwerte auf. Die der Kontaktmechanik zugrundeliegenden Gleichungen und ausgewählte numerische Aspekte werden anschließend in Unterkapitel 2.2 diskutiert, bevor ein Überblick über reibungserregte Schwingungen in Unterkapitel 2.3 gegeben wird.

### 2.1 Modellierung und Simulation von rauen Oberflächen und Reibwerten

Sowohl raue Oberflächen als auch Reibwerte können als stochastischer Prozess  $X_s$  aufgefasst werden. Unter einem stochastischen Prozess versteht sich dabei eine in  $s$  stetige Folge zufälliger Vorgänge. Die unabhängigen Parameter  $s = [x, y, \dots, t]^T$  repräsentieren beispielsweise den Ort und/oder die Zeit. Da sowohl raue Oberflächen als auch Reibwerte zentraler Bestandteil dieser Arbeit sind, werden die wichtigsten Charakterisierungsmöglichkeiten von stochastischen Prozessen zunächst in Abschnitt 2.1.1 genauer erläutert. Anschließend findet eine entsprechende Einordnung von rauen Oberflächen in Abschnitt 2.1.2 sowie von Reibwerten in Abschnitt 2.1.3 statt, wobei mögliche Simulationsmethoden beschrieben werden.

#### 2.1.1 Stochastische Prozesse

Ausgangspunkt sei ein stochastischer Prozess  $X_s$  mit unabhängigem Parameter  $s$  und zugehöriger Verteilungsdichte  $p_X(x, s)$ . Die folgenden Ausführungen orientieren sich

an Natke [177] und lassen sich auf beliebig viele unabhängige Parameter  $s$  übertragen. Die Verteilungsdichte  $p_X(x, s)$  lässt sich durch die Momente  $i$ -ter Ordnung

$$m_X^{(i)}(s) = E[X_s^i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i p_X(x, s) dx$$

charakterisieren, das Moment nullter Ordnung  $m_X^{(0)} = 1$  legt die Normierung fest. Die zentralen Momente  $i$ -ter Ordnung sind mit

$$\mu_X^{(i)}(s) = E\left[\left(X_s - m_X^{(1)}(s)\right)^i\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_X^{(1)}(s)\right)^i p_X(x, s) dx$$

gegeben. Eine Aussage über den Zusammenhang zweier Zufallsvariablen  $X_{s_1}$  und  $X_{s_2}$  kann die Autokovarianzfunktion

$$\begin{aligned} K_{XX}(s_1, s_2) &= E\left[\left(X_{s_1} - m_X^{(1)}(s_1)\right)\left(X_{s_2} - m_X^{(1)}(s_2)\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_X^{(1)}(s_1)\right)\left(y - m_X^{(1)}(s_2)\right) p_X(x, y, s_1, s_2) dx dy \end{aligned}$$

mit der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte  $p_X(x, y, s_1, s_2)$  liefern.

Im Folgenden soll eine Beschränkung auf stationäre, mittelwertfreie Prozesse erfolgen, für die  $p_X(x, s) = p_X(x)$  und  $m_X^{(1)} = 0$  gilt. Für solche Prozesse geht die Autokovarianzfunktion  $K_{XX}(s_1, s_2)$  in die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\Delta s)$  über und lässt sich durch eine Normierung auf das zentrale Moment zweiter Ordnung  $\mu_X^{(2)}$  im Intervall  $[-1, 1]$  darstellen. Sie ist außerdem eine gerade Funktion und hängt nur noch von der Differenz  $\Delta s = |s_1 - s_2|$  ab.

Der Zusammenhang zwischen Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\Delta s)$  und zweiseitigem Leistungsdichtespektrum  $S_{XX}(\omega)$  ist durch das Wiener-Chintschin-Theorem und die kontinuierliche Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\{f(s)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-j\omega s} ds \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{j\omega s} d\omega \quad (2.2)$$

als

$$S_{XX}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{XX}\}(\omega)$$

gegeben. Der Zusammenhang zwischen zweiseitigem Leistungsdichtespektrum und dem zentralen Moment zweiter Ordnung lässt sich über

$$R_{XX}(\Delta s = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = \mu_X^{(2)} \quad (2.3)$$

herstellen. Da das zweiseitige Leistungsdichtespektrum eine gerade Funktion und für reelle Signale positiv ist, wird es auch oft als einseitiges Spektrum zusammengefasst. Bei ergodischen Prozessen ist die Kenntnis der Verteilungsdichte  $p_X(x)$  nicht mehr Voraussetzung für die Berechnung der Erwartungswerte, es reicht die Kenntnis einer einzelnen Realisierung  $x^{(j)}(s)$  aus

$$\begin{aligned} m_X^{(i)} &= \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_s} \int_{-T_s}^{+T_s} \left(x^{(j)}(s)\right)^i ds, \\ \mu_X^{(i)} &= \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_s} \int_{-T_s}^{+T_s} \left(x^{(j)}(s) - m_X^{(1)}\right)^i ds, \\ K_{XX}(\Delta s) &= \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_s} \int_{-T_s}^{+T_s} \left(x^{(j)}(s) - m_X^{(1)}\right) \left(x^{(j)}(s + \Delta s) - m_X^{(1)}\right) ds. \end{aligned}$$

Da in der Praxis nur eine begrenzte Anzahl an endlichen Realisierungen  $x^{(j)}(s) = x^{(j)}(m\Delta s)$  mit  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $\Delta s = T_s/M$  und  $j = 1, \dots, J$  zur Verfügung steht, müssen die eingeführten Kenngrößen geschätzt werden. Für die in dieser Arbeit relevanten Momente ergeben sich die erwartungstreuen und konsistenten Schätzungen für Mittelwert

$$\tilde{m}_X^{(1)} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x^{(j)}(m\Delta s),$$

Varianz

$$\tilde{\mu}_X^{(2)} = \frac{1}{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left(x^{(j)}(m\Delta s) - \tilde{m}_X^{(1)}\right)^2,$$

Schiefe

$$\tilde{\mu}_X^{(3)} = \frac{M}{(M-1)(M-2)} \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \left( x^{(j)}(m\Delta s) - \tilde{m}_X^{(1)} \right)^3}{\sqrt{\tilde{\mu}_X^{(2)}{}^3}}$$

und Kurtosis

$$\tilde{\mu}_X^{(4)} = \frac{M(M+1)}{(M-1)(M-2)(M-3)} \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \left( x^{(j)}(m\Delta s) - \tilde{m}_X^{(1)} \right)^4}{\left( \tilde{\mu}_X^{(2)} \right)^2} - 3 \frac{(M-1)^2}{(M-2)(M-3)} + 3.$$

Für die Autokorrelationsfunktion ergibt sich bei Voraussetzung eines periodischen Signals mit  $x^{(j)}(m\Delta s) = x^{(j)}((m+M)\Delta s)$  die für ergodische Prozesse erwartungstreue, allerdings nur für normalverteilte Prozesse konsistente Schätzung

$$\tilde{R}_{XX}^{(j)}(k\Delta s) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x^{(j)}(m\Delta s) x^{(j)}((m+k)\Delta s), \quad k = 0, \dots, M-1.$$

Das zweiseitige Leistungsdichtespektrum lässt sich zunächst als Produkt der komplex-konjugierten, finiten Fouriertransformierten einer Realisierung des Prozesses  $x^{(j)}(s)$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} \mathbb{E} \left[ |\mathcal{F}\{x^{(j)}\}(\omega, T_s)|^2 \right] = \lim_{T_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^{T_s} x^{(j)}(s) e^{-I\omega s} ds \right|^2 \right]$$

ausdrücken, woraus mit der diskreten Fouriertransformation

$$\mathcal{DF} \{f(m\Delta s)\}_{m=0}^{M-1}(\omega_k) = \Delta s \sum_{m=0}^{M-1} f(m\Delta s) e^{-I2\pi km/M}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.4)$$

$$\mathcal{DF}^{-1} \{f(\omega_k)\}_{k=0}^{M-1}(m\Delta s) = \frac{1}{M\Delta s} \sum_{k=0}^{M-1} f(\omega_k) e^{I2\pi mk/M}, \quad m = 0, \dots, M-1 \quad (2.5)$$

und  $\omega_k = 2\pi k/M$  die asymptotisch erwartungstreue, aber nicht konsistente Schätzung

$$\tilde{S}_{XX(j)}(\omega_k) = \frac{1}{M\Delta s} \left| \mathcal{DF} \{x^{(j)}\}(\omega_k) \right|^2$$

folgt. Sie wird auch Periodogramm genannt und steht über die diskrete Fouriertransformation in direktem Zusammenhang zur Autokorrelationsfunktion

$$\tilde{S}_{XX}^{(j)}(\omega_k) = \mathcal{DF}\{\tilde{R}_{XX}^{(j)}\}(\omega_k), \quad k = 0, \dots, M-1.$$

Da hierbei die Erwartungswertbildung entfällt, kann die Schätzung durch anschließende Mittelung über mehrere Realisierungen häufig noch verbessert werden.

## 2.1.2 Raue Oberflächen

Technische Oberflächen sind grundsätzlich gewissen Fertigungstoleranzen und damit Gestaltabweichungen unterworfen. Der Begriff Rauigkeit kann dabei durch die Norm *DIN 4760* als Gestaltabweichung dritter bis fünfter Ordnung identifiziert werden und lässt sich damit zwischen den Gestaltabweichungen Welligkeit und Gitteraufbau des Werkstoffs einordnen. Der Übergang zwischen den einzelnen Größenordnungen ist hierbei fließend und kann je nach Anwendungsfall unterschiedlich sein. Für die Vermessung von Oberflächen stehen mittlerweile zahlreiche berührende und berührungslose Messmethoden zur Verfügung [244]. Diese liefern eine diskrete Menge an  $x$ ,  $y$ , und  $z$ -Werten, wobei für eine möglichst umfassende Beschreibung der Gestaltabweichungen in der Regel mehrere Messungen mit unterschiedlichen Auflösungen kombiniert werden müssen [111, 202].

Werden die erhaltenen Höhenwerte  $z$  als Realisierung eines ortsabhängigen, stationären und ergodischen Prozesses  $Z_s$ ,  $s = [x, y]^T$  mit der Verteilungsdichtefunktion  $p_Z(z)$  aufgefasst, können für die Beschreibung des Höhenprofils die bereits in Abschnitt 2.1.1 aufgeführten Methoden herangezogen werden. In diesem Kontext haben sich im Rahmen von Linienmessungen die Bezeichnungen Mittelwert  $R_m = m_Z^{(1)}$ , Varianz  $R_q^2 = \mu_Z^{(2)}$  als Quadrat der Standardabweichung  $R_q$ , Schiefe  $R_{sk} = \mu_Z^{(3)}/R_q^3$  und Kurtosis  $R_{ku} = \mu_Z^{(4)}/R_q^4$  durch die Norm *DIN EN ISO 4287* etabliert, während die entsprechenden Bezeichnungen  $S_m, S_q, S_{sk}$  und  $S_{ku}$  im Rahmen von Flächenmessungen durch die Norm *DIN EN ISO 25178* verwendet werden. Die Literatur beinhaltet viele weitere Parameter, deren Aussagekraft jedoch in den meisten Fällen zumindest im Zusammenhang mit kontaktmechanischen Fragestellungen umstritten ist. Eine entsprechende Sensitivitätsanalyse wird unter anderen von Duo et al. [70] durchgeführt. Vermessungen von neuen Oberflächen weisen zudem häufig normalverteilte Oberflächenhöhen  $Z_s \sim \mathcal{N}(S_m, S_q^2)$  auf [88, 178], weshalb viele Forschungsbemühungen auf einer solchen Verteilung basieren. Jedoch unterliegen die Oberflächen, beispielsweise aufgrund von Verschleiß, ständigen Veränderungen. Die Modellierung mit normalverteilten Oberflächenhöhen erscheint daher für die praktische Anwendung selten gerechtfertigt. Darüber hinaus ist die Annahme eines stationären und ergodischen Pro-

zesses, wenn überhaupt, nur für stationäre Betriebsbedingungen und den eingelaufenen Zustand möglich. Eine Auflistung von typischen Kennwerten technischer Oberflächen, die aufgrund verschiedener Fertigungsverfahren resultieren, lässt sich bei Gomeringer et al. [84] finden.

Neben den charakteristischen Kenngrößen der Verteilungsdichte liefern Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\Delta x, \Delta y)$  oder Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}(\omega_x, \omega_y)$  weitere Informationen über die Eigenschaften der Oberflächen. Dabei hat sich mittlerweile die in Abbildung 2.1 gezeigte Parametrisierung des Leistungsdichtespektrums für den isotropen Fall in der Form

$$S_{ZZ}(\boldsymbol{\omega}) = S_0 \begin{cases} 0 & \text{für } \|\boldsymbol{\omega}\| < \omega_l, \\ \omega_r^{-2(1+H)} & \text{für } \omega_l \leq \|\boldsymbol{\omega}\| \leq \omega_r, \\ \|\boldsymbol{\omega}\|^{-2(1+H)} & \text{für } \omega_r < \|\boldsymbol{\omega}\| \leq \omega_s, \\ 0 & \text{für } \omega_s < \|\boldsymbol{\omega}\| \end{cases} \quad (2.6)$$

etabliert [111, 202]. Diese beinhaltet neben den Kreisfrequenzen  $\|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$  und dem Hurst-Exponenten  $H = 3 - D_f$  als Funktion der fraktalen Dimension  $D_f$  auch die Konstante  $S_0$ , die eine beliebige Normierung der Standardabweichung  $S_q$  gemäß Gleichung (2.3) zulässt. Eine entsprechende Verallgemeinerung auf den anisotropen Fall mit  $\|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{\psi_x^2 \omega_x^2 + \psi_y^2 \omega_y^2}$ ,  $\psi_x \neq \psi_y$  oder beliebigen weiteren Parametrisierungen des Leistungsdichtespektrums ist leicht möglich. Bei Vorgabe eines Gitters sind die in Gleichung (2.6) enthaltenen Kreisfrequenzen bereits durch die Diskretisierung vorgegeben. Des Weiteren lassen Vermessungen von technischen Oberflächen die Eingrenzung des Hurst-Exponenten auf den Bereich  $H \approx 0.8 \pm 0.1$  zu [201, 202].

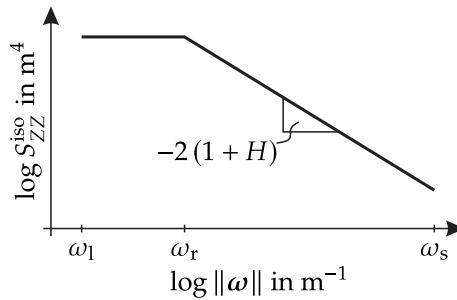


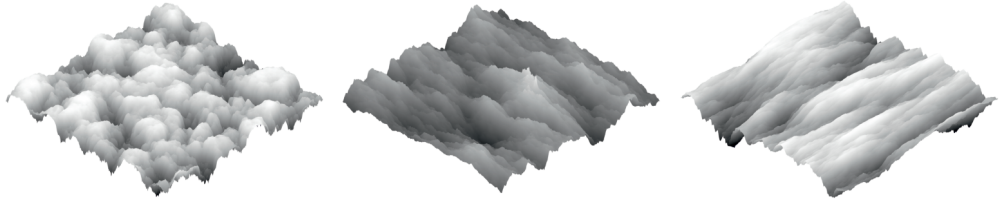
Abbildung 2.1: Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}^{\text{iso}}(\boldsymbol{\omega})$  gemäß Gleichung (2.6)

Für kontaktmechanische Simulationen ist es wegen der zeit- und materialaufwendigen sowie skalenübergreifenden Vermessungen von Oberflächen sinnvoll, auf künstlich





(a)  $S_{ZZ}(\omega)$  aus Gleichung (2.6) mit  $\omega_r = 80\pi \text{ mm}^{-1}$  (b)  $S_{ZZ}(\omega)$  aus Gleichung (2.6) mit  $\omega_r = 8\pi \text{ mm}^{-1}$  (c)  $S_{ZZ}(\omega)$  aus Gleichung (2.6) mit  $\omega_r = 0.8\pi \text{ mm}^{-1}$



(d)  $S_{ZZ}(\omega)$  aus Gleichung (2.6) mit  $\omega_r = 8\pi \text{ mm}^{-1}$  und  $S_{sk} = -0.7$ ,  $S_{ku} = 3$  (e)  $S_{ZZ}(\omega)$  aus Gleichung (2.6) mit  $\omega_r = 8\pi \text{ mm}^{-1}$ ,  $\psi_x = 1$ ,  $\psi_y = 3$  (f)  $S_{ZZ}(\omega)$  aus Gleichung (2.6) mit  $\omega_r = 8\pi \text{ mm}^{-1}$ ,  $\psi_x = 5$ ,  $\psi_y = 1$  und  $S_{sk} = -0.7$ ,  $S_{ku} = 3$

**Abbildung 2.2:** Verschiedene Realisierungen  $z^{(j)}(x, y)$ ,  $j = 1, \dots, 6$  rauer Oberflächen der Länge  $L_x = L_y = 1 \text{ mm}$  mit Hurst-Exponent  $H = 0.8$  – wenn nicht anderweitig angegeben gilt  $Z_s \sim \mathcal{N}(0, S_q^2)$

erzeugte Oberflächen mit möglichst gleichen Eigenschaften zurückzugreifen. Für diesen Zweck existiert mittlerweile eine ganze Reihe verschiedener Verfahren für die Erzeugung rauer Oberflächen [3, 194]. Welche Methode letztendlich verwendet wird, hängt von den spezifischen Anforderungen ab. Das für diese Arbeit verwendete Simulationsprogramm baut auf den Veröffentlichungen von Schreiber und Schmitz [222] sowie Perez und Almquist [198] auf. Die Vorgehensweise erlaubt die Erzeugung rauer Oberflächen bei gleichzeitiger Vorgabe des Leistungsdichtespektrums  $S_{ZZ}(\omega)$  und der Verteilungsdichte  $p_Z(z)$ . Beide Größen können auch aus bereits durchgeführten Vermessungen von Oberflächen stammen und lassen damit eine direkte Verknüpfung mit Experimenten zu. Verschiedene Realisierungen  $z^{(j)}(x, y)$ ,  $j = 1, \dots, 6$  von rauen Oberflächen, die mit dieser Simulationsvorschrift für unterschiedliche Leistungsdichtespektren  $S_{ZZ}(\omega)$  und Verteilungsdichten  $p_Z(z)$  erstellt wurden, sind in den Abbildungen 2.2(a)-(f) gezeigt.

Für den in Abbildung 2.3 skizzierten Simulationsablauf wird eine bereits mit der geforderten Verteilungsdichte  $p_Z(z)$  vorliegende Menge an Höhenwerten  $z_{pZ}$  der Dimension  $M \times N$  durch das Programm iterativ so lange umsortiert, bis ebenfalls das gewünschte Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}(\omega)$  erreicht wird. Dies gelingt aufgrund der noch offenen Freiheitsgrade der Phasenverschiebungen. In der Regel wird das

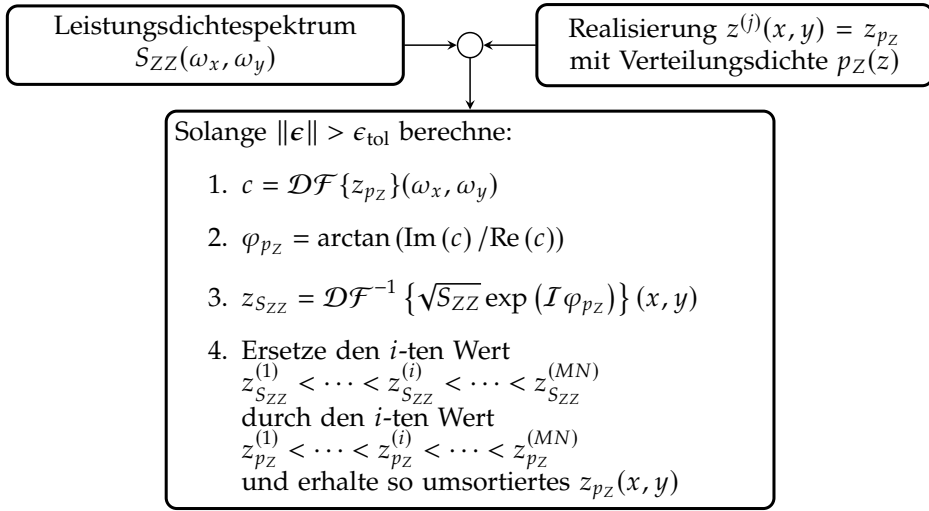


Abbildung 2.3: Simulationsablauf für die Erzeugung stationärer, ergodischer Oberflächen oder Reibwerte

geforderte Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}(\omega)$  wegen der begrenzten Anzahl an Werten nicht exakt erreicht, weshalb die Iterationen bei Erreichen einer vordefinierten Toleranz  $\epsilon_{\text{tol}}$  abgebrochen werden. Die so umsortierten Höhenwerte  $z_{p_z}$  besitzen die geforderte Verteilungsdichte  $p_z(z)$  und erfüllen näherungsweise das Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}(\omega)$ , während die so erhaltenen Höhenwerte  $z_{S_{ZZ}}$  dem vorgegebenen Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}(\omega)$  folgen.

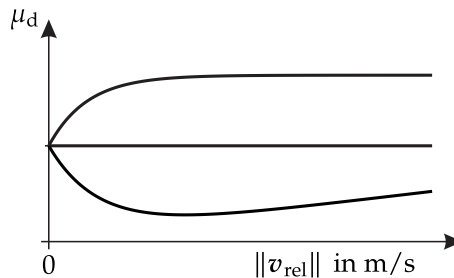
Da das Erzeugen der Oberflächen kein aktiver Teil der Kontaktsimulation selbst ist, lässt sich die benötigte Rechenzeit dem Pre-Processing zuordnen und fällt nicht weiter ins Gewicht. Auf handelsüblichen Rechnern ermöglicht die Verwendung der schnellen Fouriertransformation zudem eine Erzeugung der Oberflächen in anwendungsrelevanten Gittergrößen von bis zu  $2048 \times 2048$  Elementen innerhalb weniger Minuten.

### 2.1.3 Reibwerte

Viele Messungen in der Literatur deuten auf den stochastischen Charakter von trockenen Reibwerten hin [26, 66, 78, 133, 137, 228–230, 265], sodass deren Modellierung als stochastischer Prozess  $\mathcal{M}_s$  mit zugehöriger Verteilungsdichte  $p_{\mathcal{M}}(\mu, s)$  gerechtfertigt erscheint. Ganz analog zu den Vermessungen von Oberflächen wird auch hier nur eine beschränkte Anzahl an endlichen Realisierungen  $\mu^{(j)}(s)$ ,  $j = 1, \dots, J$  erhalten, weshalb für eine Charakterisierung der erhaltenen Reibwertverläufe mithilfe der Methoden aus Abschnitt 2.1.1 zwangsläufig auf eine Vermessung während stationärer Betriebspunkte zu achten ist. Dadurch lässt sich auch eine generelle Einschränkung auf stationäre, ergodische Prozesse  $\mathcal{M}_s$  mit zugehöriger Verteilungsdichte  $p_{\mathcal{M}}(\mu)$  motivieren. Für

dynamische Simulationen bietet sich dementsprechend zunächst die Darstellung des Reibwerts  $\mathcal{M}_s = \mu_d + \mu_s$  als Summe eines deterministischen Anteils  $\mu_d = E[\mathcal{M}_s]$  und eines mittelwertfreien stochastischen Anteils  $\mu_s = \mathcal{M}_s - E[\mathcal{M}_s]$  an.

Der deterministische Anteil  $\mu_d$  lässt sich beispielsweise mit einer der in der Literatur zahlreich vorhandenen Parametrisierungen der Stribeck-Kurve für trockene Kontakte identifizieren [197]. Für eine explizite Parameteridentifikation sind in der Praxis zeit- und materialaufwendige Messungen nötig, da die Stribeck-Kurve einen stationären, aber von der Relativgeschwindigkeit abhängigen Grenzfall darstellt. Der stationäre Wert des Reibwerts wird dabei erst nach einer gewissen Zeitspanne beziehungsweise einem bestimmten Gleitweg erreicht. Abbildung 2.4 zeigt verschiedene qualitative Verläufe der Stribeck-Kurve als Funktion der relativen Gleitgeschwindigkeit. Viele Forschungsbemühungen, insbesondere im Kontext von reibungserregten Schwingungen, beruhen auf geschwindigkeitsabhängigen Verläufen der Reibkraft, wobei zumeist der Gradient der Kurve von entscheidender Bedeutung ist. Eine Berechnung des Kurvenverlaufs ohne Messungen ist daher nicht nur aus Kostengründen, sondern auch im Sinne einer gezielten konstruktiven Beeinflussung des Reibwerts erstrebenswert. Aufgrund der vorhandenen Parametrisierungen bereiten analytische und simulative Behandlungen eines solchen funktionellen Zusammenhangs jedoch keine Probleme.



**Abbildung 2.4:** Drei verschiedene qualitative Verläufe des deterministischen Reibwertanteils  $\mu_d$

Anders sieht es mit einer simulativen Umsetzung des stochastischen Anteils  $\mu_s$  aus. Dieser kann zwar prinzipiell analog zu der in Abbildung 2.3 gezeigten und in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Vorgehensweise für die Erzeugung von Oberflächenhöhen erstellt werden, hierbei fallen jedoch zwei Probleme auf. Zum einen liefert die Literatur im Gegensatz zu rauen Oberflächen wenig bis gar keine Informationen über die Verteilungsdichte  $p_M(\mu)$  oder das Leistungsdichtespektrum  $S_{MM}(\omega)$  von Reibwerten. Eine Quantifizierung dieser beiden Größen – sei es durch die Berechnung eines stochastischen Reibwerts oder die Auswertung von Messungen – ist daher notwendig. Zum anderen fällt die Rechenzeit für die Erzeugung des Reibwerts aufgrund der wesentlich häufigeren Aufrufe bei Parameterstudien deutlich mehr ins Gewicht. Es

erscheint vorteilhafter, den Reibwert mit möglichst geringem Mehraufwand während der eigentlichen Simulation nebenher zu erzeugen. Diese Vorgehensweise ist bei deterministischen Reibwerten bereits weit verbreitet (vgl. dynamische Reibgesetze in Unterkapitel 1.2) [197]. Die bereits von Dahl [62] vorgeschlagene Modellierung  $\mu_s = \Xi_s$  als normalverteiltes, weißes Rauschen ist jedoch aufgrund der unbeschränkten Varianz des weißen Rauschens unphysikalisch. Als physikalisch sinnvollere Modellierung bietet sich in diesem Zusammenhang aber ein farbiges Rauschen an. Entsprechende Simulationsansätze lassen sich vielfach in Verbindung mit Fahrbananregungen in der Fahrzeugdynamik finden [129, 209]. Hierbei wird das gewünschte Leistungsdichtespektrum oder die gewünschte Autokorrelationsfunktion zunächst approximiert und anschließend durch Filtergleichungen umgesetzt. Diese lassen sich im mathematischen Sinne als System linearer, stochastischer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{X}_s = AX_s + B\Xi_s, \quad X_{s_0} = X_0 \quad (2.7)$$

mit Driftterm  $AX_s$  und Diffusionsterm  $B$  darstellen, wobei die Anregung  $\Xi_s$  ein normalverteiltes, weißes Rauschen darstellt. Aufgrund der Linearität von Gleichung (2.7) ist deren stationäre Lösung ebenfalls normalverteilt. Für nicht-normalverteilte Prozesse kann im Allgemeinen auf nichtlineare Drift- und Diffusionsterme

$$\dot{X}_s = A(X_s) + B(X_s)\Xi_s, \quad X_{s_0} = X_0 \quad (2.8)$$

zurückgegriffen werden. Entsprechende Beispiele lassen sich in [57, 130, 227, 266] finden. Grundsätzlich erfolgt für die Simulation aber in allen Fällen zunächst die formale Überführung in eine Interpretation nach Itô

$$dX_s = \left( A(X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial B(X_s)}{\partial X} B(X_s) \right) ds + B(X_s) dW_s, \quad X_{s_0} = X_0, \quad (2.9)$$

wobei das Wiener Inkrement  $dW_s = \Xi_s ds$  den Zusammenhang zum weißen Rauschen  $\Xi_s$  abbildet. Die Interpretation nach Itô hat unter anderem den Vorteil, dass

$$E \left[ \int_{s_1}^{s_2} B(X_s) dW_s \right] = 0$$

gilt. Es sei ergänzt, dass sich für das stochastische Integral in Gleichung (2.8) bei einer anderen Wahl der Stützstellen ebenso die Interpretation nach Stratonovich finden lässt. Durch entsprechende Korrekturterme können die beiden Interpretationen jedoch immer ineinander überführen werden [11]. Da die Lösung der stochastischen Differentialgleichung ebenfalls ein stochastischer Prozess ist, lässt sich dieser wiederum

mit den Methoden aus Abschnitt 2.1.1 charakterisieren. Wird der stochastische Anteil des Reibwerts beispielsweise durch  $\mu_s = X_{1s}$  identifiziert, lässt sich die zugehörige Randverteilungsdichte  $p_M(\mu)$  durch

$$p_M(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx_2 \dots dx_n$$

aus der Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p_X(x)$  berechnen. Drift- und Diffusionsterm in Gleichung (2.9) werden im späteren Verlauf der Arbeit so gewählt, dass sowohl die gewünschte Verteilungsdichte  $p_M(\mu)$  als auch das gewünschte Leistungsdichtespektrum  $S_{MM}(\omega)$  erhalten werden. Die dafür notwendigen Informationen liefern thermomechanische Kontaktsimulationen. An dieser Stelle ist noch einmal hervorgehoben, dass die stochastische Differentialgleichung (2.8) dafür eine stationäre Lösung besitzen muss.

Für das Lösen der Gleichung (2.9) bieten sich neben den numerischen Integrationsverfahren für stochastische Differentialgleichungen auch die Evolutionsgleichungen für die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion in der Form von partiellen Differentialgleichungen an. Für eine ausführlichere Diskussion von numerischen Aspekten wird auf die Literatur verwiesen [14, 128, 134]. Da für dynamische Simulationen aber in der Regel immer nur einzelne Realisierungen  $\mu^{(j)}(s)$  von Interesse sind, kann das eigentliche Differentialgleichungssystem des physikalischen Systems um das Gleichungssystem (2.9) erweitert und die Realisierung  $\mu^{(j)}(s)$  während der eigentlichen Simulation erzeugt werden. Dafür wurde ein Runge-Kutta-Verfahren für stochastische Differentialgleichungen implementiert [218, 219]. Dieses hat unter anderem den Vorteil, dass es im Vergleich zum oft verwendeten Euler-Maruyama-Verfahren auch eine höhere Konvergenzordnung bezüglich des deterministischen Integrals besitzt.

## 2.2 Thermoelastischer Festkörper

Für die mathematische Beschreibung von Kontinua stehen fünf universell geltende Bilanzgleichungen (Masse-, Impuls- und Drehimpulsbilanz sowie erster und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) zur Verfügung, aus denen sich mithilfe von Materialgleichungen partielle Differentialgleichungen für die Verschiebungs- und Temperaturfelder herleiten lassen. In Abschnitt 2.2.1 werden die so erhaltenen Gleichungen für hyperelastische Materialien und lineare Thermoelastizität erläutert, bevor ausgewählte numerische Aspekte in Abschnitt 2.2.2 folgen.

## 2.2.1 Lineare Thermoelastizität

Ein homogener, isotroper Festkörper kann im Rahmen der linearen Thermoelastizität durch die beiden linearen, gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{r} = (u \ v \ w)^\top$  mit  $\nabla \mathbf{r} \ll 1$  und für das Temperaturfeld  $\theta = T - T_0$  als Differenz der absoluten Temperatur  $T$  zu einer Referenztemperatur  $T_0$  mit  $|\theta/T_0| \ll 1$

$$\mu \Delta \mathbf{r} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) + \rho \mathbf{f} = (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla \theta + \rho D_t \mathbf{v}, \quad (2.10)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{r} = \rho c_d \frac{\partial \theta}{\partial t} - Q \quad (2.11)$$

beschrieben werden [33]. Für deren grundlegende Herleitung aus den thermomechanischen Bilanz- und Materialgleichungen wird auf entsprechende Literatur verwiesen [33, 184, 185, 193, 239], an der sich auch die folgenden Ausführungen orientieren. Die Bilanzgleichungen werden durch die Materialgleichungen von Hooke, Fourier und Gibbs

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{r} + (\nabla \mathbf{r})^\top) + (\lambda \nabla \cdot \mathbf{r} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta) \mathbf{I}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \nabla \theta, \quad (2.13)$$

$$s = \frac{c_d}{T_0} \theta + \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{r} \quad (2.14)$$

ergänzt, die den Zusammenhang des Temperatur- und Verschiebungsfeldes zum Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , den Zusammenhang des Temperaturfeldes zum Wärmestrom  $\mathbf{q}$  und den Zusammenhang des Temperatur- und Verschiebungsfeldes zur spezifischen Entropie  $s$  festlegen. Die Gleichungen (2.10)-(2.14) beinhalten neben der zeitlichen Änderung des räumlichen Geschwindigkeitsfeldes  $D_t \mathbf{v}$ , der äußeren Volumenkraftdichte  $\mathbf{f}$  und Wärmestromdichte  $Q$  auch die beiden Lamé-Konstanten  $\mu = E/2(1 + \nu)$  und  $\lambda = E\nu/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$  als Funktionen des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$ , den Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  sowie den Wärmeleitfähigkeitstensor  $\mathbf{K}$ , die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_d$  bei konstanter Deformation. Durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}|_{t=t_0} = \mathbf{r}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}|_{t=t_0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \theta|_{t=t_0} = \theta_0(\mathbf{x})$$

und einer dazu verträglichen, disjunkten Vorgabe von Verschiebungen und Spannungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} &\in \Gamma_r, t \geq t_0 \\ \boldsymbol{\sigma}^\top \mathbf{n} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} &\in \Gamma_\sigma, t \geq t_0 \end{aligned}$$

auf dem Randgebiet  $\Gamma = \Gamma_r \cup \Gamma_\sigma$  sowie von Temperatur und Wärmestrom

$$\begin{aligned} \theta &= \tilde{\theta}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} &\in \Gamma_\theta, t \geq t_0 \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \tilde{q}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} &\in \Gamma_q, t \geq t_0 \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= h(\theta(\mathbf{x}, t) - \tilde{\theta}(\mathbf{x}, t)), & \mathbf{x} &\in \Gamma_{\theta,q}, t \geq t_0 \end{aligned}$$

auf dem Randgebiet  $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_{\theta,q}$  wird das Anfangsrandwertproblem vervollständigt.  $\mathbf{n}$  bezeichnet hierbei den nach außen gerichteten Normalenvektor.

Bei quasi-statischen Lastfällen werden die ursprünglich hyperbolischen Verschiebungsdifferentialgleichungen (2.10) durch Vernachlässigung der Trägheitsterme  $\rho D_t v$  zu elliptischen Verschiebungsdifferentialgleichungen, der parabolische Charakter der Wärmeleitungsgleichung bleibt erhalten. Für den isotropen Körper lassen sich der Wärmeleitfähigkeitstensor  $\mathbf{K} = KI$  und die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa = K/\rho c_d$  als Funktionen von Wärmeleitfähigkeit  $K$ , Dichte  $\rho$  und spezifischer Wärmekapazität  $c_d$  bei konstanter Deformation einführen. Es ergeben sich die vollständig gekoppelten Verschiebungs- und Wärmeleitungsdifferentialgleichungen

$$\mu \Delta \mathbf{r} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) + \rho \mathbf{f} = (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla \theta, \quad (2.15)$$

$$\kappa \Delta \theta - \frac{(\lambda + 2\mu)\varepsilon}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{Q}{\rho c_d} \quad (2.16)$$

mit dem dimensionslosen Kopplungsparameter

$$\varepsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0 \kappa}{(\lambda + 2\mu)K}.$$

Das Auflösen von Gleichung (2.14) nach  $\theta$  und das Einsetzen in die homogenen Gleichungen (2.15) und (2.16)

$$\mu \Delta \mathbf{r} + (\lambda + \mu + (\lambda + 2\mu)\varepsilon) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha T_0}{c_d} \nabla s, \quad (2.17)$$

$$\left( \Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) s = 0 \quad (2.18)$$

lässt erkennen, dass die spezifische Entropie  $s$  für quasi-statische Problemstellungen einer Diffusionsgleichung genügt. Im Falle der einseitigen Kopplung mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ , also der Annahme, dass die zeitliche Änderung des Verschiebungsfeldes keinen Einfluss auf die Temperatur hat, vereinfacht sich der Lösungsprozess im Allgemeinen deutlich. In diesem Fall kann die Wärmeleitungsgleichung unabhängig gelöst werden und das erhaltene Temperaturfeld wirkt als Anregung für die Verschiebungsdifferentialgleichung

chungen. Eine mögliche Begründung für die Vernachlässigung des Kopplungsterms liefert beispielsweise die Umformung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (2.16) zu

$$\kappa \Delta \theta = \left( 1 + \frac{(\lambda + 2\mu)\varepsilon}{(3\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

woraus mit den Annahmen  $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{r} / \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} \ll \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\varepsilon}$  und  $\varepsilon \ll 1$  eine Vernachlässigung des Terms motiviert werden kann.

Das Lösen der quasi-statischen Wärmeleitungs- und Verschiebungsdifferentialgleichungen, ob nun in der Form (2.15) und (2.16) oder (2.17) und (2.18), ist trotz der Linearität oft nur numerisch möglich. Für die Gleichungen wurden verschiedene Lösungsmethoden entwickelt, von denen im Folgenden die Helmholtz-Zerlegung und die verallgemeinerten Galerkin- und Neuber-Papkovich-Potentiale vorgestellt werden sollen. Die Ausführungen orientieren sich an [30, 183–185, 193, 242].

- **Helmholtz-Zerlegung**

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{lam}} + \mathbf{r}_{\text{sol}}$  wird als Summe seines lamellaren (wirbelfreien) Anteils  $\mathbf{r}_{\text{lam}}$  und solenoidalen (quellenfreien) Anteils  $\mathbf{r}_{\text{sol}}$  dargestellt. Dabei kann der lamellare Anteil  $\mathbf{r}_{\text{lam}} = \nabla \Phi$  als Gradient eines Skalars  $\Phi$  und der solenoidale Anteil  $\mathbf{r}_{\text{sol}} = \nabla \times \Psi$  als Rotation eines Vektorfeldes  $\Psi$  mit  $\nabla \cdot \Psi = 0$  dargestellt werden. Aufgrund  $\nabla \times \mathbf{r}_{\text{lam}} = \mathbf{0}$  und  $\nabla \cdot \mathbf{r}_{\text{sol}} = 0$  lässt sich das Verschiebungsfeld  $\mathbf{r}$  mit  $\nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r}_{\text{sol}}$  und  $\nabla \cdot \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r}_{\text{lam}}$  in die beiden Anteile aufteilen, sodass sich die Bestimmungsgleichungen  $\nabla \cdot \mathbf{r} = \Delta \Phi$  und  $\nabla \times \mathbf{r} = -\Delta \Psi$  ergeben. Das Einsetzen von

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, & \nabla \cdot \Psi &= 0, \\ \mathbf{f} &= \nabla \phi + \nabla \times \psi, & \nabla \cdot \psi &= 0 \end{aligned}$$

in die Gleichungen (2.15) und (2.16) ergibt

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{\lambda + 2\mu} \theta &= -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \phi, \\ \Delta \Psi &= -\frac{\rho}{\mu} \psi, \\ \left( \Delta - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta - \frac{(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi &= -\frac{Q}{K}. \end{aligned}$$



Durch das zusätzliche Eliminieren der Temperatur  $\theta$  können die Bestimmungsgleichungen für  $\Phi$  und  $\psi$

$$\left(\Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \Phi = - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{(\lambda + 2\mu)} \frac{Q}{K} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \left(\Delta - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi, \quad (2.19)$$

$$\Delta \Psi = - \frac{\rho}{\mu} \psi \quad (2.20)$$

und durch das zusätzliche Eliminieren von  $\Phi$  können die Bestimmungsgleichungen für  $\theta$  und  $\psi$

$$\left(\Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \theta = - \frac{Q}{K} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}{K} \frac{\partial}{\partial t} \phi, \quad (2.21)$$

$$\Delta \Psi = - \frac{\rho}{\mu} \psi \quad (2.22)$$

erhalten werden. Bei gegebenen äußeren Anregungen  $Q$  und  $f$  lassen sich für diese Gleichungen zunächst partikuläre Lösungen finden, die Überlagerung einer homogenen Lösung sorgt für die Einhaltung der Randbedingungen. Ein Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist problemlos möglich.

- **Verallgemeinerte Galerkin-Potentiale**

Das Verschiebungsfeld  $r$  und das Temperaturfeld  $\theta$  werden als Kombination eines Vektorpotentials  $F$  und eines skalaren Potentials  $F_0$

$$\begin{aligned} r &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta F - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(\Delta - \frac{\lambda + \mu + (\lambda + 2\mu)\varepsilon}{(\lambda + \mu)\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla(\nabla \cdot F) \\ &\quad + \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha \nabla F_0, \\ \theta &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(\nabla \cdot F) + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \Delta F_0 \end{aligned}$$

dargestellt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichungen (2.15) und (2.16) ergeben sich die vier unabhängigen Gleichungen

$$\left(\Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \Delta F + \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} f = 0, \quad (2.23)$$

$$\left(\Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta F_0 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{Q}{K} = 0 \quad (2.24)$$

für die vier abhängigen Variablen, deren Unabhängigkeit durch die höheren Anforderungen an die Differenzierbarkeit erlangt wird. Die erhaltenen Gleichungen

gen eignen sich insbesondere für die Berechnung von partikulären Lösungen. Die anschließende Überlagerung einer homogenen Lösung sorgt für die Einhaltung der Randbedingungen. Der Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist zwar möglich, hinterlässt aber ein vergleichsweise umfangreiches System an Differentialgleichungen.

- **Verallgemeinerte Neuber-Papkovich-Potentiale**

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{r}$  wird als Kombination eines Vektorpotentials  $\boldsymbol{\varphi}$  und eines skalaren Potentials  $\phi_0$

$$\mathbf{r} = \nabla(\phi_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \chi \boldsymbol{\varphi}, \quad \Delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

dargestellt, wobei  $\chi = \frac{2(\lambda+2\mu)(1+\varepsilon)}{\lambda+\mu+(\lambda+2\mu)\varepsilon}$  und  $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^\top$  gilt. Durch Einsetzen des Ansatzes in die homogenen Gleichungen (2.15) und (2.16) ergibt sich

$$\left( \Delta - \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \phi_0 = 0 \quad (2.26)$$

und die Bestimmungsgleichung für die Temperatur

$$\theta = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \Delta \phi_0 + \frac{2(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)\chi}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}.$$

Sind die partikulären Lösungen bereits bekannt (beispielsweise durch das Lösen der Gleichungen (2.23) und (2.24)) oder keine äußeren Anregungen vorhanden, lassen sich mit diesem Ansatz oft kompakte Lösungen finden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass der Ansatz (2.25) von Biot [30] ursprünglich für die Gleichungen (2.17) und (2.18) verwendet wurde. Durch den Zusammenhang zwischen dem Temperatur- und Verschiebungsfeld zur spezifischen Entropie gemäß Gleichung (2.14) lässt sich die hier gezeigte Umformulierung aber einfach vornehmen (eine entsprechende Herleitung folgt in Unterkapitel 3.1). Der Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist in beiden Fällen problemlos möglich. Die Neuber-Papkovich-Potentiale sind insbesondere im Bereich der vollständig entkoppelten Gleichungen und rein elastischen Lastfällen weit verbreitet.

Der direkte Vergleich zwischen der Helmholtz-Zerlegung und den verallgemeinerten Galerkin- und Neuber-Papkovich-Potentialen offenbart zwar eine große Ähnlichkeit der Gleichungen (2.19), (2.24) und (2.26), die Interpretation der einzelnen Größen  $\Phi$ ,  $F_0$  und  $\phi_0$  ist allerdings unterschiedlich. In welcher Darstellung die Gleichungen letztendlich gelöst werden, hängt von der spezifischen Anwendung ab.

## 2.2.2 Ausgewählte numerische Methoden

Für das Lösen von partiellen Differentialgleichungen steht heutzutage eine Vielzahl von numerischen Methoden zur Verfügung. Erfahrungswerte in der Literatur sprechen im Rahmen von kontaktmechanischen Simulationen gegen die Finite-Elemente-Methode und für die Rand-Elemente-Methode [175], weshalb Letztere auch in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung kommt. Im Folgenden werden dafür als wichtig erachtete, ausgewählte numerische Methoden aufgeführt und anhand eines Beispiels diskutiert. Ausgangspunkt sei zunächst eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{D}\{r\} = p$$

mit dem linearen Differentialoperator  $\mathcal{D}\{.\}$ , der Inhomogenität  $p$  und der gesuchten Lösung  $r$ . Gelingt das Lösen dieser partiellen Differentialgleichung unter Einhaltung der Rand- und Anfangsbedingungen für eine punktförmige Anregung

$$\mathcal{D}\{g\} = \delta(s - \check{s}), \quad (2.27)$$

so kann die erhaltene Fundamentallösung  $g$  anschließend für eine beliebige Anregung  $p$  durch die kommutative Faltungsoperation

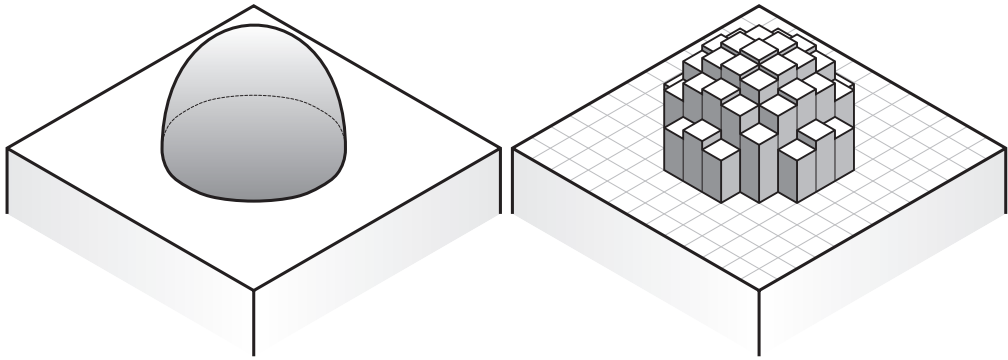
$$r(s) = (g * p)(s) = \int_{\mathbb{R}^n} g(s - \check{s})p(\check{s})d\check{s} \quad (2.28)$$

zur gesuchten Lösung  $r$  superpositioniert werden. Etwaige Singularitäten von  $g(s - \check{s})$  werden im Sinne des Cauchy-Hauptwerts behandelt. Das Faltungsprodukt lässt sich alternativ als Multiplikation im Bildbereich darstellen, wodurch mit anschließender Rücktransformation

$$r(s) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{g\}(\omega)\mathcal{F}\{p\}(\omega)\} \quad (2.29)$$

dasselbe Ergebnis erhalten wird. Hierbei kennzeichnet  $\mathcal{F}\{.\}$  die im Allgemeinen mehrdimensionale, kontinuierliche Fouriertransformation aus Gleichung (2.1) und  $\omega$  bezeichnet die Kreisfrequenzen. Die Transformation von Gleichung (2.27) in den Bildbereich bietet zudem häufig einen zweckmäßigen Zugang für das direkte Berechnen der Fundamentallösung  $\mathcal{F}\{g\}(\omega)$ .

Die Vor- und Nachteile der Faltungsoperation im Kontext der Kontaktmechanik werden beispielhaft anhand der Oberflächenverschiebung eines Halbraums aufgrund eines beliebigen Druckfeldes  $p(s)$ ,  $s = [x, y]^T$  auf der Oberfläche erörtert. Eine prinzipielle Darstellung des Problems findet sich in Abbildung 2.5(a). Die Verschiebungen an der Oberfläche ergeben sich bei gegebenem Druckfeld  $p(s)$  aus den Gleichungen (2.28) oder



(a) Halbraum mit kontinuierlicher Oberflächenlast (b) Halbraum mit diskretisierter Oberflächenlast

Abbildung 2.5: Halbraum mit kontinuierlicher und diskretisierter Oberflächenbelastung

(2.29) entweder mit der bereits 1881 von Boussinesq [119] hergeleiteten Fundamentallösung im Realraum

$$g(\mathbf{s}) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.30)$$

oder alternativ mit der von Ju & Farris [120] und Stanley & Kato [231] berechneten Fundamentallösung im Bildbereich

$$\mathcal{F}\{g\}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}. \quad (2.31)$$

Beide Fundamentallösungen sind im Ursprung singulär und für beliebige  $p(\mathbf{s})$  muss in der Regel auf eine numerische Auswertung der Gleichungen (2.28) und (2.29) zurückgegriffen werden. Durch die damit verbundene Diskretisierung der beteiligten Größen treten zwei Probleme auf. Zum einen werden durch den Übergang zur diskreten Fouriertransformation auch ursprünglich nicht-periodische Signale als periodisch interpretiert. Eine zunächst denkbare, gemischte Auswertung [144]

$$w[\mathbf{s}] = \mathcal{DF}^{-1} \{ \mathcal{F}\{g\}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{DF}\{p\}[\boldsymbol{\omega}] \}$$

mit der diskreten Fouriertransformation  $\mathcal{DF}\{.\}$  ist bei genauerer Betrachtung aufgrund des Aliasing-Phänomens in Zusammenhang mit möglicherweise nicht-glaten Druckfeldern mit numerischen Fehlern verbunden. Zwar führt eine feinere Diskretisierung im Frequenzbereich zu einer Verbesserung der Genauigkeit, aber eben auch zu überproportional größeren Rechenzeiten sowie Speicherplatzbedarf und ist daher

kontraproduktiv. Zum anderen macht die Singularität der Fundamentallösung bei der numerischen Auswertung Probleme. Insbesondere das in der Literatur oft verwendete, aber mathematisch unsaubere Ersetzen der Singularität  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{F}\{g\}(\omega)$  entweder durch unmittelbare Nachbarwerte oder den lokalen Mittelwert von  $\mathcal{F}\{g\}(\omega)$  in einem Bereich um den Ursprung [150] soll hier vermieden werden.

Stattdessen wird das ursprünglich kontinuierliche Druckfeld  $p(s)$  aus Abbildung 2.5(a) durch ein äquidistantes Gitter mit den Elementlängen  $\Delta x \times \Delta y$  als stückweise konstante Funktion  $P[s]$  (siehe Abbildung 2.5(b)) diskretisiert. Zusätzlich wird die Fundamentallösung  $g(s)$  durch eine Einflussfunktion  $G(s)$  ersetzt. Die Einflussfunktion  $G(s)$  kann durch entsprechende analytische Auswertung von Gleichung (2.28) mit (2.30) und

$$p(s) = \begin{cases} p_{\square} & \text{für } -\Delta x/2 \leq x \leq \Delta x/2 \wedge -\Delta y/2 \leq y \leq \Delta y/2, \\ 0 & \end{cases}$$

erhalten werden. Dies liefert den bereits im Jahre 1929 von Love [154] hergeleiteten Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{w|_{z=0}}{p_{\square}} &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \phi \Big|_{\substack{X=x+\Delta x/2 \\ Y=y+\Delta y/2}} + \phi \Big|_{\substack{X=x-\Delta x/2 \\ Y=y-\Delta y/2}} - \phi \Big|_{\substack{X=x-\Delta x/2 \\ Y=y+\Delta y/2}} - \phi \Big|_{\substack{X=x+\Delta x/2 \\ Y=y-\Delta y/2}} \right) \\ &= G(s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

mit

$$\phi = X \ln \left( Y + \sqrt{X^2 + Y^2} \right) + Y \ln \left( X + \sqrt{X^2 + Y^2} \right).$$

Die Einflussfunktion  $G(s)$  enthält keine Singularitäten mehr und das ursprünglich kontinuierliche Faltungsintegral in Gleichung (2.28) kann für das nun stückweise konstante Druckfeld  $P[s]$  als diskrete, lineare Faltung

$$w[s] = (G * P)[s] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G[m\Delta x, n\Delta y] P[(\xi - m)\Delta x, (\eta - n)\Delta y] \quad (2.33)$$

formuliert werden. Die beschriebene Vorgehensweise verursacht lediglich einen Fehler durch die Diskretisierung des Druckfeldes.

Gelingt die Umformulierung der diskreten, linearen Faltung in Gleichung (2.33) zu einer diskreten, zyklischen Faltung

$$\begin{aligned}
 w[\mathbf{s}] &= (G * P)_{\text{mod}}[\mathbf{s}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G[(\xi - m)_{\text{mod } M} \Delta x, (\eta - n)_{\text{mod } N} \Delta y] P[m \Delta x, n \Delta y] \\
 &= \mathcal{DF}^{-1} \{ \mathcal{DF} \{G\}[\omega] \mathcal{DF} \{P\}[\omega] \}, \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

lässt sich das Faltungsprodukt erneut als Multiplikation im Bildbereich ausführen. Hierbei bezeichnet mod die Modulo-Operation. Für die numerische Umsetzung der diskreten Fouriertransformation kann die schnelle Fouriertransformation genutzt werden. Des Weiteren lässt sich das Faltungsprodukt in Gleichung (2.34) auch als Multiplikation einer im Allgemeinen vollbesetzten Matrix  $G$  und einem Vektor  $P$

$$\mathbf{w} = G\mathbf{P} \tag{2.35}$$

darstellen. Für Vektoren  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{P}$  der Dimension  $M$  ergibt sich für  $G$  die Dimension  $M^2 \times M^2$ . Durch Ausnutzen der diskreten, zyklischen Faltung im Bildbereich lässt sich also darüber hinaus das speicherplatzintensive Assemblieren der Matrix  $G$  vermeiden.

Da die diskrete Fouriertransformation auf periodischen Funktionen basiert, wird die Auswertung von Gleichung (2.33) durch Gleichung (2.34) im Folgenden für ursprünglich periodische und ursprünglich nicht-periodische Belastungen  $P[\mathbf{s}]$  anhand eines eindimensionalen Beispiels mit  $P[\mathbf{s}] = [P_0, \dots, P_{M-1}]^T$  und  $G[\mathbf{s}] = [G_0, \dots, G_{M-1}]^T$  sowie einer geraden Anzahl  $M$  von äquidistanten Elementen mit der Länge  $\Delta s$  diskutiert. Die Vorgehensweise lässt sich ohne Einschränkung auch auf mehrere Dimensionen erweitern.

- $P[\mathbf{s}]$  periodisch,  $G[\mathbf{s}]$  periodisch  
 Eine Auswertung von Gleichung (2.34) liefert

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 & G_{M-1} & \dots & G_1 \\ G_1 & G_0 & \dots & G_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M-1} & G_{M-2} & \dots & G_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{M-1} \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

wobei sich die Einträge von  $G[\mathbf{s}]$  mit  $G_0 = G(0)$ ,  $G_1 = G(\Delta s)$ ,  $\dots$ ,  $G_{M/2} = G(M\Delta s/2)$  und mit  $G_{M-1} = G(-\Delta s)$ ,  $G_{M-2} = G(-2\Delta s)$ ,  $\dots$ ,  $G_{M/2+1} = G((-M/2+1)\Delta s)$  identifizieren lassen.

Das Beispiel in Gleichung (2.36) zeigt, dass lediglich die Belastungen von direkt angrenzenden Zellen berücksichtigt werden. Es wird daher mit einer Modifikation

der Einflussfunktionen gearbeitet. Dafür wird zunächst ein Einflussradius  $r_{oi}$  definiert, innerhalb dessen der Einfluss eines belasteten Elements berücksichtigt wird. Dies ist in Abbildung 2.6 schematisch dargestellt. Für beliebig große Einflussradien  $r_{oi}$  (vgl. Abbildung 2.6(b)) müssen die überlappenden Anteile der Einflussfunktion aufsummiert werden und  $G(s)$  in Gleichung (2.34) wird durch  $G_{\text{eff}}(s)$  ersetzt. Eine Beschreibung der Auswirkungen eines solchen Einflussradius erfolgt in Abschnitt 3.2.4.

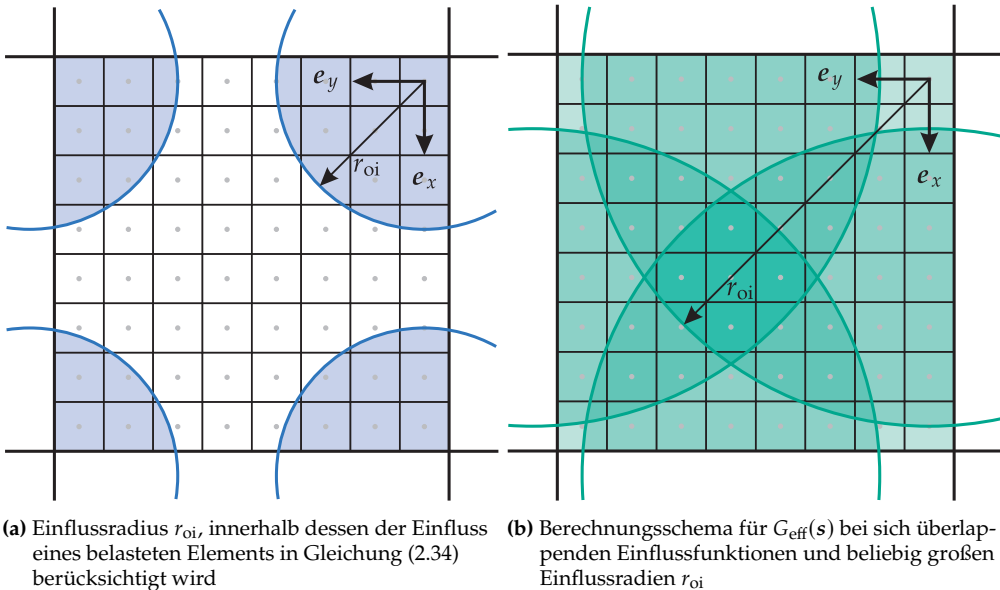
- $P[s]$  nicht-periodisch,  $G[s]$  periodisch  
Das Rechengebiet wird zunächst künstlich verdoppelt, eine anschließende Auswertung von Gleichung (2.34) liefert

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{2M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 & G_{2M-1} & \dots & G_1 \\ G_1 & G_0 & \dots & G_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{2M-1} & G_{2M-2} & \dots & G_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{2M-1} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Für  $P_M = \dots = P_{2M-1} = 0$ ,  $G_0 = G(0)$ ,  $G_1 = G(\Delta s)$ ,  $\dots$ ,  $G_M = G(M\Delta s)$  und  $G_{2M-1} = G(-\Delta s)$ ,  $G_{2M-2} = G(-2\Delta s)$ ,  $\dots$ ,  $G_{M+1} = G((-M+1)\Delta s)$  sind  $w_0$  bis  $w_{M-1}$  mit dem Ergebnis aus Gleichung (2.33) identisch,  $w_M$  bis  $w_{2M-1}$  können nach erfolgter Berechnung verworfen werden. Der beschriebene Algorithmus wird bereits vielfach im Rahmen der Kontaktmechanik angewendet [144, 150, 252]. Auch für ursprünglich nicht-periodische Funktionen  $P[s]$  wird in dieser Arbeit mit einem Einflussradius gearbeitet. Für eine korrekte Abbildung des Lastfalls ist hierbei ein Einflussradius  $r_{oi}$  entsprechend der Größe des Kontaktgebietes zu wählen.

- $P[s]$  nicht-periodisch,  $G[s]$  nicht-periodisch  
Das Rechengebiet wird zunächst ebenfalls künstlich verdoppelt, eine Auswertung von Gleichung (2.34) führt erneut auf Gleichung (2.37). Es werden gleichermaßen  $P_M = \dots = P_{2M-1} = 0$  gewählt, jedoch diesmal  $G_M = \dots = G_{2M-1} = 0$  und  $G_0 = G(0)$ ,  $G_1 = G(\Delta s)$ ,  $\dots$ ,  $G_{M-1} = G((M-1)\Delta s)$ . Durch diese Vorgehensweise wird ein einseitiger Einfluss in positive  $s$ -Richtung erreicht. Auch hier können  $w_M$  bis  $w_{2M-1}$  nach erfolgter Berechnung verworfen werden. Diese Variante wird in der späteren Arbeit für thermische Probleme von Bedeutung sein, bei denen lediglich vergangene Wärmeeinträge einen Einfluss auf das aktuelle Temperaturfeld haben dürfen (Kausalität).

Durch die Nutzung der schnellen Fouriertransformation für die zyklische Faltung in Gleichung (2.34) steht sowohl für periodische als auch nicht-periodische Lastfälle ein effektives numerisches Werkzeug für die Auswertung von Gleichung (2.33) zur



**Abbildung 2.6:** Darstellung periodisch fortgesetzter Oberfläche der Dimension  $M \times N$  mit verschiedenen Einflussradien  $r_{oi}$

Verfügung. Die einzigen Fehlerquellen stellen in allen drei Anwendungsfällen die Diskretisierung und die Begrenzung durch den Einflussradius  $r_{oi}$  dar. Voraussetzung ist, dass die Einflussfunktion  $G(s)$  bekannt ist. Die aufgezeigte Vorgehensweise motiviert deshalb unter anderem auch die Herleitung von Einflussfunktionen. In der Literatur sind diese jedoch lediglich für den rein mechanischen [72], für den rein thermischen [114] oder für den stationären [138, 161] Lastfall aufgelistet. Einflussfunktionen für die voll-gekoppelten, quasi-statischen thermoelastischen Gleichungen und transiente Lastfälle wurden nicht gefunden. Es lässt sich an dieser Stelle entsprechend ein weiteres Ziel der Arbeit festhalten:

- Die Herleitung von Einflussfunktionen für rechteckige, thermische und mechanische Lasten auf der Oberfläche eines Halbraums für die Berechnung des Temperaturfeldes und der thermoelastischen Verschiebungen sowie Spannungen für die voll-gekoppelten, quasi-statischen Gleichungen des thermoelastischen Festkörpers.

Die bisherigen Ausführungen beschränken sich auf das Vorliegen bekannter Anregungen  $p(s)$ , womit sich  $w(s)$  durch die diskrete, zyklische Faltung im Bildbereich und die Verwendung der schnellen Fouriertransformation zeit- und speicherplatzeffizient sowohl für periodische als auch für nicht-periodische Anregungen  $p(s)$  berechnen lässt. Ist jedoch  $w(s)$  bekannt und  $p(s)$  von Interesse, müssen inverse Lösungsmethoden



angewendet werden. Es wird sich im späteren Verlauf der Arbeit zeigen, dass die Matrix  $\mathbf{G}$  aus Gleichung (2.35) symmetrisch und positiv definit ist und Nebenbedingungen in der Form  $0 \leq p \leq H$  vorliegen. In der Literatur lassen sich bereits zwei Verfahren finden, die den erwähnten Anforderungen entsprechen und die bereits für kontaktmechanische Problemstellungen angewendet werden [5, 155, 206, 207, 253].

Eine Möglichkeit stellt das Successive-Over-Relaxation-Verfahren (SOR-Verfahren) aus der Familie der Splitting-Verfahren dar, das in Kombination mit einem Moving-Grid Ansatz [217] speicherplatzeffizient implementiert werden kann. Eine Konvergenz ist bei bekannter Kontaktfläche für positiv definite und symmetrische Matrizen für den Überrelaxationsparameter  $\omega \in (0, 2)$  nachgewiesen. Insbesondere geht das Verfahren für  $\omega = 1$  in das Gauß-Seidel-Verfahren über. Eine Verwendung der diskreten, zyklischen Faltung im Bildbereich lässt das Verfahren jedoch nicht zu.

Ebenfalls möglich ist das Conjugate-Gradient-Verfahren (CG-Verfahren), für dessen Anwendung eine positiv definite und symmetrische Matrix Voraussetzung ist. Es konvergiert bei bekannter Kontaktfläche mit monoton fallendem Fehler auf die exakte Lösung. Das Verfahren ist auch deshalb interessant, weil es eine Verwendung der diskreten, zyklischen Faltung im Bildbereich zulässt. Die Implementierung ist jedoch vergleichsweise aufwendiger, da zwei Iterationsschleifen notwendig sind.

Beide Verfahren können warm gestartet werden. Im Kontext von kontaktmechanischen Problemstellungen und großen Gleichungssystemen konvergiert das SOR-Verfahren im Vergleich zum CG-Verfahren deutlich langsamer [5, 204, 207, 253]. Eine Implementierung beider Verfahren hat diese Erfahrungswerte bestätigt, weshalb in Abbildung 2.7 lediglich ein möglicher Simulationsablauf des CG-Verfahrens für das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  mit positiv definiten, symmetrischer Matrix  $\mathbf{A}$  und der Nebenbedingung  $0 \leq x \leq H$  aufgeführt ist. Für eine Implementierung des SOR-Verfahrens wird auf Tian und Bhushan [238] verwiesen.

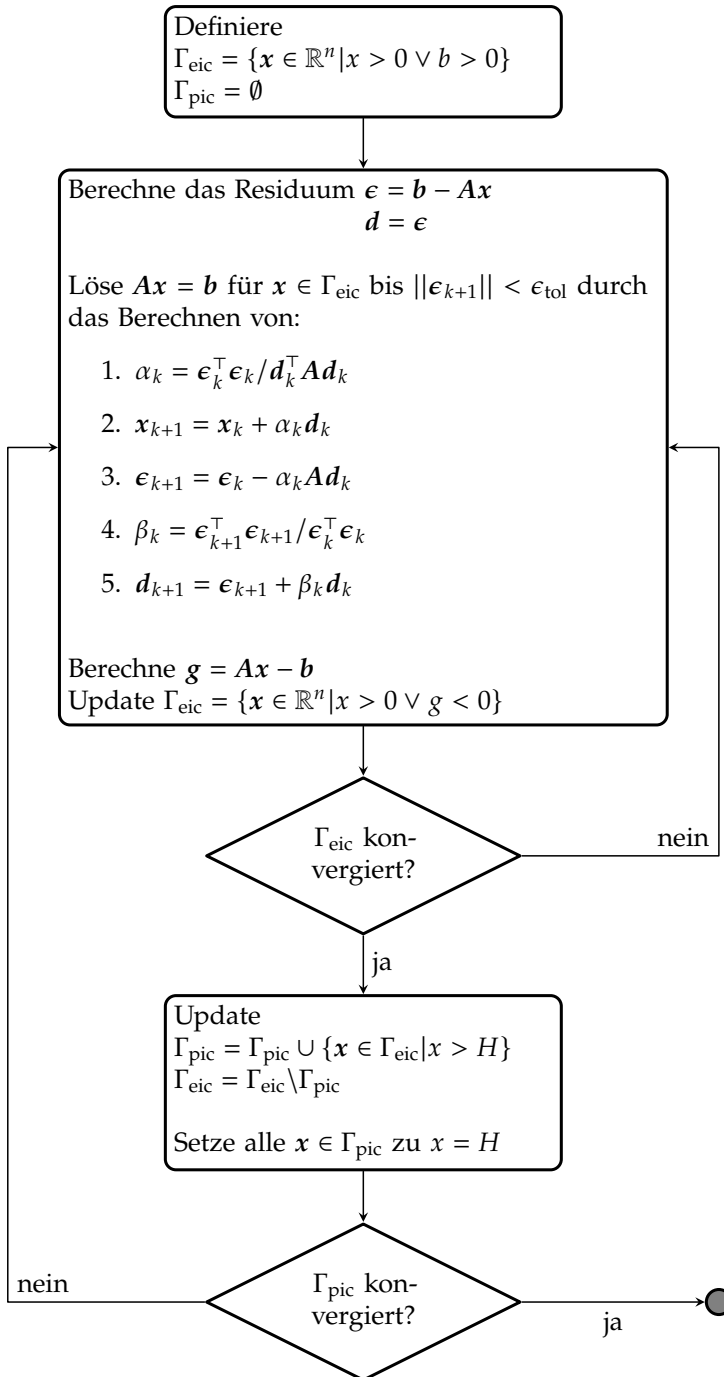


Abbildung 2.7: CG-Verfahren für das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit Nebenbedingung  $0 \leq x \leq H$

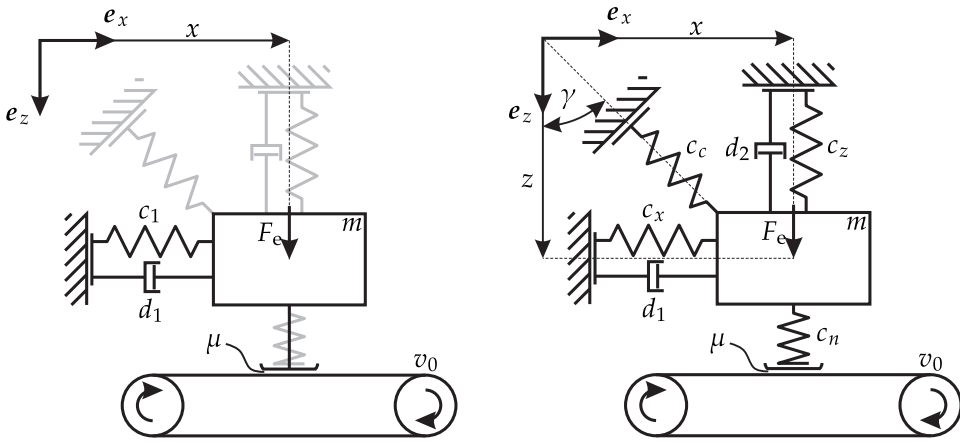
## 2.3 Minimalmodelle für reibungserregte Schwingungen

Die grundlegenden Ursachen für reibungserregte Schwingungen werden anhand zweier Minimalmodelle, die stellvertretend für eine Vielzahl von technischen Systemen mit trockener Reibung stehen, beschrieben. Unter reibungserregten Schwingungen werden zumeist unerwünschte Schwingungsphänomene verstanden, die auf trockene Reibung zurückgeführt werden können, ohne dass dabei weitere äußere Anregungsmechanismen nötig sind. Sie werden deshalb zu den selbsterregten Schwingungen gezählt. Die Schwingungen werden häufig eher als Komfort- oder Qualitätsproblem anstatt als Ursache für ein Funktionsversagen wahrgenommen. Als Beispiele können neben dem Quietschen bei Bremsen oder Straßenbahnen auch das Rupfen bei Kupplungen oder das Knarzen von Türen genannt werden. Eine entsprechende Vielzahl an Forschungsbemühungen lässt sich in der Literatur finden [45, 73, 99–102, 110, 126, 135, 136, 248]. Im Rahmen dieser Veröffentlichungen haben sich insbesondere zwei grundlegende Mechanismen herauskristallisiert, die im Folgenden anhand zweier Minimalmodelle diskutiert werden. Die in den Abbildungen 2.8(a) und (b) gezeigten Minimalmodelle sind dabei eine abstrakte Vereinfachung der tatsächlichen technischen Systeme und erklären jeweils nur mögliche Wege des Stabilitätsverlustes eines stationären Systemzustands. Die beiden Instabilitätsmechanismen basieren auf einem negativen Reibwertgradienten und einer nicht-konservativen Kopplung, wobei Ersterer in Abschnitt 2.3.1 und Letzterer in Abschnitt 2.3.2 diskutiert wird.

### 2.3.1 Negativer Reibwertgradient

Das für die Erklärung niederfrequenter reibungserregter Phänomene wie beispielsweise dem Kupplungsrupfen geeignete Minimalmodell aus Abbildung 2.8(a) besteht aus einem Körper mit der Masse  $m$ , der durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten  $c_1$  und einen linearen Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten  $d_1$  mit der Umgebung verbunden ist. Der Körper reibt auf einem Band, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt. Die Reibkraft zwischen Band und Körper wird durch ein Coulomb'sches Reibgesetz modelliert, der zugehörige Reibwert  $\mu(v_{\text{rel}})$  sei entsprechend den Erläuterungen in Abschnitt 2.1.3 eine Funktion der relativen Gleitgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}} = v_0 - \dot{x}$ . Es ergibt sich die Differentialgleichung für den Zustand des Gleitens

$$m\ddot{x} + d_1\dot{x} + c_1x = \mu(v_{\text{rel}})F_e \text{sign}(v_{\text{rel}}),$$



(a) Minimalmodell für negativen Reibwertgradienten (b) Minimalmodell für nicht-konservative Kopplung

Abbildung 2.8: Minimalmodelle für reibungserregte Schwingungen

die sich um die Ruhelage  $x_0 = \mu(v_0)F_e/c_1$  linearisieren lässt

$$m\Delta\ddot{x} + \left( d_1 + \frac{\partial\mu}{\partial v_{\text{rel}}} \Big|_{v_{\text{rel}}=v_0} F_e \right) \Delta\dot{x} + c_1\Delta x = 0. \quad (2.38)$$

Aus Gleichung (2.38) lässt sich bereits erkennen, dass der effektive Dämpfungsbeiwert  $d_{\text{eff}} = d_1 + \frac{\partial\mu}{\partial v_{\text{rel}}} \Big|_{v_{\text{rel}}=v_0} F_e$  für Reibwertgradienten  $\frac{\partial\mu}{\partial v_{\text{rel}}} \Big|_{v_{\text{rel}}=v_0} < 0$  negativ werden kann. Eine Auswertung der Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{d_{\text{eff}}}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{d_{\text{eff}}^2}{m^2} - \frac{c_1}{m}}$$

verdeutlicht das Auftreten positiver Realteile für  $d_{\text{eff}} < 0$ . Die so entstehenden reibungserregten Oszillationen äußern sich meistens als Stick-Slip Schwingungen. Für positive Reibwertgradienten wird die Ruhelage des Systems aufgrund von  $d_{\text{eff}} > d_1$  stabilisiert, was die Bedeutung einer gezielten konstruktiven Beeinflussung des Verlaufs der Stribeck-Kurve betont.

Die Erweiterung des Modells um einen stochastischen Anteil des Reibwerts im Sinne eines weißen Rauschens wird für einen einzelnen Freiheitsgrad von Gaus [83] und für mehrere Freiheitsgrade von Feng [79] untersucht.

## 2.3.2 Nicht-konservative Kopplung

Das, für die Erklärung hochfrequenter reibungserregter Phänomene, wie beispielsweise dem Quietschen, geeignete Minimalmodell aus Abbildung 2.8(b), besteht aus einem Körper mit der Masse  $m$ , der durch drei lineare Federn mit den Federkonstanten  $c_x$ ,  $c_z$ ,  $c_c$  und zwei linearen Dämpfern mit den Dämpfungskonstanten  $d_1$ ,  $d_2$  mit der Umgebung verbunden ist. Durch die mit dem Winkel  $\gamma \in [0, \pi/2]$  angebrachte lineare Feder mit der Federkonstanten  $c_c$  werden die beiden Freiheitsgrade des Körpers gekoppelt. Der Körper reibt an einer durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten  $c_n$  verbundenen Kontaktstelle auf einem Band, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt. Die lineare Feder mit der Federkonstanten  $c_n$  kann als Kontaktsteifigkeit interpretiert werden [102]. Die Reibkraft wird durch ein Coulomb'sches Reibgesetz modelliert, der zugehörige Reibwert  $\mu$  sei konstant. Mit den Beziehungen  $c_{11} = c_x + c_c \sin^2 \gamma > 0$ ,  $c_{12} = c_{21} = c_c \sin \gamma \cos \gamma \geq 0$  und  $c_{22} = c_z + c_c \cos^2 \gamma > 0$  ergeben sich die gekoppelten Differentialgleichungen für den Zustand des Gleitens

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu c_n z \operatorname{sign}(v_0 - \dot{x}) \\ F_e \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

die sich um die Ruhelage

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu c_n - c_{12}}{c_{11}(c_{22} + c_n) + c_{21}(\mu c_n - c_{12})} \\ \frac{c_{11}}{c_{11}(c_{22} + c_n) + c_{21}(\mu c_n - c_{12})} \end{pmatrix} F_e$$

linearisieren lassen

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} - \mu c_n \\ c_{21} & c_{22} + c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Aus dem charakteristischen Polynom  $P(\lambda) = \sum_{i=0}^4 A_i \lambda^i$  mit

$$A_0(\mu) = \frac{c_{11}(c_{22} + c_n) + c_{21}(\mu c_n - c_{12})}{m^2},$$

$$A_1 = \frac{d_1(c_{22} + c_n) + d_2 c_{11}}{m^2} > 0,$$

$$A_2 = \frac{(c_{11} + c_{22} + c_n)m + d_1 d_2}{m^2} > 0,$$

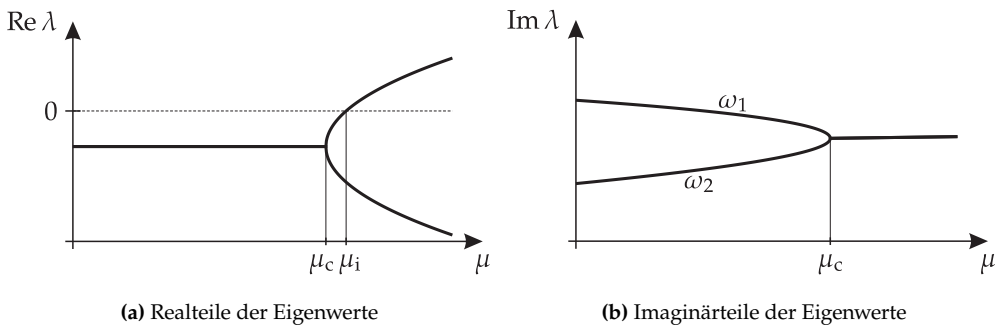
$$A_3 = \frac{d_1 + d_2}{m} > 0,$$

$$A_4 = 1 > 0$$

lässt sich nach Liénard und Chipart die Stabilitätsbedingung

$$0 < A_0(\mu) < \frac{A_1}{A_3} \left( A_2 - \frac{A_1}{A_3} \right)$$

ableiten, wobei  $A_2 - \frac{A_1}{A_3} > 0$  gilt. Der Stabilitätsverlust entsteht bei Vorzeichenwechsel des dritten Hauptminors der Hurwitz-Matrix bei  $A_0(\mu_i) = \frac{A_1}{A_3} \left( A_2 - \frac{A_1}{A_3} \right)$ . Daraus lässt sich ableiten, dass der Realteil eines komplex konjugierten Eigenwertpaars das Vorzeichen wechselt und eine oszillatorische Instabilität entsteht.



**Abbildung 2.9:** Verlauf von Real- und Imaginärteilen der Eigenwerte für den Sonderfall gleichmäßiger Dämpfung  $d_1 = d_2$

Für die Anschauung sind die Realteile der komplex konjugierten Eigenwerte für den Sonderfall  $d_1 = d_2$  als Funktion des Reibwerts  $\mu$  in Abbildung 2.9(a) dargestellt. Sie fallen bis zu einem kritischen Reibwert  $\mu_c$  zusammen, spalten sich dort auf und kurz darauf wechselt einer der beiden Realteile bei  $\mu_i$  das Vorzeichen, die Ruhelage wird instabil. Bei dem kritischen Reibwert  $\mu_c$  fallen die in Abbildung 2.9(b) gezeigten Eigenkreisfrequenzen zusammen. Dadurch hat sich für diese Art der Instabilität auch die Bezeichnung Modenkopplung verbreitet. Es sei jedoch ergänzend angemerkt, dass eine Kopplung im strengen Sinne bereits für  $d_1 \neq d_2$  nicht mehr vorliegt, es findet lediglich eine Annäherung der Realteile und Eigenkreisfrequenzen statt. Des Weiteren lässt sich durch den Koeffizienten  $A_0(\mu)$  ableiten, dass sowohl die Kopplung der beiden Freiheitsgrade durch die Feder mit der Federkonstanten  $c_c$  als auch der einseitige Einfluss der Reibkraft für das Auftreten dieses Instabilitätsmechanismus notwendig ist [101, 102].

Für den Übertrag auf reale Anwendungen werden die beiden Freiheitsgrade des Minimalmodells mit zwei Eigenmoden des tatsächlichen technischen Systems identifiziert. Der beschriebene Mechanismus lässt sich entsprechend auch in Experimenten beobachten [213, 249]. Die Änderungen des Reibwerts werden häufig auf verschleißbedingte

Veränderungen des Kontakts zurückgeführt. Durch den direkten Vergleich der Minimalmodelle aus Abbildung 2.8 wird außerdem ersichtlich, dass der negative Gradient eines geschwindigkeitsabhängigen Reibwerts grundsätzlich auch beim Minimalmodell der nicht-konservativen Kopplung zu einer Instabilität führen kann.

Eine Erweiterung des Modells durch einen stochastischen Anteil des Reibwerts konnte nicht in der Literatur gefunden werden.



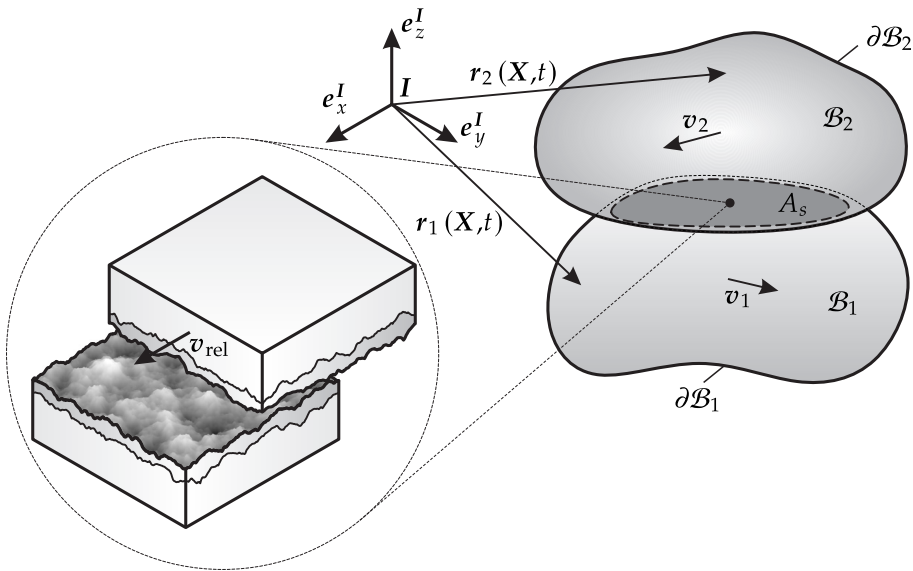


### 3 Thermomechanischer Kontakt gleitender Körper mit rauen Oberflächen

Ein repräsentativer Ausschnitt der scheinbaren Kontaktfläche  $A_s$  zweier gleitender Körper  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  mit rauen Oberflächen wird in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Bewegung der beiden Körper ist dabei wie üblich gewissen Randbedingungen auf den Randgebieten  $\partial\mathcal{B}_1$  und  $\partial\mathcal{B}_2$  unterworfen, die durch die Interaktion mit der Umgebung verursacht werden. Die genauen geometrischen und zeitlichen Eigenschaften der tatsächlichen Kontaktfläche  $A_r$  sind im Allgemeinen zunächst unbekannt. Im Folgenden seien nur diejenigen Konfigurationen von Interesse, bei denen eine relative Verschiebung der beiden Körper stattfindet, sodass ein gleitender Kontakt mit der relativen Geschwindigkeit  $v_{\text{rel}}(X, t)$  vorliegt. Die Modellbildung konzentriert sich auf die Kontaktzone. Das Ziel ist eine möglichst vollumfängliche Abbildung aller Einflüsse der dargestellten Konfiguration auf den Reibwert des trockenen Kontaktes, die für die Beantwortung der offenen Forschungsfragen notwendig sind.

Werden die in Kontakt stehenden Körper in der Nähe ihrer Kontaktzone genauer untersucht, können dort im Vergleich zum Grundwerkstoff chemisch und mechanisch veränderte Mikrostrukturen vorgefunden werden. Letztere lassen sich in plastisch verformte und gegebenenfalls verfestigte Bereiche sowie Bereiche mit veränderter Gefügestruktur unterteilen [61]. Die feinere Gefügestruktur wirkt sich in der Regel auf die mechanischen und thermischen Materialparameter wie beispielsweise Elastizitätsmodul und Wärmeleitfähigkeit aus, wodurch oberflächennahe Schichten andere Werkstoffeigenschaften besitzen als der Grundwerkstoff selbst. Dies ist in Abbildung 3.1 durch jeweils eine Randschicht angedeutet.

Für die Berechnung der plastischen Verformung inklusive Verfestigung stehen bereits gut entwickelte Methoden zur Verfügung [91, 113, 179, 180], deren zugrundeliegende Herleitung auf den Galerkin-Potentialen (vgl. Abschnitt 2.2.1) beruht [53]. Es soll daher auf die Abbildung dieses Effektes verzichtet werden, eine nachträgliche Einarbeitung kann jedoch erfolgen. Ebenso soll der Einfluss der veränderten Gefügestruktur in



**Abbildung 3.1:** Thermomechanischer Kontakt zweier gleitender Körper  $B_1$  und  $B_2$  mit rauen Oberflächen – ein repräsentativer Ausschnitt der scheinbaren Kontaktfläche  $A_s$  ist vergrößert dargestellt

der Nähe der Oberfläche vernachlässigt werden. Entsprechende Veröffentlichungen lassen sich ebenfalls in der Literatur finden [195, 196, 205, 216, 225, 226, 235, 254, 255, 261, 264]. Beide Körper werden in unmittelbarer Umgebung der Kontaktzone als homogene, isotrope Halbräume im Rahmen einer linearen, thermoelastischen Kontinuumsmechanik modelliert. Das Modell des Halbraums ist im Kontext der Kontaktmechanik weit verbreitet [175] und hat seine Anwendbarkeit insbesondere in experimentellen Validierungen unter Beweis gestellt [85, 91]. Dennoch sollen zunächst die notwendigen Annahmen für die Gültigkeit des Modellierungsansatzes aufgezeigt werden:

1. Es liegen kleine Verzerrungen und kleine Temperaturdifferenzen vor, sodass eine lineare Theorie angewandt werden kann.
2. Die Kontaktfläche ist im Vergleich zur Körpergeometrie und zum Krümmungsradius der unverformten Oberfläche klein, weswegen der Einfluss der Körpergeometrie und Körpertemperatur in unmittelbarer Nähe der Kontaktzone vernachlässigbar ist. Dies bedeutet, dass weder Körperform noch Art der Interaktion des Körpers mit der Umgebung die Kontaktzone beeinflussen und sich Spannungen und Temperaturgradienten auf die Kontaktregion konzentrieren beziehungsweise mit größer werdendem Abstand zur Kontaktzone abklingen.

3. Die beiden in Kontakt stehenden Körper sind rau, aber nominell glatt. Das heißt, dass die jeweilige Amplitude der Rauigkeit im Vergleich zur zugehörigen Wellenlänge klein ist.

In einem homogenen Halbraum können grundsätzlich drei verschiedenen Wellentypen mit unterschiedlichen Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten auftreten. Hierzu zählen Kompressionswellen  $v_K = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ , Scherwellen  $v_S = \sqrt{\mu/\rho}$  und Rayleighwellen  $v_R = \zeta v_S$ , wobei  $\zeta$  die Lösung von

$$(2 - \zeta^2)^4 = 16(1 - \zeta^2)(1 - \zeta^2 v_S^2 / v_K^2)$$

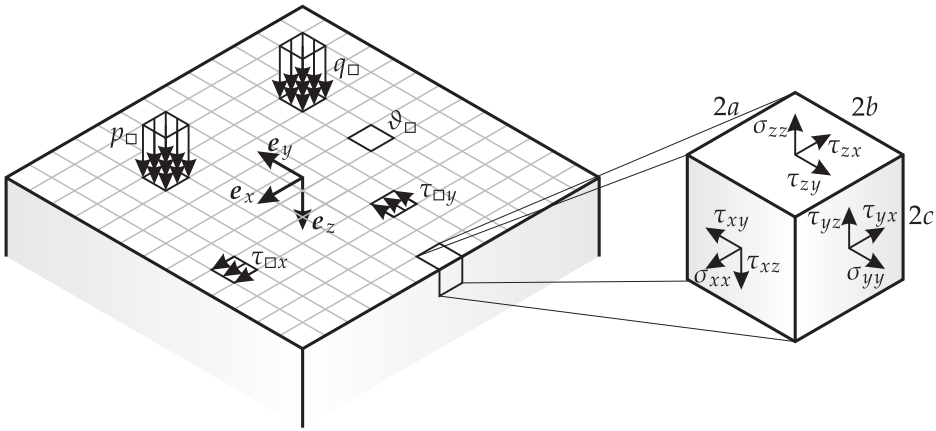
darstellt und generell  $v_R < v_S < v_K$  gilt [119].

Weitere Modellierungsannahmen werden wie folgt getroffen:

4. Das Schwerfeld wird vernachlässigt.
5. Wärme entsteht lediglich durch die Reibleistung, etwaige Wärmequellen aufgrund von chemischen Reaktionen werden vernachlässigt.
6. Die relative Gleitgeschwindigkeit  $\|v_{\text{rel}}\|$  der Körper ist im Vergleich zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Rayleighwellen  $v_R$  klein. Dies rechtfertigt die Annahme eines quasi-statischen Gleichgewichts und impliziert, dass sich die Oberflächenlasten nur langsam mit der Zeit ändern.

Unter diesen Voraussetzungen können die in Abschnitt 2.2.1 diskutierten quasi-statischen Gleichungen für den thermoelastischen Festkörper zur Beschreibung von Verschiebungs-, Spannungs- und Temperaturfeldern herangezogen werden. Das Aufbringen instantaner Lasten widerspricht dabei grundsätzlich der Annahme von quasi-statischen Lastfällen. Jedoch kann gezeigt werden, dass die resultierende Wellenfront schnell genug fortschreitet, sodass bereits nach sehr kurzer Zeit die quasi-statische Lösung im Kontaktgebiet gilt [192].

Die Oberflächenhöhen im Kontaktbereich sind entweder aus Messungen bekannt oder durch Simulationen entsprechend Abschnitt 2.1.2 generiert, wodurch eine diskrete Menge an  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Werten zur Verfügung steht. Die Länge und Breite der Oberflächenelemente sei dabei mit  $2a \times 2b$  äquidistant. Es erscheint daher auch aus der Sicht der verfügbaren Oberflächendaten analog zu den numerischen Argumenten aus Abschnitt 2.2.2 sinnvoll, die voll-gekoppelten und quasi-statischen Gleichungen für den thermoelastischen Festkörper zunächst für konstante mechanische oder thermische Lasten innerhalb des Gebietes  $-a \leq x \leq a$  und  $-b \leq y \leq b$  zu berechnen. Die erhaltenen Einflussfunktionen erlauben die Berechnung beliebig geformter und zeitabhängiger mechanischer oder thermischer Oberflächenbelastungen durch eine geeignete Superposition (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die Berechnung der Einflussfunktionen erfolgt



**Abbildung 3.2:** Ausschnitt eines Halbraums mit äquidistant diskretisierter Oberfläche sowie elementweise konstanten mechanischen und thermischen Oberflächenlasten – Druck  $p_\square$ , Scherspannung  $\tau_{\square x}$  und  $\tau_{\square y}$ , Wärmestrom  $q_\square$  und Temperaturdifferenz  $\vartheta_\square$

in Unterkapitel 3.1 mittels Potentialtheorie. Die erhaltenen Zusammenhänge werden daraufhin in aufsteigender Komplexität zunächst in Unterkapitel 3.2 verifiziert, bevor die Auswirkungen des Gough-Joule-Effekts in kontaktmechanischen Anwendungen für eine Reihe repräsentativer Lastfälle erörtert wird. Der Unterkapitel 3.3 schließt mit einer Beschreibung und Diskussion des zu Abbildung 3.1 gehörenden, thermomechanischen Modells ab, für das die verschiedenen hergeleiteten Teilmodelle in geeigneter Form kombiniert werden. Dabei wird auch der wechselseitige Einfluss zwischen Temperaturerhöhung und Reibleistung berücksichtigt. Die anschließende Formulierung eines inversen Problems lässt sowohl bei vorgegebener Bewegungen  $r_1(t)$  und  $r_2(t)$  als auch bei vorgegebener Normallast eine Berechnung der resultierenden Kontaktgrößen zu. Für die Orientierung des Koordinatensystems und die Vorzeichenkonvention sei auf Abbildung 3.2 verwiesen. Die Ausführungen der folgenden Unterkapiteln 3.1-3.3 sind außerdem bereits in kompakterer Form veröffentlicht [272, 273].

### 3.1 Potentialtheorie

Die bereits formulierten Annahmen führen auf die homogenen, voll-gekoppelten, quasi-statischen Gleichungen (2.15) und (2.16) aus Abschnitt 2.2.1 für den thermoelastischen Festkörper. Dementsprechend bieten sich die verallgemeinerten Neuber-Papkovich-Potentiale für die weitere Vorgehensweise an. Da Biot diese ursprünglich für die Gleichungen (2.17) und (2.18) eingeführt hat [30], wird im Folgenden gezeigt, wie

sie sich für die Gleichungen (2.15) und (2.16) einsetzen lassen. Dafür wird der Ansatz für die Verschiebungen  $\mathbf{r}$  in der Form [30]

$$\mathbf{r} = \nabla(\phi_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \chi \boldsymbol{\varphi}, \quad \Delta \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (3.1)$$

mit einem noch unbekanntem Parameter  $\chi$ , dem Vektorpotential  $\boldsymbol{\varphi}$ , dem skalaren Potential  $\phi_0$  und den kartesischen Raumkoordinaten  $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^\top$  in die voll-gekoppelten und quasi-statischen Gleichungen (2.15) und (2.16) eingesetzt

$$\nabla((\lambda + 2\mu)\Delta\phi_0 + (2(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)\chi)\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta) = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

$$\kappa\Delta\theta - \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\phi_0 + (2 - \chi)\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Dabei wird ausgenutzt, dass  $\Delta(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = 2\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}$  aufgrund des harmonischen Potentials  $\boldsymbol{\varphi}$  gilt. Das Weglassen des Gradienten-Operators in Gleichung (3.2) ist gleichbedeutend mit der Addition einer Konstanten oder alternativ dem Hinzufügen einer quadratischen Funktion zu  $\phi_0$  oder einer linearen Funktion zu  $\boldsymbol{\varphi}$ . Entsprechendes Auflösen von Gleichung (3.2) nach  $\theta$

$$\theta = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \Delta\phi_0 + \frac{2(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)\chi}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad (3.4)$$

und Einsetzen in Gleichung (3.3) ergibt

$$\kappa\Delta\Delta\phi_0 - (1 + \varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \Delta\phi_0 = \left(2 - \frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)}\chi + (2 - \chi)\varepsilon\right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.5)$$

wobei der noch freie Parameter  $\chi$  aus der Forderung einer verschwindenden rechten Seite von Gleichung (3.5) zu

$$\chi = \frac{2(\lambda + 2\mu)(1 + \varepsilon)}{\lambda + \mu + (\lambda + 2\mu)\varepsilon}$$

bestimmt werden kann. Beim Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergeben sich aufgrund von  $\chi|_{\varepsilon \rightarrow 0} = 4(1 - \nu)$  die klassischen Neuber-Papkovich-Potentiale. Es sei an dieser Stelle noch ergänzt, dass diese bereits aus der Forderung  $2(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)\chi = 0$  in Gleichung (3.2) hätten gewonnen werden können.

Die voll-gekoppelten und quasi-statischen Gleichungen für den thermoelastischen Festkörper lassen sich damit durch die Potentiale  $\phi_0 = \varphi_0 + \Pi$  als Summe der beiden

skalaren Potentiale  $\varphi_0$  und  $\Pi$  sowie dem Vektorpotential  $\boldsymbol{\varphi}$  darstellen, wobei diese die folgenden Laplace- und Diffusionsgleichungen

$$\Delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

$$\Delta \varphi_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\Delta \Pi = \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \Pi \quad (3.8)$$

erfüllen müssen. Der Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen kann durch  $\varepsilon \rightarrow 0$  erfolgen. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  lässt sich mit

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \left( -\frac{1}{2}\chi \left( \nabla \boldsymbol{\varphi} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^T \right) + \nabla \nabla (\phi_0 + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \left( \Delta \phi_0 + \left( 2 - \frac{1}{2}\chi \right) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \mathbf{I} \right) \quad (3.9)$$

angeben. Es verbleibt die Aufgabe, genau die Potentialfunktionen  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\varphi_0$  und  $\Pi$  zu finden, die außer den Gleichungen (3.6)-(3.8) auch die geforderten Randbedingungen erfüllen. Dafür werden die Ausdrücke für das Verschiebungs-, Spannungs- und Temperaturfeld aus den Gleichungen (3.1), (3.4) und (3.9) zunächst in den Tabellen 3.1 und 3.2 als Funktionen der Potentialfunktionen aufgelistet. Der Kopplungsparameter  $\varepsilon$  beeinflusst die überwiegende Mehrheit der aufgelisteten Größen.

Die erhaltenen Lösungen in Tabelle 3.2 eignen sich für Randbedingungen, bei denen aus mechanischer Sicht nur eine der drei Spannungskomponenten auf der Oberfläche  $\sigma_{zx}|_{z=0}$ ,  $\sigma_{zy}|_{z=0}$  oder  $\sigma_{zz}|_{z=0}$  verbleibt. Darüber hinaus sind die Lösungen derart konstruiert, dass die zugehörigen Ausdrücke für die Spannungen keinen Kopplungsparameter  $\varepsilon$  enthalten. Aufgrund der vollgekoppelten Gleichungen entsteht instantan bei allen drei Lastfällen ein Temperaturfeld. Interessant ist der Zusammenhang zwischen Spannung  $\sigma_{zz}|_{z=0}$  und Temperaturfeld  $\theta|_{z=0}$  bei Lösung I. Beide sind bis auf die physikalischen Vorfaktoren identisch, besitzen allerdings ein umgekehrtes Vorzeichen. Bereits hier lässt sich erkennen, dass im vollgekoppelten Fall jede Normalspannungslast mit einer instantanen Temperaturveränderung zusammenhängt, die im Einklang mit dem Gough-Joule-Effekt bei Druckbelastungen aufgrund der Kompression zu einer Temperaturerhöhung und bei Zugbelastungen aufgrund der Expansion zu einem Temperaturabfall führt. Für adiabatische Modellierungen verbliebe das Temperaturfeld dann konstant. Die Lösung II aus Tabelle 3.1 ist die einzige Möglichkeit, eine transiente Wärmeleitung abzubilden.

**Tabelle 3.1:** Lösung II

$\boldsymbol{\varphi}$	$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$
$\phi_0$	$\varphi_0 = 0, \Pi \neq 0$
$u$	$\frac{\partial \Pi}{\partial x}$
$v$	$\frac{\partial \Pi}{\partial y}$
$w$	$\frac{\partial \Pi}{\partial z}$
$\sigma_{xx}$	$2\mu \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \Delta \Pi \right)$
$\sigma_{xy}$	$2\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}$
$\sigma_{yy}$	$2\mu \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - \Delta \Pi \right)$
$\sigma_{zx}$	$2\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}$
$\sigma_{zy}$	$2\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}$
$\sigma_{zz}$	$2\mu \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \Delta \Pi \right)$
$\theta$	$\frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha} \Delta \Pi$

Tabelle 3.2: Lösungen für reine Normal- und reine Tangentialbelastung auf der Oberfläche eines Halbraums

	Lösung I	Lösung II	Lösung III
$\varphi$	$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \varphi_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\varphi_1 = -\frac{2}{\lambda} \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2} - \frac{2}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \varphi_2 = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \varphi_3 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}$	$\varphi_1 = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y}, \varphi_2 = -\frac{2}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \varphi_3 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}$
$\phi_0$	$\varphi_0 = -(1 - \frac{1}{2}\lambda) \varphi, \Pi = 0$	$\varphi_0 = \frac{1}{2}\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{2x}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{2y}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \Pi = 0$	$\varphi_0 = \frac{1}{2}\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{2x}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{2y}{\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \Pi = 0$
$u$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial z} - (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial\varphi}{\partial x}$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial z} - (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y \partial z} - (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$
$v$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial y \partial z} - (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial\varphi}{\partial y}$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y \partial z} - (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2 \partial z} - (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$
$w$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial z^2} + (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}$	$z \frac{\partial^3\varphi}{\partial y \partial z^2} + (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}$
$\sigma_{xx}$	$2\mu \left( z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right)$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3 \partial z} + (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial z^2} \right)$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2 \partial y \partial z} + (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} \right)$
$\sigma_{xy}$	$2\mu \left( z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y \partial z} - (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} \right)$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2 \partial y \partial z} - (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} \right)$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x \partial y^2 \partial z} - (1 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} \right)$
$\sigma_{yy}$	$2\mu \left( z \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2 \partial z} + (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right)$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x \partial y^2 \partial z} + (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} \right)$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^3 \partial z} + (2 - \frac{1}{2}\lambda) \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^3\varphi}{\partial y \partial z^2} \right)$
$\sigma_{zx}$	$2\mu z \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial z^2}$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} \right)$	$2\mu z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x \partial y \partial z^2}$
$\sigma_{zy}$	$2\mu z \frac{\partial^3\varphi}{\partial y \partial z^2}$	$2\mu z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x \partial y \partial z^2}$	$2\mu \left( z \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} \right)$
$\sigma_{zz}$	$2\mu \left( z \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right)$	$2\mu z \frac{\partial^4\varphi}{\partial x \partial z^3}$	$2\mu z \frac{\partial^4\varphi}{\partial y \partial z^3}$
$\theta$	$\frac{2\mu(\lambda+2\mu)\epsilon}{(\lambda+\mu+(\lambda+2\mu)\epsilon)(3\lambda+2\mu)\alpha} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{2\mu(\lambda+2\mu)\epsilon}{(\lambda+\mu+(\lambda+2\mu)\epsilon)(3\lambda+2\mu)\alpha} \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial z^2}$	$\frac{2\mu(\lambda+2\mu)\epsilon}{(\lambda+\mu+(\lambda+2\mu)\epsilon)(3\lambda+2\mu)\alpha} \frac{\partial^3\varphi}{\partial y \partial z^2}$

Die Lösungen werden im Folgenden durch geeignete Potentialfunktionen für mechanische Belastungen in Abschnitt 3.1.1 und anschließend für thermische Belastungen in Abschnitt 3.1.2 ergänzt und entsprechend den Ausführungen aus Abschnitt 2.2.2 für rechteckige Oberflächenlasten innerhalb des Gebietes  $-a \leq x \leq a$  und  $-b \leq y \leq b$  zu Einflussfunktionen superpositioniert. Anschließend erfolgt die Superposition für beliebige räumliche oder zeitliche, mechanische und thermische Oberflächenlasten. Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit von homogenen Anfangsbedingungen der Form

$$\mathbf{r}|_{t=t_0^-} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{t=t_0^-} = \mathbf{0}, \quad \theta|_{t=t_0^-} = 0$$

ausgegangen. Zudem sollen Verschiebungen, Temperaturen und Spannungen für größer werdenden Abstand vom Ursprung gegen null konvergieren

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \theta = 0, \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}.$$

### 3.1.1 Mechanische Oberflächenbelastung

Die Lösungen I, II und III in Tabelle 3.2 eignen sich für Spannungsrandbedingungen. Die Komponenten  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$  und  $\sigma_{zz}$  des Spannungstensors sind unabhängig von  $\varepsilon$ , daher können dieselben Potentiale wie im einseitig gekoppelten Fall mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  verwendet werden. Verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für harmonische Funktionen lassen sich in [23] finden. Das Potential

$$\varphi = -\frac{F_z}{4\mu\pi} \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \right)$$

wird für Lösung I genutzt und erfüllt die Randbedingungen  $\sigma_{zx}|_{z=0} = 0$ ,  $\sigma_{zy}|_{z=0} = 0$  und  $\sigma_{zz}|_{z=0} = -F_z \delta(x)\delta(y)$ , während das Potential

$$\varphi = -\frac{F_{x,y}}{4\mu\pi} \left( z \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \right) - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

für die Lösungen II und III verwendet wird und die Randbedingungen  $\sigma_{zx}|_{z=0} = -F_x \delta(x)\delta(y)$ ,  $\sigma_{zy}|_{z=0} = -F_y \delta(x)\delta(y)$  und  $\sigma_{zz}|_{z=0} = 0$  erfüllt [23]. Beide Potentiale genügen Gleichung (3.6). Die physikalischen Vorfaktoren ergeben sich dabei mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  jeweils aus den Kräftegleichgewichten

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma_{zx} r dr d\psi = -F_x,$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma_{zy} r dr d\psi = -F_y,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma_{zz} r dr d\psi = -F_z.$$

Einige Einflussfunktionen, die eine konstante mechanische Last  $\tau_{\square x}$ ,  $\tau_{\square y}$  oder  $p_{\square}$  innerhalb des Gebietes  $-a \leq x \leq a$  und  $-b \leq y \leq b$  auf der Halbraumoberfläche mit der Temperatur  $\theta|_{z=0}$ , dem Wärmestrom  $q_z|_{z=0}$  und der Vertikalverschiebung  $w|_{z=0}$  auf der Oberfläche in Zusammenhang bringen, werden durch die Auswertung von Gleichung (2.28) mit den Lösungen aus Tabelle 3.2 berechnet. In dimensionsloser Schreibweise mit  $x = 2a\xi$ ,  $y = 2b\eta$  und  $b = \beta a$  können sie als

$$\frac{8(1-\nu)(1+2(1-\nu)\varepsilon)}{1-2\nu} \frac{\bar{w}|_{z=0}}{\bar{\tau}_{\square x}} = \bar{C}_{zx}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.10)$$

$$\frac{8(1-\nu)(1+2(1-\nu)\varepsilon)}{1-2\nu} \frac{\bar{w}|_{z=0}}{\bar{\tau}_{\square y}} = \bar{C}_{zy}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.11)$$

$$\frac{1+2(1-\nu)\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{\bar{w}|_{z=0}}{\bar{p}_{\square}} = \bar{C}_{zz}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.12)$$

$$\frac{(1+\nu)\alpha(1+2(1-\nu)\varepsilon)}{(1-2\nu)\varepsilon} \frac{\theta|_{z=0}}{\bar{\tau}_{\square x}} = \bar{T}_{zx}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.13)$$

$$\frac{(1+\nu)\alpha(1+2(1-\nu)\varepsilon)}{(1-2\nu)\varepsilon} \frac{\theta|_{z=0}}{\bar{\tau}_{\square y}} = \bar{T}_{zy}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.14)$$

$$\frac{(1+\nu)\alpha(1+2(1-\nu)\varepsilon)}{2\pi(1-2\nu)\varepsilon} \frac{\theta|_{z=0}}{\bar{p}_{\square}} = \bar{T}_{zz}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.15)$$

$$\frac{(1+\nu)(1+2(1-\nu)\varepsilon)\alpha a}{K(1-2\nu)\varepsilon} \frac{q_z|_{z=0}}{\bar{p}_{\square}} = \bar{Q}_z(\xi, \eta, \beta) \quad (3.16)$$

geschrieben werden, wobei  $\bar{w} = w/2a$ ,  $\bar{p}_{\square} = (1-\nu^2)p_{\square}/\pi E$ ,  $\bar{\tau}_{\square x} = (1-\nu^2)\tau_{\square x}/\pi E$  und  $\bar{\tau}_{\square y} = (1-\nu^2)\tau_{\square y}/\pi E$  sowie  $\bar{C}_{zx}$ ,  $\bar{C}_{zy}$ ,  $\bar{C}_{zz}$ ,  $\bar{T}_{zx}$ ,  $\bar{T}_{zy}$ ,  $\bar{T}_{zz}$  und  $\bar{Q}_z$  die jeweils dimensionslosen Verschiebungen, Spannungen und Einflussfunktionen darstellen.

Beim Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwindet in den Gleichungen (3.13)-(3.16) die Kopplung zur Temperatur und zum Wärmestrom, wohingegen die Kopplung zur Vertikalverschiebung in den Gleichungen (3.10) und (3.11) für  $\varepsilon \rightarrow \infty$  verschwindet. Des Weiteren geht Gleichung (3.12) für den einseitig gekoppelten Fall mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  in den bereits von Love [154] hergeleitete Zusammenhang in Gleichung (2.32) über. Die dimensionslosen Einflussfunktionen sind im Anhang B aufgelistet. Weitere Einflussfunktionen für den rein elastischen Lastfall und die einseitig

gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\alpha \rightarrow 0$  können Dydo und Busby [72] entnommen werden. Außerdem wird der noch des öfteren benötigte Wert der dimensionslosen Einflussfunktion  $\bar{C}_{zz}(\xi, \eta, \beta)$  im Ursprung

$$\begin{aligned} \bar{C}_{00} = \bar{C}_{zz} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} &= \ln(\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta) + \beta \ln(\sqrt{\beta^2 + 1} + 1) \\ &\quad - \ln(\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta) - \beta \ln(\sqrt{\beta^2 + 1} - 1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

hervorgehoben.

### 3.1.2 Thermische Oberflächenbelastung

Die Lösung  $\Pi$  aus Tabelle 3.1 oder Gleichung (3.8) ist äquivalent zur Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta\theta = \frac{1 + \varepsilon}{\kappa} \frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (3.18)$$

Dies kann durch Einsetzen der nach  $\Delta\Pi$  aufgelösten Gleichung (3.4) in Gleichung (3.5) gezeigt werden (unter Berücksichtigung von  $\varphi = 0$ ). Offensichtlich verkleinert die vollständige Kopplung die effektive Temperaturleitfähigkeit, im Folgenden wird  $\kappa_\varepsilon = \kappa/(1 + \varepsilon)$  substituiert.

Gleichung (3.18) soll sowohl für vorgegebene Temperaturfelder als auch für vorgegebene Wärmeströme auf der Oberfläche eines Halbraums gelöst werden. In beiden Fällen wird die Temperaturverteilung aus der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (3.18) für eine instantane Wärmezufuhr  $\check{q}$  im Vollraum bei  $x = \check{x}$ ,  $y = \check{y}$ ,  $z = \check{z}$  und  $t = \check{t}$  [47]

$$\check{\theta} = \frac{\check{q}\kappa_\varepsilon e^{-\frac{(x-\check{x})^2+(y-\check{y})^2+(z-\check{z})^2}{4\kappa_\varepsilon(t-\check{t})}}}{8K(\pi\kappa_\varepsilon(t-\check{t}))^{3/2}} \quad (3.19)$$

durch eine entsprechende Superposition im Raum und in der Zeit durch Gleichung (2.28) gefunden. Für die Herleitung der Fundamentallösung sei auf den Anhang C verwiesen. Die Fundamentallösung (3.19) lässt bereits erkennen, dass durch die kleinere Temperaturleitfähigkeit  $\kappa_\varepsilon$  auch stationäre Temperaturfelder vergleichsweise später erreicht werden. Bei bekanntem Temperaturfeld kann das Potential  $\Pi$  aus Gleichung (3.4)

$$\Delta\Pi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha\theta \quad (3.20)$$

erhalten werden, Verschiebungen und Spannungen folgen aus Tabelle 3.1.

Für den weiteren Lösungsweg werden zunächst die Ergebnisse von Claesson und Probert [58, 59] rekapituliert, die eine Lösung von Gleichung (3.20) für das Temperaturfeld

$$\theta_{\oplus} = \frac{\sqrt{\pi\kappa_{\varepsilon}}q_0}{2\pi K\sqrt{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right) e^{-\frac{z^2}{4\kappa_{\varepsilon}t}}$$

herleiten, worin  $\operatorname{erf}(\dots)$  die Fehlerfunktion bezeichnet. Das Temperaturfeld entsteht durch die instantane Wärmequelle  $q_{\oplus}(\check{x}, \check{y}) = q_0 \operatorname{sign}(\check{x}) \operatorname{sign}(\check{y})$  bei  $\check{z} = 0$  und  $\check{t} = 0$ . Die partielle Ableitung dieses Temperaturfeldes

$$\frac{\partial^2 \theta_{\oplus}}{\partial x \partial y} = \frac{q_0 \kappa_{\varepsilon} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\kappa_{\varepsilon}t}}}{2K(\pi\kappa_{\varepsilon}t)^{3/2}}$$

stimmt bis auf den Vorfaktor  $1/4$  mit der Fundamentallösung aus Gleichung (3.19) für  $\check{x} = \check{y} = \check{z} = \check{t} = 0$  überein. Die Autoren erhalten die Lösung von

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \Pi_{\oplus} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{q_0 \kappa_{\varepsilon} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\kappa_{\varepsilon}t}}}{2K(\pi\kappa_{\varepsilon}t)^{3/2}}$$

durch die allgemeine Lösung von Gleichung (3.20)

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pi_{\oplus} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \kappa_{\varepsilon} \int_0^t \frac{\partial^2 \theta_{\oplus}}{\partial x \partial y} dt + \Pi_1 t + \Pi_2,$$

wobei  $\Delta \Pi_1 = 0$  gilt [193]. Die beiden Potentiale  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  werden in diesem Fall so gewählt, dass die Spannungen und die Verschiebungen für  $t \rightarrow \infty$  erneut gegen null konvergieren, womit für die Potentiale

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 0, \\ \Pi_2 &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha \kappa_{\varepsilon} q_0}{\pi K} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pi_{\oplus} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha \kappa_{\varepsilon} q_0}{\pi K} \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

folgt. Mit der Definition der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tilde{s}^2} d\tilde{s}$$

und der Skalierung  $s = \sqrt{4\kappa_\varepsilon t} \tilde{s} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  lassen sich die verbleibenden Integrationen in  $x$  und  $y$  ausführen

$$\Pi_\oplus = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha\kappa_\varepsilon q_0}{\pi K} \sqrt{\pi\kappa_\varepsilon t} \int_0^1 \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{xs}{2\sqrt{\kappa_\varepsilon t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{ys}{2\sqrt{\kappa_\varepsilon t}}\right) e^{-\frac{z^2 s^2}{4\kappa_\varepsilon t}}}{s^2} ds.$$

Spannungen  $\sigma_\oplus$  und Verschiebungen  $r_\oplus$  für die Wärmequelle  $q_\oplus(\check{x}, \check{y})$  lassen sich wiederum mit Tabelle 3.1 berechnen.

Zwei verschiedene Superpositionen dieser Lösung werden im Folgenden benutzt. Die erste ist eine Superposition zweier Wärmequellen mit der Stärke  $+q_\oplus$  bei  $z = \Delta\check{z}$  und  $z = -\Delta\check{z}$

$$\begin{aligned} \theta_\oplus^+ &= \lim_{\Delta\check{z} \rightarrow 0} (\theta_\oplus|_{z=z-\Delta\check{z}} + \theta_\oplus|_{z=z+\Delta\check{z}}) \\ &= \frac{\sqrt{\pi\kappa_\varepsilon} q_0}{\pi K \sqrt{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_\varepsilon t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_\varepsilon t}}\right) e^{-\frac{z^2}{4\kappa_\varepsilon t}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

woraus das Potential

$$\begin{aligned} \Pi_\oplus^+ &= \lim_{\Delta\check{z} \rightarrow 0} (\Pi_\oplus|_{z=z-\Delta\check{z}} + \Pi_\oplus|_{z=z+\Delta\check{z}}) \\ &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{2\alpha\kappa_\varepsilon q_0}{\pi K} \sqrt{\pi\kappa_\varepsilon t} \int_0^1 \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{xs}{2\sqrt{\kappa_\varepsilon t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{ys}{2\sqrt{\kappa_\varepsilon t}}\right) e^{-\frac{z^2 s^2}{4\kappa_\varepsilon t}}}{s^2} ds \end{aligned}$$

folgt. Erneut können Spannungen  $\sigma_\oplus^+$  und Verschiebungen  $r_\oplus^+$  aus Tabelle 3.1 berechnet werden.

Die zweite ist eine Superposition einer Wärmequelle mit der Stärke  $+q_{\oplus}$  bei  $z = \Delta\check{z}$  und einer Wärmequelle mit der Stärke  $-q_{\oplus}$  bei  $z = -\Delta\check{z}$

$$\begin{aligned}\theta_{\oplus}^- &= \lim_{\substack{\Delta\check{z} \rightarrow 0 \\ q_0 \rightarrow \infty}} (\theta_{\oplus}|_{z=z-\Delta\check{z}} - \theta_{\oplus}|_{z=z+\Delta\check{z}}) \\ &= \frac{\pi\kappa_{\varepsilon}\vartheta_0 z}{2(\pi\kappa_{\varepsilon}t)^{3/2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right) e^{-\frac{z^2}{4\kappa_{\varepsilon}t}},\end{aligned}\quad (3.22)$$

wobei die Größe  $\vartheta_0 = q_0\Delta\check{z}/K$  bei der Grenzwertbildung konstant gehalten wird. Daraus folgt das Potential

$$\begin{aligned}\Pi_{\oplus}^- &= \lim_{\substack{\Delta\check{z} \rightarrow 0 \\ q_0 \rightarrow \infty}} (\Pi_{\oplus}|_{z=z-\Delta\check{z}} - \Pi_{\oplus}|_{z=z+\Delta\check{z}}) \\ &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha\kappa_{\varepsilon}\vartheta_0 z}{\sqrt{\pi\kappa_{\varepsilon}t}} \int_0^1 \operatorname{erf}\left(\frac{xs}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{ys}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}t}}\right) e^{-\frac{z^2 s^2}{4\kappa_{\varepsilon}t}} ds.\end{aligned}$$

Spannungen  $\sigma_{\oplus}^-$  sowie Verschiebungen  $r_{\oplus}^-$  werden auch hier mit Tabelle 3.1 berechnet.

### Vorgegebener Wärmestrom

Das Temperaturfeld aufgrund einer instantanen Wärmequelle  $\check{q}$  zum Zeitpunkt  $t = \check{t}$  bei  $x = \check{x}$ ,  $y = \check{y}$  auf der Oberfläche eines Halbraums wird durch die Superposition zweier instantaner Wärmequellen mit der Stärke  $+\check{q}$  bei  $\check{z} = \Delta\check{z}$  und  $\check{z} = -\Delta\check{z}$  aus Gleichung (3.19) erhalten [47]

$$\check{\theta}_q = \lim_{\Delta\check{z} \rightarrow 0} (\check{\theta}|_{\check{z}=\Delta\check{z}} + \check{\theta}|_{\check{z}=-\Delta\check{z}}) = \frac{\check{q}\kappa_{\varepsilon} e^{-\frac{(x-\check{x})^2+(y-\check{y})^2+z^2}{4\kappa_{\varepsilon}(t-\check{t})}}}{4K(\pi\kappa_{\varepsilon}(t-\check{t}))^{3/2}}.\quad (3.23)$$

Die Superposition von Gleichung (3.23) für eine transiente, zeitlich begrenzte und konstante Wärmequelle  $q_{\square}(t)$  innerhalb des Gebietes  $-a \leq x \leq a$  und  $-b \leq y \leq b$  ergibt

$$\theta_q = \int_0^{t_h} \frac{\sqrt{\pi\kappa_{\varepsilon}} q_{\square}(\check{t}) e^{-\frac{z^2}{4\kappa_{\varepsilon}(t-\check{t})}}}{4\pi K \sqrt{t-\check{t}}} \left( \Theta_{\oplus}|_{\substack{X=x+a \\ Y=y+b}} + \Theta_{\oplus}|_{\substack{X=x-a \\ Y=y-b}} - \Theta_{\oplus}|_{\substack{X=x-a \\ Y=y+b}} - \Theta_{\oplus}|_{\substack{X=x+a \\ Y=y-b}} \right) d\check{t}\quad (3.24)$$

mit

$$\Theta_{\oplus} = \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}}\sqrt{t-\check{t}}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{Y}{2\sqrt{\kappa_{\varepsilon}}\sqrt{t-\check{t}}}\right),$$

was einer Superposition von Gleichung (3.21)

$$\theta_{\theta} = \int_0^{t_h} \frac{q_{\square}}{4q_0} \left( \theta_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{X=x+a \\ Y=y+b \\ t=t-\check{t}}} + \theta_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{X=x-a \\ Y=y-b \\ t=t-\check{t}}} - \theta_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{X=x-a \\ Y=y+b \\ t=t-\check{t}}} - \theta_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{X=x+a \\ Y=y-b \\ t=t-\check{t}}} \right) d\check{t}$$

entspricht. Folglich führt die Superposition des Potentials  $\Pi_{\oplus}^+$

$$\begin{aligned} r_{\theta} &= \int_0^{t_h} \frac{q_{\square}(\check{t})}{q_0} \frac{1}{4} \left( r_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} + r_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} - r_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} - r_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} \right) d\check{t}, \\ \sigma_{\theta} &= \int_0^{t_h} \frac{q_{\square}(\check{t})}{q_0} \frac{1}{4} \left( \sigma_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} + \sigma_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} - \sigma_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} - \sigma_{\oplus}^+ \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} \right) d\check{t} \end{aligned}$$

zu den gesuchten Verschiebungen und Spannungen. Die Scherspannungen und Vertikalverschiebungen aufgrund einer konstanten, zeitlich begrenzten und rechteckigen Wärmequelle  $q_{\square}$  auf der Oberfläche verschwinden dort, es verbleibt jedoch ein Normalspannungsfeld. Dieses kann in dimensionsloser Form mit  $x = 2a\xi$ ,  $y = 2b\eta$ ,  $b = \beta a$  und der Péclet-Zahl  $P_e = 4a^2/\kappa_{\varepsilon}\Delta t$  als

$$\frac{4\pi^2 K}{2a\alpha(1+\nu)} \frac{\bar{\sigma}_{\theta,zz}|_{z=0}}{q_{\square}} = \bar{S}_{zz}(\xi, \eta, \beta, P_e, t, t_h) \quad (3.25)$$

geschrieben werden, wobei  $\bar{\sigma}_{\theta,zz} = (1-\nu^2)\sigma_{\theta,zz}/\pi E$  und  $\bar{S}_{zz}$  die jeweils dimensionslose Spannung und Einflussfunktion bezeichnen. Außerdem kann eine dimensionslose Form für das Temperaturfeld bei  $z = 0$  aufgrund einer konstanten, zeitlich begrenzten und rechteckigen Wärmequelle  $q_{\square}$  auf der Oberfläche

$$\frac{2\pi K}{2a} \frac{\theta|_{z=0}}{q_{\square}} = \bar{T}_q(\xi, \eta, \beta, P_e, t, t_h), \quad (3.26)$$

mit  $\bar{T}_q$  als dimensionsloser Einflussfunktion hergeleitet werden.  
Die stationären Werte ergeben sich zu

$$\frac{4\pi^2 K}{2a\alpha(1+\nu)} \frac{\hat{\sigma}_{\theta,zz}|_{z=0}}{q_{\square}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{S}_{zz} \Big|_{t_h=t} = -\bar{C}_{zz}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.27)$$

$$\frac{2\pi K}{2a} \frac{\hat{\theta}|_{z=0}}{q_{\square}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}_q \Big|_{t_h=t} = \bar{C}_{zz}(\xi, \eta, \beta) \quad (3.28)$$

mit  $\bar{C}_{zz}$  aus Gleichung (3.12). Eine alternative Herleitungsmöglichkeit bietet das stationäre Potential

$$\hat{\Pi}_{\oplus}^+ = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha q_0}{4\pi K} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

an. Die dimensionslosen Einflussfunktionen können im Anhang B gefunden werden. Vollständige Ausdrücke für die stationäre Temperaturverteilung in einem Halbraum liefern Manca und Naso [161].

### Vorgegebenes Temperaturfeld

Das Temperaturfeld aufgrund einer Oberfläche, die der Temperaturverteilung  $\vartheta$  folgt, wird durch eine Superposition einer instantanen Wärmequelle mit der Stärke  $+\check{q}$  bei  $\check{z} = \Delta\check{z}$  und einer weiteren instantanen Wärmequelle mit der Stärke  $-\check{q}$  bei  $\check{z} = -\Delta\check{z}$  aus Gleichung (3.19) [47]

$$\begin{aligned} \check{\theta}_{\vartheta} &= \lim_{\substack{\Delta\check{z} \rightarrow 0 \\ \check{q} \rightarrow \infty}} \left( \check{\theta} \Big|_{\check{z}=\Delta\check{z}} - \check{\theta} \Big|_{\check{z}=-\Delta\check{z}} \right) \\ &= \frac{\pi\kappa_{\varepsilon} \check{\vartheta} \Delta\check{z}}{8 (\pi\kappa_{\varepsilon} (t - \check{t}))^{5/2}} e^{-\frac{(x-\check{x})^2 + (y-\check{y})^2 + z^2}{4\kappa_{\varepsilon}(t-\check{t})}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

erhalten, wobei die Größe  $\check{\vartheta} = \check{q}\Delta\check{z}/K$  während der Grenzwertbildung konstant gehalten wird. Die Superposition von Gleichung (3.29) für ein konstantes, zeitlich begrenztes und rechteckiges Temperaturfeld  $\vartheta_{\square}$  auf der Oberfläche ergibt

$$\theta_{\vartheta} = \int_0^{t_h} \frac{\pi\kappa_{\varepsilon} \vartheta_{\square}(\check{t}) z e^{-\frac{z^2}{4\kappa_{\varepsilon}(t-\check{t})}}}{8 (\pi\kappa_{\varepsilon} (t - \check{t}))^{3/2}} \left( \Theta_{\oplus} \Big|_{\substack{X=x+a \\ Y=y+b}} + \Theta_{\oplus} \Big|_{\substack{X=x-a \\ Y=y-b}} - \Theta_{\oplus} \Big|_{\substack{X=x-a \\ Y=y+b}} - \Theta_{\oplus} \Big|_{\substack{X=x+a \\ Y=y-b}} \right) d\check{t},$$

was einer Superposition von Gleichung (3.22) in der Form

$$\theta_{\vartheta} = \int_0^{t_h} \frac{\vartheta_{\square}}{4\vartheta_0} \left( \theta_{\oplus}^- \Big|_{\substack{X=x+a \\ Y=y+b \\ t=t-\check{t}}} + \theta_{\oplus}^- \Big|_{\substack{X=x-a \\ Y=y-b \\ t=t-\check{t}}} - \theta_{\oplus}^- \Big|_{\substack{X=x-a \\ Y=y+b \\ t=t-\check{t}}} - \theta_{\oplus}^- \Big|_{\substack{X=x+a \\ Y=y-b \\ t=t-\check{t}}} \right) d\check{t}$$

entspricht. Folglich führt eine entsprechende Superposition des Potentials  $\Pi_{\oplus}^-$

$$r_{\theta} = \int_0^{t_h} \frac{\vartheta_{\square}(\check{t})}{\vartheta_0} \frac{1}{4} \left( r_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} + r_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} - r_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} - r_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} \right) d\check{t},$$

$$\sigma_{\theta} = \int_0^{t_h} \frac{\vartheta_{\square}(\check{t})}{\vartheta_0} \frac{1}{4} \left( \sigma_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} + \sigma_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} - \sigma_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x-a \\ y=y+b \\ t=t-\check{t}}} - \sigma_{\oplus}^- \Big|_{\substack{x=x+a \\ y=y-b \\ t=t-\check{t}}} \right) d\check{t}$$

zu den gesuchten Verschiebungen und Spannungen. Die Normalspannungen aufgrund einer konstanten, zeitlich begrenzten und rechteckigen Temperaturerhöhung  $\vartheta_{\square}$  auf der Oberfläche sind dort null. Es verbleiben jedoch Scherspannungen und Vertikalverschiebungen. Diese werden in dimensionsloser Form mit  $x = 2a\xi$ ,  $y = 2b\eta$ ,  $b = \beta a$  und der Péclet-Zahl  $P_e = 4a^2/\kappa_{\varepsilon}\Delta t$  als

$$\frac{4\pi^2}{\alpha(1+\nu)} \frac{\bar{\tau}_{\theta, zx}|_{z=0}}{\vartheta_{\square}} = \bar{S}_{zx}(\xi, \eta, \beta, P_e, t, t_h), \quad (3.30)$$

$$\frac{4\pi^2}{\alpha(1+\nu)} \frac{\bar{\tau}_{\theta, zy}|_{z=0}}{\vartheta_{\square}} = \bar{S}_{zy}(\xi, \eta, \beta, P_e, t, t_h), \quad (3.31)$$

$$\frac{4\pi(1-\nu)}{\alpha(1+\nu)} \frac{\bar{w}_{\theta}|_{z=0}}{\vartheta_{\square}} = \bar{W}(\xi, \eta, \beta, P_e, t, t_h) \quad (3.32)$$

geschrieben, wobei  $\bar{\tau}_{\theta, zx} = (1-\nu^2)\sigma_{\theta, zx}/\pi E$ ,  $\bar{\tau}_{\theta, zy} = (1-\nu^2)\sigma_{\theta, zy}/\pi E$ ,  $\bar{w}_{\theta} = w_{\theta}/2a$  und  $\bar{S}_{zx}$  sowie  $\bar{S}_{zy}$  und  $\bar{W}$  die jeweils dimensionslosen Spannungen, Verschiebungen und Einflussfunktionen bezeichnen. Außerdem kann eine dimensionslose Form für das Temperaturfeld bei  $z = 0$  aufgrund eines konstanten, zeitlich begrenzten und rechteckigen Temperaturfeldes  $\vartheta_{\square}$  auf der Oberfläche

$$\frac{\theta|_{z=0}}{\vartheta_{\square}} = \bar{T}_{\vartheta}(\xi, \eta, \beta) \quad (3.33)$$



mit  $\bar{T}_\vartheta$  als dimensionsloser Einflussfunktion hergeleitet werden.

Die stationären Werte ergeben sich zu

$$\frac{4\pi^2}{\alpha(1+\nu)} \frac{\hat{\tau}_{\theta,zz}|_{z=0}}{\vartheta_\square} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{S}_{zx}|_{t_h=t} = \bar{T}_{zx}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.34)$$

$$\frac{4\pi^2}{\alpha(1+\nu)} \frac{\hat{\tau}_{\theta,zy}|_{z=0}}{\vartheta_\square} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{S}_{zy}|_{t_h=t} = \bar{T}_{zy}(\xi, \eta, \beta), \quad (3.35)$$

$$\frac{4\pi(1-\nu)}{\alpha(1+\nu)} \frac{\hat{w}_\theta|_{z=0}}{\vartheta_\square} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{W}|_{t_h=t} = -\bar{C}_{zz}(\xi, \eta, \beta) \quad (3.36)$$

mit  $\bar{T}_{zx}$ ,  $\bar{T}_{zy}$  und  $\bar{C}_{zz}$  aus den Gleichungen (3.13), (3.14) und (3.12). Eine alternative Herleitungsmöglichkeit bietet sich über das stationäre Potential

$$\hat{\Pi}_\oplus^- = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha \vartheta_0}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

an. Die dimensionslosen Einflussfunktionen sind im Anhang B aufgelistet.

### 3.1.3 Superposition für beliebige Oberflächenlasten

Die erhaltenen Einflussfunktionen aus den Gleichungen (3.10)-(3.16), (3.25)-(3.28) sowie (3.30)-(3.36) erlauben die Berechnung beliebig geformter und zeitabhängiger thermischer oder mechanischer Oberflächenbelastungen durch eine geeignete Superposition. Zu diesem Zweck wird ein iteratives Lösungsverfahren für vier häufig verwendete Randbedingungen vorgestellt. Während die Fälle 1 und 2 mechanische Belastungen der Oberfläche durch Druckfelder abdecken, beinhalten die Fälle 3 und 4 thermische Belastungen der Oberfläche im Sinne von Wärmeströmen oder Temperaturfeldern. In den letzten beiden Fällen bleibt die Oberfläche spannungsfrei, in den ersten beiden Fällen ist die Oberfläche entweder wärmeisoliert oder wärmedurchlässig.

In allen Fällen ist zunächst eine Diskretisierung der Zeit nötig. Diese erfolgt äquidistant mit  $t = k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$  und die Verläufe möglicher Wärmeströme  $q_\square(t)$  und Temperaturen  $\vartheta_\square(t)$  eines einzelnen Oberflächenelementes sind beispielhaft in den Abbildungen 3.3(a) und (b) dargestellt. Da diese nicht nur einen instantanen sondern auch zeitlichen Einfluss haben, ist ebenfalls der Verlauf während des Zeitschrittes von Bedeutung. Es wird im Folgenden von einem konstanten Verlauf während eines

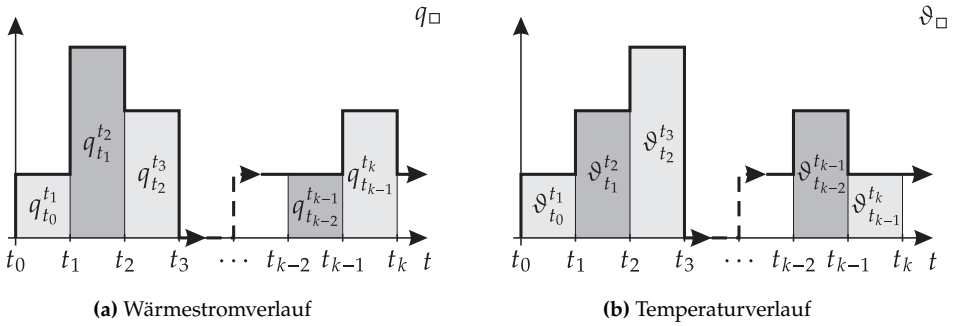


Abbildung 3.3: Beliebiger zeitlicher Wärmestrom- oder Temperaturverlauf eines Oberflächenelementes

Zeitschrittes ausgegangen, sodass für  $q_{t_k}^{t_{k+1}}$  und  $\vartheta_{t_k}^{t_{k+1}}$  je nach Diskretisierungsvariante entweder eine explizite

$$q_{t_k}^{t_{k+1}}(\xi, \eta) = q_{\square}(\xi, \eta, t_k), \quad (3.37)$$

$$\vartheta_{t_k}^{t_{k+1}}(\xi, \eta) = \vartheta_{\square}(\xi, \eta, t_k), \quad (3.38)$$

eine implizite

$$q_{t_k}^{t_{k+1}}(\xi, \eta) = q_{\square}(\xi, \eta, t_{k+1}), \quad (3.39)$$

$$\vartheta_{t_k}^{t_{k+1}}(\xi, \eta) = \vartheta_{\square}(\xi, \eta, t_{k+1}), \quad (3.40)$$

oder eine trapezförmige

$$q_{t_k}^{t_{k+1}}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (q_{\square}(\xi, \eta, t_k) + q_{\square}(\xi, \eta, t_{k+1})), \quad (3.41)$$

$$\vartheta_{t_k}^{t_{k+1}}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\vartheta_{\square}(\xi, \eta, t_k) + \vartheta_{\square}(\xi, \eta, t_{k+1})) \quad (3.42)$$

Auswertung in Frage kommt. Eine Diskussion zu den Auswirkungen der einzelnen Diskretisierungsvarianten erfolgt während der Verifikation in Abschnitt 3.2.2.

- **Fall 1: vorgegebenes Druckfeld, wärmeisolierte Oberfläche**

Die Randbedingungen sind mit

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = -p(x, y, t), \quad q_z|_{z=0} = -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

gegeben und die Vorgehensweise ist in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Das vorgegebene Druckfeld  $p(x, y, t)$  wird diskretisiert und verursacht in einer ersten

Iteration 0 den Temperaturanstieg  $\theta(p)$ , den Wärmestrom  $q_0^+(p)$  und das Verschiebungsfeld  $r(p)$ . Ein Wärmestrom  $q_0^-$  wird so überlagert, dass  $q_0^+ + q_0^- = 0$  gilt und die Normalspannung  $\sigma_1^+(q_0^-)$  und das Temperaturfeld  $\theta(q_0^-)$  resultieren. Eine weitere Normalspannung  $\sigma_1^-$  wird entsprechend  $\sigma_1^+ + \sigma_1^- = 0$  superpositioniert und das Temperaturfeld  $\theta(\sigma_1^-)$ , der Wärmestrom  $q_1^+(\sigma_1^-)$  und die Verschiebungen  $r(\sigma_1^-)$  folgen. Diese Vorgehensweise wird für  $n$  Iterationen wiederholt. Nach jeder abgeschlossenen Iteration sind die thermischen Randbedingungen bis auf den Wärmestrom  $q_n^+(\sigma_n^-)$  erfüllt.

- **Fall 2: vorgegebenes Druckfeld, wärmedurchlässige Oberfläche**

Die Randbedingungen sind mit

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = -p(x, y, t), \quad \theta|_{z=0} = 0$$

gegeben und die Vorgehensweise ist in Tabelle 3.4 zusammengefasst. Das vorgegebene Druckfeld  $p(x, y, t)$  wird diskretisiert und verursacht in einer ersten Iteration 0 den Temperaturanstieg  $\theta_0^+(p)$  und das Verschiebungsfeld  $r(p)$ . Ein Temperaturfeld  $\theta_0^-$  wird so überlagert, dass  $\theta_0^+ + \theta_0^- = 0$  gilt und die Scherspannungen  $\tau_1^+(\theta_0^-)$  und die Verschiebungen  $r(\theta_0^-)$  resultieren. Ein Scherspannungsfeld  $\tau_1^-$  wird entsprechend  $\tau_1^+ + \tau_1^- = 0$  superpositioniert und das Temperaturfeld  $\theta_1^+(\tau_1^-)$  und das Verschiebungsfeld  $r(\tau_1^-)$  folgen. Diese Vorgehensweise wird für  $n$  Iterationen wiederholt. Nach jeder abgeschlossenen Iteration sind die thermischen Randbedingungen bis auf das Temperaturfeld  $\theta_n^+(\tau_n^-)$  erfüllt.

- **Fall 3: vorgegebener Wärmestrom, spannungsfreie Oberfläche**

Die Randbedingungen sind mit

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad q_z|_{z=0} = -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = q(x, y, t)$$

gegeben und die Vorgehensweise ist in Tabelle 3.5 zusammengefasst. Der vorgegebene Wärmestrom  $q(x, y, t)$  wird diskretisiert und verursacht in einer ersten Iteration 0 den Temperaturanstieg  $\theta(q)$  und die Normalspannung  $\sigma_0^+(q)$ . Eine Normalspannung  $\sigma_0^-$  wird so überlagert, dass  $\sigma_0^+ + \sigma_0^- = 0$  gilt und das Temperaturfeld  $\theta(\sigma_0^-)$ , der Wärmestrom  $q_0^+(\sigma_0^-)$  und die Verschiebungen  $r(\sigma_0^-)$  resultieren. Ein Wärmestrom  $q_0^-$  wird entsprechend  $q_0^+ + q_0^- = 0$  superpositioniert und die Normalspannung  $\sigma_1^+(q_0^-)$  und das Temperaturfeld  $\theta(q_0^-)$  folgen. Erneut wird eine Normalspannung  $\sigma_1^-$  so überlagert, dass  $\sigma_1^+ + \sigma_1^- = 0$  gilt und das Temperaturfeld  $\theta(\sigma_1^-)$ , der Wärmestrom  $q_1^+(\sigma_1^-)$  sowie das Verschiebungsfeld  $r(\sigma_1^-)$  werden erhalten. Diese Vorgehensweise wird für  $n$  Iterationen wiederholt. Nach

jeder abgeschlossenen Iteration sind die mechanischen Randbedingungen bis auf ein Normalspannungsfeld  $\sigma_n^+(q_n^-)$  erfüllt.

- **Fall 4: vorgegebenes Temperaturfeld, spannungsfreie Oberfläche**

Die Randbedingungen sind mit

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \theta|_{z=0} = \vartheta(x, y, t)$$

gegeben und die Vorgehensweise ist in Tabelle 3.6 zusammengefasst. Das vorgegebene Temperaturfeld  $\vartheta(x, y, t)$  wird diskretisiert und verursacht in einer ersten Iteration 0 die Scherspannungen  $\tau_0^+(\vartheta)$  und das Verschiebungsfeld  $r(\vartheta)$ . Die Scherspannungen  $\tau_0^-$  werden so überlagert, dass  $\tau_0^+ + \tau_0^- = 0$  gilt und das Temperaturfeld  $\theta_0^+(\tau_0^-)$  und die Verschiebungen  $r(\tau_0^-)$  resultieren. Ein Temperaturfeld  $\theta_0^-$  wird entsprechend  $\theta_0^+ + \theta_0^- = 0$  superpositioniert und die Scherspannungen  $\tau_1^+(\theta_0^-)$  und die Verschiebungen  $r(\theta_0^-)$  folgen. Erneut werden Scherspannungen  $\tau_1^-$  so überlagert, dass  $\tau_1^+ + \tau_1^- = 0$  gilt und das Temperaturfeld  $\theta_1^+(\tau_1^-)$  und das Verschiebungsfeld  $r(\tau_1^-)$  werden erhalten. Diese Vorgehensweise wird für  $n$  Iterationen wiederholt. Nach jeder abgeschlossenen Iteration sind die thermischen Randbedingungen mit Ausnahme eines Temperaturfeldes  $\theta_n^+(\tau_n^-)$  erfüllt.

Für zeitsparende Simulationen können die Iterationen nach Iteration 1 gestoppt werden, ansonsten beendet das Erreichen einer vordefinierten relativen oder absoluten Toleranz  $\epsilon_{\text{tol}}$  den Iterationsprozess. Für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\epsilon \rightarrow 0$  ist das Ergebnis bereits nach Iteration 0 für alle Lastfälle exakt. Zudem sind durch eine geeignete Superposition der Ergebnisse aus den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 auch weitere Randbedingungen umsetzbar. Das vorgestellte Verfahren erlaubt die Simulation der quasi-statischen und voll-gekoppelten thermoelastischen Gleichungen für den Halbraum mit beliebig geformten und zeitabhängigen Lasten auf der Oberfläche. Darüber hinaus lassen sich die Ergebnisse leicht auf Anwendungen im Rahmen der dreidimensionalen Poroelastizität von Biot [29] übertragen, bei denen die zugrundeliegenden Gleichungen strukturell identisch sind. Weitere Informationen zur Poroelastizität lassen sich im Anhang A finden. Für detailliertere Informationen zur numerischen Umsetzung wird auf die Abschnitte 2.2.2 und 3.2.2 verwiesen.

Tabelle 3.3: Vorgehensweise für vorgegebenes Druckfeld  $p$  auf Halbraum mit wärmeisolerierter Oberfläche

	Iteration 0	Iteration 1	...	Iteration $n$
$r$	$r(p)$	$+ r(\sigma_1^-)$	...	$+ r(\sigma_n^-)$
$\sigma_{zz}$	$-p$	$+ \sigma_1^+(q_0^-)$	$+ \sigma_1^-$	$+ \sigma_n^+(q_{n-1}^-)$
$\theta$	$\theta(p)$	$+ \theta(q_0^-)$	$+ \theta(\sigma_1^-)$	$+ \theta(q_{n-1}^-)$
$q_z$	$q_0^+(p)$	$+ q_0^-$	$+ q_1^+(\sigma_1^-)$	$+ q_{n-1}^+(\sigma_n^-)$

Tabelle 3.4: Vorgehensweise für vorgegebenes Druckfeld  $p$  auf Halbraum mit wärmedurchlässiger Oberfläche

	Iteration 0	Iteration 1	...	Iteration $n$
$r$	$r(p)$	$+ r(\theta_0^-)$	$+ r(\tau_1^-)$	$+ r(\theta_{n-1}^-)$
$\sigma_{zz}$	$-p$			
$\tau$		$\tau_1^+(\theta_0^-)$	$+ \tau_1^-$	$+ \tau_n^+(\theta_{n-1}^-)$
$\theta$	$\theta^+(p)$	$+ \theta_0^-$	$+ \theta_1^+(\tau_1^-)$	$+ \theta_{n-1}^+(\tau_n^-)$

Tabelle 3.5: Vorgehensweise für vorgegebenen Wärmestrom  $q$  auf Halbraum und spannungsfreier Oberfläche

	Iteration 0	Iteration 1	...	Iteration $n$
$r$		$r(\sigma_0^-)$	$+ r(\sigma_1^-)$	$+ r(\sigma_n^-)$
$\sigma_{zz}$	$\sigma_0^+(q)$	$+ \sigma_0^-$	$+ \sigma_1^+(q_0^-)$	$+ \sigma_n^+(q_{n-1}^-)$
$\theta$	$\theta(q)$	$+ \theta(\sigma_0^-)$	$+ \theta(q_0^-)$	$+ \theta(q_{n-1}^-)$
$q_z$	$q$	$+ q_0^+(\sigma_0^-)$	$+ q_0^-$	$+ q_{n-1}^+(\sigma_n^-)$

Tabelle 3.6: Vorgehensweise für vorgegebenes Temperaturfeld  $\vartheta$  auf Halbraum mit spannungsfreier Oberfläche

	Iteration 0	Iteration 1	...	Iteration $n$
$r$	$r(\vartheta)$	$+ r(\tau_0^-)$	$+ r(\theta_0^-)$	$+ r(\theta_{n-1}^-)$
$\tau$	$\tau_0^+(\vartheta)$	$+ \tau_0^-$	$+ \tau_1^+(\theta_0^-)$	$+ \tau_n^+(\theta_{n-1}^-)$
$\theta$	$\vartheta$	$+ \theta_0^+(\tau_0^-)$	$+ \theta_0^-$	$+ \theta_{n-1}^+(\tau_n^-)$

## 3.2 Verifikation und Diskussion

Die hergeleiteten Einflussfunktionen werden nachfolgend zunächst in Abschnitt 3.2.1 verglichen, bevor eine Verifikation mit geeigneten analytischen Lösungen aus der Literatur in Abschnitt 3.2.2 erfolgt. Letztere beschränkt sich auf vordefinierte Oberflächenlasten für die Grenzfälle  $\varepsilon \rightarrow 0$  oder  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , da keine analytischen Lösungen für die voll-gekoppelten, quasi-statischen Gleichungen gefunden wurden. Derselbe Abschnitt beinhaltet außerdem detaillierte Informationen zu den jeweiligen Superpositionen. Bevor die Auswirkungen des Einflussradius im Kontext von periodischen Lasten in Abschnitt 3.2.4 erörtert werden, schließt sich eine Diskussion des Einflusses der vollständigen Kopplung mit  $\varepsilon \neq 0$  für verschiedene kontaktmechanische Anwendungsfälle in Abschnitt 3.2.3 an.

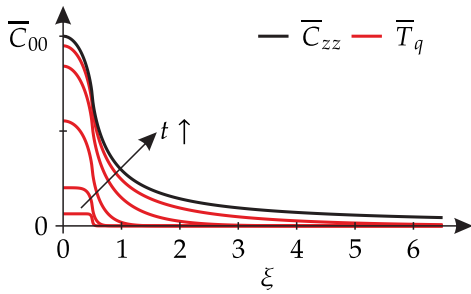
### 3.2.1 Vergleich der Einflussfunktionen

Der direkte Vergleich der erhalten Einflussfunktionen  $\bar{C}_{zz}$  aus Gleichung (3.12) mit  $\bar{T}_q$  aus Gleichung (3.26),  $\bar{W}$  aus Gleichung (3.32) und  $\bar{S}_{zz}$  aus Gleichung (3.25) in den Abbildungen 3.4(a)-(d),  $\bar{T}_{zx}$  aus Gleichung (3.13) mit  $\bar{S}_{zx}$  aus Gleichung (3.30) in Abbildung 3.4(e) sowie  $\bar{T}_{zy}$  aus Gleichung (3.14) mit  $\bar{S}_{zy}$  aus Gleichung (3.31) in Abbildung 3.4(f) bietet sich aufgrund der jeweiligen Konvergenz auf die gleichen stationären Lösungen an.

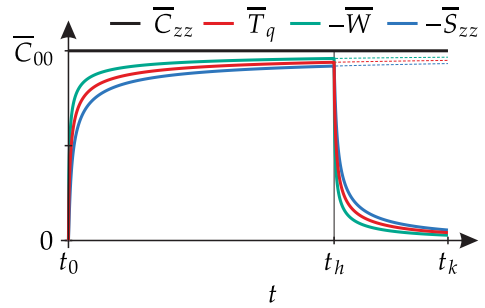
Die Abbildungen 3.4(a), (c) und (d) vergleichen die Einflussfunktionen  $\bar{T}_q$ ,  $\bar{W}$  und  $\bar{S}_{zz}$  mit  $\bar{C}_{zz}$  zu verschiedenen Zeitpunkten  $0 < t \leq \infty$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  aufgrund eines kontinuierlichen Wärmeeintrags  $q_\square$  oder eines kontinuierlichen Temperaturfeldes  $\vartheta_\square$ . Während  $\bar{C}_{zz}$ ,  $\bar{T}_q$  und  $\bar{W}$  rein positive Werte besitzen, nimmt  $\bar{S}_{zz}$  auch negative Werte an. Nach einiger Zeit erreichen alle Kurven eine nahezu stationäre Form, deren Werte monoton ansteigen, bis sie für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\bar{C}_{zz}$  konvergieren.

Abbildung 3.4(b) zeigt den transienten Verlauf der Einflussfunktionen bei  $\xi = \eta = 0$ . Sowohl der Wärmestrom  $q_\square$  als auch die Temperaturerhöhung  $\vartheta_\square$  werden ab dem Zeitpunkt  $t_h$  wieder zu null gesetzt. Offensichtlich folgen Spannung  $\bar{S}_{zz}$  und Verschiebung  $\bar{W}$  den Temperaturen  $\bar{T}_q$  beziehungsweise  $\bar{T}_\vartheta$ , was die Folge ihrer Abhängigkeit vom Temperaturanstieg im Halbraum ist. Für  $t > t_h$  konvergieren  $\bar{T}_q$ ,  $\bar{W}$  und  $\bar{S}_{zz}$  wieder gegen null.

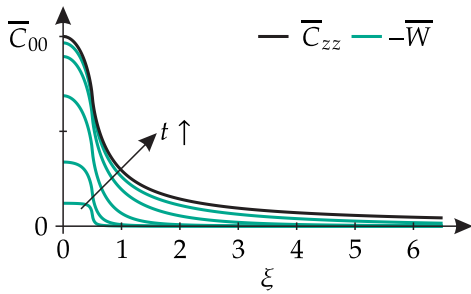
Die Abbildung 3.4(e) vergleicht die Einflussfunktion  $\bar{S}_{zx}$  mit den stationären Verläufen von  $\bar{C}_{zx}$  und  $\bar{T}_{zx}$  zu verschiedenen Zeitpunkten  $0 < t \leq \infty$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  aufgrund eines kontinuierlichen Temperaturfeldes  $\vartheta_\square$ . Analog zu den Abbildungen 3.4(a)-(d) erreicht die Kurve nach einiger Zeit eine nahezu stationäre Form, deren Werte monoton ansteigen, bis sie für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\bar{T}_{zx}$  konvergiert. Die dargestellten Einflussfunktionen enthalten jedoch eine Singularität bei  $\xi = 1/2$ .



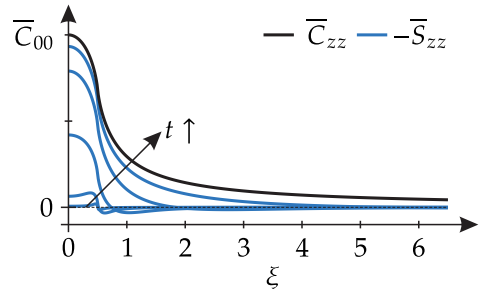
(a) Vergleich der Einflussfunktionen  $\bar{C}_{zz}$  und  $\bar{T}_q$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  zu verschiedenen Zeitpunkten



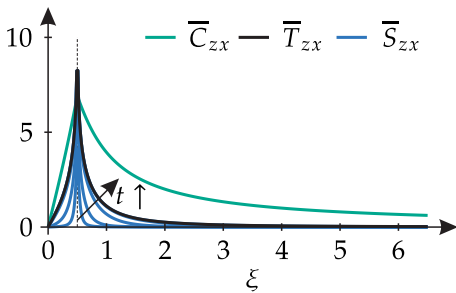
(b) Zeitlicher Verlauf der Einflussfunktionen  $\bar{C}_{zz}$ ,  $\bar{S}_{zz}$ ,  $\bar{T}_q$  und  $\bar{W}$  bei  $\xi = \eta = 0$



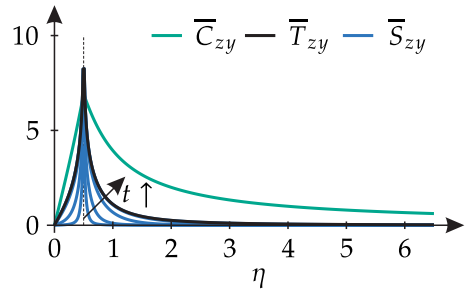
(c) Vergleich der Einflussfunktionen  $\bar{C}_{zz}$  und  $\bar{W}$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  zu verschiedenen Zeitpunkten



(d) Vergleich der Einflussfunktionen  $\bar{C}_{zz}$  und  $\bar{S}_{zz}$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  zu verschiedenen Zeitpunkten



(e) Vergleich der Einflussfunktionen  $\bar{T}_{zx}$ ,  $\bar{C}_{zx}$  und  $\bar{S}_{zx}$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  zu verschiedenen Zeitpunkten



(f) Vergleich der Einflussfunktionen  $\bar{T}_{zy}$ ,  $\bar{C}_{zy}$  und  $\bar{S}_{zy}$  entlang der  $\eta$ -Richtung bei  $\xi = 0$  zu verschiedenen Zeitpunkten

Abbildung 3.4: Vergleich verschiedener Einflussfunktionen für  $\beta = 1$

Äquivalente Beobachtungen treffen ebenfalls auf die Verläufe der Einflussfunktionen  $\bar{S}_{zy}$ ,  $\bar{T}_{zy}$  und  $\bar{C}_{zy}$  in Abbildung 3.4(d) entlang der  $\eta$ -Richtung bei  $\xi = 0$  zu. Da jedoch keine Auswertung der Einflussfunktionen auf den Elementgrenzen bei  $\xi = \eta = 1/2$  erfolgt, bereiten die Singularitäten keine Probleme.

### 3.2.2 Verifikation

Die erhaltenen Einflussfunktionen werden mit Ergebnissen von Johnson [119], Jaeger [114], Martini et al. [163], Sternberg und McDowell [232] sowie McNamee und Gibson [167] verifiziert. Die Komplexität der Teilmodelle wird dafür sukzessive erhöht. Für die Auswertung der in diesem Kapitel auftretenden diskreten, linearen Faltungen wird die diskrete, zyklische Faltung entsprechend den Ausführungen von Abschnitt 2.2.2 verwendet. Die analytischen Vergleichslösungen aus der Literatur beschränken sich auf nicht-periodische, meist radialsymmetrische Oberflächenlasten innerhalb des Radius  $r_a$  sowie auf die beiden Grenzfälle  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Wenn nicht anderweitig angegeben, wird im Folgenden eine halbe Elementlänge von  $a = r_a/41$  und  $\beta = 1$  gewählt.

#### Mechanisches Teilmodell

Für ein parabolisches Druckfeld  $\bar{p} = \bar{p}_0 (1 - r^2/r_a^2)^{1/2}$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  berechnet Johnson [119] das Verschiebungsfeld

$$\frac{\bar{w}|_{z=0}}{\bar{p}_0} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} \frac{r_a}{a} \left( 2 - \frac{r^2}{r_a^2} \right) & \text{für } r \leq r_a, \\ \frac{\pi}{4} \frac{r_a}{a} \left( \left( 2 - \frac{r^2}{r_a^2} \right) \arcsin \left( \frac{r_a}{r} \right) + \sqrt{\frac{r^2}{r_a^2} - 1} \right), & \end{cases} \quad (3.43)$$

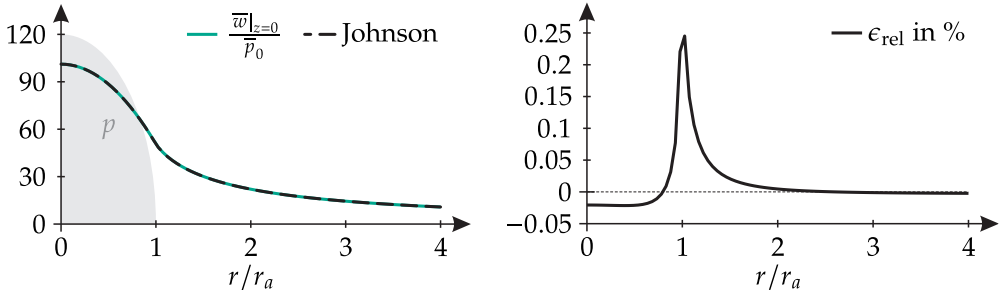
wobei  $r$  den radialen Abstand zum Ursprung bezeichnet.

Für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt eine Superposition im Raum von Gleichung (3.12) die dimensionslosen Verschiebungen

$$\bar{w}|_{z=0} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta) \bar{p}(\xi - m, \eta - n), \quad (3.44)$$

die aufgrund eines beliebig geformten, dimensionslosen Druckfeldes  $\bar{p}(\xi, \eta)$  resultieren. Der Vergleich von Gleichung (3.44) mit der analytischen Lösung von Johnson [119] in Abbildung 3.5(a) zeigt eine gute Übereinstimmung. Der relative Fehler  $\epsilon_{\text{rel}}$  zwischen den Gleichungen (3.43) und (3.44) ist in Abbildung 3.5(b) dargestellt.





(a) Vergleich von Gleichung (3.44) mit Johnson [119] (b) Relativer Fehler  $\epsilon_{\text{rel}}$  zwischen den Gleichungen (3.43) und (3.44) entlang der  $r$ -Richtung

**Abbildung 3.5:** Verschiebungen aufgrund eines parabolischen Druckfeldes – Vergleich von Gleichung (3.44) mit Johnson [119]

### Thermisches Teilmodell – transient

Für eine rechteckige Wärmequelle  $q_0$  mit der Länge  $2l_a$  und der Breite  $2l_b$  leitet Jaeger [114] das Temperaturfeld

$$\frac{2\pi K}{2a} \frac{\theta_J}{q_0} = \int_0^{\frac{v^2 t}{2\kappa}} \frac{\sqrt{\pi \kappa e^{-\frac{v^2 z^2}{8\kappa^2 s}}}}{2av\sqrt{2s}} \left( \Theta_J \Big|_{\substack{X=x+l_a \\ Y=y+l_b}} + \Theta_J \Big|_{\substack{X=x-l_a \\ Y=y-l_b}} - \Theta_J \Big|_{\substack{X=x-l_a \\ Y=y+l_b}} - \Theta_J \Big|_{\substack{X=x+l_a \\ Y=y-l_b}} \right) ds \quad (3.45)$$

mit

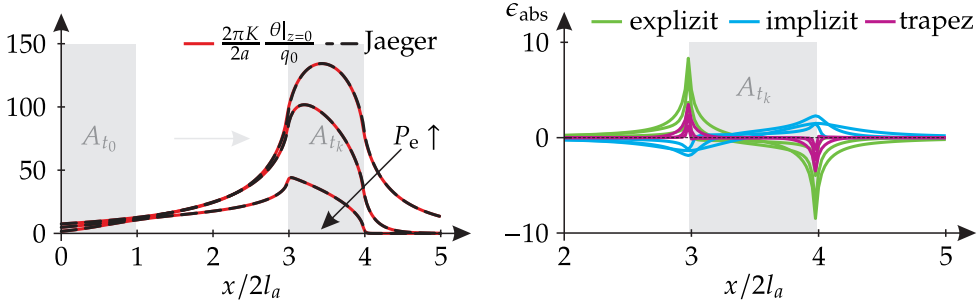
$$\Theta_J = \operatorname{erf} \left( \frac{vX + 2\kappa s}{\sqrt{8\kappa^2 s}} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{vY}{\sqrt{8\kappa^2 s}} \right)$$

her. Die Wärmequelle bewegt sich dabei mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in positive  $x$ -Richtung und Gleichung (3.45) ist im wärmequellfesten Koordinatensystem angegeben.

Für den beliebigen Wärmestromverlauf eines zunächst einzelnen Elementes in Abbildung 3.3(a) wird das Temperaturfeld

$$\frac{2\pi K}{2a} \theta \Big|_{\substack{z=0 \\ t=k\Delta t}} = \bar{T}_q \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=k\Delta t}} q_{t_0}^{t_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{T}_q \Big|_{\substack{t=(k-i)\Delta t \\ t_h=(k-i)\Delta t}} \left( q_{t_i}^{t_{i+1}} - q_{t_{i-1}}^{t_i} \right)$$

als Superposition in der Zeit von Gleichung (3.26) für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  berechnet. Dafür wird ausgenutzt, dass sich die benötigten



(a) Vergleich von Gleichung (3.46) mit Jaeger [114] für die Diskretisierungsvariante (3.41)

(b) Absoluter Fehler  $\epsilon_{\text{abs}}$  zwischen den Gleichungen (3.45) und (3.46) für die unterschiedlichen Diskretisierungsvarianten (3.37), (3.39) und (3.41)

**Abbildung 3.6:** Temperaturfelder aufgrund einer rechteckigen Wärmequelle – Vergleich von Gleichung (3.46) mit Jaeger [114] für die verschiedenen Péclet-Zahlen  $P_e = 0.01, 0.1, 1$  nach einem Gleitweg von  $6l_a$

Einflussfunktionen zu den Zeitpunkten  $t = k\Delta t$  für einen Wärmestrom mit der Zeitdauer  $t_h = h\Delta t$  durch

$$\bar{T}_q \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=h\Delta t}} = \bar{T}_q \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=k\Delta t}} - \bar{T}_q \Big|_{\substack{t=(k-h)\Delta t \\ t_h=(k-h)\Delta t}}$$

ausdrücken lassen. Die Einflussfunktion  $\bar{T}_q$  ist dadurch in Zeitschritt  $t_k$  bereits für alle vorherigen Zeitschritte bekannt. Die Differenzen  $\Delta q_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} = q_{t_i}^{t_{i+1}} - q_{t_{i-1}}^{t_i}$  sind identisch null, wenn sich der Wärmestrom im jeweiligen Zeitschritt nicht ändert. Die Gesamtlösung ergibt sich durch eine zusätzlich Superposition im Raum

$$\frac{2\pi K}{2a} \theta \Big|_{\substack{z=0 \\ t=k\Delta t}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \bar{T}_q \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=k\Delta t}} q_{t_0}^{t_1} \Big|_{\substack{\xi=m \\ \eta=n}} + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{T}_q \Big|_{\substack{t=(k-i)\Delta t \\ t_h=(k-i)\Delta t}} \Delta q_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \Big|_{\substack{\xi=m \\ \eta=n}} \right). \quad (3.46)$$

Die Auswertung von Gleichung (3.46) erfordert die Kenntnis der Kontaktfläche zu jedem Zeitschritt, da dort der Wärmeeintrag stattfindet.

Gleichung (3.45) wird in Abbildung 3.6(a) nach einem Gleitweg von  $6l_a$  für die verschiedenen Péclet-Zahlen  $P_e = 0.01, 0.1, 1$  mit Gleichung (3.46) verglichen und zeigt eine gute Übereinstimmung. Der Wärmestrom wird dafür entsprechend Gleichung (3.41) trapezförmig diskretisiert und die halbe Elementlänge zu  $a = l_a/41$  gewählt. Die grauen Bereiche kennzeichnen die Kontaktfläche zu den Zeitpunkten  $t = t_0$  und  $t = t_k$ . In jedem inkrementellen Zeitschritt bewegt sich die Kontaktfläche  $A_{t_i}$  mit  $\Delta\xi = 1$  nach rechts bis sie schließlich ihre aktuelle Position erreicht. Entsprechend wandert

auch der Wärmeeintrag für Gleichung (3.46). Die Kurvenverläufe zeigen, dass eine Temperaturerhöhung für höhere Péclet-Zahlen nur dort vorzufinden ist, wo ein Wärmeeintrag bereits stattgefunden hat. Für kleinere Péclet-Zahlen erhöht sich die Temperatur hingegen auch in den anderen Oberflächenbereichen. Der Zusammenhang zwischen Gleitgeschwindigkeit und Péclet-Zahl lässt sich somit bereits aus der Anschauung erkennen. Im späteren Verlauf der Arbeit beeinflusst die Gleitgeschwindigkeit zudem die Menge des Wärmeeintrags, sodass die Absolutwerte der Kurvenverläufe in Abbildung 3.6(a) dementsprechend zu interpretieren sind. Da außerdem die Kontaktfläche  $\Gamma_{ic}(t_i)$  am Ende des jeweiligen Zeitschrittes in der Regel nicht im Voraus bekannt ist, wird bei thermomechanischen Kontaktsimulationen ein iteratives Verfahren unvermeidbar sein. Die Güte der drei Diskretisierungsvarianten (3.37), (3.39) und (3.41) wird für die Péclet-Zahlen  $P_e = 0.01, 0.1, 1$  durch den absoluten Fehler  $\epsilon_{abs} = \pi K (\theta|_{z=0} - \theta_j) / a q_0$  zwischen den Gleichungen (3.45) und (3.46) in Abbildung 3.6(b) verglichen. Der Vergleich legt für diesen Bereich an Péclet-Zahlen eine trapezförmige Diskretisierung entsprechend Gleichung (3.41) nahe, da hierbei lediglich beim Übergang in und aus der Kontaktzone ein Fehler entsteht.

### Thermisches Teilmodell – stationär

Für eine runde Wärmequelle  $q(x, y) = q_0$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  leitet Johnson [119] das stationäre Temperaturfeld

$$\frac{2\pi K}{2a} \frac{\hat{\theta}|_{z=0}}{q_0} = \begin{cases} \frac{2r_a}{a} I_2 \left( \frac{r^2}{r_a^2} \right) & \text{für } r \leq r_a, \\ \frac{2r}{a} \left( I_2 \left( \frac{r_a^2}{r^2} \right) - \left( 1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) I_1 \left( \frac{r_a^2}{r^2} \right) \right) & \end{cases} \quad (3.47)$$

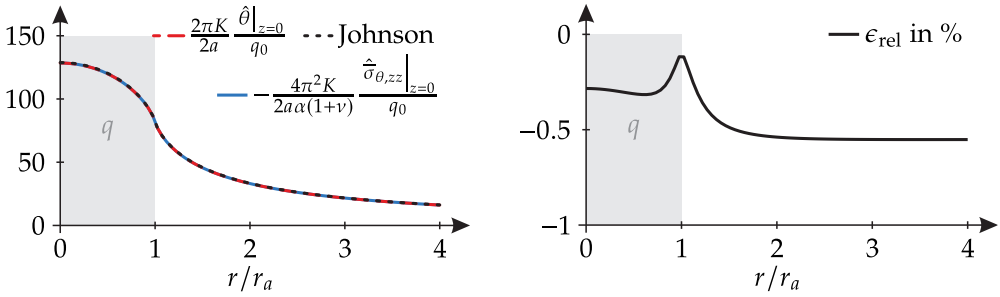
her, wobei  $I_1$  und  $I_2$  die jeweils kompletten elliptischen Integrale erster und zweiter Art bezeichnen.

Für den Fall einer stehenden Wärmequelle  $q(\xi, \eta)$  wird das stationäre Temperaturfeld

$$\frac{2\pi K}{2a} \hat{\theta}|_{z=0} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta) q(\xi - m, \eta - n) \quad (3.48)$$

für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  als Superposition im Raum von Gleichung (3.28) erhalten.

Die analytische Lösung von Johnson [119] wird in Abbildung 3.7(a) mit Gleichung (3.48) verglichen und zeigt eine gute Übereinstimmung. Der relative Fehler  $\epsilon_{rel}$  zwischen den Gleichungen (3.47) und (3.48) ist in Abbildung 3.7(b) dargestellt.



(a) Vergleich von den Gleichungen (3.48) und (3.56) mit Johnson [119] entlang der  $r$ -Richtung (b) Relativer Fehler  $\epsilon_{rel}$  zwischen den Gleichungen (3.47) und (3.48) entlang der  $r$ -Richtung

Abbildung 3.7: Stationäre Temperaturerhöhung aufgrund einer runden Wärmequelle – Vergleich von Gleichungen (3.48) mit Johnson [119]

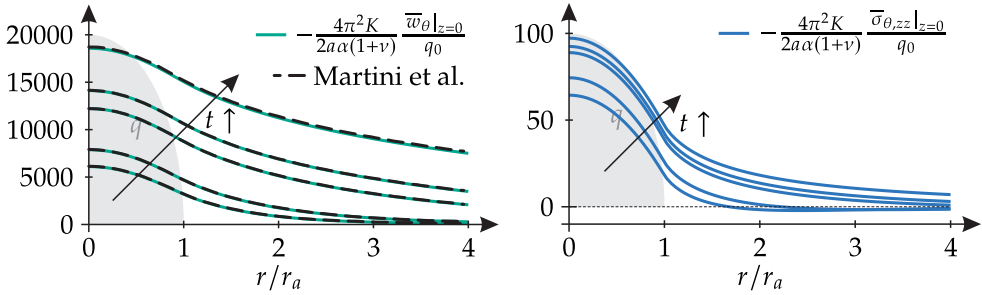
### Thermoelastisches Teilmodell – transient

Für eine parabolischen Wärmequelle  $q = q_0 (1 - r^2/r_a^2)^{1/2}$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  berechnen Martini et al. [163] die thermoelastischen Verschiebungen mittels Faltung der zugehörigen Fundamentallösung im Bildbereich numerisch. Die Autoren müssen dafür die Diskretisierung im Frequenzbereich verachtfachen, um den numerischen Fehler zu minimieren. Der Lastfall entspricht Fall 3 aus Abschnitt 3.1.3 für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Für einen beliebigen Wärmestrom  $q(\xi, \eta, t)$  werden zunächst die dimensionslosen Spannungen

$$\bar{\sigma}_{\theta,zz}|_{z=0} = \frac{2a\alpha(1+\nu)}{4\pi^2 K} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \bar{S}_{zz} \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=k\Delta t \\ \xi=m \\ \eta=n}} q_{t_0}^{t_1} \Big|_{\substack{\xi=-m \\ \eta=-n}} + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{S}_{zz} \Big|_{\substack{t=(k-i)\Delta t \\ t_h=(k-i)\Delta t \\ \xi=m \\ \eta=n}} \Delta q_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \Big|_{\substack{\xi=-m \\ \eta=-n}} \right) \quad (3.49)$$

für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  als Superposition im Raum und in der Zeit von Gleichung (3.25) berechnet. Auch hier wird ausgenutzt, dass sich die



(a) Vergleich von Gleichung (3.50) mit Martini et al. [163] entlang der  $r$ -Richtung

(b) Zugehörige Spannungen von Gleichung (3.49) entlang der  $r$ -Richtung

**Abbildung 3.8:** Thermoelastische Verschiebungen aufgrund einer parabolischen Wärmequelle – Vergleich von Gleichung (3.50) mit Martini et al. [163] für die verschiedenen Zeitdauern des Wärmeeintrags  $t_h = 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5$  s

benötigten Einflussfunktionen zu den Zeitpunkten  $t = k\Delta t$  und für einen Wärmestrom mit der Zeitdauer  $t_h = h\Delta t$  durch

$$\bar{S}_{zz} \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=h\Delta t}} = \bar{S}_{zz} \Big|_{\substack{t=k\Delta t \\ t_h=k\Delta t}} - \bar{S}_{zz} \Big|_{\substack{t=(k-h)\Delta t \\ t_h=(k-h)\Delta t}}$$

ausdrücken lassen. Die Einflussfunktion  $\bar{S}_{zz}$  ist dadurch in Zeitschritt  $t_k$  bereits für die vorherigen Zeitschritte bekannt. Die Differenzen  $\Delta q_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} = q_{t_i}^{t_{i+1}} - q_{t_{i-1}}^{t_i}$  sind identisch null, falls sich der Wärmeeintrag im jeweiligen Zeitschritt nicht ändert. Die anschließende Superposition im Raum von Gleichung (3.12) ergibt die dimensionslosen thermoelastischen Verschiebungen

$$\bar{w}_\theta \Big|_{\substack{z=0 \\ t=k\Delta t}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta) \bar{\sigma}_{\theta,zz} \Big|_{\substack{z=0 \\ t=k\Delta t}}(\xi - m, \eta - n), \quad (3.50)$$

die aufgrund eines beliebigen Wärmestromverlaufs  $q(\xi, \eta, t)$  resultieren und für deren Berechnung die Kontaktfläche in jedem Zeitschritt bekannt sein muss. Als Diskretisierungsvariante wird auch hier Gleichung (3.41) gewählt.

Der Vergleich von Gleichung (3.50) mit den numerischen Lösungen von Martini et al. [163] in Abbildung 3.8(a) zeigt für die verschiedenen Zeitdauern des Wärmeeintrags  $t_h = 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5$  s und die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa = 3.45e-6$  m<sup>2</sup>/s eine gute Übereinstimmung. Die Ergebnisse der Autoren wurden graphisch reproduziert. Die zugehörigen Spannungen von Gleichung (3.49) werden im Abbildung 3.8(b) dargestellt.

### Thermoelastisches Teilmodell – stationär

Für eine runde Wärmequelle  $q = q_0$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  gibt Johnson [119] das stationäre, thermoelastische Verschiebungsfeld

$$\frac{4\pi^2 K}{2a\alpha(1+\nu)} \frac{\hat{w}_{\theta,rel}|_{z=0}}{q_0} = \begin{cases} -\frac{\pi^2 r_a^2}{4a^2} \left( 2 \ln \left( \frac{r_0}{r_a} \right) + 1 - \frac{r^2}{r_a^2} \right) & \text{für } r \leq r_a, \\ -\frac{\pi^2 r_a^2}{2a^2} \ln \left( \frac{r_0}{r} \right) & \end{cases} \quad (3.51)$$

an, worin  $r_0 = (x_r^2 + y_r^2)^{1/2}$  einen beliebigen Referenzpunkt auf der Oberfläche bezeichnet.

Die dimensionslosen, stationären thermoelastischen Verschiebungen

$$\hat{w}_{\theta,rel}|_{z=0} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta) \left( \hat{\sigma}_{\theta,zz} \Big|_{\substack{\xi-m \\ \eta-n \\ z=0}}^{\xi-m} - \hat{\sigma}_{\theta,zz} \Big|_{\substack{\xi_r-m \\ \eta_r-n \\ z=0}}^{\xi_r-m} \right) \quad (3.52)$$

aufgrund einer stehenden Wärmequelle  $q(\xi, \eta)$  ergeben sich für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  durch eine Superposition im Raum von Gleichung (3.12).  $\xi_r$  und  $\eta_r$  bezeichnen einen beliebigen Referenzpunkt auf der Oberfläche. Dieser garantiert, dass die Summe in Gleichung (3.52) endlich bleibt. Die benötigten dimensionslosen, stationären Spannungen

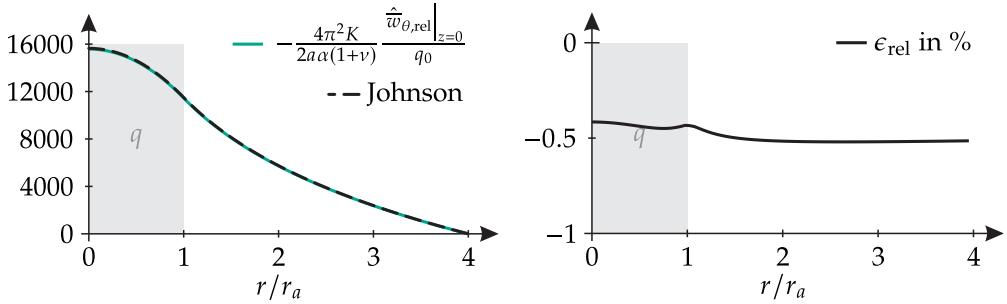
$$\hat{\sigma}_{\theta,zz} \Big|_{z=0} = -\frac{2a\alpha(1+\nu)}{4\pi^2 K} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta) q(\xi - m, \eta - n) \quad (3.53)$$

werden durch eine Superposition im Raum von Gleichung (3.27) erhalten.

Abbildung 3.9(a) vergleicht die analytischen Ergebnisse von Johnson [119] mit Gleichung (3.52) (in diesem Fall wird  $r_0 = 4r_a$  gewählt) und zeigt eine gute Übereinstimmung. Die zugehörigen Spannungen aus Gleichung (3.53) werden in Abbildung 3.7(a) dargestellt und fallen mit der stationären Temperaturverteilung aufgrund einer runden Wärmequelle zusammen. Der relative Fehler  $\epsilon_{rel}$  zwischen den Gleichungen (3.51) und (3.52) ist in Abbildung 3.9(b) gezeigt.

Einen Nachweis für die Divergenz der diskreten, linearen Faltungssumme in Gleichung (3.52) ohne Referenzpunkt liefert beispielsweise das Konvergenzkriterium von Bertrand. Dafür wird zunächst eine Abschätzung der stationären thermoelastischen Verschiebung aus Gleichung (3.52) ohne Referenzpunkt

$$-\frac{4\pi^2 K}{2a\alpha(1+\nu)} \frac{\hat{w}_{\theta}}{q_{\square}} \Big|_{z=0} (0, 0, \beta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta)^2 > \bar{C}_{zz}(0, 0, \beta)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$



(a) Vergleich von Gleichung (3.52) mit Johnson [119] (b) Relativer Fehler  $\epsilon_{rel}$  zwischen den Gleichungen (3.51) und (3.52) entlang der  $r$ -Richtung

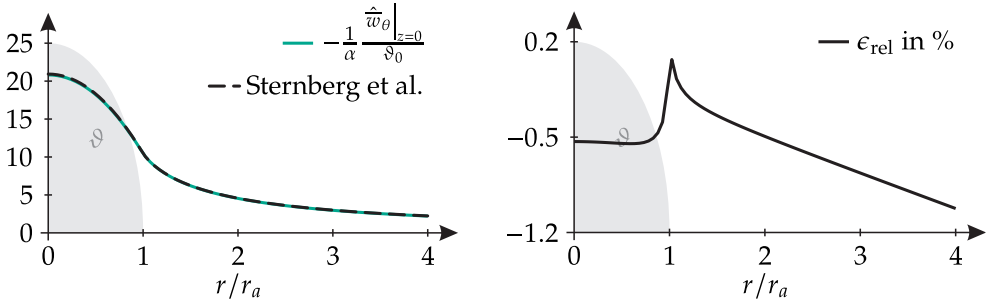
**Abbildung 3.9:** Stationäre thermoelastische Verschiebungen aufgrund einer runden Wärmequelle – Vergleich von Gleichung (3.52) mit Johnson [119]

mit  $a_k = 8k\bar{C}_{zz}(k, k, \beta)^2$  getroffen. Mit dem Konvergenzkriterium von Bertrand divergiert die Summe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und damit auch die stationäre thermoelastische Verschiebung  $\hat{w}_{\theta}|_{z=0}$ , falls wie im vorliegenden Fall  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k < 1$  mit  $b_k = k \ln(k) \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) - \ln(k)$  gilt. Dies lässt sich durch das Einsetzen der beteiligten Größen leicht zeigen.

Für ein parabolisches Temperaturfeld  $\theta = \vartheta_0 \left( 1 - r^2/r_a^2 \right)^{1/2}$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  leiten Sternberg und McDowell [232] die stationären thermoelastischen Verschiebungen

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\hat{w}_{\theta}}{\vartheta_0} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -\frac{\pi r_a(1+\nu)}{16a} \left( 2 - \frac{r^2}{r_a^2} \right) \\ -\frac{r_a(1+\nu)}{8a} \left( \left( 2 - \frac{r^2}{r_a^2} \right) \arcsin\left(\frac{r_a}{r}\right) + \sqrt{\frac{r^2}{r_a^2} - 1} \right) \end{cases} \quad \text{für } r \leq r_a, \quad (3.54)$$

her. Dieser Lastfall ist vergleichbar mit Fall 4 aus Abschnitt 3.1.3 für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mit Ausnahme der physikalischen Vorfaktoren fällt das Verschiebungsfeld zudem strukturell mit den Verschiebungen aufgrund eines parabolischen Druckfeldes in Gleichung (3.43) zusammen.



(a) Vergleich von Gleichung (3.55) mit Sternberg und McDowell [232] entlang der  $r$ -Richtung (b) Relativer Fehler  $\epsilon_{\text{rel}}$  zwischen den Gleichungen (3.54) und (3.55) entlang der  $r$ -Richtung

**Abbildung 3.10:** Thermoelastische Verschiebungen aufgrund eines runden Temperaturfeldes – Vergleich von Gleichung (3.55) mit Sternberg und McDowell [232]

Die aufgrund eines stationären Temperaturfeldes  $\theta(\xi, \eta)$  resultierenden, dimensionslosen, stationären thermoelastischen Verschiebungen

$$\begin{aligned} \hat{w}_\theta \Big|_{z=0} &= -\frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zz}(m, n, \beta) \theta(\xi - m, \eta - n) \\ &+ \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zx}(m, n, \beta) \hat{\tau}_{\theta, xz} \Big|_{z=0}(\xi - m, \eta - n) \\ &+ \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{zy}(m, n, \beta) \hat{\tau}_{\theta, yz} \Big|_{z=0}(\xi - m, \eta - n) \end{aligned} \quad (3.55)$$

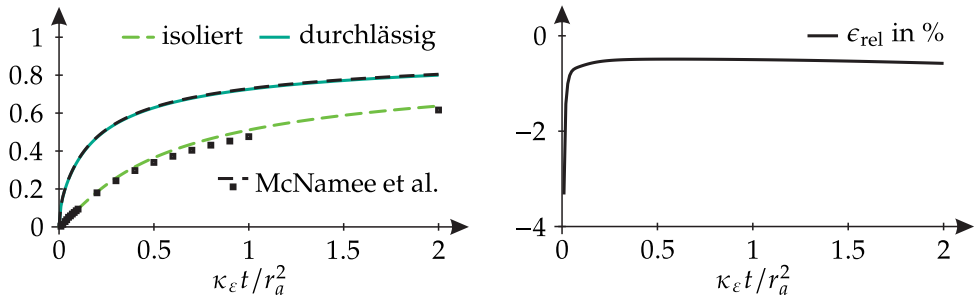
werden für die einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  durch eine Superposition im Raum von den Gleichungen (3.10), (3.11) und (3.36) erhalten. Die benötigten dimensionslosen, stationären Scherspannungen

$$\hat{\tau}_{\theta, xz} \Big|_{z=0} = \frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{T}_{zx}(m, n, \beta) \theta(\xi - m, \eta - n), \quad (3.56)$$

$$\hat{\tau}_{\theta, yz} \Big|_{z=0} = \frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{T}_{zy}(m, n, \beta) \theta(\xi - m, \eta - n) \quad (3.57)$$

resultieren aus einer Superposition im Raum von den Gleichungen (3.34) und (3.35). Abbildung 3.10(a) vergleicht die analytischen Ausdrücken von Sternberg und McDowell [232] mit Gleichung (3.55) für die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$ . Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung. Im Gegensatz zu den stationären thermoelastischen Verschiebungen aufgrund eines Wärmestroms bleibt das Verschiebungsfeld hier





(a) Transiente relative Verschiebungen in der Mitte eines runden Druckfeldes im Vergleich zu McNamee und Gibson [167] (b) Relativer Fehler  $\epsilon_{\text{rel}}$  für den Fall einer wärmedurchlässigen Oberfläche im Vergleich zu Gleichung (3.58)

**Abbildung 3.11:** Relative Verschiebungen aufgrund eines parabolischen Druckfeldes für den Fall einer wärmeisolierten und einer wärmedurchlässigen Oberfläche – Vergleich mit McNamee und Gibson [167]

beschränkt und es wird kein Referenzpunkt benötigt. Der relative Fehler  $\epsilon_{\text{rel}}$  zwischen den Gleichungen (3.54) und (3.55) ist in Abbildung 3.10(b) dargestellt.

### Thermoelastisches Teilmodell – transient

Für den Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow \infty$  leiten McNamee und Gibson [167] die transienten, relativen Vertikalverschiebungen

$$\frac{2\mu}{p_0 r_a} (w - w|_{t=0})|_{r=0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{4\tau}}\right) + \sqrt{\frac{4\tau}{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{1}{4\tau}}\right) \quad (3.58)$$

in der Mitte eines runden Druckfeldes  $p = p_0$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  für den Fall einer wärmeisolierten Oberfläche und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0$  her. Hierbei bezeichnet  $\tau$  die dimensionslose Zeit. Die Autoren berechnen ebenfalls die Oberflächenverschiebungen für den Fall einer wärmeisolierten Oberfläche durch numerische Integration. Sie erhalten die Ergebnisse dabei im Rahmen ihrer Forschungen zu fluiddurchströmten, porösen Festkörpern. Die zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen sind strukturell mit den Verschiebungs- und Wärmeleitungsgleichungen identisch, weshalb der hier vorgenommene Übertrag auf thermoelastische Größen stattfinden kann. Weitere Informationen hierzu und insbesondere auch zu der von McNamee und Gibson [167] angewendeten Theorie des voll-gesättigten, porösen Festkörpers können in Anhang A gefunden werden.

Die vorliegenden Lastfälle entsprechen den Fällen 1 und 2 aus Abschnitt 3.1.3. Für die dort beschriebene Vorgehensweise werden die Diskretisierungsvarianten aus den Gleichungen (3.41) und (3.42) gewählt und eine halbe Elementlänge von  $a =$

$r_a/101$  verwendet. Der Vergleich der erhaltenen transienten, relativen Verschiebungen  $2\mu(w - w|_{t=0})/p_0 r_a$  mit den Ergebnissen von McNamee und Gibson [167] in Abbildung 3.11(a) zeigt für  $E = 1 \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0$ ,  $K = 1 \text{ J/msK}$ ,  $T_0 = 1 \text{ K}$  und  $\alpha = 1/\text{K}$  eine gute Übereinstimmung. Die numerischen Ergebnisse der Autoren wurden graphisch reproduziert. Die geringfügigen Unterschiede werden auf die von den Autoren erwähnten, numerischen Schwierigkeiten zurückgeführt. Der relative Fehler  $\epsilon_{\text{rel}}$  im Vergleich zu Gleichung (3.58) ist für den Fall einer wärmedurchlässigen Oberfläche in Abbildung 3.11(b) dargestellt.

### 3.2.3 Diskussion des Kopplungseinflusses

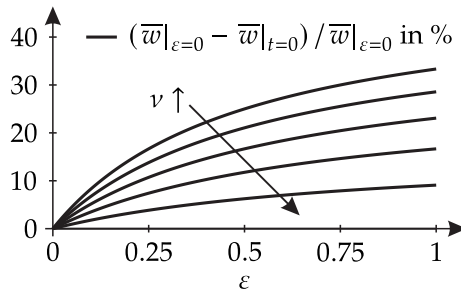
Für die voll-gekoppelten, quasi-statischen Gleichungen konnten keine analytischen Lösungen in der Literatur gefunden werden. Da ebenfalls keine numerischen Berechnungen für repräsentative Lastfälle im Kontext der Kontaktmechanik aufzufinden waren, soll im Folgenden eine Berechnung durch die in Abschnitt 3.1.3 vorgeschlagene Vorgehensweise erfolgen. Dabei ist insbesondere von Interesse, ob eine Vernachlässigung des Gough-Joule-Effektes durch  $\epsilon \rightarrow 0$  für den hier behandelten Kontakt rauer Oberflächen gerechtfertigt ist.

Eine erste Abschätzung für Lastfälle mit einer Druckbelastung liefert bereits die aus Gleichung (3.12) hergeleitete relative Differenz

$$\frac{\bar{w}|_{\epsilon=0} - \bar{w}|_{t=0}}{\bar{w}|_{\epsilon=0}} = \frac{(1 - 2\nu) \epsilon}{1 + 2(1 - \nu) \epsilon} \quad (3.59)$$

zwischen den instantanen Verschiebungsfeldern im Falle der einseitigen und der voll-gekoppelten Theorie, die bei einer Vernachlässigung des Gough-Joule-Effektes mit  $\epsilon \rightarrow 0$  auftritt. Die instantanen Verschiebungen  $\bar{w}|_{t=0}$  für eine wärmeisolierte und eine wärmedurchlässige Oberfläche sind dabei gleich. Die in Abbildung 3.12 dargestellten Verläufe zeigen eine Verringerung der instantanen Verschiebung  $\bar{w}|_{t=0}$  mit zunehmendem Kopplungsparameter  $\epsilon$ , wobei die relative Differenz für  $\epsilon \rightarrow \infty$  gegen  $(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)$  konvergiert.

Die Materialparameter werden zu  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $K = 40 \text{ J/msK}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_d = 460 \text{ J/kgK}$  und  $\alpha = 12\text{e-}6 \text{ 1/K}$  gewählt, woraus der Kopplungsparameter  $\epsilon \approx 0.011 \ll 1$  mit einer Referenztemperatur  $T_0 = 293.15 \text{ K}$  folgt. Für die aufgeführten Materialparameter ergibt sich der relative Fehler aus Gleichung (3.59) zu etwa 0.43 % und fällt damit bereits sehr gering aus. Für wärmeisolierte Oberflächen lassen sich zudem durch die Gleichungen (3.13)-(3.15) grundsätzliche Abschätzungen der instantanen Temperaturerhöhung in Abhängigkeit von der Oberflächenbelastung erhalten. Die transienten Auswirkungen können jedoch nur durch numerische Simulationen berechnet werden. Durch die verringerte Temperaturleitfähigkeit  $\kappa_\epsilon = \kappa/(1 + \epsilon)$  lässt



**Abbildung 3.12:** Relative Differenz zwischen den instantanen Verschiebungsfeldern bei voll-gekoppelten und einseitig gekoppelten Gleichungen aus Gleichung (3.59) für den Fall einer wärmeisolierten und einer wärmedurchlässigen Oberfläche bei Druckbelastung für die Querkontraktionszahlen  $\nu = 0, 0,1, \dots, 0,4$

sich immerhin schließen, dass die stationären Zustände im Vergleich zu den einseitig gekoppelten Gleichungen später erreicht werden.

Im Folgenden sollen die Fälle 1-4 aus Abschnitt 3.1.3 für nicht-periodische, parabolische Lasten vorgestellt werden. Für die numerischen Simulationen wird dafür die halbe Elementlänge zu  $a = r_a/101$  gewählt, was zu der Péclet-Zahl  $Pe \approx 0.0392$  führt. Erneut werden die Diskretisierungsvarianten aus den Gleichungen (3.41) und (3.42) verwendet. Als Abbruchkriterium für den iterativen Lösungsprozess wird eine relative Toleranz des Verschiebungsfeldes von  $\epsilon_{\text{rel}} = 10^{-6}$  festgelegt.

Abbildung 3.13 zeigt einige Ergebnisse für die Fälle 1 und 2 aus Abschnitt 3.1.3 aufgrund eines parabolischen Druckfeldes  $p = p_0 (1 - r^2/r_a^2)^{1/2}$  mit  $p_0 = 1$  GPa sowie  $r_a = 0.5$  mm. Der zeitliche Verlauf der dimensionslosen Relativverschiebung  $2\mu (w - w|_{t=0}) / p_0 r_a$  in der Mitte des Druckfeldes ist in Abbildung 3.13(a) sowohl für eine wärmeisolierte als auch für eine wärmedurchlässige Oberfläche dargestellt. Abbildung 3.13(b) zeigt den Temperaturanstieg auf der Oberfläche für den Fall einer wärmeisolierten Oberfläche entlang der  $r$ -Richtung zu den dimensionslosen Zeitpunkten  $\tau = 0, 0,1, 0,5, 2$ . In Abbildung 3.13(d) ist die zugehörige transiente Temperaturerhöhung in der Mitte des Druckfeldes skizziert, das entstehende Temperaturfeld konvergiert mit fortschreitender Zeit gegen null. Im gesamten Halbraum entsteht instantan ein Temperaturfeld, dessen Gradient den Verschiebungen entgegenwirkt. An der Oberfläche hat es gemäß dem Gough-Joule-Effekt die gleiche Form wie das Druckfeld selbst. Der verbleibende Wärmestrom auf der Oberfläche verändert das Temperaturfeld des Halbraums mit der Zeit und verursacht die transienten und zeitverzögerten Verschiebungen. In der Literatur ist dieses Phänomen auch als thermoelastische Dämpfung bekannt [33]. Das überlagerte Temperaturfeld im Falle einer wärmedurchlässigen Oberfläche verursacht ebenfalls zeitverzögerte Verschiebungen, lässt aber die Oberflächentemperatur unverändert. Dies führt zu einem geringfügig unterschiedlichen Verschiebungsverlauf. Die dimensionslo-

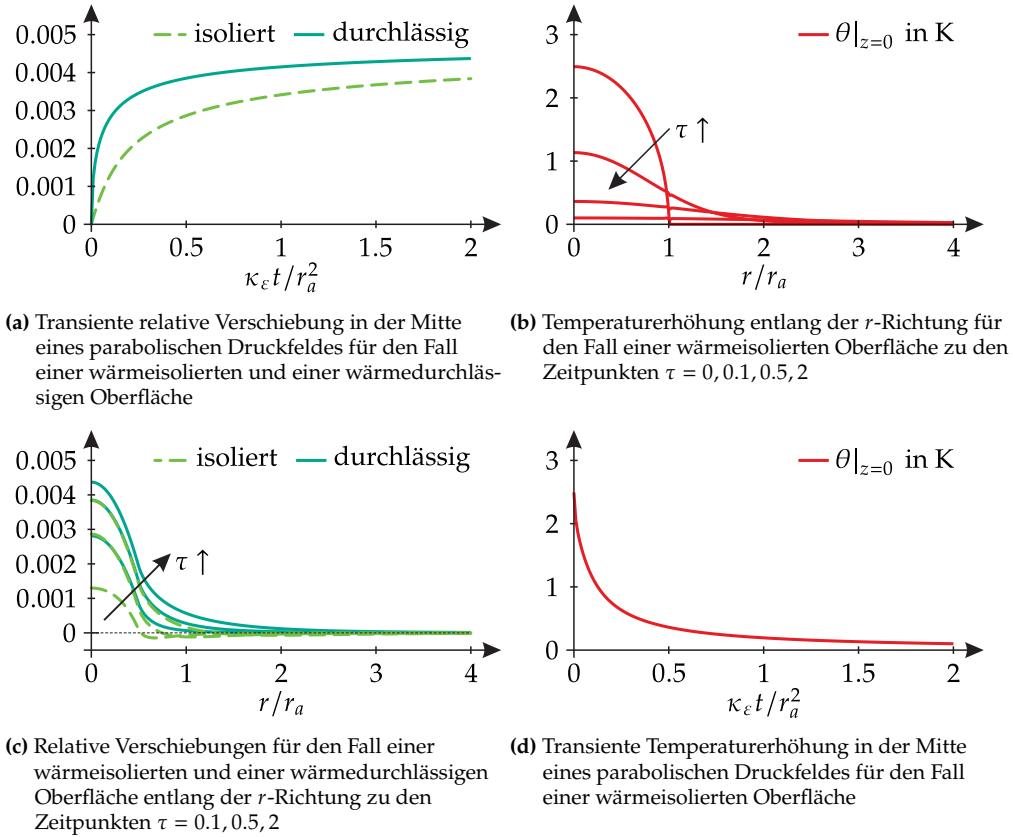
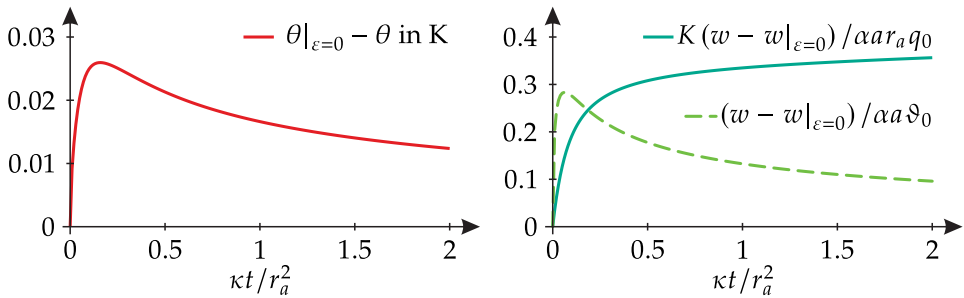


Abbildung 3.13: Relative Verschiebungen  $2\mu(w - w|_{t=0})/p_0r_a$  und Temperaturen für die Fälle 1 und 2 aus Abschnitt 3.1.3 aufgrund eines parabolischen Druckfeldes

sen Relativverschiebungen  $2\mu(w - w|_{t=0})/p_0r_a$  sind für die Zeitpunkte  $\tau = 0.1, 0.5, 2$  und den Fall einer wärmeisolierten und einer wärmedurchlässigen Oberfläche entlang der  $r$ -Richtung in Abbildung 3.13(c) dargestellt.

Einige Ergebnisse für die Fälle 3 und 4 aus Abschnitt 3.1.3 aufgrund eines parabolischen Wärmestroms  $q = q_0(1 - r^2/r_a^2)^{1/2}$  sowie aufgrund eines parabolischen Temperaturfeldes  $\vartheta = \vartheta_0(1 - r^2/r_a^2)^{1/2}$  mit  $q_0 = 1 \text{ MJ/sm}^2$  und  $\vartheta_0 = 100 \text{ K}$  sind in Abbildung 3.14 dargestellt. Der Temperaturanstieg  $\theta$  im Zentrum der Wärmequelle wird mit der Temperatur  $\theta|_{\varepsilon=0}$  für den einseitig gekoppelten Fall in Abbildung 3.14(a) verglichen. Die Auswirkungen der verringerten Temperaturleitfähigkeit  $\kappa_\varepsilon$  sind deutlich sichtbar und führen zunächst zu einer steigenden und dann zu einer sinkenden Temperaturdifferenz  $\theta|_{\varepsilon=0} - \theta$ , sobald sich das Temperaturfeld an der Oberfläche dem stationären Zustand nähert. Abbildung 3.14(b) stellt die entsprechenden dimen-



(a) Relative Temperaturerhöhung in der Mitte eines parabolischen Wärmestroms (b) Relative Verschiebungen in der Mitte eines parabolischen Wärmestroms/Temperaturfeldes

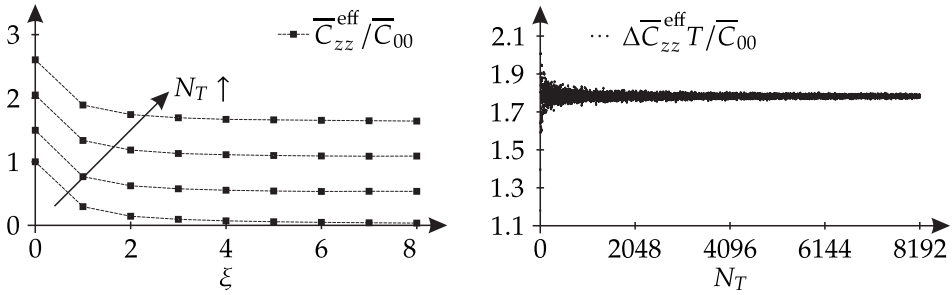
**Abbildung 3.14:** Relative Temperaturerhöhung und Verschiebungen für die Fälle 3 und 4 aus Abschnitt 3.1.3

sionslosen Relativverschiebungen  $K(w - w|_{\epsilon=0}) / \alpha r_a q_0$  im Zentrum der Quelle dar. Die Verschiebungen wachsen aufgrund ihrer Abhängigkeit vom Temperaturfeld im Halbraum an, das sich im gekoppelten Fall langsamer ausbildet. Des Weiteren sind auch die dimensionslosen, relativen Verschiebungen  $(w - w|_{\epsilon=0}) / \alpha a \vartheta_0$  für den Fall 4 in der Abbildung 3.14(b) dargestellt. Da die thermoelastischen Verschiebungen für diesen Fall einen stationären Zustand besitzen, kann hier zunächst ein Anwachsen und anschließend erneut eine Annäherung der Lösungen beobachtet werden.

Der Einfluss des Gough-Joule-Effektes auf die Verschiebungs- und Temperaturfelder ist in allen vier Beispielen vergleichsweise klein. Der Übergang zu den einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\epsilon \rightarrow 0$  erscheint daher für den gewählte Parametersatz gerechtfertigt. Für Lastfälle, die eine Druckbelastungen auf der Oberfläche einschließen, kann eine Abschätzung des durch die Vernachlässigung verursachten Fehlers mithilfe von Gleichung (3.59) erfolgen. So lassen sich auch für die Werkstoffe Aluminium ( $\bar{w}|_{\epsilon=0} - \bar{w}|_{t=0} / \bar{w}|_{\epsilon=0} \approx 0.89\%$ ,  $\epsilon \approx 0.031$  bei  $T_0 = 293.15$  K) und Kupfer ( $\bar{w}|_{\epsilon=0} - \bar{w}|_{t=0} / \bar{w}|_{\epsilon=0} \approx 0.59\%$ ,  $\epsilon \approx 0.019$  bei  $T_0 = 293.15$  K) keine nennenswerten Unterschiede feststellen. Für transiente Auswirkungen muss auf eine numerische Auswertung zurückgegriffen werden.

### 3.2.4 Auswirkungen des Einflussradius bei periodischen Lastfällen

Die bisherigen Ausführungen haben sich auf nicht-periodische Lastfälle beschränkt, was nicht zuletzt aufgrund von realen Anwendungen sinnvoll erscheint. Bei Modellierungen, die einen repräsentativen Ausschnitt der Oberfläche beinhalten, können periodische Randbedingungen dennoch von Vorteil sein. Aus diesem Grund sollen im Folgenden die Auswirkungen des in Abschnitt 2.2.2 eingeführten Einflussradius  $r_{oi}$  bei periodischen



(a) Effektive Einflussfunktion  $\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  für verschiedene Einflussradien  $r_{oi} = N_T T$  mit  $N_T = 0, 5, 10, 15$  und einer Periodendauer  $T = 16$

(b) Skalierte Änderung  $\Delta \bar{C}_{zz}^{\text{eff}} T / \bar{C}_{00}$  der effektiven Einflussfunktion aus Gleichung (3.61) bei  $\xi = \eta = 0$  und größer werdendem Einflussradius  $r_{oi} = N_T T$

Abbildung 3.15: Auswirkung von Periodendauer  $T$  und Einflussradius  $r_{oi} = N_T T$  auf die effektive Einflussfunktion  $\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$

Lastfällen diskutiert werden. Dafür wird die effektive Einflussfunktion  $\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$  für die Berechnung der dimensionslosen Oberflächenverschiebungen

$$\bar{w}|_{z=0} = \bar{C}_{zz}^{\text{eff}}(\xi, \eta, \beta, T, r_{oi}) \bar{p}_{\square} \quad (3.60)$$

verwendet, die die Auswirkungen eines sich mit der Periodendauer  $T = (T_x, T_y)^T$  wiederholenden rechteckigen Druckfeldes  $\bar{p}_{\square}$  abbildet (vgl. Gleichung (3.12)). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird dabei von einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausgegangen. Die Einflussfunktion  $\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$  hängt zum einen von der dimensionslosen Periodendauer  $T$  und zum anderen vom dimensionslosen Einflussradius  $r_{oi}$  ab, wobei Letzterer im vorliegenden Beispiel auf ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer  $T_x = T_y = T$  beschränkt sei.

Die effektive Einflussfunktion  $\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$  ist für verschiedene Einflussradien  $r_{oi} = N_T T$  mit  $N_T = 0, 5, 10, 15$  und für die Periodendauer  $T = 16$  entlang der  $\xi$ -Richtung bei  $\eta = 0$  in Abbildung 3.15(a) dargestellt. Die Auswertung erfolgt hierbei nur an den Elementmittelpunkten. Es ist erkennbar, dass das Verschiebungsfeld  $\bar{w}|_{z=0}$  zwar insgesamt für einen größer werdenden Einflussradius  $r_{oi}$  monoton anwächst (und schlussendlich gegen unendlich divergiert), die eigentliche Form jedoch nahezu unverändert bleibt. Dies wurde bereits in Abschnitt 2.2.2 durch die Singularität der Fundamentallösung im Bildbereich in Gleichung (2.31) angedeutet. Dass die Verschiebungen auch für eine beliebige Periodendauer  $T$  bei größer werdendem Einflussradius  $r_{oi}$  divergieren, kann

anhand des streng monotonen Anwachsens der mit der Periodendauer  $T$  skalierten Änderung

$$\Delta \bar{C}_{zz}^{\text{eff}} = \bar{C}_{zz}^{\text{eff}}(\xi, \eta, \beta, T, (n+1)T) - \bar{C}_{zz}^{\text{eff}}(\xi, \eta, \beta, T, nT), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.61)$$

bei  $\xi = \eta = 0$  in Abbildung 3.15(b) gefolgert werden. Gleichung (3.60) lässt außerdem darauf schließen, dass für eine konstante Verschiebung des Ursprungs bei einer Vergrößerung des Einflussradius  $r_{oi}$  ein Druck  $\bar{p}_\square$  notwendig ist, der mit  $1/\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$  skaliert. Für  $r_{oi} \rightarrow \infty$  konvergiert der Druck  $p_\square$  entsprechend gegen null. Der Einflussradius  $r_{oi}$  hat somit einen direkten Einfluss auf das lokale Druckniveau und damit auf das Plastizitätsverhalten. Der in dieser Arbeit eingeführte Einflussradius hat entsprechend vergleichbare Auswirkungen wie die beispielsweise von Yastrebov et al. [259, 260] vorgeschlagene Wahl von  $\omega_1 > 2\pi/T$  für Gleichung (2.6) ohne Verwenden eines Einflussradius.

Da die Einflussfunktionen für thermische Oberflächenbelastungen bei Vorgabe eines Wärmestroms gegen  $\bar{C}_{zz}$  konvergieren (vgl. Gleichung (3.28)), können die hier getroffenen Schlussfolgerungen auch auf thermische Problemstellungen übertragen werden. Dementsprechend divergiert das stationäre Temperaturfeld für eine periodische Wärmequelle  $q_\square$  bei größer werdendem Einflussradius  $r_{oi}$  gegen unendlich.

### 3.3 Modellbildung und Simulation

Die bereits in Abschnitt 3.2.2 verifizierten Teilmodelle werden in diesem Unterkapitel für den Fall der einseitig gekoppelten Gleichungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  vereinigt. Dies gelingt durch die Verbindung der Reibleistung mit dem Wärmeeintrag. Dass eine Vernachlässigung des Gough-Joule-Effektes für vergleichbare kontaktmechanische Problemstellungen gerechtfertigt ist, haben die Ausführungen in Abschnitt 3.2.3 gezeigt. Die Ergebnisse werden dadurch nur geringfügig ungenauer, die Rechenzeiterparnis ist jedoch hoch.

Ausgangspunkt für das thermomechanische Kontaktmodell sei die in Abbildung 3.16(a) definierte Initialkonfiguration. Die beiden Körper mit rauen Oberflächen können sich mit ihrer höchsten Erhebung an einer gedachten Ebene berühren. Die Oberflächenhöhen  $z_1(x, y)$  und  $z_2(x, y)$  werden in körperfesten Koordinatensystemen beschrieben und besitzen die Mittelwerte  $S_{m1}$  und  $S_{m2}$ . Der Abstand zwischen den Mittelebenen sei mit  $z_H = z_{1,\max} + z_{2,\max}$  gegeben. Jegliche Einflüsse von Temperaturfeldern sind in der Initialkonfiguration vernachlässigt.

Eine starre, ebene Wand und ein äquivalenter rauer Körper mit den Oberflächenhöhen

$$z(x, y, t) = z_1(x, y) + z_2(x - v_{rel,x}t, y - v_{rel,y}t) \quad (3.62)$$

werden in Abbildung 3.16(b) eingeführt. Die Höhenwerte der neuen Oberfläche  $z$  sind aufgrund der relativen Bewegung der beiden gleitenden rauen Körper zeitabhängig. Der Abstand zwischen den Körpern in Abbildung 3.16(a) und der Abstand zwischen dem äquivalenten rauen Körper und der starren, ebenen Wand in Abbildung 3.16(b) ist gleich.

Der äquivalente raue Körper wird durch eine Einrückung  $d$  in Kontakt mit der starren Wand gebracht (siehe Abbildung 3.16(c)). Durch die Relativbewegung der beiden Körper und die im Kontaktbereich wirkenden Scherspannungen kommt es aufgrund von Reibungswärme zu den Temperaturerhöhungen  $\theta_1$  im unteren und  $\theta_2$  im oberen Körper. Infolgedessen treten die thermoelastischen Verschiebungen  $w_\theta = w_{\theta_1} + w_{\theta_2}$  auf, die sich aus den einzelnen thermoelastischen Verschiebungen der beiden Körper zusammensetzen. Obwohl der Wärmeeintrag in der gemeinsamen Kontaktfläche stattfindet, können die Temperaturfelder und thermoelastischen Verschiebungen beider Körper dennoch unterschiedlich sein. Die relative Gleitgeschwindigkeit  $\|v_{rel}\|$  sei zudem klein genug, sodass die Schmelztemperatur nicht erreicht wird. Außerdem wird von permanentem Gleiten ausgegangen, wodurch ein partielles Haften ausgeschlossen ist. Das überlappende Material

$$w_g(x, y, t) = z + w_\theta - z_H + d \quad (3.63)$$

muss durch ein zeitabhängiges, aber zunächst noch unbekanntes Druckfeld  $p(x, y, t)$  nach unten gedrückt werden. Das in der ebenfalls noch unbekanntenen Kontaktfläche wirkende Druckfeld ist für beide Körper gleich, darüber hinaus wirkende adhäsive Anziehungskräfte zwischen den Körpern außerhalb der Kontaktfläche werden ebenso

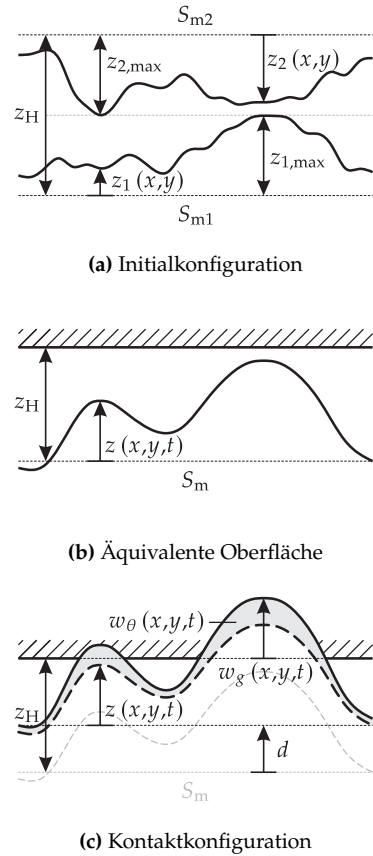


Abbildung 3.16: Verschiedene Konfigurationen für die thermomechanische Kontaktsimulation



wie pflügende Verluste vernachlässigt.

Das lineare, zeitabhängige und dimensionslose Gleichungssystem

$$\left(1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2}\right) \bar{C}_{zz} * \bar{p} + C_M (\bar{C}_{zx} * \bar{\tau}_x + \bar{C}_{zy} * \bar{\tau}_y) - \bar{w}_g = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Gamma_{\text{eic}}, \\ \bar{w}_p, & (x, y) \in \Gamma_{\text{pic}}, \\ \bar{g}, & (x, y) \in \Gamma_{\text{nic}}, \end{cases} \\ 0 \leq \bar{p} \leq \bar{H}, \quad (3.64)$$

mit

$$C_M = \frac{1 - 2\nu_1}{8(1 - \nu_1)} \left(1 - \frac{E_1}{E_2} \frac{(1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2)}{(1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)}\right)$$

wird aus Abbildung 3.16(c) erhalten. Darin repräsentieren  $\bar{C}_{zz} * \bar{p}$ ,  $\bar{C}_{zx} * \bar{\tau}_x$  und  $\bar{C}_{zy} * \bar{\tau}_y$  die diskreten, linearen Faltungen zwischen den Einflussfunktionen und den mechanischen Oberflächenlasten. Des Weiteren ergibt sich  $\bar{w}_g = w_g/2a$  aus Gleichung (3.63) und  $\Gamma_{\text{eic}}$ ,  $\Gamma_{\text{pic}}$  und  $\Gamma_{\text{nic}}$  bezeichnen die Bereiche der Oberflächen, die elastisch, plastisch oder nicht in Kontakt stehen. Während des Lösungsprozesses wird der Druck  $\bar{p}$  auf positive Werte unterhalb der dimensionslosen Härte  $\bar{H} = (1 - \nu_1^2) H / \pi E_1$  des weicheren Materials begrenzt. Das noch überlappende Material  $\bar{w}_p = \bar{w}_{p1} + \bar{w}_{p2}$  im Gebiet  $\Gamma_{\text{pic}}$  wird nach jeder erfolgreichen Lösungsiteration entfernt und volumenerhaltend zu den Tälern im Gebiet  $\Gamma_{\text{nic}}$  hinzugefügt [210]. Es muss sichergestellt werden, dass sich die Kontaktfläche während dieses Vorgangs nicht verändert. Die gesamte Kontaktfläche setzt sich folglich aus  $\Gamma_{\text{ic}} = \Gamma_{\text{eic}} \cup \Gamma_{\text{pic}}$  zusammen, während eine Lücke  $\bar{g}$  im Gebiet  $\Gamma_{\text{nic}}$  verbleibt. Die Härte  $H = 3R_e$  lässt sich mit der Streckgrenze  $R_e$  [238] in Verbindung bringen, die ihrerseits eine Funktion der absoluten Temperatur  $T$ , der Dehnung  $\varepsilon$  und der Dehnrates  $\dot{\varepsilon}$  ist [157]. Die Streckgrenze  $R_e$  wird deshalb im Folgenden mittels

$$R_e(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) \approx R_0 + R_\theta \theta + R_v v_{\text{rel}} \quad (3.65)$$

approximiert, wobei die beiden Konstanten  $R_\theta \leq 0$  und  $R_v \geq 0$  etwaige temperatur- und geschwindigkeitsabhängige Effekte berücksichtigen. Entsprechende Messungen der Streckgrenze bei unterschiedlichen Temperaturen und Dehnraten lassen sich in [44, 74, 87] finden.

Die Wärmeströme  $q$  auf den Oberflächen setzen sich aus der Reibungswärme  $q_f$  und der konvektiven Wärmeleitung  $q_h$  aufgrund der Temperaturdifferenz beider Kontaktkörper zusammen. Erstere sind mit der Reibleistung über

$$q_f = \tau_s v_{\text{rel}} \quad (3.66)$$

gekoppelt, wobei  $\tau_s = R_e(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon})/2$  die Versagensscherspannung des weicheren Materials bezeichnet. Diese steht über eine lokale Tresca-Vergleichsspannung mit der Streckgrenze  $R_e$  in Zusammenhang. Aufgrund der Abhängigkeit des Wärmestroms  $q$  vom Temperaturfeld  $\theta$  an der Oberfläche wird Gleichung (3.24) zu einer homogenen Integralgleichung zweiter Art [132] und unterstreicht die Notwendigkeit eines iterativen Lösungsverfahrens. Weiterhin wird angenommen, dass die Reibleistung vollständig in Wärme umgewandelt wird [122], wobei eine lineare Wärmeverteilung schließlich zu den einzelnen Wärmeströmen

$$q = \begin{cases} (1 - \psi) q_f + h (\theta_2 - \theta_1) & \text{für Oberfläche 1,} \\ \psi q_f + h (\theta_1 - \theta_2) & \text{für Oberfläche 2} \end{cases} \quad (3.67)$$

führt. Darin bezeichnet  $\psi \in [0, 1]$  den Wärmeverteilungskoeffizienten und  $h$  den Wärmeübergangskoeffizienten.

Zumindest für ein stationäres Temperaturfeld  $\hat{\theta}$  aufgrund einer stehenden Wärmequelle  $q_{\square} = (R_0 + R_{\theta}\theta + R_v v)v/2$  kann der Einfluss von Gleichung (3.65) analytisch bestimmt werden. Eine Verbindung der Gleichungen (3.28) mit (3.65) und (3.66) ergibt für die stationäre Temperatur in der Mitte des belasteten Elementes

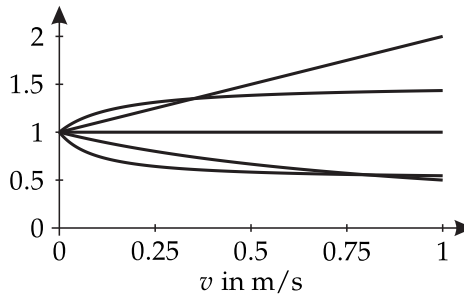
$$\hat{\theta}_{00} = \hat{\theta} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0 \\ z=0}} \approx \frac{a\bar{C}_{00}(R_0 + R_v v)v}{2\pi K - a\bar{C}_{00}R_{\theta}v},$$

woraus das Verhältnis

$$\frac{\hat{\theta}_{00}}{\hat{\theta}_{00} \Big|_{\substack{R_{\theta}=0 \\ R_v=0}}} = \frac{1 + \frac{R_v}{R_0}v}{1 - \frac{a\bar{C}_{00}R_{\theta}}{2\pi K}v} \quad (3.68)$$

folgt. Entsprechende Verläufe sind für unterschiedliche  $R_{\theta}$  und  $R_v$  in Abbildung 3.17 dargestellt. Für  $v \rightarrow \infty$  konvergiert Gleichung (3.68) auf  $-2\pi KR_v/a\bar{C}_{00}R_{\theta}R_0$ . Das resultierende Temperaturfeld auf der Oberfläche lässt sich aus Gleichung (3.28) berechnen. Außerdem können auch die stationären thermoelastischen Verschiebungen hergeleitet werden. Darauf wird hier aber verzichtet.

Für das Verhältnis  $R_e/R_0$  folgt ebenfalls die rechte Seite von Gleichung (3.68). Die qualitativen Verläufe aus Abbildung 3.17 verdeutlichen somit die Auswirkungen einer temperatur- und geschwindigkeitsabhängigen Versagensscherspannung  $\tau_s$  auf die Reibkraft.



**Abbildung 3.17:** Qualitative stationäre Temperaturverläufe aus Gleichung (3.68) bei temperatur- und geschwindigkeitsabhängigem Wärmeeintrag für verschiedene  $R_\theta$  und  $R_v$

Zusammenfassend können die folgenden zusätzlichen thermomechanischen Effekte im Vergleich zu rein mechanischen Lastfällen auftreten:

1. Die thermoelastischen Ausdehnungen aufgrund der Wärmezufuhr an einem Asperiten können einen anderen Asperiten in Kontakt bringen.
2. Die thermoelastisch bedingte Druckerhöhung an einem Asperiten in Kontakt kann einen anderen Asperiten den Kontakt verlieren lassen.
3. Die thermoelastisch bedingte Lasterhöhung kann (weitere) plastische Verformungen verursachen.
4. Der Temperaturanstieg aufgrund von Reibungswärme beeinflusst die Materialeigenschaften, was wiederum Auswirkungen auf die Kontaktkräfte, die Kontaktfläche und folglich auch den Wärmeeintrag selbst haben kann.

Die vorgeschlagene Modellierung berücksichtigt somit nicht nur die mechanischen, sondern auch die thermischen und thermoelastischen Wechselwirkung aller Asperiten von beiden Kontaktkörpern. Die Auswirkung der beidseitigen Rauheit wird durch die zeitabhängige äquivalente Oberfläche korrekt abgebildet.

Für das Gleichungssystem (3.64) sind grundsätzlich zwei verschiedene Lösungsszenarien denkbar. Auf die Vorgabe einer konstanten äußeren Last soll hier verzichtet werden, stattdessen wird die Einrückung  $d$  vorgegeben. Dies kann mit der Annahme gerechtfertigt werden, dass sich der makroskopische Abstand zwischen den beiden rauen Körpern während des Gleitweges über eine Periode der mikroskopischen Rauigkeit näherungsweise nicht verändert. Da das Gleichungssystem (3.64) die gleiche Struktur wie in rein mechanischen Belastungsfällen besitzt [238], können bereits bewährte Lösungsverfahren verwendet werden (vgl. Abschnitt 2.2.2). Abbildung 3.18 fasst den gesamten Simulationsablauf zusammen. Die grauen Bereiche heben die im Vergleich zu rein mechanischen Simulationen zusätzlich benötigten Simulationsschritte hervor.

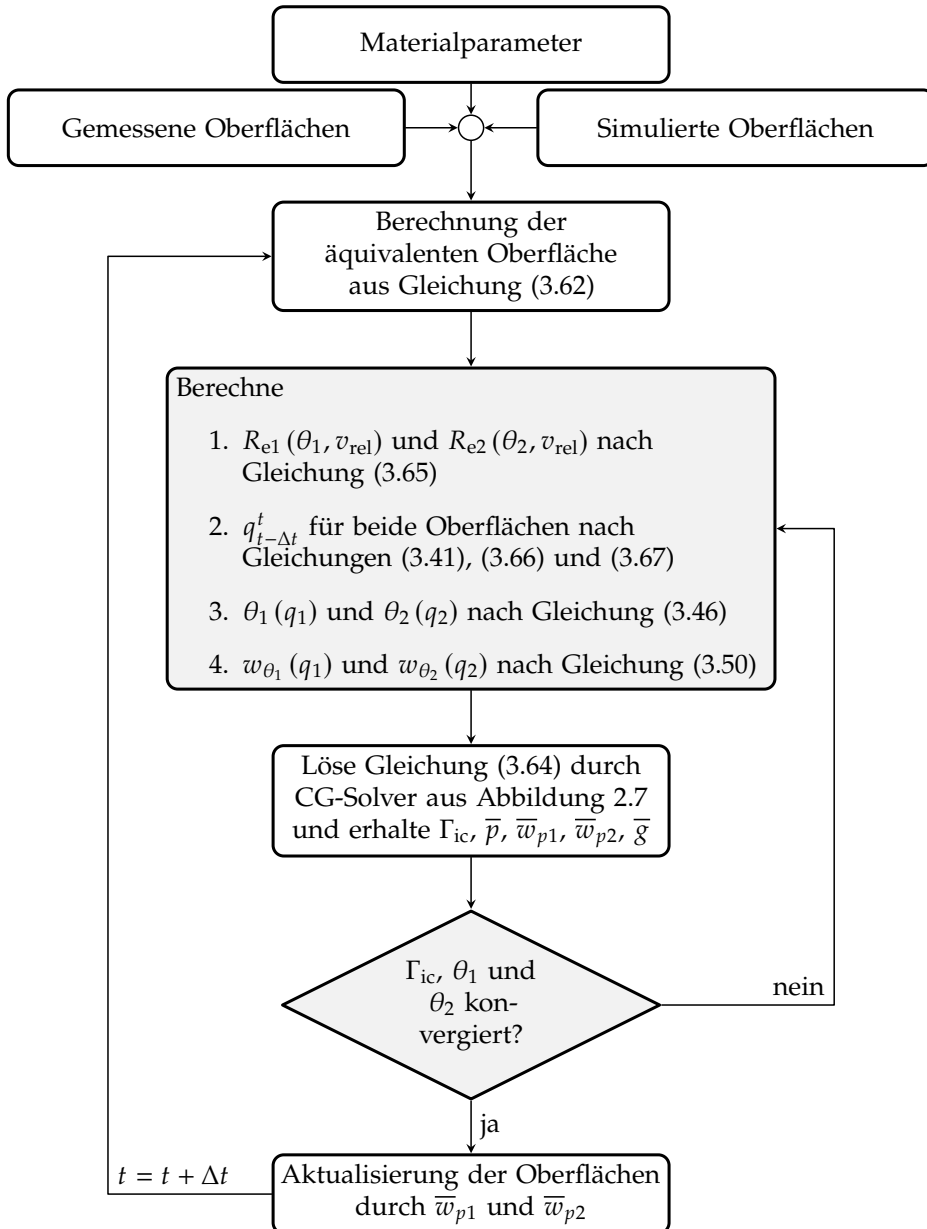


Abbildung 3.18: Simulationsablauf bis gewünschte Zeit  $t_{end}$  erreicht ist

# 4 Ergebnisse der thermomechanischen Kontaktsimulationen

Um die Auswirkungen der zweiseitigen Rauigkeit auf kontaktmechanische Größen herauszuarbeiten, wird das Simulationsmodell aus Kapitel 3 für verschiedene Kombinationen von Oberflächenstrukturen ausgewertet. Dafür werden zunächst raue Oberflächen mit den Längen  $L_x = 2 \text{ mm}$  und  $L_y = 1 \text{ mm}$  entsprechend der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.1.2 erstellt. Die mit  $256 \times 128$  Elementen äquidistant diskretisierten Oberflächenhöhen sind normalverteilt  $Z_s \sim \mathcal{N}(S_m, S_q^2)$  und besitzen den Mittelwert  $S_m = 0 \text{ m}$  und die Standardabweichung  $S_q = 0.7 \text{ }\mu\text{m}$ . Die recht geringe Elementanzahl wird gewählt, um nicht nur qualitative, sondern auch quantitative Aussagen treffen zu können. Das Leistungsdichtespektrum der erstellten Oberflächen folgt der Parametrisierung aus Gleichung (2.6) mit dem Hurst-Exponenten  $H = 0.8$ . Alle weiteren Oberflächenkennwerte variieren und sind in der Tabelle 4.1 in insgesamt sechs Konfigurationen zusammengefasst. Bei den anisotropen Oberflächen wird jeweils durch  $\perp$  oder  $\parallel$  kenntlich gemacht, ob die zugehörige Oberflächenstruktur transversal

**Tabelle 4.1:** Verschiedene Konfigurationen für isotrope und anisotrope Oberflächen

Konfigurationen		$\omega_r$ in $\text{mm}^{-1}$	$\psi_x$	$\psi_y$
Isotrop 1	Oberfläche 1	$8\pi$	1	1
	Oberfläche 2	$8\pi$	1	1
Isotrop 2	Oberfläche 1	$8\pi$	1	1
	Oberfläche 2	$16\pi$	1	1
Isotrop 3	Oberfläche 1	$16\pi$	1	1
	Oberfläche 2	$16\pi$	1	1
Anisotrop 1	Oberfläche 1 $\perp v_{\text{rel}}$	$8\pi$	1	3
	Oberfläche 2 $\perp v_{\text{rel}}$	$8\pi$	1	3
Anisotrop 2	Oberfläche 1 $\parallel v_{\text{rel}}$	$8\pi$	3	1
	Oberfläche 2 $\perp v_{\text{rel}}$	$8\pi$	1	3
Anisotrop 3	Oberfläche 1 $\parallel v_{\text{rel}}$	$8\pi$	3	1
	Oberfläche 2 $\parallel v_{\text{rel}}$	$8\pi$	3	1

oder lateral zur Gleitrichtung ausgerichtet ist.

Die in Tabelle 4.2 aufgeführten Materialparameter entsprechen handelsüblichem Stahl und werden für beide Kontaktkörper verwendet, um die Untersuchungen auf die Auswirkungen der zweiseitigen Rauigkeit einzugrenzen. In dem linearen, zeitabhängigen Gleichungssystem (3.64) entfällt hierdurch die Kopplung zwischen den tangentialen Scherspannungen und den vertikalen Verschiebungen.

**Tabelle 4.2:** Verwendete Materialparameter (wenn nicht anderweitig angegeben)

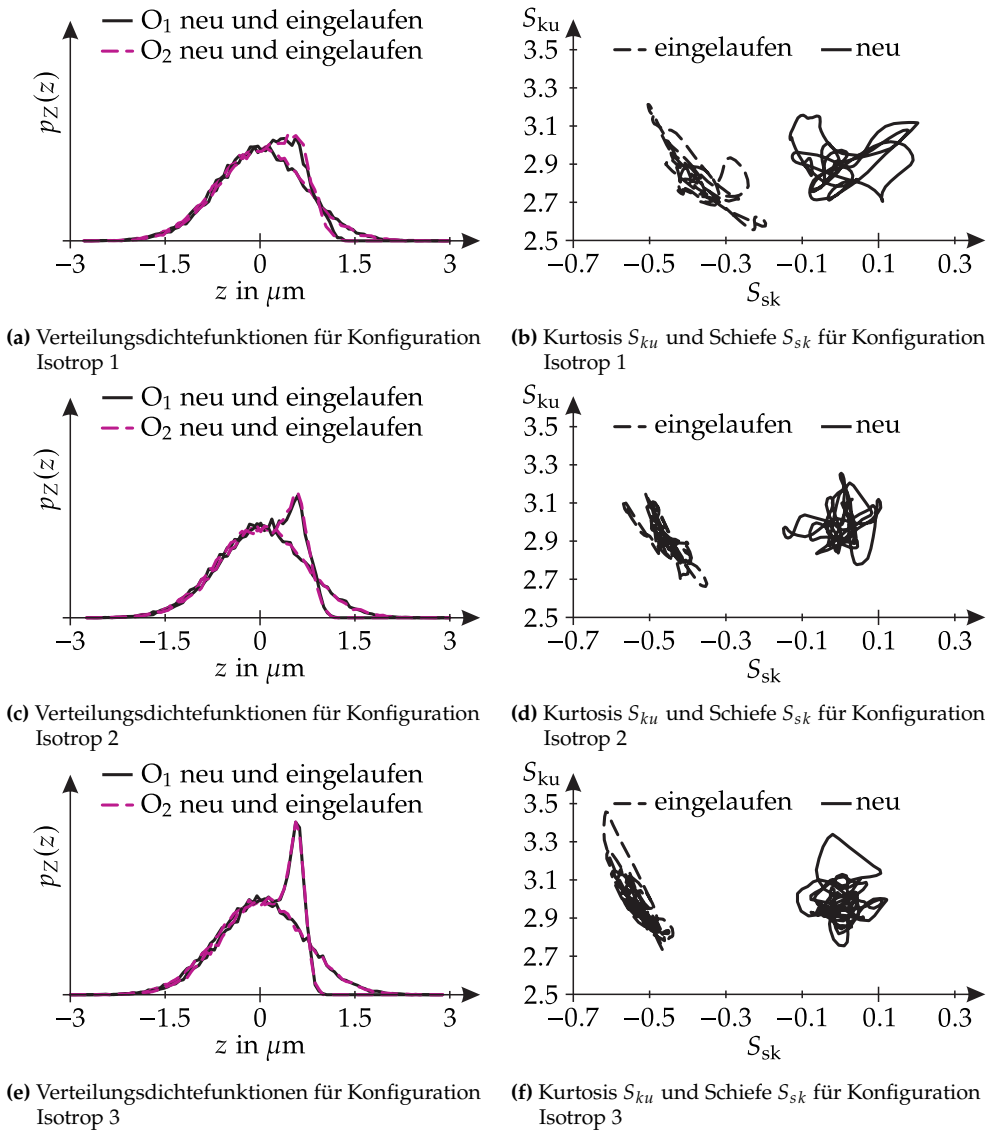
Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	$E$	210	GPa
Querkontraktionszahl	$\nu$	0.3	-
Wärmeleitfähigkeit	$K$	40	J/msK
Dichte	$\rho$	7850	kg/m <sup>3</sup>
Spezifische Wärmekapazität	$c_d$	460	J/kgK
Wärmeausdehnungskoeffizient	$\alpha$	12e-6	1/K
Streckgrenze	$R_0$	450	MPa
	$R_\theta$	0	MPa/K
	$R_v$	0	MPas/m
Wärmeübergangskoeffizient	$h$	0	J/Ksm <sup>2</sup>
Wärmeaufteilungskoeffizient	$\psi$	0.5	-
Referenztemperatur	$T_0$	293.15	K

Für die Simulation verschiedener Betriebsbedingungen durchlaufen die Körper 11 relative Gleitgeschwindigkeiten im Bereich  $0 \text{ m/s} \leq v_{\text{rel}} \leq 1 \text{ m/s}$  und 21 Einrückungen im Bereich  $z_H - 2.5 \sqrt{S_{q1}^2 + S_{q2}^2} \leq d \leq z_H$ . Zudem wird der dimensionslose räumliche Einflussradius  $r_{oi} = 113$  für alle Einflussfunktionen gewählt. Dies entspricht ungefähr 0.25 % von  $\bar{C}_{00}$  aus Gleichung (3.17). Die Berücksichtigung von zeitlichen Einflüssen wird auf die vergangenen  $K = M = 256$  Zeitschritte begrenzt.

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt für die isotropen Oberflächen aus Tabelle 4.1 in Unterkapitel 4.1 und für die anisotropen Oberflächen aus Tabelle 4.1 in Unterkapitel 4.2. In beiden Unterkapiteln werden zunächst die Auswirkungen eines Einlaufprozesses diskutiert, bevor eine schrittweise Auswertung der Simulationsergebnisse stattfindet. Für den Einlaufprozess absolvieren alle Oberflächen zunächst einen kompletten Simulationsdurchlauf mit der Gleitgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}} = 1 \text{ m/s}$ . Die resultierenden eingelaufenen Oberflächen werden anschließend ebenfalls für die Simulationen verwendet. Eine Zusammenfassung und vergleichende Gegenüberstellung der Ergebnisse findet in Unterkapitel 4.3 statt. Mögliche Korrelationen zwischen den Eigenschaften der Oberflächen und dem resultierenden Reibwert werden herausgearbeitet. Abschließend behandelt dasselbe Unterkapitel die Erweiterung auf temperaturabhängige Materialparameter und deren Auswirkungen.

## 4.1 Isotrope Oberflächen

Die Verteilungsdichtefunktionen  $p_Z(z)$  der Oberflächenhöhen sind in den Abbildungen 4.1(a), (c) und (e) für den neuen und eingelaufenen Zustand der isotropen Konfigurationen aus Tabelle 4.1 dargestellt. In allen drei Fällen sind die Oberflächenhöhen nach dem Einlaufprozess linksschief  $S_{sk} < 0$  und sowohl der Wert für die Standardabweichung  $S_q$  als auch für die Kurtosis  $S_{ku}$  haben sich verringert. Dennoch verbleiben die Oberflächen in den tieferliegenden Bereichen nahezu unverändert und hauptsächlich höherliegende Oberflächenbereiche verschleifen. Die beschriebenen Veränderungen passen gut zu den Ergebnissen von experimentellen Untersuchungen bezüglich des Einlaufverhaltens rauer Körper [116, 124, 198], obwohl die aktuelle Modellierung ein vergleichsweise einfaches Verschleißverhalten beinhaltet. Insbesondere das Entstehen des charakteristischen Maximums der Verteilungsdichtefunktion wird gut abgebildet. Des Weiteren sind die Werte von Kurtosis  $S_{ku}$  und Schiefe  $S_{sk}$  in den Abbildungen 4.1(b), (d) und (f) für die jeweiligen äquivalenten Oberflächen aus Gleichung (3.62) während einer Gleitperiode von  $\Delta x = 2$  mm sowohl für die neuen als auch für die eingelaufenen Oberflächen dargestellt. Die Verläufe zeigen, dass die Oberflächenhöhen der äquivalenten Oberfläche selbst bei normalverteilten Oberflächenhöhen der Kontaktkörper nicht als normalverteilt modelliert werden sollten. Die Erwartungswerte von Standardabweichung  $E[S_q]$ , Kurtosis  $E[S_{ku}]$  und Schiefe  $E[S_{sk}]$  der jeweiligen äquivalenten Oberflächen sind für die Gleitperiode von  $\Delta x = 2$  mm in Tabelle 4.3 aufgelistet. Sie zeigen, dass die äquivalente Oberfläche im Mittel immer noch normalverteilte Höhenwerte besitzt. Die Veränderungen in den erhaltenen Verteilungsdichten lassen bereits die Bedeutung des Einlaufprozesses für alle nachfolgenden Ergebnisse erahnen. Zudem kann gefolgert werden, dass der Einlaufprozess signifikant von den gewählten Betriebsbedingungen abhängt. Die neuen und die eingelaufenen Oberflächen werden für die folgenden Simulationsergebnisse verwendet. Die Simulationen werden bis zum Erreichen eines stationären Betriebszustandes durchgeführt. Die erhaltenen und nachfolgenden Ergebnisse sind daher periodisch, was auf die periodischen Oberflächen zurückführbar ist. Um zunächst einen qualitativen Eindruck der Kontaktgrößenverläufe zu vermitteln, werden einige Ergebnisse für die eingelaufenen Oberflächen der Konfiguration Isotrop 1 für die Gleitgeschwindigkeit  $v_{rel} = 0.5$  m/s und die Einrückung  $d \approx 2.08$   $\mu\text{m}$  in den Abbildungen 4.2, 4.3 und 4.4 vorgestellt. Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen die transienten Temperaturfelder  $\theta_1$  und  $\theta_2$  sowie die transienten thermoelastischen Verschiebungsfelder  $w_{\theta_1}$  und  $w_{\theta_2}$  auf den beiden Oberflächen nach einem zurückgelegten Gleitweg  $\Delta x = 0, 0.5, 1, 1.5$  mm in jeweils körperfesten Koordinatensystemen. Die Konturlinien für die Temperaturfelder sind dabei in Inkrementen von  $\Delta\theta = 10$  K und die Konturlinien für die thermoelastischen Verschiebungsfelder in Inkrementen von  $\Delta w_\theta = 0.01$   $\mu\text{m}$  aufgetragen. Deutlich erkennbar sind die lokalen Oberflächenbereiche



**Abbildung 4.1:** Ausgewählte Eigenschaften der neuen und eingelaufenen Oberflächenhöhen von den Konfigurationen Isotrop 1, Isotrop 2 und Isotrop 3 aus Tabelle 4.1



mit starkem Temperaturanstieg, die sich mit dem Gleitweg ändern und durch den kurzzeitigen Kontakt übereinandergleitender Asperiten entstehen. Die Konturlinien für die thermoelastischen Verschiebungen zeigen kleinere Gradienten als die Konturlinien für die Temperaturfelder, was auf die Abhängigkeit der thermoelastischen Verschiebungen von den Temperaturfeldern innerhalb der Körper zurückzuführen ist. Die transienten Temperatur- und thermoelastischen Verschiebungsverläufe an der Position  $x = 1.25$  mm und  $y = 0.75$  mm sind in Abbildung 4.4(a) während des gesamten Gleitwegs von  $\Delta x = 2$  mm dargestellt. Dieser Punkt ist in den Abbildungen 4.2 und 4.3 jeweils mit einem roten Quadrat markiert und bewegt sich auf der Oberfläche 2 aufgrund der Relativbewegung der Kontaktkörper entlang der  $x$ -Richtung. Die grauen Bereiche in Abbildung 4.4(a) kennzeichnen die Zeiträume, zu denen die beiden Oberflächen an diesem Punkt in Kontakt stehen. Auch hier lassen sich erneut die auftretenden, kurzzeitigen Temperaturerhöhungen, sogenannte Blitztemperaturen (vgl. Abschnitt 1.2), deutlich erkennen. Die dargestellten Verläufe hängen einerseits von der Kontaktgeschichte an diesem Punkt, aber auch vom Kontaktverhalten der umgebenden Asperiten ab.

In Abbildung 4.4(b) sind die Verläufe der Temperatur  $\theta_A = \sum \theta / MN$ , des Nenndruckes  $p_A = \sum p / MN$ , der Scherspannung  $\tau_A = \sum \tau_s / MN$  und des daraus resultierenden Reibwerts  $\mu_A = \tau_A / p_A$  erkennbar. Die Werte oszillieren mit fortschreitendem Gleitweg aufgrund der beidseitigen Rauigkeit und der konstanten Einrückung. Die Erwartungswerte dieser Kurven werden später für verschiedene Gleitgeschwindigkeiten und Einrückungen miteinander verglichen. Die gestrichelten Linien zeigen darüber hinaus die gleichen Kontaktgrößen für den Fall einer temperaturabhängigen Streckgrenze  $R_\theta = -1$  MPa/K (vgl. [44, 74, 87]). Der Druck  $p_A$  sinkt aufgrund der geringeren Reibleistung und den daraus resultierenden kleineren Temperaturen und thermoelastischen Verschiebungen, während die Scherspannung  $\tau_A$  aufgrund der sinkenden Versagensscherspannung reduziert wird. Dies führt im vorliegenden Fall zu einem kleineren Reibwert. Die gepunkteten Linien repräsentieren überdies die gleichen Kontaktgrößen für den Fall einer geschwindigkeitsabhängigen Streckgrenze  $R_v = 100$  MPas/m. Erst ab Werten dieser Größenordnung treten vergleichbare Auswirkungen wie bei einer temperaturabhängigen Streckgrenze auf. Der Druck  $p_A$  steigt aufgrund der höheren Reibleistung und den daraus resultierenden größeren Temperaturen und thermoelastischen Verschiebungen, während die Scherspannung  $\tau_A$  aufgrund der wachsenden Versagensscherspannung erhöht wird. Dies führt im vorliegenden Fall zu einem größeren Reibwert. Werden die Effekte von temperatur- und geschwindigkeitsabhängiger Streckgrenze mit  $R_\theta = -1$  MPa/K und  $R_v = 100$  MPas/m überlagert, ergibt sich größtenteils eine Auslöschung der Auswirkungen, weshalb die erhaltenen Kurven aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet sind. Zudem gestaltet sich eine Abschätzung von  $R_v$  aus Messdaten recht schwierig, da diese im Allgemeinen in Abhängigkeit der Dehnrates gegeben sind (vgl. [44, 74, 87]). Deshalb erfolgt bei den

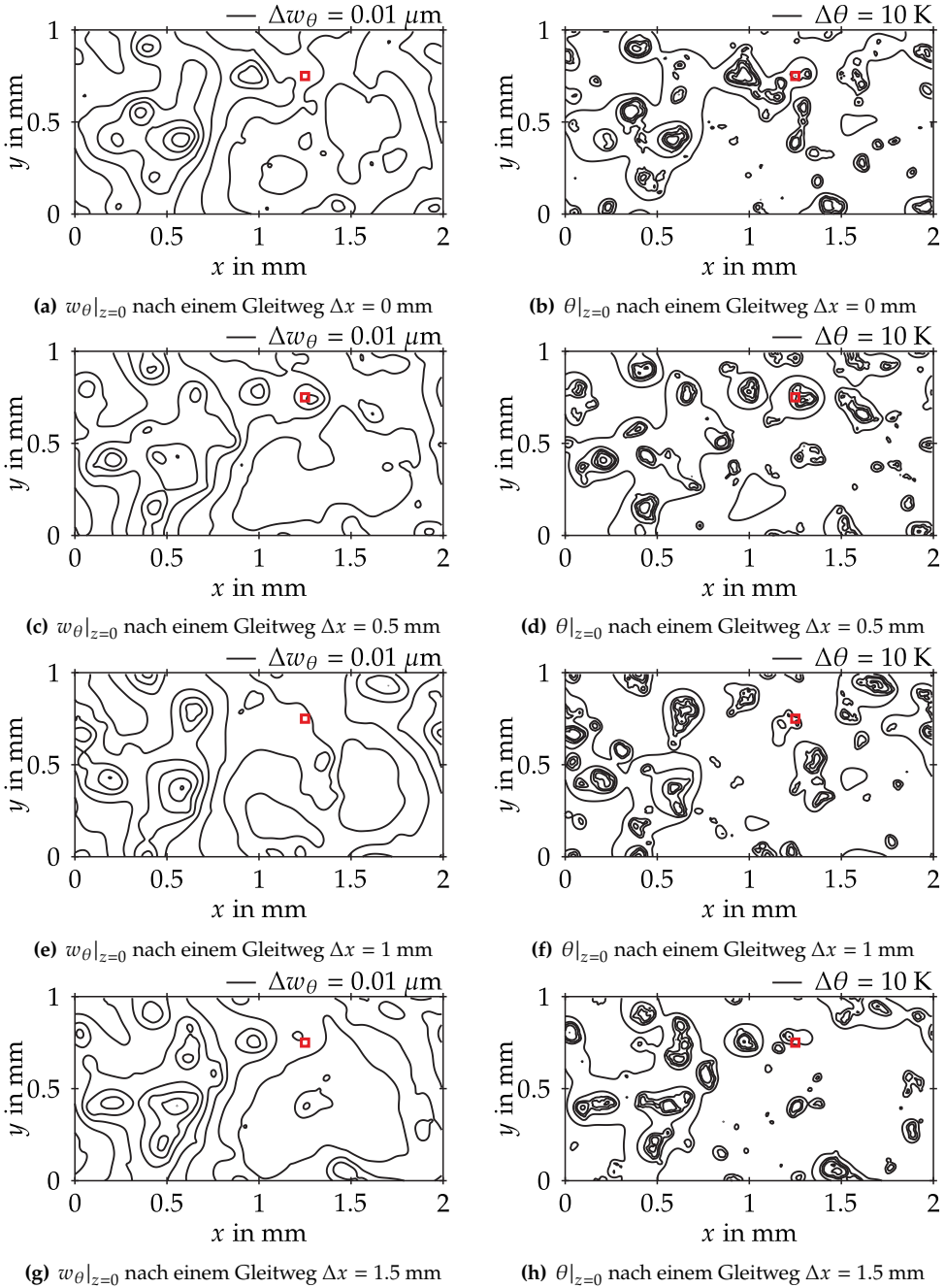
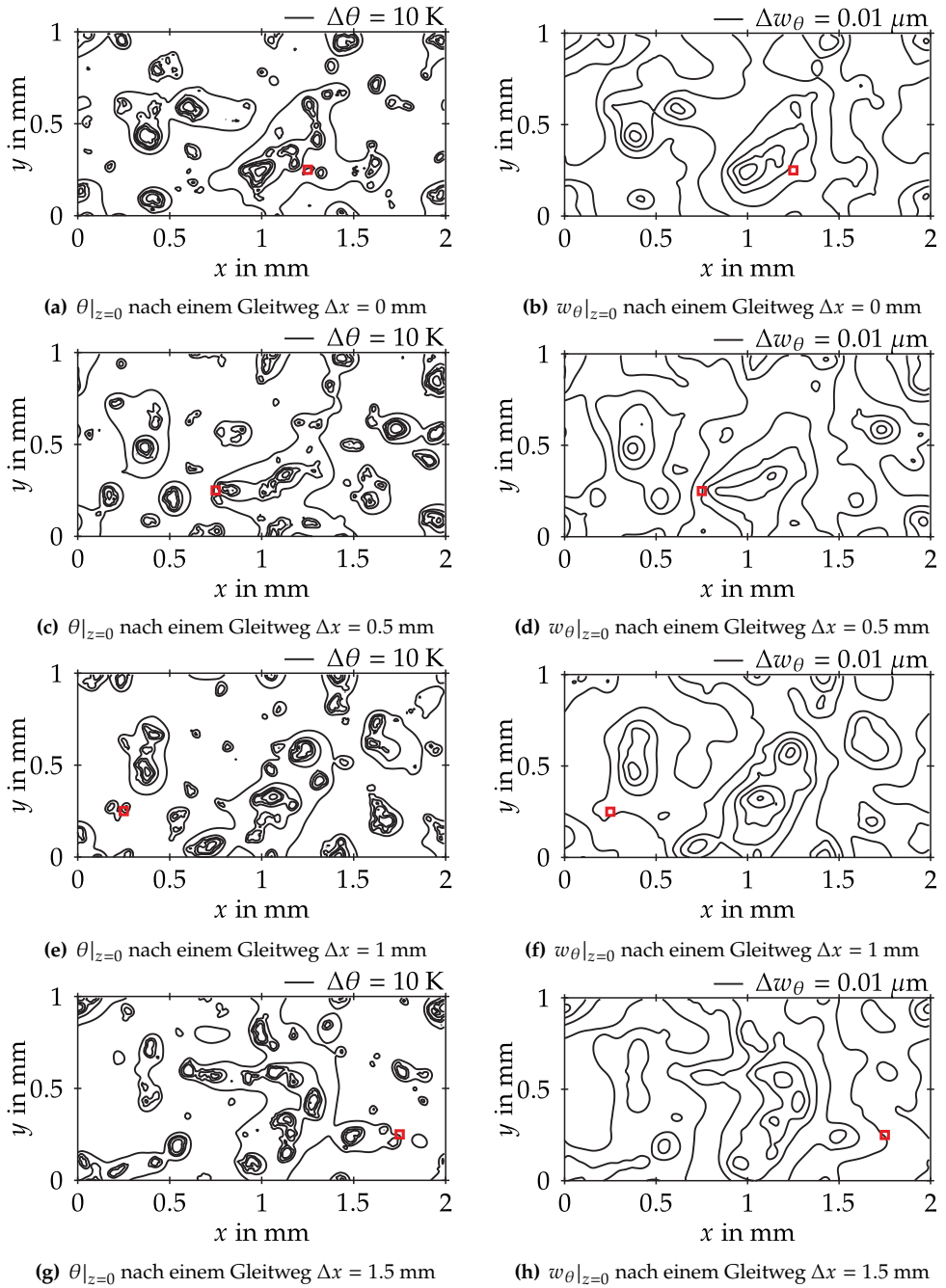


Abbildung 4.2: Temperaturfelder  $\theta$  und thermoelastische Verschiebungsfelder  $w_{\theta}$  auf Oberfläche 1 für unterschiedliche Gleitwege



**Abbildung 4.3:** Temperaturfelder  $\theta$  und thermoelastische Verschiebungsfelder  $w_\theta$  auf Oberfläche 2 für unterschiedliche Gleitwege

meisten Ergebnissen eine Beschränkung auf temperaturabhängige Effekte.

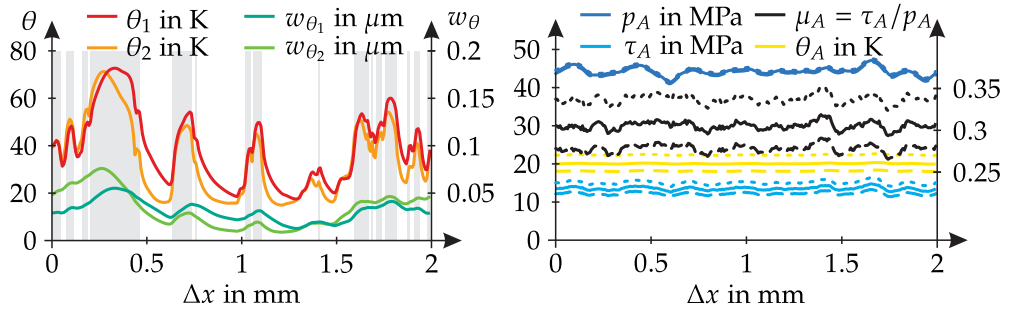
Die Entwicklung des Temperaturfeldes  $\theta$  bei gleich bleibender Einrückung und unterschiedlichen Gleitgeschwindigkeiten lässt sich gut anhand der Verteilungsdichtefunktion  $p_{\theta}(\theta)$  beobachten. Diese ist für die Gleitgeschwindigkeiten  $v_{\text{rel}} = 0.1, 0.5, 1 \text{ m/s}$  in Abbildung 4.4(d) zu sehen. Durch die auftretenden Blitztemperaturen entstehen die Ausläufer der Verteilungsdichtefunktionen hin zu höheren Temperaturen. Außerdem lässt sich erkennen, dass die Varianz der auftretenden Temperaturwerte mit steigender Gleitgeschwindigkeit zunimmt.

Die Auswirkungen eines konvektiven Wärmeaustausches zwischen den Kontaktkörpern in der tatsächlichen Kontaktfläche auf die Temperatur und die thermoelastischen Verschiebungen sind in Abbildung 4.4(c) dargestellt. Hierfür werden die Simulationen mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $h = 1 \text{ MJ/Ksm}^2$  wiederholt und die absoluten Änderungen in den erhaltenen Temperatur- und thermoelastischen Verschiebungsverläufen wiedergegeben. Die Auswirkungen lassen sich erst bei diesem vergleichsweise hohen Wärmeübergangskoeffizient beobachten und fallen recht gering aus. Für  $h \rightarrow \infty$  sind die lokalen Temperaturen der Körper in der tatsächlichen Kontaktfläche zu jedem Zeitpunkt identisch. Der Wärmeübergangskoeffizient bietet damit eine gute Möglichkeit, die Simulationsergebnisse an Experimente anzupassen.

In den Abbildungen 4.4(e) und (f) sind die Bereiche der beiden Oberflächen in schwarz markiert, die während des gesamten Gleitwegs von  $\Delta x = 2 \text{ mm}$  mindestens einmal in Kontakt stehen. Bei beiden Oberflächen sind dies in etwa 31 %, wohingegen die tatsächliche Kontaktfläche zu jedem inkrementellen Zeitpunkt nur etwa 6 % beträgt. Somit sind deutlich mehr Oberflächenbereiche am eigentlichen Reibprozess beteiligt, als rein statische Simulationen vermuten lassen würden.

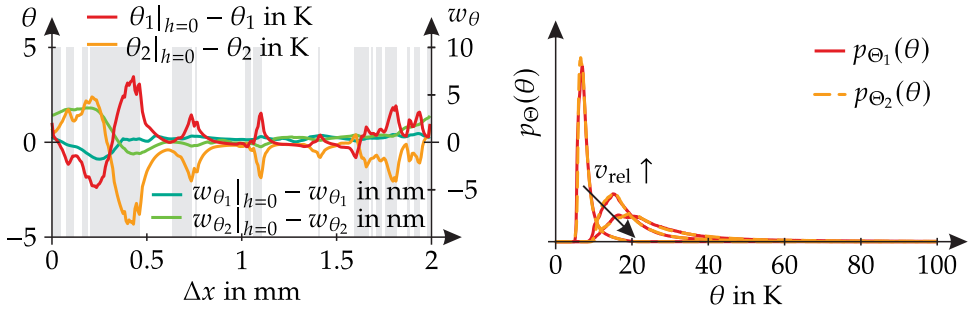
Alle bisher diskutierten Ergebnisse sind ein Indikator für den zusätzlichen Informationsgehalt, der bei einer konsequenten Berücksichtigung der Rauigkeit beider Kontaktkörper aus den vorliegenden Simulationen gewonnen werden kann. Grundsätzlich lassen sich unabhängig vom Betriebspunkt für alle isotropen Konfigurationen in Tabelle 4.1 qualitativ gleiche Ergebnisse finden. Die Resultate aller 231 simulierten Betriebspunkte werden daher für die drei Konfigurationen Isotrop 1-3 kompakt in den Abbildungen 4.5 und 4.6 zusammengefasst.

Die Erwartungswerte für die Scherspannungen  $E[\tau_A]$  sind in den Abbildungen 4.5(a), 4.6(a) und (e) als Funktionen der Erwartungswerte für den Druck  $E[p_A]$  dargestellt. Jede Kurve stellt die Erwartungswerte bei einer konstanten Gleitgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}}$  und verschiedenen Einrückungen dar, wie sie zum Beispiel in Abbildung 4.4(b) zu sehen sind. Die eingezeichneten Orientierungslinien für den (deterministischen) Reibwert  $\mu_d$  sind dabei nur in guter Näherung mit  $E[\mu_A]$  gleichzusetzen. Die Erwartungswerte für den Reibwert  $E[\mu_A]$  sind in Tabelle 4.3 aufgelistet. Die Erwartungswerte für die Temperaturen  $E[\theta_A]$  sind in gleicher Weise in den Abbildungen 4.5(b), (b) und (f) als



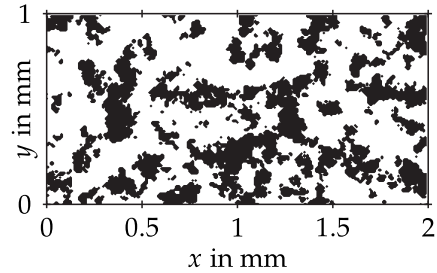
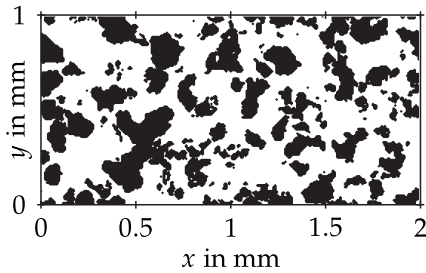
(a) Temperaturen und thermoelastische Verschiebungen bei  $x = 1.25$  mm und  $y = 0.75$  mm für den gesamten Gleitweg von  $\Delta x = 2$  mm

(b) Kontaktspannungen und Temperaturen (links) sowie resultierender Reibwert (rechts) für den gesamten Gleitweg von  $\Delta x = 2$  mm



(c) Änderung von Temperatur und thermoelastischer Verschiebung für den Wärmeübergangskoeffizienten  $h = 1$  MJ/Ksm<sup>2</sup> bei  $x = 1.25$  mm und  $y = 0.75$  mm

(d) Verteilungsdichtefunktion  $p_\Theta(\theta)$  für die Gleitgeschwindigkeiten  $v_{\text{rel}} = 0.1, 0.5, 1$  m/s



(e) Bereiche auf Oberfläche 1, die mindestens in einem inkrementellen Zeitschritt in Kontakt stehen

(f) Bereiche auf Oberfläche 2, die mindestens in einem inkrementellen Zeitschritt in Kontakt stehen

**Abbildung 4.4:** Ausgewählte Ergebnisse für die eingelaufene Konfiguration Isotrop 1 bei einer Gleitgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}} = 0.5$  m/s und einer Einrückung  $d \approx 2.08$   $\mu\text{m}$

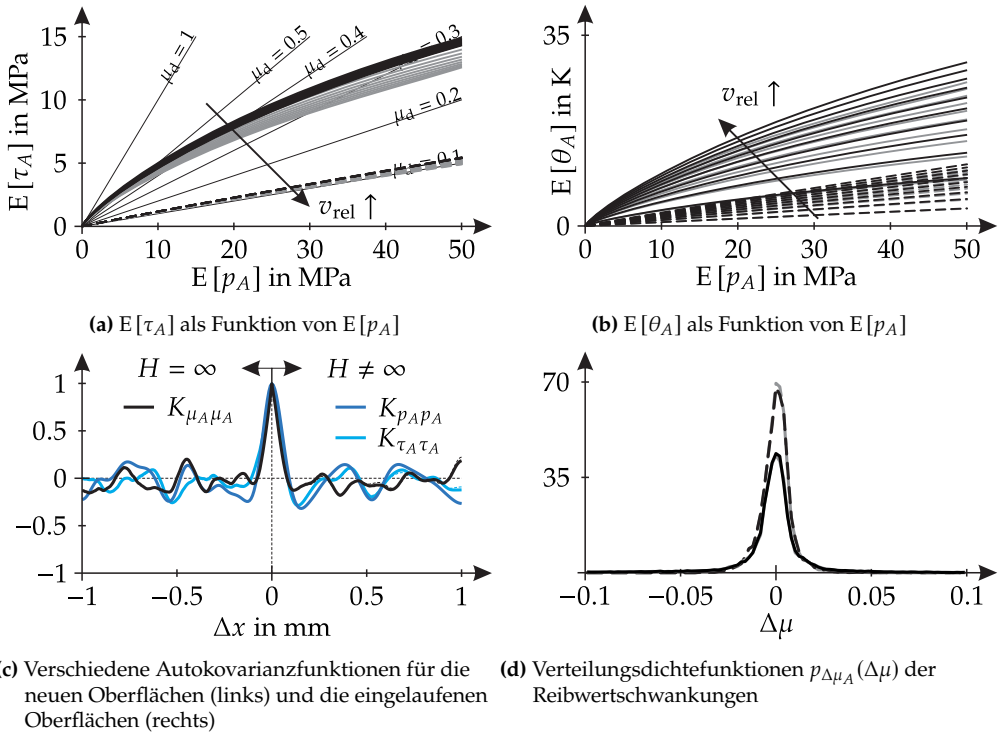
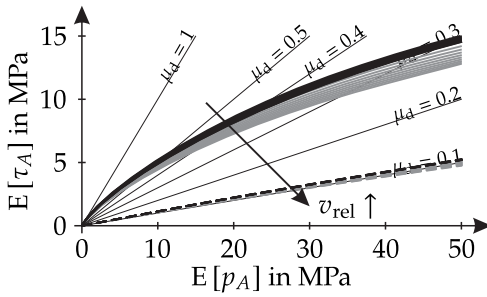


Abbildung 4.5: Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfiguration Isotrop 1

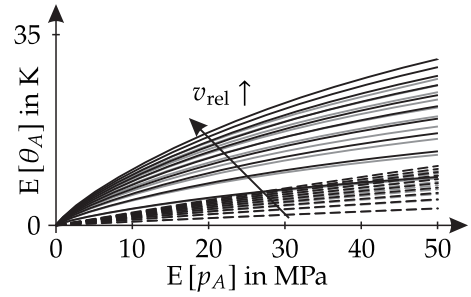
Funktionen der Erwartungswerte für den Druck  $E[p_A]$  gezeigt. In allen Fällen markieren schwarze Linien den Fall  $R_\theta = 0$  MPa/K und graue Linien den Fall  $R_\theta = -1$  MPa/K. Des Weiteren markieren gestrichelte Linien die Ergebnisse für die neuen Oberflächen im rein elastischen Lastfall, für den die Härte  $H = \infty$  gewählt wird.

Im rein elastischen Belastungsfall nimmt die Scherspannung  $E[\tau_A]$  proportional zum Druck  $E[p_A]$  zu, obwohl die Werte von Schiefe und Kurtosis von der äquivalenten Oberfläche variieren (vgl. Abbildungen 4.1(b), (d) und (f)). Durch die Proportionalität lässt sich dadurch auch für den gleitenden Kontakt zweier Körper mit rauen Oberflächen bei einer vergleichbaren tatsächlichen Kontaktfläche ein lastunabhängiger Reibwert folgern. Der niedrige Reibwert kann auf eine kleine tatsächliche Kontaktfläche bei vergleichsweise hohen Drücken zurückgeführt werden. Die thermoelastischen Verschiebungen scheinen vernachlässigbar zu sein, während  $R_\theta$  den Reibwert geringfügig verringert. Durch die Proportionalität zwischen tatsächlicher Kontaktfläche und Normallast steigt auch die Temperatur  $E[\theta_A]$  linear mit dem Druck  $E[p_A]$  an.

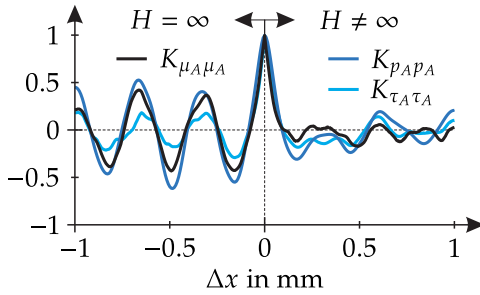
Im Vergleich zum rein elastischen Lastfall hängt die Scherspannung  $E[\tau_A]$  bei den eingelaufenen Oberflächen nichtlinear mit dem Druck  $E[p_A]$  zusammen. Dies ist die



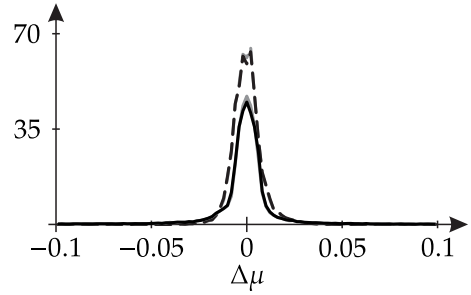
(a)  $E[\tau_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Isotrop 2



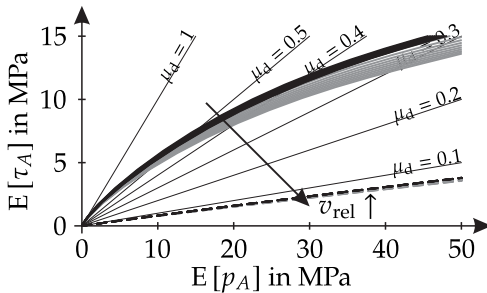
(b)  $E[\theta_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Isotrop 2



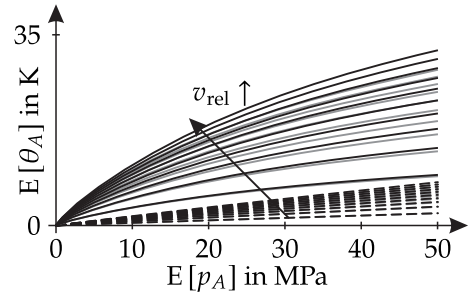
(c) Autokovarianzfunktionen für Isotrop 2



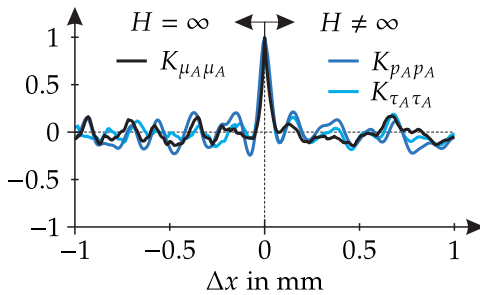
(d) Verteilungsdichtefunktionen für Isotrop 2



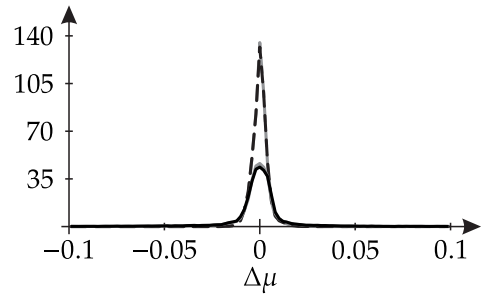
(e)  $E[\tau_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Isotrop 3



(f)  $E[\theta_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Isotrop 3



(g) Autokovarianzfunktionen für Isotrop 3



(h) Verteilungsdichtefunktionen für Isotrop 3

**Abbildung 4.6:** Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfigurationen Isotrop 2 und Isotrop 3

Folge der linksschiefen Oberflächenhöhen. In Untersuchungen zu statischen, nicht-normalverteilten äquivalenten Oberflächen lassen sich qualitativ gleiche Resultate finden [52, 125, 131]. Die tatsächliche Kontaktfläche wächst zunächst vergleichsweise stark mit dem Druck  $E[p_A]$  an, dies führt zu einem hohen Reibwert bei niedriger Belastung. Der Einfluss der Gleitgeschwindigkeit und folglich der thermoelastischen Verschiebungen auf den Reibwert fällt größer aus, die Berücksichtigung einer temperaturabhängigen Versagensspannung durch  $R_\theta$  verringert den Reibwert deutlich stärker. Die Temperatur  $E[\theta_A]$  steigt aufgrund der nichtlinear wachsenden tatsächlichen Kontaktfläche ebenfalls nichtlinear mit dem Druck  $E[p_A]$  an.

Außerdem sind die gemittelten Autokovarianzfunktionen des Drucks

$$K_{p_A p_A}(\Delta x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J K_{p_A p_A}^{(j)}(\Delta x),$$

der Scherspannung

$$K_{\tau_A \tau_A}(\Delta x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J K_{\tau_A \tau_A}^{(j)}(\Delta x)$$

und des Reibwerts

$$K_{\mu_A \mu_A}(\Delta x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J K_{\mu_A \mu_A}^{(j)}(\Delta x)$$

in den Abbildungen 4.5(c), 4.6(c) und (g) gezeigt, wobei hier die Ergebnisse von allen simulierten Betriebspunkten genutzt werden. Um einen direkten Vergleich zwischen den neuen und den eingelaufenen Oberflächen zu ermöglichen, beinhalten die Abbildungen die Verläufe für beide Lastfälle. Neben der durch die periodischen Oberflächen verursachte Kreisfrequenz  $\omega_{L_x} = \pi \text{ mm}^{-1}$  sind offensichtlich auch weitere Frequenzanteile enthalten und die Verläufe der Kurven unterscheiden sich in Abhängigkeit der Konfiguration sichtbar. Die ablesbaren Korrelationslängen  $\Delta x_{\text{kor}}^{\mu_A}$  für die Reibkraft liegen in derselben Größenordnung wie die von Rabinowicz aus Experimenten ermittelte Korrelationslänge  $\Delta x_{\text{kor}} \approx 0.013 \text{ mm}$  [215]. Die jeweiligen Korrelationslängen  $\Delta x_{\text{kor}}^{\mu_A}$  für den Reibwert sind in Tabelle 4.3 aufgelistet.

Die Abbildungen 4.5(d), 4.6(d) und (h) beinhalten die Verteilungsdichtefunktionen  $p_{\Delta \mu_A}(\Delta \mu)$  der Reibwertschwankungen

$$\Delta \mu_A = \mu_A - E[\mu_A],$$



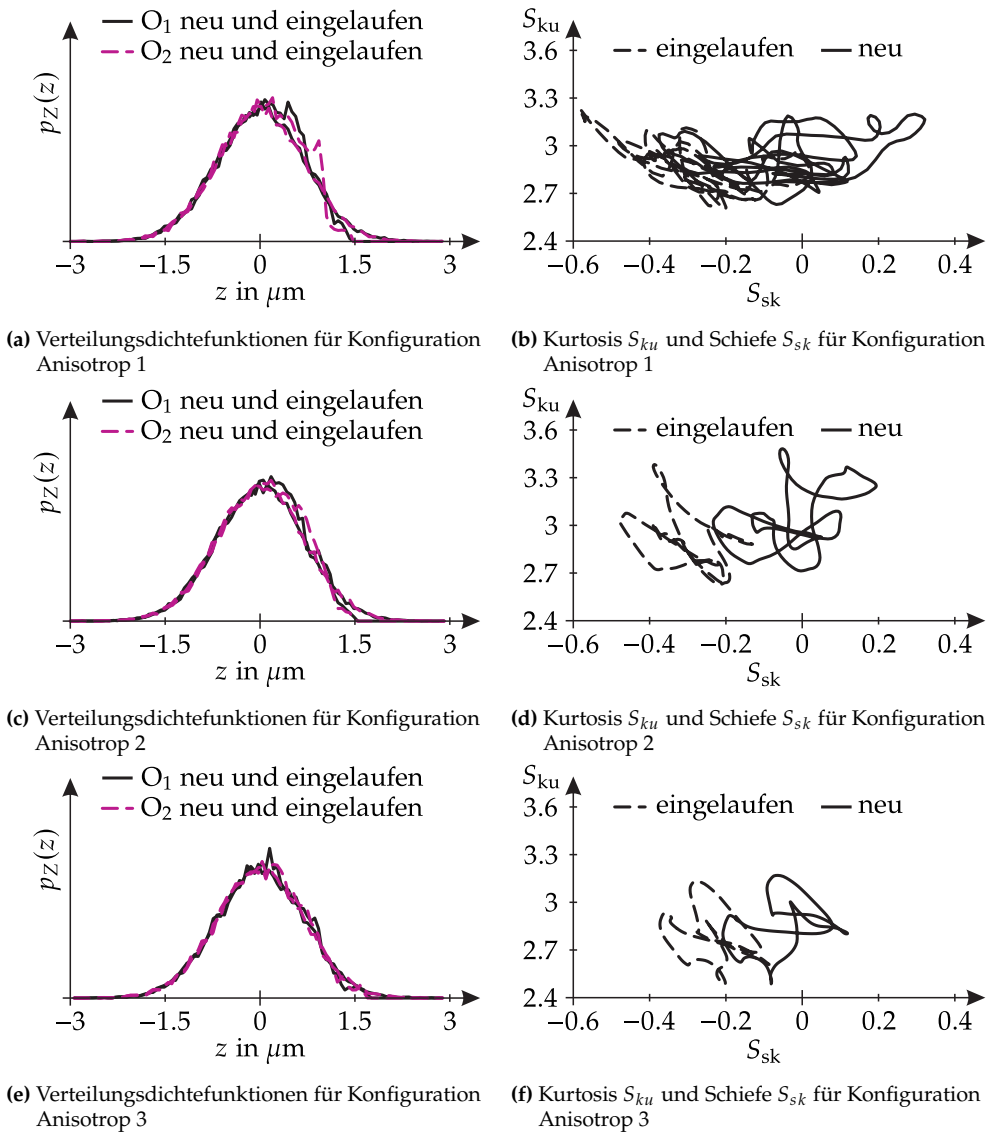
wobei hierfür ebenfalls die Ergebnisse von allen simulierten Betriebspunkten genutzt werden. Durch diese Vorgehensweise gehen etwaige Abhängigkeiten der Verteilungsdichtefunktion  $p_{\Delta\mu_A}(\Delta\mu)$  von der Last verloren, als erster Ansatz soll dies jedoch genügen. Auch hier markieren die schwarze Linien den Fall  $R_\theta = 0$  MPa/K, graue Linien den Fall  $R_\theta = -1$  MPa/K und gestrichelte Linien symbolisieren den rein elastischen Lastfall. Es ist erkennbar, dass die Standardabweichung für den rein elastischen Fall jeweils kleiner ausfällt. Die Standardabweichungen  $(E[\Delta\mu_A^2])^{1/2}$  für die Reibwertschwankungen sind in Tabelle 4.3 aufgelistet.

## 4.2 Anisotrope Oberflächen

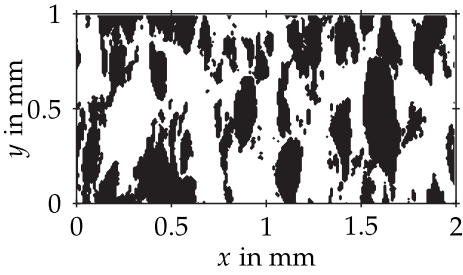
Die Auswertungen werden für die anisotropen Konfigurationen aus Tabelle 4.1 wiederholt, um Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten.

Die Verteilungsdichtefunktionen  $p_Z(z)$  der Oberflächenhöhen sind in den Abbildungen 4.7(a), (c) und (e) für den neuen und eingelaufenen Zustand der anisotropen Konfigurationen aus Tabelle 4.1 dargestellt. In allen drei Fällen sind die Oberflächenhöhen nach dem Einlaufprozess zwar ebenfalls linksschief  $S_{sk} < 0$  und die Werte für die Standardabweichung  $S_q$  sowie die Kurtosis  $S_{ku}$  haben sich verringert, allerdings fallen die Veränderungen im Vergleich zu den isotropen Konfigurationen deutlich kleiner aus. Die erhaltenen Ergebnisse passen dennoch auch hier gut zu Experimenten bezüglich dem Einlaufverhalten rauer Körper mit anisotropen Oberflächenstrukturen [124, 233], obwohl die aktuelle Modellierung ein vergleichsweise einfaches Verschleißverhalten beinhaltet. Ein Vergleich des Verschleißvolumens offenbart zudem, dass das Verschleißvolumen von Konfiguration Anisotrop 1 über Anisotrop 2 zu Anisotrop 3 abnimmt, während es bei den isotropen Konfigurationen am größten ausfällt. Dies deckt sich mit Untersuchungen zum Verschleißvolumen bei isotropen, transversalen und lateralen Oberflächenstrukturen [233]. Grundsätzlich kann der geringere Verschleiß auf die strukturierteren Oberflächenrauigkeiten der anisotropen Konfigurationen zurückgeführt werden, die in diesem Fall lokal kleinere Lastspitzen verursachen.

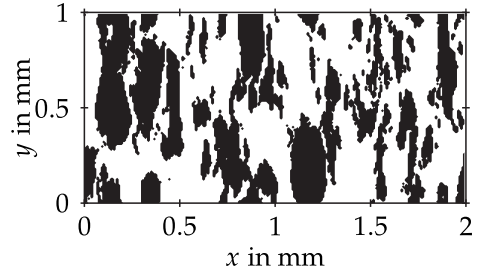
Des Weiteren sind die Werte von Kurtosis  $S_{ku}$  und Schiefe  $S_{sk}$  in den Abbildungen 4.7(b), (d) und (f) für die jeweiligen äquivalenten Oberflächen aus Gleichung (3.62) während einer Gleitperiode von  $\Delta x = 2$  mm sowohl für die neuen als auch für die eingelaufenen Oberflächen dargestellt. Analog zu den isotropen Konfigurationen zeigen die Verläufe auch hier, dass die Oberflächenhöhen der äquivalenten Oberfläche selbst bei normalverteilten Oberflächenhöhen der Kontaktkörper nicht als normalverteilt modelliert werden sollten. Zudem streuen die Werte insbesondere bei Konfiguration Anisotrop 1 deutlich stärker. Die Erwartungswerte von Standardabweichung  $E[S_q]$ , Kurtosis  $E[S_{ku}]$  und Schiefe  $E[S_{sk}]$  der jeweiligen äquivalenten Oberflächen sind für die Gleitperiode von  $\Delta x = 2$  mm ebenfalls in Tabelle 4.3 aufgelistet.



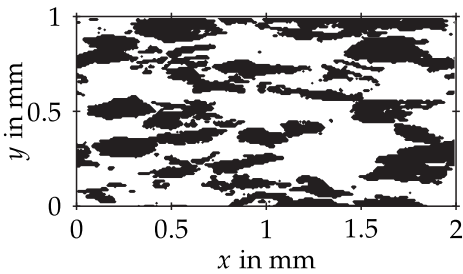
**Abbildung 4.7:** Ausgewählte Eigenschaften der neuen und eingelaufenen Oberflächenhöhen von den Konfigurationen Anisotrop 1, Anisotrop 2 und Anisotrop 3 aus Tabelle 4.1



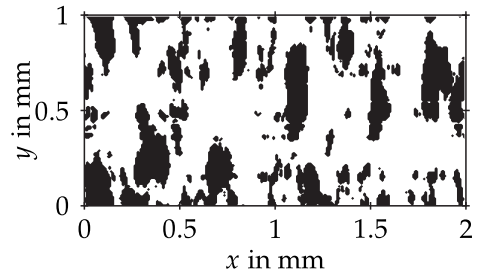
(a) Oberfläche 1 von Konfiguration Anisotrop 1



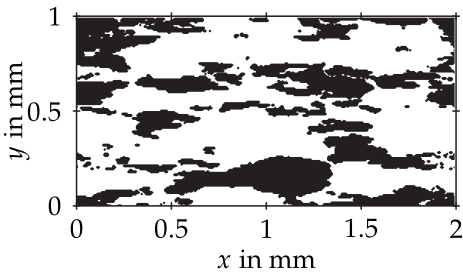
(b) Oberfläche 2 von Konfiguration Anisotrop 1



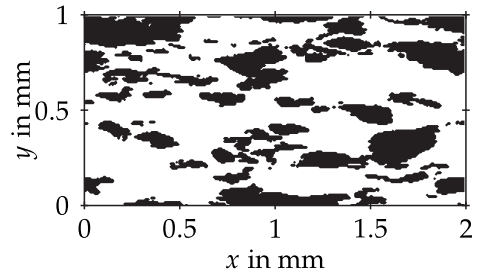
(c) Oberfläche 1 von Konfiguration Anisotrop 2



(d) Oberfläche 2 von Konfiguration Anisotrop 2



(e) Oberfläche 1 von Konfiguration Anisotrop 3



(f) Oberfläche 2 von Konfiguration Anisotrop 3

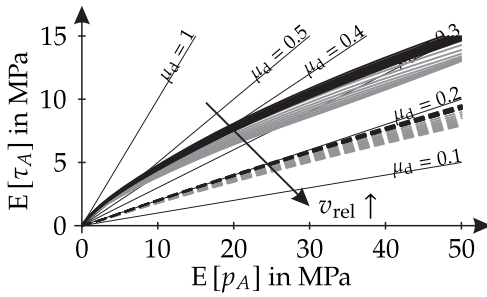
**Abbildung 4.8:** Bereiche auf den Oberflächen der drei anisotropen Konfigurationen, die mindestens in einem inkrementellen Zeitschritt in Kontakt stehen bei der Gleitgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}} = 0.5 \text{ m/s}$  und vergleichbarer Last

Erneut werden die neuen und eingelaufenen Oberflächen für die folgenden Simulationsergebnisse verwendet und die Simulationen bis zum Erreichen eines stationären Betriebszustandes durchgeführt. Die erhaltenen und nachfolgenden Ergebnisse sind daher periodisch. Für die einzelnen Betriebspunkte können Blitztemperaturen, thermoelastische Verformungen und oszillierende kontaktmechanische Größen aufgrund der zweiseitigen Rauigkeit gefunden werden.

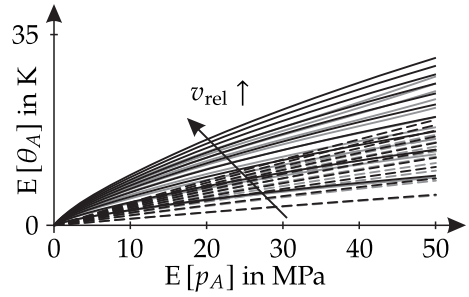
Die Ergebnisse spiegeln dabei die anisotropen Oberflächenstrukturen wider. Dies wird anhand von den Abbildungen 4.8(a)-(f) deutlich, in denen für alle anisotropen Konfigurationen die Bereiche der Oberflächen in schwarz markiert sind, die während des gesamten Gleitwegs von  $\Delta x = 2$  mm mindestens einmal in Kontakt stehen. Wiederrum sind deutlich mehr Oberflächenbereiche am eigentliche Reibprozess beteiligt, als rein statische Simulationen vermuten lassen würden.

Die kompakte Zusammenfassung der Ergebnisse aller simulierten Betriebspunkte erfolgt in den Abbildungen 4.9 und 4.10. Im Vergleich zu den isotropen Konfigurationen fällt in den Abbildungen 4.9(a), 4.10(a) und (e) der größere Reibwert bei rein elastischen Belastungsfällen auf, der auf eine zwar immer noch proportional, aber nun schneller mit dem Druck  $E[p_A]$  ansteigende tatsächliche Kontaktfläche zurückgeführt werden kann. Dies resultiert in den Abbildungen 4.9(b), 4.10(b) und (f) in ebenfalls höheren Temperaturen  $E[\theta_A]$ . Ansonsten ähneln die Verläufe der Erwartungswerte von Druck  $E[p_A]$ , Scherspannung  $E[\tau_A]$  und Temperatur  $E[\theta_A]$  weitestgehend den Verläufen für die isotropen Konfigurationen, sodass auch die Schlussfolgerungen gleich bleiben. Unterschiede im Detail lassen sich auf die verschiedenen Oberflächenpaarungen zurückführen.

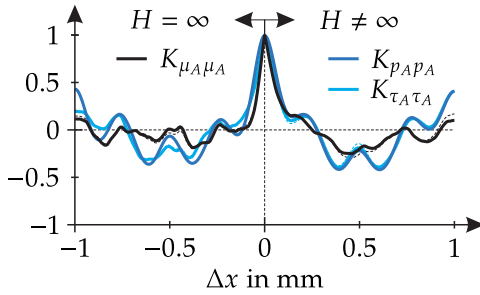
Anders sieht es bei den Autokovarianzfunktionen in den Abbildungen 4.9(c), 4.10(c) und (g) aus. Hier sind die Auswirkungen der anisotropen Leistungsdichtespektren zu beobachten, die vor allem bei Konfiguration Anisotrop 3 in Abbildung 4.10(g) zu einer großen Korrelationslänge führen. Im Vergleich zu den isotropen Konfigurationen besitzen die erhaltenen Verteilungsdichten in den Abbildungen 4.9(d), 4.10(d) und (h) außerdem eine höhere Varianz. Durch das geringere Verschleißvolumen, ergeben sich dort kleinere Unterschiede zwischen den neuen und eingelaufenen Oberflächenpaarungen. Die jeweiligen Korrelationslängen  $\Delta x_{\text{kor}}^2$  und Standardabweichungen  $(E[\Delta\mu_A^2])^{1/2}$  der berechneten Reibwerte werden in Tabelle 4.3 aufgelistet.



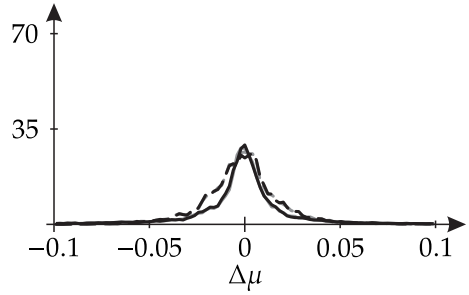
(a)  $E[\tau_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$



(b)  $E[\theta_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$

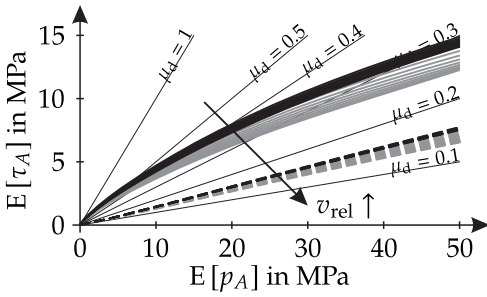


(c) Verschiedene Autokovarianzfunktionen für die neuen Oberflächen (links) und die eingelaufenen Oberflächen (rechts)

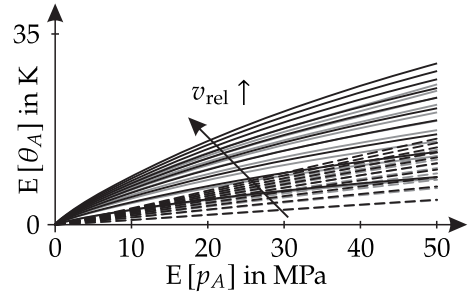


(d) Verteilungsdichtefunktionen  $p_{\Delta\mu_A}(\Delta\mu)$  der Reibwertschwankungen

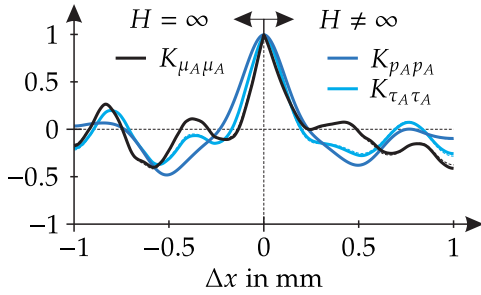
**Abbildung 4.9:** Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfiguration Anisotrop 1



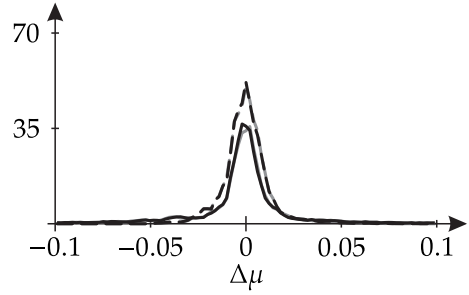
(a)  $E[\tau_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Anisotrop 2



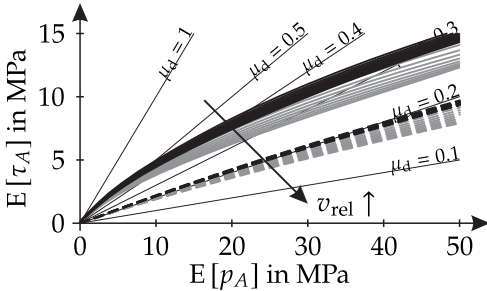
(b)  $E[\theta_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Anisotrop 2



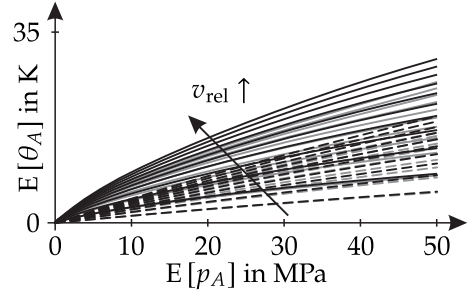
(c) Autokovarianzfunktionen für Anisotrop 2



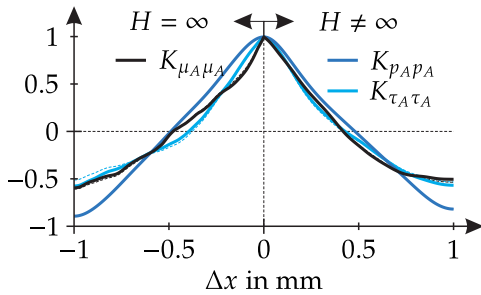
(d) Verteilungsdichten für Anisotrop 2



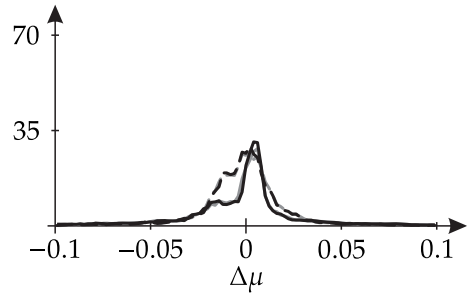
(e)  $E[\tau_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Anisotrop 3



(f)  $E[\theta_A]$  als Funktion von  $E[p_A]$  für Anisotrop 3



(g) Autokovarianzfunktionen für Anisotrop 3



(h) Verteilungsdichten für Anisotrop 3

Abbildung 4.10: Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfigurationen Anisotrop 2 und Anisotrop 3

## 4.3 Einordnung der Ergebnisse

Die durchgeführten Simulationen ermöglichen bisher neuartige Einblicke in den Kontakt gleitender Körper. Die Berücksichtigung der Rauigkeit beider Kontaktkörper offenbart dabei transiente Eigenschaften, die durch Modellierungen mit einer einseitigen Rauigkeit nicht erfasst werden können. Hierzu zählen in besonderem Maße die Blitztemperaturen und die transiente Kontaktfläche, die wiederum transiente Spannungsfelder implizieren. Es zeigt sich ein starker Einfluss des Einlaufprozesses auf die Ergebnisse, wobei der Verschleiß bei den anisotropen Konfigurationen vergleichsweise geringer ausfällt. Durch den Einlaufprozess erhöht sich außerdem bei allen Konfigurationen der deterministische Anteil des Reibwerts. Folglich können bereits hier reibungserregte Schwingungen entstehen, die wiederum durch das Minimalmodell der nicht-konservativen Kopplung aus Abschnitt 2.3.2 erklärbar sind.

Zusammenfassend lässt sich für alle sechs Oberflächenkonfigurationen aus Tabelle 4.1 sowohl eine Last- als auch eine Geschwindigkeitsabhängigkeit des deterministischen Reibwertanteils feststellen. Die Lastabhängigkeit des Reibwerts tritt nur bei den Oberflächen mit  $E[S_{sk}] \neq 0$  auf, während sich für die normalverteilten Oberflächen mit  $E[S_{sk}] \approx 0$  auch bei einer Relativbewegung der Kontaktkörper ein lastunabhängiger Reibwert ergibt. Letzterer ist auf eine Proportionalität zwischen der tatsächlichen Kontaktfläche und der Last aufgrund einer äquivalenten Oberfläche mit im Mittel immer noch normalverteilten Höhenwerten zurückzuführen (vgl. Tabelle 4.3). Ob eine Lastabhängigkeit vorliegt, lässt sich somit anhand der Schiefe  $E[S_{sk}]$  beurteilen. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Reibwerts ist einerseits durch die Abhängigkeit der Versagensscherspannung von der Gleitgeschwindigkeit und der Temperatur sowie andererseits durch die Berücksichtigung der thermoelastischen Ausdehnungen begründbar. Insbesondere die bereits bei kleinen Relativgeschwindigkeiten auftretenden hohen Blitztemperaturen sind dabei für die Absenkung des Reibwerts von entscheidender Bedeutung. Grundsätzlich passen alle erhaltenen Ergebnisse zumindest qualitativ gut zu Ergebnissen in der Literatur, wobei sich die Simulationen durch die hergeleiteten Einflussfunktion leicht auf beliebige Materialparameterkombinationen erweitern lassen. Die berechneten Autokovarianz- und Verteilungsdichtefunktionen widersprechen einer Modellierung des stochastischen Reibwertanteils als normalverteiltes weißes Rauschen. Diese Schlussfolgerung passt gut zu veröffentlichten Messungen [215, 229]. Allerdings lässt sich in der Literatur noch ein generelles Defizit hinsichtlich gezielter Auswertungen des stochastischen Reibwertanteils festhalten. Die anisotropen Eigenschaften der Oberflächen sind in den Autokovarianzfunktionen des Reibwerts wiederzuerkennen. Darüber hinaus werden keine Einflüsse von Temperatur oder thermoelastischen Verformungen auf den stochastischen Anteil des Reibwerts gefunden. Ob die verwendete Diskretisierung für allgemeingültige Aussagen ausreicht,

**Tabelle 4.3:** Zusammenfassung der Ergebnisse aller isotropen und anisotropen Konfigurationen (gerundet auf die dritte Nachkommastelle)

Konfiguration Härte	Isotrop 1		Isotrop 2		Isotrop 3	
	$\infty$	$3R_e$	$\infty$	$3R_e$	$\infty$	$3R_e$
$E[S_q]$ in $\mu\text{m}$	0.987	0.853	0.991	0.835	0.99	0.806
$E[S_{ku}]$	2.91	2.839	2.99	2.905	2.98	2.973
$E[S_{sk}]$	-0.005	-0.376	0.004	-0.455	0.003	-0.527
$\Delta x_{\text{korrr}}$ in mm	0.077	0.08	0.076	0.103	0.048	0.069
$T_{\text{eff}}/4$ in mm	1/16	$\approx 1/16$	1/24	$\approx 1/24$	1/32	$\approx 1/32$
$E[\mu_P]$	0.055	-	0.041	-	0.034	-
$E[\mu_A]$	0.109	-	0.105	-	0.076	-
$(E[\Delta\mu_A^2])^{1/2}$	0.008	0.038	0.008	0.03	0.004	0.025
Konfiguration Härte	Anisotrop 1		Anisotrop 2		Anisotrop 3	
	$\infty$	$3R_e$	$\infty$	$3R_e$	$\infty$	$3R_e$
$E[S_q]$ in $\mu\text{m}$	0.979	0.887	0.993	0.907	0.992	0.931
$E[S_{ku}]$	2.913	2.838	3.053	2.879	2.804	2.713
$E[S_{sk}]$	-0.027	-0.279	-0.021	-0.297	-0.055	-0.236
$\Delta x_{\text{korrr}}$ in mm	0.139	0.25	0.134	0.237	0.478	0.418
$T_{\text{eff}}/4$ in mm	1/16	$\approx 1/16$	3/32	$\approx 3/32$	3/16	$\approx 3/16$
$E[\mu_P]$	0.071	-	0.071	-	0.071	-
$E[\mu_A]$	0.191	-	0.155	-	0.194	-
$(E[\Delta\mu_A^2])^{1/2}$	0.026	0.072	0.012	0.057	0.029	0.143

kann auch aufgrund einer fehlenden Validierung mit Experimenten nicht abschließend beantwortet werden. Almqvist [6] folgert jedoch aus seinen Untersuchungen, dass bereits bei einer Berücksichtigung von 25 % der tatsächlich vorhandenen Frequenzanteile repräsentative Ergebnisse zu erwarten sind. Daher scheinen die Aussagen des Modells im Rahmen der Halbraumannahme gültig zu sein.

Es verbleibt die Frage, inwieweit sich die erhaltenen Ergebnisse auf die Oberflächenrauigkeiten zurückführen lassen. Bezüglich des deterministischen Reibwerts wird diese Fragestellung zumindest für den quasi-statischen Normalkontakt bei normalverteilten Oberflächenhöhen bereits weitestgehend durch vorhandene Veröffentlichungen behandelt und lässt sich durch die Vernachlässigung von thermischen Effekten auf gleitende Kontakte erweitern. Bush, Gibson und Thomas [41] sowie Persson [201] folgern für vergleichsweise kleine tatsächliche Kontaktflächen eine Proportionalität zwischen der tatsächlichen Kontaktfläche und dem Kehrwert des quadratischen Mittelwertes der Oberflächenhöhengradienten  $(E[\|\nabla z\|^2])^{-1/2}$ . Daraus lässt sich ebenfalls auf eine Proportionalität zwischen  $(E[\|\nabla z\|^2])^{-1/2}$  und dem Reibwert  $\mu_A$  beziehungsweise der



Temperatur  $\theta_A$  schließen, da beide proportional zur tatsächlichen Kontaktfläche sind. Mit dem Proportionalitätsfaktor  $\sqrt{8\pi}$  von Persson [201] kann der Reibwert

$$\mu_P = \sqrt{8\pi} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \frac{\tau_s}{\sqrt{E[\|\nabla z\|^2]}}$$

hergeleitet werden, wobei die zugehörigen Erwartungswerte  $E[\mu_P]$  über eine Gleitperiode von  $\Delta x = 2 \text{ mm}$  in Tabelle 4.3 aufgelistet sind. Um dabei die numerisch fehleranfällige Berechnung der Gradienten über finite Differenzen zu vermeiden, werden stattdessen die spektralen Momente der jeweiligen äquivalenten Oberflächen

$$E[\|\nabla z\|^2] = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} S_{ZZ}(\omega) \|\omega\|^2 d\omega$$

ausgewertet [178]. Der Korrelationskoeffizient  $\rho(E[\mu_P], E[\mu_A]) \approx 0.929$  fällt zwar erwartungsgemäß hoch aus, sollte aber wegen der geringen Anzahl an Stichproben noch durch weitere Simulationen bestätigt werden. Der absolute Unterschied in den Reibwerten  $E[\mu_P]$  und  $E[\mu_A]$  lässt sich zudem auf mehrere Faktoren zurückführen. Zum einen beziehen sich die Herleitungen von Persson [201] auf normalverteilte Oberflächenhöhen, wohingegen die Auswertungen in den Abbildungen 4.1 und 4.7 zeigen, dass dies bei gleitenden Konfigurationen nicht durchweg der Fall ist. Zum anderen unterschätzt Persson die tatsächliche Kontaktfläche [188], während die für die Simulationen gewählte Diskretisierung sicherlich zu einer Überschätzung der tatsächlichen Kontaktfläche führt. Für die eingelaufenen Oberflächen entfällt die Proportionalität vollends, sodass für einen Zusammenhang zwischen den charakteristischen Oberflächenwerten und dem Reibwert auf numerische Auswertungen zugegriffen werden muss.

Für einen Zusammenhang der erhaltenen Korrelationslängen des Reibwerts zu den Oberflächenstrukturen wird zunächst die äquivalente Oberfläche zweier Körper mit den harmonischen Oberflächenhöhen  $z_1 = A \sin(\omega_1 x)$  und  $z_2 = B \sin(\omega_2 x)$  durch Gleichung (3.62)

$$\begin{aligned} z(x, t) &= z_1(x) + z_2(x - v_{\text{rel}} t) \\ &= (A + B) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} x - \frac{\omega_2 v_{\text{rel}}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x + \frac{\omega_2 v_{\text{rel}}}{2} t\right) \\ &\quad + (A - B) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} x - \frac{\omega_2 v_{\text{rel}}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x + \frac{\omega_2 v_{\text{rel}}}{2} t\right) \end{aligned}$$

berechnet. Hieraus können direkt die effektiven Periodendauern  $T_{\text{eff}} = 4\pi/|\omega_1 \pm \omega_2|$  abgelesen werden. Mit der kleineren der beiden Periodendauern folgt die dominierende Korrelationslänge  $\Delta x_{\text{korr}} = T_{\text{eff}}/4$ , wobei die Amplituden keinen Einfluss zeigen. Die auf

diese Weise hergeleitete Korrelationslänge wird in Tabelle 4.3 für alle Konfigurationen aus Tabelle 4.1 aufgelistet, wobei  $\omega_1$  und  $\omega_2$  mit den jeweiligen Werten von  $\omega_r$  identifiziert werden. Bei den anisotropen Konfigurationen ist dabei jeweils noch  $\psi_x$  und  $\psi_y$  zu berücksichtigen. Der Korrelationskoeffizient  $\rho(\Delta x_{\text{kor}}, T_{\text{eff}}/4) \approx 0.934$  fällt ebenfalls hoch aus, sodass weiterführende analytische Untersuchungen hierauf aufbauen können.

Eine vergleichbar hohe Korrelation konnte für die Reibwertschwankungen  $E[\Delta\mu_A^2]$  nicht gefunden werden, weshalb eine endgültige Abschätzung der Schwankungsbreite aus den beteiligten Oberflächen offen bleibt.

Da die bisherigen Simulationsergebnisse lediglich eine Temperaturabhängigkeit der Versagensspannung und der Härte berücksichtigen, wird abschließend eine Erweiterung auf möglichst allgemeine temperaturabhängige Materialparameter diskutiert. Die zugrundeliegenden Gleichungen für temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit  $K(T)$ , spezifische Wärmekapazität  $c_d(T)$  und Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha(T)$  lauten [181]

$$\mu\Delta\mathbf{r} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{r}) = (3\lambda + 2\mu)\nabla\int_{T_0}^T \alpha(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$\nabla\cdot(K(T)\nabla\theta) = \rho c_d(T)\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Durch die Transformation [181]

$$\Gamma = T_0 + \int_{T_0}^T \frac{K(\vartheta)}{K(T_0)}\,d\vartheta \quad (4.1)$$

können diese Gleichungen zu

$$\mu\Delta\mathbf{r} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{r}) = (3\lambda + 2\mu)\alpha(T_0)\nabla\Gamma, \quad (4.2)$$

$$\kappa(T)\Delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial t} \quad (4.3)$$

umformuliert werden, wobei von einer Proportionalität zwischen  $\alpha(T)$  und  $K(T)$  ausgegangen wird. Es folgt weiterhin die Beziehung zwischen Temperatur und Wärmestrom

$$\mathbf{q} = -K(T)\nabla\theta = -K(T_0)\nabla\Gamma,$$

während  $\kappa(T) = K(T)/\rho c_d(T)$  die temperaturabhängige Temperaturleitfähigkeit bezeichnet. Die Gleichungen (4.2) und (4.3) stimmen strukturell mit den homogenen Gleichun-

gen (2.15) und (2.16) für den einseitig gekoppelten Fall mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  überein. Da für viele Materialien in guter Näherung von einer temperaturunabhängigen Temperaturleitfähigkeit  $\kappa(T) \approx \text{konst.}$  ausgegangen werden kann [15], ist die Verwendung der bereits in Unterkapitel 3.1 hergeleiteten Einflussfunktionen mit nun neuer Interpretation, zumindest im Rahmen der getroffenen Annahmen, weiterhin ohne Probleme möglich. Allerdings müssen dafür die Parametrisierungen von  $K(T)$ ,  $c_d(T)$  und  $\alpha(T)$  explizit bekannt sein.

Im Folgenden werden die Auswirkungen von temperaturabhängigen Materialparametern in der Form

$$\begin{aligned} K(T) &\approx K(T_0)(1 + \gamma(T - T_0)), \\ \alpha(T) &\approx \alpha(T_0)(1 + \gamma(T - T_0)) \end{aligned}$$

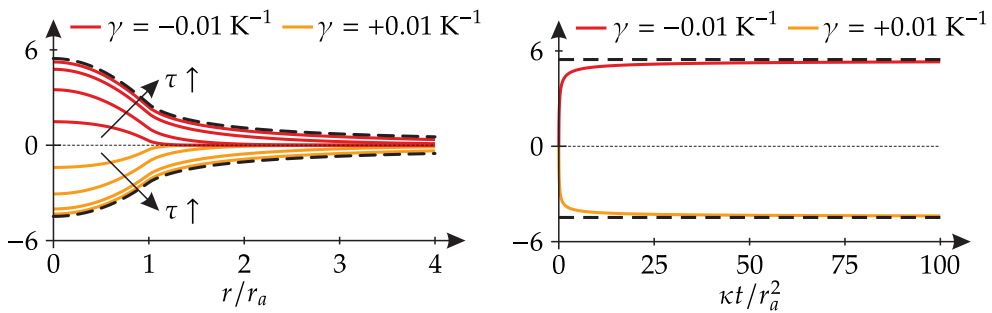
untersucht, wobei Wärmeleitfähigkeit  $K(T)$  und Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha(T)$  jeweils durch eine Taylorreihe erster Ordnung approximiert sind. Eine solche Parametrisierung bietet sich im Zusammenhang mit der zugrundeliegenden Annahme für die Wärmeleitungsgleichung  $|\theta/T_0| \ll 1$  an. Außerdem wird entsprechend von einer konstanten Temperaturleitfähigkeit  $\kappa(T) = K(T)/\rho c_d(T) \approx \text{konst.}$  ausgegangen. Die Gleichung (4.1) lässt sich zu

$$\Gamma - T_0 = \frac{1}{2}\gamma(T - T_0)^2 + T - T_0$$

auswerten, es verbleibt nur eine physikalische Lösung

$$\theta = T - T_0 = \frac{2(\Gamma - T_0)}{1 + \sqrt{1 + 2\gamma(\Gamma - T_0)}}.$$

Für die thermoelastischen Verschiebungen ergeben sich wegen der Proportionalität von Wärmeleitfähigkeit  $K(T)$  und Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha(T)$  keine Unterschiede. Anhand eines parabolischen Wärmestroms  $q = q_0 (1 - r^2/r_a^2)^{1/2}$  innerhalb des Gebietes  $r \leq r_a$  mit  $q_0 = 1 \text{ MJ/sm}^2$ ,  $r_a = 0.5 \text{ mm}$  und  $K(T_0) = 40 \text{ J/msK}$  werden die Auswirkungen verdeutlicht. In den Abbildungen 4.11(a) und (b) ist die relative Temperaturdifferenz  $\theta - \theta|_{\gamma=0} / \theta|_{\gamma=0}$  in % für die beiden Werte  $\gamma = \pm 0.01 \text{ K}^{-1}$  entlang der  $r$ -Richtung und der dimensionslosen Zeit  $\tau = \kappa t / r_a^2$  dargestellt. Die stationären Werte sind als gestrichelte Linien ebenfalls eingezeichnet. Der Einfluss der temperaturabhängigen Materialparameter ist deutlich zu erkennen und es lässt sich feststellen, dass die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit durchaus eine Rolle spielt. Da bei vielen Materialien  $\gamma > 0$  gilt, mindert die Berücksichtigung von temperaturabhängigen Materialparameter zudem die Auswirkungen einer mit der Temperatur sinkenden



(a) Relative Temperaturdifferenz  $\theta - \theta|_{\gamma=0} / \theta|_{\gamma=0}$  in % für  $\gamma = \pm 0.01 \text{ K}^{-1}$  zu verschiedenen Zeitpunkten entlang der  $r$ -Richtung

(b) Zeitlicher Verlauf der relativen Temperaturdifferenz  $\theta - \theta|_{\gamma=0} / \theta|_{\gamma=0}$  in % für  $\gamma = \pm 0.01 \text{ K}^{-1}$  in der Mitte der Wärmequelle

Abbildung 4.11: Einfluss von temperaturabhängigen Materialparametern auf das Temperaturfeld

Versagensscherspannung. Die zusätzliche Konstante  $\gamma$  bietet darüber hinaus eine Möglichkeit, die Simulationen an Experimente anzupassen. Eine Reihe verschiedener weiterer Parametrisierungen können der Literatur entnommen werden [166, 181]. Da die Ergebnisse der thermomechanischen Kontaktsimulationen auf einen eher geringen Einfluss der thermoelastischen Verschiebungen auf kontaktmechanische Größen hindeuten, wird hier auf weiterführende Untersuchungen mit nicht-proportionalen Wärmeleitfähigkeiten  $K(T)$  und Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha(T)$  verzichtet.

# 5 Diskussion im Kontext von reibungserregten Schwingungen

Die thermomechanischen Kontaktsimulationen in Kapitel 4 haben insbesondere vier wesentliche Eigenschaften des berechneten Reibwerts aufgezeigt. Neben der Abhängigkeit des deterministischen Reibwertanteils von der Gleitgeschwindigkeit und der Last wurden auch genauere Erkenntnisse zur Verteilungsdichte und zur Autokorrelationsfunktion des stochastischen Reibwertanteils erhalten. Das vorliegende Kapitel wird die Auswirkungen dieser Eigenschaften im Kontext von reibungserregten Schwingungen diskutieren. Dabei sind die Folgen der Geschwindigkeitsabhängigkeit bereits ausführlich in der Literatur behandelt (vgl. Abschnitt 2.3.1), jedoch fehlen Untersuchungen bezüglich Lastabhängigkeit und stochastischem Reibwert. Diese erfolgen jeweils in den Unterkapiteln 5.1 und 5.2. Da die Kontaktsimulationen zudem eine Modellierung mit zwei Freiheitsgraden nahelegen, wird dafür das Minimalmodell aus Abschnitt 2.3.2 verwendet. Interessanterweise weist Ibrahim [110] bereits auf das Fehlen von Forschungsbemühungen hinsichtlich stochastischer Modellierungen bei Minimalmodellen mit nicht-konservativer Kopplung hin, entsprechende Arbeiten konnten aber nicht gefunden werden.

## 5.1 Lastabhängiger Reibwert

Für einen last- und damit einrückungsabhängigen deterministischen Reibwert  $\mu_d(z)$  verändern sich die gekoppelten Differentialgleichungen für den Zustand des Gleitens aus Gleichung (2.39) in Abschnitt 2.3.2 zu

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_d(z)c_n z \operatorname{sign}(v_{\text{rel}}) \\ F_e \end{pmatrix},$$

die sich um die Ruhelage  $(x_0, z_0)^\top$  linearisieren lassen

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} - \tilde{\mu}c_n \\ c_{21} & c_{22} + c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

worin  $\tilde{\mu} = \mu_d(z_0) + z_0 \left. \frac{\partial \mu_d}{\partial z} \right|_{z=z_0}$  bezeichnet. Für beliebige funktionale Zusammenhänge  $\mu_d(z)$  lässt sich die Ruhelage  $(x_0, z_0)^\top$  in der Regel nur noch numerisch berechnen, die Existenz mehrerer Ruhelagen ist möglich. Im Vergleich zu den linearisierten Gleichungen (2.40) in Abschnitt 2.3.2 ergibt sich ein zusätzlicher Einfluss des Reibwertgradienten auf die Stabilität der Ruhelage, sodass auf eine oszillatorische Instabilität der Ruhelage in Abhängigkeit von  $\tilde{\mu}$  geschlossen werden kann. Das qualitative Stabilitätsverhalten bleibt allerdings aufgrund der unveränderten Struktur der Gleichungen erhalten.

## 5.2 Stochastischer Reibwert

Für einen stochastischen Reibwert  $\mathcal{M}_s$  wird eine möglichst allgemeine Parametrisierung von Verteilungsdichte- und Autokorrelationsfunktion gewählt, sodass anschließende Parameterstudien erfolgen können. Um die Untersuchungen auf die Auswirkungen des stochastischen Reibwertanteils zu beschränken, wird im Folgenden von einem konstanten deterministischen Reibwertanteil  $\mu_d = E[\mathcal{M}_s] = \text{konst.}$  ausgegangen. Die Diskussion erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird ein auf Ortsebene beschriebener stochastischer Prozess in Abschnitt 5.2.1 derart modelliert, dass er einerseits die Resultate der thermomechanischen Simulationen abbildet und andererseits physikalisch konsistent ist. Anschließend erfolgt die Transformation in den Zeitbereich, um eine Verträglichkeit mit den Differentialgleichungen des nicht-konservativen Minimalmodells herzustellen. Die Auswirkungen des auf diese Weise modellierten stochastischen Reibwerts auf die Dynamik des Systems erfolgt daraufhin in Abschnitt 5.2.2.

### 5.2.1 Reibwertmodellierung

Für die Autokorrelationsfunktion wird im Folgenden die Parametrisierung

$$\frac{R_{\mu_s \mu_s}}{R_q^2} = e^{-D\Omega_x |\Delta x|} \left( \cos \left( \Omega_x \sqrt{1 - D^2} |\Delta x| \right) + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \sin \left( \Omega_x \sqrt{1 - D^2} |\Delta x| \right) \right) \quad (5.1)$$

gewählt, was dem zweiseitigen Leistungsdichtespektrum

$$\frac{S_{\mu_s \mu_s}}{R_q^2} = \frac{4D\Omega_x^3}{(\Omega_x^2 - \omega_x^2)^2 + 4D^2\Omega_x^2\omega_x^2}$$

entspricht. Beide Ausdrücke beinhalten die Filterparameter  $\Omega_x$  und  $D$ , die für die Anpassung an experimentell oder rechnerisch erhaltene Ergebnisse herangezogen werden können. Darüber hinaus bezeichnet  $R_q$  hier und im Folgenden die Standardabweichung des stochastischen Reibwerts. Für die Verteilungsdichte soll die Modellierung physikalisch konsistent und daher beschränkt erfolgen, sodass ein normalverteilter Prozess ausgeschlossen ist.

Zhu und Cai [266] leiten die stochastischen Filtergleichungen im Sinne Itô's

$$dX_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_x^2 & -2D\Omega_x \end{pmatrix} X_x dx + \sqrt{\frac{4D\Omega_x^3}{2\iota + 1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\Delta^2 - X_1^2 - X_2^2/\Omega_x^2} \end{pmatrix} dW_x \quad (5.2)$$

her, die die frei wählbaren Filterparameter  $\Omega_x$ ,  $D$ ,  $\Delta$  und  $\iota$  beinhalten. Wird der stochastische Reibwertanteil mit  $\mu_s = X_1$  identifiziert, ergibt sich für den stationären Fall die symmetrische und auf das Intervall  $X_1 \in [-\Delta, \Delta]$  beschränkte Verteilungsdichtefunktion

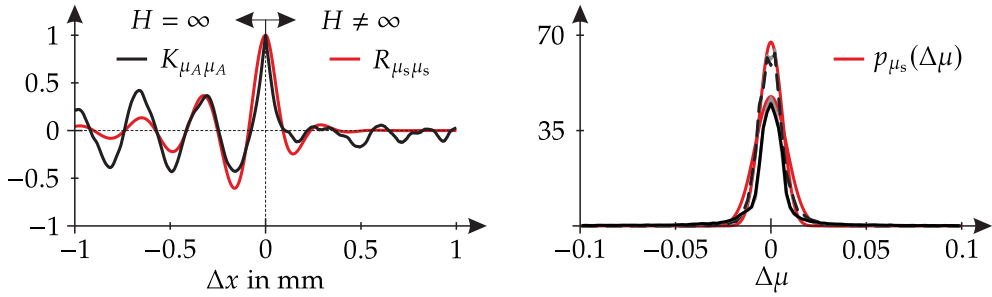
$$p_{\mu_s}(X_1) = \frac{\Gamma(2\iota + 2)}{2^{2\iota+1}\Delta(\Gamma(\iota + 1))^2} \left(1 - \frac{X_1^2}{\Delta^2}\right)^\iota, \quad (5.3)$$

die lediglich von der Gamma-Funktion  $\Gamma(\dots)$  und den beiden Filterparametern  $\Delta$  sowie  $\iota$  abhängt. Es folgen der Mittelwert  $E[M_x] = \mu_d$ , die Varianz  $E[(M_x - \mu_d)^2] = \Delta^2/(2\iota + 3)$  und beliebige höhere zentrale Momente

$$E[(M_x - \mu_d)^n] = \frac{\Delta^n (1 + (-1)^n) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\iota + \frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\iota + \frac{3}{2} + \frac{n}{2}\right)}. \quad (5.4)$$

Des Weiteren besitzen die stationären Lösungen  $X_1$  von Gleichung (5.2) allesamt die Autokorrelationsfunktion (5.1).

Die gewählte Autokorrelationsfunktion aus Gleichung (5.1) wird in Abbildung 5.1(a) mit der in Unterkapitel 4.1 berechneten Autokovarianzfunktion von Konfiguration Isotrop 2 aus Abbildung 4.6(c) verglichen. Der Übergang von den periodischen Ergebnissen auf nicht-periodische Oberflächenkonfigurationen erfolgt hierbei durch die Simulation mit den Filtergleichungen automatisch. Darüber hinaus wird in Abbildung 5.1(b) auch die Verteilungsdichtefunktion aus Gleichung (5.3) mit der in Unterkapitel 4.1 berechneten Verteilungsdichtefunktion von Konfiguration Isotrop 2 aus Abbildung 4.6(d) verglichen. Beide Parametrisierungen scheinen die erhaltenen Verläufe aus den thermomechanischen Kontaktsimulationen zufriedenstellend abzubilden. Durch die Berücksichtigung weiterer Frequenzanteile wird eine noch bessere Übereinstimmung erwartet, aus Gründen der Übersichtlichkeit erfolgt hier jedoch die Beschränkung auf die einzelne Kreisfrequenz  $\Omega_x$ .



(a) Autokovarianzfunktion aus Gleichung (5.1) im Vergleich zu Abbildung 4.6(c)

(b) Verteilungsdichtefunktion aus Gleichung (5.3) im Vergleich zu Abbildung 4.6(d)

**Abbildung 5.1:** Vergleich von Autokorrelations- und Verteilungsdichtefunktion mit den erhaltenen Ergebnissen der thermomechanischen Kontaktsimulation für Konfiguration Isotrop 2 in Unterkapitel 4.1

Durch den Zusammenhang  $dx = |v_{\text{rel}}|dt$  können die Filtergleichungen vom Orts- in den Zeitbereich transformiert werden. Um danach immer noch einen entkoppelten stationären Prozess zu erhalten, soll an dieser Stelle von einer konstanten Relativgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}} = |v_0 - \dot{x}| \approx v_0$  ausgegangen werden. Die Umwandlung aus dem Orts- in den Zeitbereich

$$d\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_t^2 & -2D\Omega_t \end{pmatrix} \mathbf{X}_t dt + \sqrt{\frac{4D\Omega_t^3}{2t+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\Delta^2 - X_1^2 - X_2^2/\Omega_t^2} \end{pmatrix} dW_t \quad (5.5)$$

kann dann mit  $\Omega_t = \Omega_x v_0$  problemlos erfolgen. Die Verteilungsdichtefunktion bleibt unverändert, dementsprechend sind Mittelwert und Standardabweichung unabhängig von der Geschwindigkeit. Allerdings lässt sich jeweils ein Einfluss der Geschwindigkeit  $v_0$  auf die Autokorrelationsfunktion

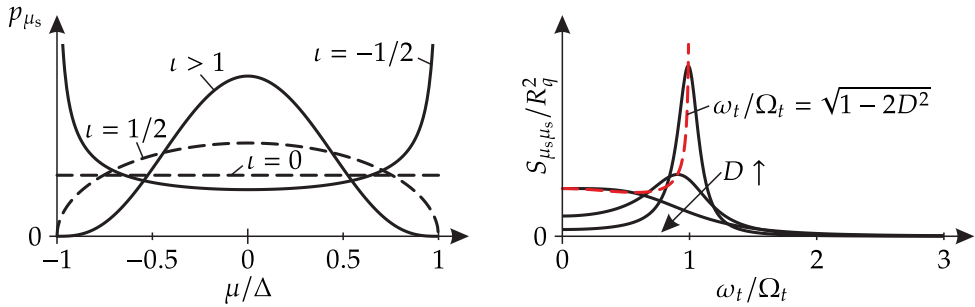
$$\frac{R_{\mu_s \mu_s}}{R_q^2} = e^{-D\Omega_t |t|} \left( \cos(\Omega_t \sqrt{1-D^2} |t|) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\Omega_t \sqrt{1-D^2} |t|) \right)$$

und das zweiseitige Leistungsdichtespektrum

$$\frac{S_{\mu_s \mu_s}}{R_q^2} = \frac{4D\Omega_t^3}{(\Omega_t^2 - \omega_t^2)^2 + 4D^2\Omega_t^2\omega_t^2} \quad (5.6)$$

feststellen, sodass sowohl das Leistungsdichtespektrum für  $v_0 \rightarrow 0$  als auch die Korrelationslänge des Prozesses für  $v_0 \rightarrow \infty$  gegen null konvergiert. Die Auswirkungen lassen sich dementsprechend physikalisch plausibel interpretieren.  $\Omega_t$  kann als systems-





(a) Verteilungsdichtefunktion aus Gleichung (5.3) für verschiedene Filterparameter  $\iota$  (b) Zweiseitiges Leistungsdichtespektrum aus Gleichung (5.6) für  $D = 0.1, 0.3, \sqrt{2}/2$

**Abbildung 5.2:** Verteilungsdichtefunktion und Leistungsdichtespektrum des Reibwerts für verschiedene Filterparameter

pezifische Kreisfrequenz aufgefasst werden, die im vorliegenden Fall durch die Oberflächenrauigkeiten verursacht wird. Sie ist auf natürliche Weise mit der Geschwindigkeit  $v_0$  gekoppelt. Der Parameter  $D$  beeinflusst die Abklingrate der Autokorrelationsfunktion, während  $\Delta$  und  $\iota$  maßgebend für die Form der Verteilungsdichtefunktion sind. Sind die Werte für Standardabweichung  $R_q$  und Kurtosis  $R_{ku}$  der zu approximierenden Verteilungsdichtefunktion aus Experimenten oder Simulationen bekannt, können die Filterparameter  $\iota$  und  $\Delta$  beispielsweise zu  $\iota = (9 - 5R_{ku})/(2R_{ku} - 6)$  und anschließend  $\Delta = R_q \sqrt{2\iota + 3}$  gewählt werden. Diese Zusammenhänge lassen sich nach kurzer Rechnung aus Gleichung (5.4) herleiten. Dabei wird jedoch auch ersichtlich, dass der hier gewählte Prozess nur für Werte der Kurtosis im Bereich  $3/2 \leq R_{ku} \leq 3$  geeignet ist. Darüber hinaus lässt sich der Filterparameter  $\Omega_x$  bei bekanntem Dämpfungsmaß  $D$  in Abhängigkeit der Korrelationslänge  $\Delta x_{\text{korrr}}$  durch  $\Omega_x = \pi/2\Delta x_{\text{korrr}} \sqrt{1 - D^2}$  abschätzen. Ein direkter Zusammenhang zu den Oberflächenrauigkeiten der Kontaktkörper ist somit gegeben.

Die Verteilungsdichtefunktion ist für verschiedene Werte von  $\Delta$  und  $\iota$  in Abbildung 5.2(a) dargestellt. Abbildung 5.2(b) zeigt den Verlauf des Leistungsdichtespektrums für verschiedene Dämpfungsmaße  $D$ . Die Maxima der Leistungsdichtespektren bei  $\omega_t/\Omega_t = \sqrt{1 - 2D^2}$  sind durch die gestrichelte rote Linie verbunden. Die Abbildungen verdeutlichen, dass die vier Filterkoeffizienten  $\Omega_t$ ,  $D$ ,  $\Delta$  und  $\iota$  vielseitige Anpassungsmöglichkeiten liefern und dadurch Parameterstudien ermöglichen.

Um negative Werte unter der Wurzelfunktion der Filtergleichungen (5.5) während

den numerischen Simulationen zu vermeiden, wird unter Berücksichtigung von Itô's Lemma [57, 227] auf die Transformation

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta \sin(\phi) \cos(\theta) \\ X_2 &= -\Delta \Omega_t \sin(\phi) \sin(\theta) \end{aligned}$$

zurückgegriffen [266]. Abschließend sei ergänzt, dass die Lösung der Filtergleichungen für die Anfangsbedingungen  $\phi = \pi/2$  und  $\theta = 0$  sowie dem Dämpfungsmaß  $D = 0$  in die harmonische Funktion  $X_1 = \Delta \cos(\Omega_t t)$  übergeht.

## 5.2.2 Nicht-konservative Kopplung mit stochastischem Reibwert

Für den stochastischen Reibwert  $\mathcal{M}_t = \mu_d + \mu_s$  verändern sich die gekoppelten Differentialgleichungen für den Zustand des Gleitens aus Gleichung (2.39) in Abschnitt 2.3.2 zu

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu_d + \mu_s) c_n z \operatorname{sign}(v_0 - \dot{x}) \\ F_e \end{pmatrix},$$

die sich um die Ruhelage (im Sinne der Erwartungswerte)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_d c_n - c_{12}}{c_{11}(c_{22} + c_n) + c_{21}(\mu_d c_n - c_{12})} \\ \frac{c_{11}}{c_{11}(c_{22} + c_n) + c_{21}(\mu_d c_n - c_{12})} \end{pmatrix} F_e$$

linearisieren lassen

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} - (\mu_d + \mu_s) c_n \\ c_{21} & c_{22} + c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_s c_n z_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei wird von einer stochastischen Unabhängigkeit zwischen  $z$  und  $\mu_s$  ausgegangen. Es ist erkennbar, dass der stochastische Reibwertanteil als Parameteranregung und Fremdanregung wirkt. Nach einer Umskalierung der Zeit  $\tau = t/t_0$  mit  $t_0 = \sqrt{m/c_n}$  ergeben sich die linearisierten Differentialgleichungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \Delta x'' \\ \Delta z'' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2\delta_1 & 0 \\ 0 & 2\delta_2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta z' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_c - (\mu_d + \mu_s) \\ \zeta_c & \zeta_{22} + 1 \end{pmatrix}}_{K+N+S(\tau)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_s z_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

wobei die dimensionslosen Dämpfungsbeiwerte  $\delta_1 = d_1/2\sqrt{m c_n}$  und  $\delta_2 = d_2/2\sqrt{m c_n}$  sowie die dimensionslosen Steifigkeitsparameter  $\zeta_{11} = c_{11}/c_n$ ,  $\zeta_c = c_{12}/c_n = c_{21}/c_n$

und  $\zeta_{22} = c_{22}/c_n$  eingeführt werden. Zudem sind die Massenmatrix  $M = M^\top$ , die Dämpfungsmatrix  $D = D^\top$ , der symmetrische Anteil der Steifigkeitsmatrix  $K = K^\top$ , der zirkulatorische Anteil der Steifigkeitsmatrix  $N = -N^\top$  und der stochastische Anteil der Steifigkeitsmatrix  $S(\tau)$  mit  $E[S(\tau)] = \mathbf{0}$  enthalten. Für die folgende Stabilitätsuntersuchung wird das homogene Gleichungssystem (5.7) betrachtet.

Die Berechnung des größten Lyapunov-Exponenten

$$\Lambda_1 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{A_\tau}{A_0} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{\ln A_0}^{\ln A_\tau} d \ln A_s \quad (5.8)$$

für die triviale Lösung des homogenen Systems (5.7) lässt Stabilitätsaussagen mit Wahrscheinlichkeit 1 zu.  $A_\tau$  bezeichnet dabei die transiente Entwicklung der euklidischen Norm einer zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  vorliegenden Abweichung  $A_0$  von der Ruhelage. Weitere Informationen zu stochastischer Stabilitätstheorie können in Anhang D gefunden werden. Die Transformation in die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} A_\tau &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x'^2 + \Delta z^2 + \Delta z'^2}, \\ \tan \varphi_\tau &= \Delta x' / \Delta x, \\ \tan \psi_\tau &= \Delta z' / \Delta z, \\ \tan \vartheta_\tau &= \sqrt{\Delta z^2 + \Delta z'^2} / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x'^2} \end{aligned}$$

erlaubt unter Berücksichtigung von Itô's Lemma die Umformulierung des homogenen Gleichungssystems (5.7) in ein System von stochastischen Differentialgleichungen im Sinne von Itô

$$\begin{pmatrix} d \ln A_\tau \\ d\varphi_\tau \\ d\psi_\tau \\ d\vartheta_\tau \\ d\phi_\tau \\ d\theta_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\varphi_\tau, \psi_\tau, \vartheta_\tau, \phi_\tau, \theta_\tau) \\ f_2(\varphi_\tau, \psi_\tau, \vartheta_\tau, \phi_\tau, \theta_\tau) \\ f_3(\varphi_\tau, \psi_\tau, \vartheta_\tau, \phi_\tau, \theta_\tau) \\ f_4(\varphi_\tau, \psi_\tau, \vartheta_\tau, \phi_\tau, \theta_\tau) \\ f_5(\phi_\tau, \theta_\tau) \\ f_6(\phi_\tau, \theta_\tau) \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_7(\phi_\tau, \theta_\tau) \\ f_8(\phi_\tau, \theta_\tau) \end{pmatrix} dW_\tau, \quad (5.9)$$

wobei die ebenfalls in der Zeit neu skalierten Filtergleichungen (5.5) für den stochastischen Reibwert angehängt sind. Die vollständigen Ausdrücke für die Drift- und Diffusionsterme sind in Anhang D aufgelistet. Sie sind außerdem unabhängig von der Amplitude  $A_\tau$ . Folglich hängt der größte Lyapunov-Exponent aus Gleichung (5.8) nur von den stationären Winkelprozessen  $\varphi_\tau, \psi_\tau, \vartheta_\tau, \phi_\tau$  und  $\theta_\tau$  ab.

Da das Lösen einer in diesem Fall fünfdimensionalen partiellen Differentialgleichung für die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion immer noch mit großem Aufwand

verbunden ist [14, 247], wird auf eine numerische Zeitintegration (vgl. Abschnitt 2.1.3) mit zufälligen Anfangsbedingungen für die ersten vier Zustände  $\ln A_0 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $\varphi_0 \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ ,  $\psi_0 \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$  sowie  $\vartheta_0 \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$  zurückgegriffen, während für die Filtergleichungen  $\phi_0 = \pi/2$  und  $\theta_0 = 0$  verwendet wird. Die Simulation ist auf  $10^7$  Zeitschritte mit einer Zeitschrittweite von  $\Delta\tau = 2\pi/\Omega_\tau \sqrt{1 - D^2} 1024$  beschränkt. Die Implementierung wird für den Fall einer harmonischen Anregung durch den Vergleich der berechneten Lyapunov-Exponenten  $\Lambda_1$  mit den entsprechenden Floquet-Multiplikatoren  $\lambda_F$  durch den Zusammenhang  $\Lambda_1 = \text{Re}(\ln(\lambda_F)\Omega_\tau/2\pi)$  verifiziert. Für weitere Informationen zur Theorie und numerischen Berechnung von Floquet-Multiplikatoren wird auf [10, 165] verwiesen.

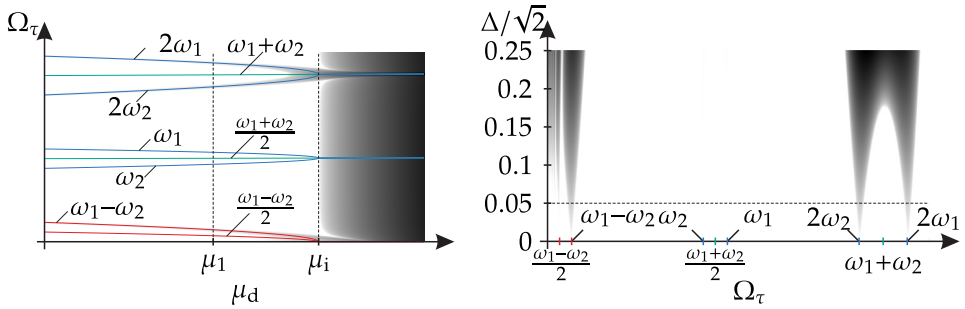
Um die einzelnen Instabilitätsmechanismen gezielt herauszuarbeiten, werden die erhaltenen Ergebnisse zunächst für einen harmonischen und anschließend für einen stochastischen Reibwert vorgestellt. Der Fall eines konstanten Reibwerts kann mit einer Eigenwertanalyse behandelt werden und führt auf die in Abschnitt 2.3.2 hergeleiteten Ergebnisse. Im Falle eines harmonischen Reibwerts  $\mu_s = \Delta \cos(\Omega_\tau \tau)$  wird die Stabilitätskarte durch das Auftreten zusätzlicher parametrischer Resonanzen ergänzt. Bei Mehrfreiheitsgradsystemen mit Parameteranregung können im Allgemeinen stabilisierende und destabilisierende Effekte bei den Fundamental- und Kombinationskreisfrequenzen  $\Omega_\tau/\omega_1 = 2/n$ ,  $\Omega_\tau/\omega_2 = 2/n$  und  $\Omega_\tau/(\omega_1 \pm \omega_2) = 1/n$  für  $n = 1, 2, \dots$  auftreten, die von den beiden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  des Systems (5.7) ohne parametrische Anregung abhängen. Welche Auswirkungen die Parameteranregung im spezifischen Fall hat, hängt dabei stark von der Gleichungsstruktur ab. Aus diesem Grund wird das homogene Gleichungssystem (5.7) durch die Modaltransformation  $(\Delta x, \Delta z)^\top = \mathbf{R} \mathbf{q}$  in Abhängigkeit der modalen Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top$

$$\mathbf{q}'' + \begin{pmatrix} 2\delta_{11} & \delta_c \\ \delta_c & 2\delta_{22} \end{pmatrix} \mathbf{q}' + \left( \begin{pmatrix} k_{11} & -\frac{\mu_d}{2} \\ \frac{\mu_d}{2} & k_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_{11}r_{21} & r_{12}r_{21} \frac{r_{11}^2}{r_{21}^2} \\ -r_{12}r_{21} & r_{11}r_{21} \frac{r_{12}^2}{r_{21}^2} \end{pmatrix} \Delta \cos(\Omega_\tau \tau) \right) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

dargestellt. Die Modalmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

enthält dabei die beiden auf die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  normierten Eigenvektoren des  $\mathbf{M}$ - $\mathbf{K}$  Systems aus Gleichung (5.7). Für den Fall gleichmäßiger Dämpfung  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  ergeben sich die Dämpfungsbeiwerte  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta$  und  $\delta_c = 0$ . Für das vorliegende System lässt sich in der Matrix für die Amplituden der Parameteranregung jeweils die Phasenverschiebung  $\pi$  auf den Haupt- und Nebendiagonalen feststellen.



(a) Stabilitätskarte für eine harmonische Anregung mit  $\Delta = 0.05\sqrt{2}$

(b) Stabilitätskarte für eine harmonische Anregung und  $\mu_d = \mu_1 < \mu_i$

**Abbildung 5.3:** Stabilitätskarten für das homogene Gleichungssystem (5.7) und einen harmonischen Reibwert  $\mu_s = \Delta \cos(\Omega\tau)$  und  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  – dunkel eingefärbte Flächen kennzeichnen die instabilen Bereiche

Für eine solche Gleichungsstruktur kann aus analytischen Überlegungen gefolgert werden [121]:

- Für  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  existiert ein destabilisierender Effekt bei den Fundamental- und Differenzkombinationskreisfrequenzen.<sup>1</sup>
- Für  $\delta_1 \neq \delta_2$  lässt sich zusätzlich ein stabilisierender Effekt bei den Summenkombinationskreisfrequenzen feststellen. Dieser wird auch als Antiresonanz bezeichnet.

Diese zwei Fälle sollen im Folgenden separat betrachtet werden. Zunächst wird der größte Lyapunov-Exponent für den Fall  $\delta_1 = \delta_2$  berechnet, bevor der Fall  $\delta_1 \neq \delta_2$  diskutiert wird.

Für den ungedämpften Fall  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  und die Anregungsamplitude  $\Delta = 0.05\sqrt{2}$  sind die berechneten Lyapunov-Exponenten in Abbildung 5.3(a) dargestellt. Dafür wurden jeweils die Kreisfrequenz  $\Omega\tau$  und der deterministische Reibwertanteil  $\mu_d$  variiert. Dunkel eingefärbte Flächen kennzeichnen einen positiven Lyapunov-Exponenten und damit Instabilität. Diese tritt, wie erwartet, bei den Fundamental- und Differenzkombinationskreisfrequenzen auf. Die bereits aus Abschnitt 2.3.2 bekannte Stabilitätsgrenze  $\mu_d = \mu_i$  unterteilt den Parameterraum in die im wesentlichen instabilen und stabilen Bereiche  $\mu_d \geq \mu_i$ , wobei sich nun aufgrund der Parameteranregung auch kleinere stabile Bereiche für  $\mu_d > \mu_i$  finden lassen. Der Einfluss der Anregungsamplitude  $\Delta$  auf die instabilen Äste ist in Abbildung 5.3(b) für  $\mu_d = \mu_1 < \mu_i$  dargestellt. Dafür wurden jeweils die Kreisfrequenz  $\Omega\tau$  und die Standardabweichung  $R_q = \Delta/\sqrt{2l+3}$  variiert. Es fällt auf,

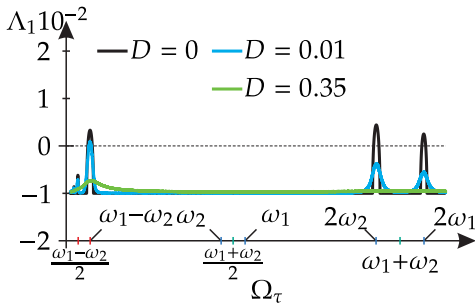
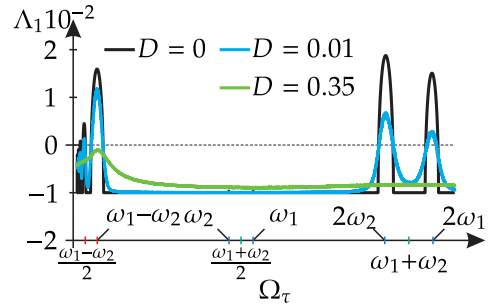
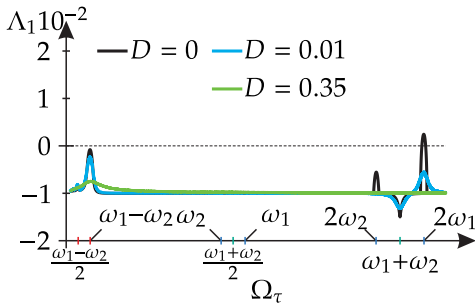
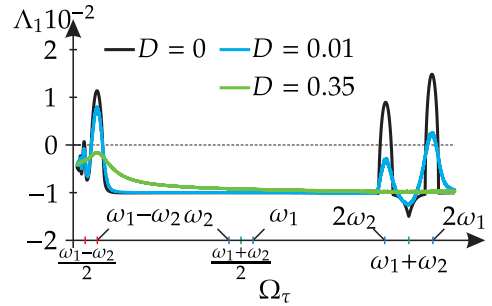
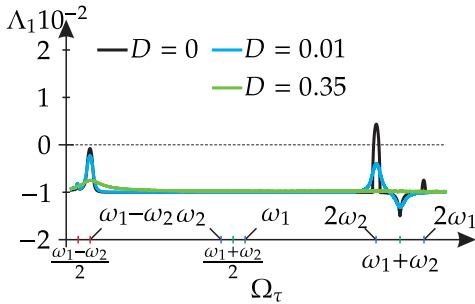
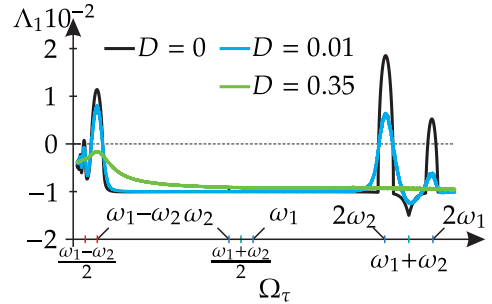
<sup>1</sup> Für diesen Fall lässt sich für das Gleichungssystem (5.7) alternativ auch die Koordinatentransformation  $\Delta x = q_1 \exp(-\delta\tau)$  und  $\Delta z = q_2 \exp(-\delta\tau)$  nutzen. Hierdurch wird die Dämpfungsmatrix eliminiert und auf den Hauptdiagonalen der Steifigkeitsmatrix entstehen die zusätzlichen Einträge  $-\delta^2$ .

dass die Instabilitätsbereiche insbesondere bei den doppelten Eigenkreisfrequenzen und bei den Differenzenkombinationskreisfrequenzen ausgeprägt sind. Letzteres ist eher untypisch für mechanische Systeme.

Um die Auswirkungen des stochastischen Reibwerts für den Fall der gleichmäßigen Dämpfung  $\delta_1 = \delta_2 > 0$  zu untersuchen, werden die Lyapunov-Exponenten bei  $\mu_d = \mu_1 < \mu_i$  und  $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$  für harmonische und stochastische Parameteranregungen mit  $D = 0, 0.01, 0.35$  berechnet. Die Ergebnisse sind für die Standardabweichung  $R_q = 0.05$  in Abbildung 5.4(a) und für die Standardabweichung  $R_q = 0.1$  in Abbildung 5.4(b) ausgewertet. Instabilität mit Wahrscheinlichkeit 1 tritt für einen positiven Lyapunov-Exponenten auf, asymptotische Stabilität mit Wahrscheinlichkeit 1 lässt sich für negative Lyapunov-Exponenten festhalten. Die stochastische Parameteranregung weicht die Grenzen der ursprünglich klar separierbaren destabilisierten Bereiche auf. Dies kann auf das nichtverschwindende Leistungsdichtespektrums (5.6) bei den Fundamental- und Differenzenkombinationskreisfrequenzen zurückgeführt werden. Während der destabilisierende Effekt bei den doppelten Eigenkreisfrequenzen für  $D = 0.01$  noch erhalten bleibt, überdauert für das höhere Dämpfungsmaß  $D = 0.35$  nur der destabilisierende Effekt bei den Differenzenkombinationskreisfrequenzen.

Eine qualitativ gleiche Entwicklung ergibt sich auch für den Fall  $\delta_1 \neq \delta_2$  in den Abbildungen 5.4(c)-(f). Der erwartete stabilisierende Effekt der Parameteranregung ist zumindest bei der größten Summenkombinationskreisfrequenz klar erkennbar. Die für eine harmonische Anregung noch deutlich abgrenzbaren stabilisierten oder destabilisierten Bereiche weichen durch die stochastische Anregung erneut auf, für ein hohes Dämpfungsmaß scheint nur noch der destabilisierende Effekt bei den Differenzenkombinationskreisfrequenzen zu überdauern. Des Weiteren ist das Ausbleiben einer der beiden destabilisierenden Effekte bei den doppelten Eigenkreisfrequenzen interessant, das jedoch nur für  $D = 0.01$  stattfindet.

Die gezeigten Stabilitätskarten offenbaren das Auftreten von Parameterresonanzen aufgrund eines stochastischen Reibwerts. Als Ursache für reibungserregte Schwingungen scheint dieses Phänomen noch nicht in der Literatur bekannt zu sein. Interessant ist insbesondere der für mechanische Systeme eher untypische destabilisierende Effekt bei den Differenzenkombinationskreisfrequenzen, der das Auftreten von reibungserregten Schwingungen bei niederfrequenten Anteilen des Reibwerts trotz hohen Systemeigenkreisfrequenzen erklären könnte. Darüber hinaus sind aber auch die gefundenen Antiresonanzen bei Summenkombinationskreisfrequenzen bei ungleichmäßiger Dämpfung eher kontraintuitiv. Die auftretenden Effekte lassen sich auf den harmonischen Anregungsfall zurückführen und hängen von der Wahrscheinlichkeit ab, mit der die jeweilige Anregungsfrequenz im stochastischen Prozess auftaucht. Inwieweit der hier gefundene Instabilitätsmechanismus bei reibungserregten Schwingungen in realen

(a) Größter Lyapunov-Exponent für  $R_q = 0.05$  und  $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ (b) Größter Lyapunov-Exponent für  $R_q = 0.1$  und  $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ (c) Größter Lyapunov-Exponent für  $R_q = 0.05$  und  $\delta_1 = 2\delta_2 = 0.02$ (d) Größter Lyapunov-Exponent für  $R_q = 0.1$  und  $\delta_1 = 2\delta_2 = 0.02$ (e) Größter Lyapunov-Exponent für  $R_q = 0.05$  und  $2\delta_1 = \delta_2 = 0.02$ (f) Größter Lyapunov-Exponent für  $R_q = 0.1$  und  $2\delta_1 = \delta_2 = 0.02$ 

**Abbildung 5.4:** Größter Lyapunov-Exponent von dem homogenen Gleichungssystem (5.7) für einen harmonischen Reibwert ( $D = 0$ ) und für einen stochastischen Reibwert mit  $D = 0.01, 0.35$  bei  $\mu_d = \mu_1 < \mu_i$

Anwendungen zu beobachten ist, kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht endgültig beantwortet werden. Da Parameterresonanzen zumindest bei fehlender oder geringer äußerer Dämpfung bereits bei sehr kleinen Anregungsamplituden auftreten, sollten die Anregungsintensitäten des stochastischen Reibwerts prinzipiell ausreichen. Es wird jedoch vermutet, dass andere Instabilitätsquellen in technischen Systemen mit Kontakten dominieren. Im Rahmen von Stabilitätsuntersuchungen zu reibungserregten Schwingungen aufgrund eines normalverteilten stochastischen Reibwertanteils können zudem qualitativ gleiche Phänomene gefunden werden [271].



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein thermomechanisches Modell für den Kontakt zweier gleitender Körper mit rauen Oberflächen entwickelt und für verschiedene Kontaktkonfigurationen ausgewertet. Das Simulationsmodell ermöglicht die Berechnung verschiedener kontaktmechanischer Größen wie beispielsweise den Verschiebungen, den Spannungen, dem Temperaturfeld und der tatsächlichen Kontaktfläche. Es ist außerdem in der Lage, die Einflüsse von temperaturabhängigen Materialparametern abzubilden. Die vorliegende Arbeit schließt damit eine in der Literatur noch vorhandene Modellierungslücke und kann als Erweiterung der bisher existierenden Kontaktmodelle angesehen werden. Weiterführende Untersuchungen hinsichtlich den zugrundeliegenden Instabilitätsmechanismen bei reibungserregten Schwingungen unter Einbezug der Erkenntnisse aus den thermomechanischen Simulationen schließen sich in der Folge an. Diese zeigen bisher noch nicht in der Literatur bekannte stabilisierende und destabilisierende Auswirkungen des stochastischen Reibwerts in Systemen mit tribologischen Kontakten, die auf eine stochastische Parameteranregung zurückgeführt werden können.

Für das Modell werden Einflussfunktionen für die voll-gekoppelten und quasi-statischen Gleichungen eines thermoelastischen Festkörpers hergeleitet. Dies gelingt durch die Anwendung der Neuber-Papkovich-Potentiale und der Verwendung des im Kontext der Kontaktmechanik bereits etablierten Halbraummodells. Die auf diese Weise erhaltenen analytischen Ausdrücke beschreiben den Zusammenhang zwischen mechanischen oder thermischen Lasten innerhalb eines Rechteckelements auf der Oberfläche und den Verschiebungen, den Spannungen und der Temperatur an einem beliebigen Punkt des Körpers. Mithilfe der erhaltenen Einflussfunktionen können beliebige räumliche oder transiente Oberflächenlasten mittels einer geeigneten Superposition simuliert werden. Durch die Verwendung der diskreten, zyklischen Faltung im Bildbereich ist die Auswertung der räumlichen und zeitlichen Superpositionen speicherplatzsparend und rechenzeiteffizient. Eine Verifikation der hergeleiteten Einflussfunktionen und der Implementierung erfolgt über den Vergleich mit analytischen Lösungen aus

der Literatur. Infolgedessen können Abschätzungen getroffen werden, inwieweit die Berücksichtigung des Gough-Joule-Effektes für die Kontaktmechanik von Bedeutung ist. Alle hergeleiteten Zusammenhänge behalten ihre Gültigkeit auch bei Anwendungen im Rahmen der Poroelastizität, da dort die zugrundeliegenden Gleichungen strukturell identisch sind. Eine detaillierte Beschreibung des Gesamtmodells führt schließlich zu einem zeitabhängigen, linearen Gleichungssystem mit Ungleichungsnebenbedingungen, das durch ein CG-Verfahren in jedem inkrementellen Zeitschritt gelöst wird. Eine Auswertung des Simulationsmodells erfolgt für isotrope und anisotrope Oberflächenkonfigurationen insbesondere in Hinblick auf die Auswirkungen der zweiseitigen Rauigkeit. Die verwendeten, künstlich erzeugten Oberflächen besitzen dabei sowohl ein vorgegebenes Leistungsdichtespektrum als auch eine vordefinierte Verteilungsdichte. Die Auswertung des thermomechanischen Kontaktmodells führt letztendlich zu folgenden Erkenntnissen:

- Die Berechnung des Reibwerts für zwei gleitende Körper mit rauen Oberflächen bei unterschiedlichen Relativgeschwindigkeiten und Lasten zeigt, dass der Reibwert von ebenjenen Größen abhängt. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit wird hauptsächlich durch die Temperaturentwicklung und die Versagensspannung beeinflusst, während sich die Schiefe auf die Lastabhängigkeit auswirkt. Für äquivalente Oberflächen, die im Mittel normalverteilte Höhenwerte besitzen (und somit  $E[S_{sk}] \approx 0$ ), lässt sich ein lastunabhängiger Reibwert auch bei einer Relativbewegung der Kontaktkörper feststellen. Da die Verteilungsdichte der Oberflächenhöhen durch den Einlaufprozess verändert wird, hat dieser einen signifikanten Einfluss auf die Ergebnisse. Die erhaltenen Erkenntnisse zum stochastischen Reibwertanteil sprechen zudem gegen eine Modellierung desselben als weißes Rauschen.
- Die konsequente Modellierung der Oberflächenrauigkeiten von beiden Kontaktkörpern offenbart ein durchweg transientes Kontaktgeschehen. Dazu zählt in besonderem Maße die ebenfalls in Experimenten beobachtbaren Blitztemperaturen, aber auch der stochastische Anteil des Reibwerts sowie die am Reibprozess beteiligten Oberflächenbereiche. Modellierungen, die lediglich eine statische äquivalente Oberfläche beinhalten, sind nicht in der Lage, diese systemspezifischen Eigenschaften in gleichem Maße abzubilden. Des Weiteren finden sich die isotropen und anisotropen Eigenschaften der Oberflächenstrukturen im Reibwert wieder.
- Die Berücksichtigung von Reibungswärme und thermoelastischen Verformungen deutet einerseits auf einen generell vernachlässigbaren Einfluss des Gough-Joule-Effektes und andererseits auf einen kleinen Einfluss der thermoelastischen Verformungen bezüglich des Reibwerts hin. Darüber hinaus sollte die Temperaturent-

wicklung in der Modellierung bei gleitenden Kontakten berücksichtigt werden, da diese unmittelbaren Einfluss auf die Materialparameter hat. In Kombination mit der zweiseitigen Rauigkeit können Blitztemperaturen erstmals richtig modelliert und die auftretenden transienten Verschiebungs- und Spannungsfelder korrekt dargestellt werden. Der Einbezug von temperaturabhängigen Materialparametern ist möglich.

Im Rahmen mehrerer Abschlussarbeiten wurde die Modellierung um zwei wesentliche Aspekte erweitert. Zum Ersten vermeidet die Verwendung von nicht-äquidistanten Gittern die größtenteils unnötig feinen örtlichen oder zeitlichen Diskretisierung [277]. Die Anwendung auf partiell gleitende Kontakte knüpft anschließend die Verbindung zwischen den Zuständen Haften und Gleiten, sodass eine vollständige Parametrisierung von dynamischen Reibgesetzen in Kombination mit den thermomechanischen Kontaktsimulationen erfolgen kann. Die Ergebnisse der Abschlussarbeit deuten jedoch darauf hin, dass die Verwendung von nicht-äquidistanten Gittern zumindest bei gleitenden Konfigurationen noch keine zwingenden Vorteile mit sich bringt. Dies liegt einerseits an höheren Rechenzeiten und andererseits an der zwangsläufig auftretenden Problemstellung der dynamischen Vernetzung.

Zum Zweiten führt die Verbindung des Multiple-Scales-Verfahrens mit der Reynolds-Gleichung auf die Modellierung von geschmierten Kontakten mit zweiseitiger Rauigkeit [274, 275]. Daraus folgen sogenannte Flusskoeffizienten, die aus repräsentativen Ausschnitten der Oberflächen erhalten werden und die eine Abbildung der durch die Rauigkeit verursachten Effekte in die makroskopische Skala ermöglichen. Durch diese Vorgehensweise lassen sich Stribeck-Kurven für eine Vielzahl unterschiedlicher Kontaktkonfigurationen berechnen. Während die zweiseitigen Oberflächenrauigkeiten im Bereich der Flüssigkeitsreibung einen geringen Einfluss auf die Stribeck-Kurve aufweisen, sind die komplexen Wechselwirkungen im Bereich der Mischreibung noch nicht vollständig verstanden. Hier können weitere physikalische Effekte wie beispielsweise Kavitation oder Temperaturentwicklung mit einbezogen werden.

Untersuchungen zu den Auswirkungen der gefundenen Reibwerteigenschaften im Kontext von reibungserregten Schwingungen schließen sich den Auswertungen des thermomechanischen Simulationsmodells an. Die Untersuchungen konzentrieren sich jeweils auf die Stabilität eines stationären Systemzustands und greifen auf ein Minimalmodell mit zwei Freiheitsgraden zurück. Die separate Betrachtung von deterministischen und stochastischen Anteilen des Reibwerts und die Wahl jeweils möglichst allgemeiner Parametrisierungen ermöglichen es, die zugrundeliegenden Instabilitätsmechanismen gezielt herauszuarbeiten. Die vorgenommenen Modellierungen und Simulationen führen zu folgenden Erkenntnissen:

- Die physikalisch sinnvolle Modellierung und Parametrisierung des stochastischen Reibwertanteils gelingt durch nichtlineare Filtergleichungen. Der erhaltene stochastische Prozess genügt der vorgegebenen Autokorrelationsfunktion als auch der Verteilungsdichte. Eine Modellierung und Simulation des stochastischen Reibwertanteils in beliebigen dynamischen Systemen ist somit durch das Anhängen der Filtergleichungen problemlos möglich. Es resultieren jedoch stochastische Differentialgleichungen, die die numerische Behandlung erschweren. Methodisch ist die Vorgehensweise identisch zur Verwendung der bereits weit verbreiteten und gut entwickelten dynamischen, aber deterministischen Reibgesetze. Eine Modellierung des stochastischen Reibwertanteils als weißes Rauschen sollte vermieden werden.
- Die Untersuchung der Auswirkungen etwaiger stochastischer Anteile des Reibwerts im Kontext von reibungserregten Schwingungsphänomenen offenbart in diesem Zusammenhang einen Instabilitätsmechanismus, der so noch nicht in der Literatur bekannt ist. Die auftretenden, stabilisierenden und destabilisierenden Effekte der stochastischen Parameteranregung lassen sich anhand der Gleichungsstruktur und dem Leistungsdichtespektrum erklären. Interessant ist insbesondere die gefundene Destabilisierung bei Differenzenkombinationskreisfrequenzen, die für mechanische Systeme eher untypisch ist.

Die Untersuchungen wurden im Rahmen einer weiteren Abschlussarbeit auf schiefe Anregungsprozesse erweitert [276]. Der Anregungsprozess wird dabei durch die Methoden aus Unterkapitel 2.1 erzeugt. Die Ergebnisse lassen auf einen zwar vergleichsweise kleineren, aber dennoch vorhandenen Einfluss der Verteilungsdichte schließen.

Es bieten sich viele Ansatzpunkte für weiterführende Forschungsarbeiten an. So können die für die Kontaktsimulationen künstlich generierten Oberflächenhöhen zwar bereits für beliebige Leistungsdichtespektren und Verteilungsdichten rechenzeiteffizient simuliert werden, dies ist jedoch aktuell auf periodische Oberflächen beschränkt. Entsprechende Filterfunktionen würden eine Oberflächenerzeugung während der eigentlichen Kontaktsimulation ermöglichen und wären damit in der Lage, realistischere Kontaktsimulationen durchzuführen. Für die auf diese Weise simulierten technischen Oberflächen sind sicherlich auch die (zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht verfügbaren) Ergebnisse der *Surface Topography Challenge* interessant [112].

Die Erweiterung des vorgestellten thermomechanischen Kontaktmodells um plastische Verformungen inklusive Verfestigung kann ebenso erfolgen, wie die Berücksichtigung von oberflächennahen Schichten und die Modellierung von chemischen Reaktionen. Simulationsmodelle für die einzelnen Bereiche sind in der Literatur bereits größtenteils bekannt, eine sinnvolle Kombination aller Teilmodelle steht allerdings aus.

Darüber hinaus wäre die Einarbeitung von weiterführenden Verschleißmodellen, die physikalisch fundierte Modellierungen der unter Umständen gleitrichtungsabhängigen Versagensspannung sowie in diesem Zusammenhang auch die Erweiterung um anisotrope Materialgesetze aufschlussreich.

Für die aktuell gewählte Randbedingung einer konstanten Einrückung (oder einer konstanten Normalbelastung) bieten sich außerdem realistischere Alternativen an. Denkbar ist beispielsweise ein aus Experimenten bekannter Einrückungsverlauf oder auch eine skalenübergreifende Simulation mit gleichzeitiger Berücksichtigung von makroskopischer Dynamik und mikroskopischem Kontakt. Zumindest Letztere benötigt beim aktuellen Stand der Forschung jedoch noch zu lange Rechenzeiten. Auch sollten weitere Forschungsbemühungen hinsichtlich der Weiterentwicklung numerischer Methoden unternommen werden.

Bezüglich der Modellierung des stochastischen Reibwerts lässt sich der Zusammenhang zwischen der Varianz des Rauschprozesses und der Last sowie die Abhängigkeit von der tatsächlichen Relativgeschwindigkeit ergänzen. Weiterführende analytische Stabilitätsuntersuchungen können erfolgen. Da sich die vorliegende Arbeit zudem auf die Stabilität von Ruhelagen beschränkt, ist eine Erweiterung der Untersuchungen auf Grenzyklen in Betracht zu ziehen. Dazu gehört auch der Übergang der Zustände Haften und Gleiten oder die Auswirkungen anisotroper Reibgesetze [172, 267, 268]. Bereits deterministische Analysen stoßen hierbei auf unzählige dynamische Schwingungsphänomene. In diesem Kontext wären auch numerische Integrationsverfahren für stochastische Differentialgleichungen mit variabler Schrittweite hilfreich.

In allen Bereichen steht eine experimentelle Validierung aus. In diesem Zusammenhang sind systematische Vermessungen und Auswertungen bei tribologischen Systemen auch hinsichtlich stochastischer Eigenschaften hervorzuheben. Ein erster Ansatz wäre hier der Vergleich von den Ergebnissen des vorliegenden thermomechanischen Kontaktmodells mit Experimenten bei simultaner Vermessung der beteiligten Oberflächen vor, während und nach den Versuchen.



# Anhang





# A Poroelastizität

Ein mit Fluid durchsetztes, poröses Medium kann durch die beiden voll-gekoppelten Gleichungen von Biot [29]

$$\mu \Delta \mathbf{r} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3H} \nabla \sigma, \quad (\text{A.1})$$

$$k \Delta \sigma - \frac{3\lambda + 2\mu}{3H} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{r} = \left( \frac{1}{R} - \frac{3\lambda + 2\mu}{3H^2} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

beschrieben werden. Sie enthalten neben dem Permeabilitätskoeffizienten  $k$  und dem Flüssigkeitsdruck  $\sigma$  die beiden Koeffizienten  $1/H$  und  $1/R$ , die die Kompressibilität des Mediums beziehungsweise die Änderung des Flüssigkeitsgehalts messen. Die Gleichungen (A.1) und (A.2) stimmen strukturell mit den homogenen Gleichungen für den thermoelastischen Festkörper (2.15) und (2.16) überein. Ein vollständig gesättigtes Medium kann durch die Substitution von  $H = R = (3\lambda + 2\mu)/3$  [29] beschrieben werden, wodurch sich das Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{r} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) &= \nabla \sigma, \\ k \Delta \sigma - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{r} &= 0 \end{aligned}$$

ändert. Für einen äquivalenten Effekt bei den thermoelastischen Gleichungen ist für die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa \rightarrow \infty$  notwendig, es folgen direkt  $\varepsilon \rightarrow \infty$  und

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa_\varepsilon = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\kappa}{1 + \varepsilon} = \frac{(\lambda + 2\mu) K}{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0}$$

sowie die Pécelet-Zahl

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} P_e = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{4a^2}{\kappa_\varepsilon \Delta t} = \frac{4a^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) K \Delta t}.$$



## B Einflussfunktionen

Für **mechanische Oberflächenbelastungen** ergeben sich die dimensionslosen Einflussfunktionen aus Abschnitt 3.1.1 zu

$$\bar{C}_{zx} = \Phi_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Phi_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Phi_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Phi_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}},$$

$$\bar{C}_{zy} = \Phi_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Phi_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Phi_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Phi_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}},$$

$$\bar{C}_{zz} = \Phi_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Phi_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Phi_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Phi_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}},$$

$$\bar{T}_{zx} = \Theta_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Theta_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Theta_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Theta_{zx} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}},$$

$$\bar{T}_{zy} = \Theta_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Theta_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Theta_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Theta_{zy} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}},$$

$$\bar{T}_{zz} = \Theta_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Theta_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Theta_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Theta_{zz} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}},$$

$$\bar{Q}_z = \Phi_q \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Phi_q \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Phi_q \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Phi_q \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}}$$

mit

$$\Phi_{zx} = \beta Y \ln \left( X^2 + \beta^2 Y^2 \right) + 2X \arctan \left( \frac{\beta Y}{X} \right),$$

$$\Phi_{zy} = X \ln \left( X^2 + \beta^2 Y^2 \right) + 2\beta Y \arctan \left( \frac{X}{\beta Y} \right),$$

$$\Phi_{zz} = \frac{X}{2} \ln \left( \beta Y + \sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2} \right) + \frac{\beta Y}{2} \ln \left( X + \sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2} \right),$$

$$\Theta_{zx} = \ln \left( -\beta Y + \sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2} \right),$$

$$\Theta_{zy} = \ln \left( -X + \sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2} \right),$$

$$\Theta_{zz} = \frac{1}{4} \operatorname{sign}(X) \operatorname{sign}(\beta Y),$$

$$\Phi_q = \frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{X\beta Y}.$$

Für **thermische Oberflächenbelastungen** und **vorgegebenem Wärmestrom** ergeben sich die dimensionslosen Einflussfunktionen aus Abschnitt 3.1.2

$$\bar{T}_q = \sqrt{\frac{\pi}{P_e}} \int_{\sqrt{\frac{t-t_h}{\Delta t}}}^{\sqrt{\frac{t}{\Delta t}}} \left( \bar{\Theta}_{\oplus} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \bar{\Theta}_{\oplus} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \bar{\Theta}_{\oplus} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \bar{\Theta}_{\oplus} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}} \right) d\tau$$

mit

$$\bar{\Theta}_{\oplus} = \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{X}{4\tau} \right) \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\beta Y}{4\tau} \right).$$

Die Substitution  $\tau = \sqrt{\frac{t-i}{\Delta t}}$  wird genutzt um die Singularität zu umgehen. Für die diskreten Zeitpunkt  $t_h = h\Delta t$  und  $t = k\Delta t$  ändern sich die Integralgrenzen zu  $\sqrt{k-h}$  und  $\sqrt{k}$ .

Außerdem ergibt sich

$$\bar{S}_{zz} = \frac{4}{P_e} \int_{\sqrt{\frac{t-t_h}{\Delta t}}}^{\sqrt{\frac{t}{\Delta t}}} \left( \sigma_{\oplus zz} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \sigma_{\oplus zz} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \sigma_{\oplus zz} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \sigma_{\oplus zz} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}} \right) d\tau$$

mit

$$\sigma_{\oplus zz} = -\frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{X\beta Y} \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{4\sqrt{\tau}} \right) + \frac{1}{\beta Y} \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{X}{4\sqrt{\tau}} \right) e^{-P_e \frac{\beta^2 Y^2}{16\tau}} + \frac{1}{X} \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\beta Y}{4\sqrt{\tau}} \right) e^{-P_e \frac{X^2}{16\tau}}.$$

Die Substitution  $\tau = \frac{t-i}{\Delta t}$  wird genutzt. Für die diskreten Zeitpunkte  $t_h = h\Delta t$  und  $t = k\Delta t$  werden die Integrationsgrenzen zu  $k-h$  und  $k$ .

Für **thermische Oberflächenbelastungen** und **vorgegebenem Temperaturfeld** ergeben sich die dimensionslosen Einflussfunktionen aus Abschnitt 3.1.2

$$\bar{T}_\vartheta = \Theta_\vartheta \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \Theta_\vartheta \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \Theta_\vartheta \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \Theta_\vartheta \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}}$$

mit

$$\Theta_\vartheta = \frac{1}{4} \text{sign}(X) \text{sign}(\beta Y).$$

Außerdem ergeben sich

$$\bar{S}_{zx} = \frac{8}{P_e} \int_{\frac{t-t_h}{\Delta t}}^{\frac{t}{\Delta t}} \left( \sigma_{\oplus zx} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \sigma_{\oplus zx} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \sigma_{\oplus zx} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \sigma_{\oplus zx} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}} \right) d\tau,$$

$$\bar{S}_{zy} = \frac{8}{P_e} \int_{\frac{t-t_h}{\Delta t}}^{\frac{t}{\Delta t}} \left( \sigma_{\oplus zy} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \sigma_{\oplus zy} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \sigma_{\oplus zy} \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \sigma_{\oplus zy} \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}} \right) d\tau$$

mit

$$\sigma_{\oplus zx} = \frac{1}{X^2} \text{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\beta Y}{4\sqrt{\tau}} \right) e^{-P_e \frac{X^2}{16\tau}} - \frac{\beta Y}{X^2 \sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}} \text{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{4\sqrt{\tau}} \right),$$

$$\sigma_{\oplus zy} = \frac{1}{\beta^2 Y^2} \text{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{X}{4\sqrt{\tau}} \right) e^{-P_e \frac{\beta^2 Y^2}{16\tau}} - \frac{X}{\beta^2 Y^2 \sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}} \text{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{4\sqrt{\tau}} \right).$$

Die Substitution  $\tau = \frac{t-i}{\Delta t}$  wird genutzt. Für die diskreten Zeitpunkte  $t_h = h\Delta t$  und  $t = k\Delta t$  werden die Integrationsgrenzen zu  $k-h$  und  $k$ .

Des Weiteren ergibt sich

$$\bar{W} = \frac{2}{P_e} \int_{\frac{t-t_h}{\Delta t}}^{\frac{t}{\Delta t}} \left( \omega_\oplus \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta+1}} + \omega_\oplus \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta-1}} - \omega_\oplus \Big|_{\substack{X=2\xi-1 \\ Y=2\eta+1}} - \omega_\oplus \Big|_{\substack{X=2\xi+1 \\ Y=2\eta-1}} \right) d\tau$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_{\oplus} = & \frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{X\beta Y} \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\sqrt{X^2 + \beta^2 Y^2}}{4\tau} \right) 4\tau \\ & - \left( \frac{\operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{X}{4\tau} \right) e^{-P_e \frac{\beta^2 Y^2}{16\tau^2}}}{\beta Y} + \frac{\operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\beta Y}{4\tau} \right) e^{-P_e \frac{X^2}{16\tau^2}}}{X} \right) 4\tau \\ & - \sqrt{\pi P_e} \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{X}{4\tau} \right) \operatorname{erf} \left( \sqrt{P_e} \frac{\beta Y}{4\tau} \right). \end{aligned}$$

Die Substitution  $\tau = \sqrt{\frac{t-h}{\Delta t}}$  wird genutzt. Für die diskreten Zeitpunkte  $t_h = h\Delta t$  und  $t = k\Delta t$  werden die Integrationsgrenzen zu  $\sqrt{k-h}$  und  $\sqrt{k}$ .

## C Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung

$$\kappa_\varepsilon \Delta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \theta(x, t = 0^-) = 0$$

wird für den instantanen Wärmeeintrag  $\check{q}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Ursprung des Vollraums gelöst. Aufgrund der Symmetrie bietet sich zunächst die Auswertung der Wärmeleitungsgleichung in Kugelkoordinaten

$$\frac{\kappa_\varepsilon}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

an, bevor die Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\{\theta(R, t)\}(R, s) = \int_0^{+\infty} \theta(R, t) e^{-st} dt = \theta^*$$

unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung die Differentialgleichung

$$\frac{\kappa_\varepsilon}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \right) = s \theta^*$$

liefert. Deren allgemeine Lösung

$$\theta^* = \frac{c_1}{R} e^{-R\sqrt{\frac{s}{\kappa_\varepsilon}}} + \frac{c_2}{R} e^{R\sqrt{\frac{s}{\kappa_\varepsilon}}},$$

kann unter Berücksichtigung der Nebenbedingung  $\lim_{R \rightarrow \infty} \theta^* = 0$  und erfolgter Rücktransformation [193] als

$$\check{\theta} = \frac{\pi \kappa_\varepsilon c_1}{2 (\pi \kappa_\varepsilon t)^{3/2}} e^{-\frac{R^2}{4 \kappa_\varepsilon t}}$$

geschrieben werden. Die noch verbliebene Konstante  $c_1$  lässt sich aus der Bilanz der zu- oder abgeführten Wärmemenge durch das Volumenintegral

$$\frac{K}{\kappa_\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \theta \, dv = \check{q}$$

zu  $c_1 = \check{q}/4\pi K$  bestimmen, sodass die Fundamentallösung

$$\check{\theta} = \frac{\check{q} \kappa_\varepsilon e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4 \kappa_\varepsilon t}}}{8K (\pi \kappa_\varepsilon t)^{3/2}}$$

erhalten wird. Sie besitzt für den Zeitpunkt des Wärmeeintrags eine Singularität im Ursprung.



## D Stochastische Stabilitätstheorie

Ausgangspunkt sei eine beliebige stochastische Differentialgleichung im Sinne von Itô

$$d\mathbf{X}_s = \mathbf{a}(\mathbf{X}_s, s) ds + \mathbf{b}(\mathbf{X}_s, s) dW_s, \quad (\text{D.1})$$

wobei sich die nachfolgenden Ausführungen an Khasminskii [123], Arnold [11] sowie Lin und Cai [139] orientieren. Die Stabilitätsaussagen beziehen sich auf die triviale Lösung  $\mathbf{X}_s = \mathbf{0}$ , dementsprechend muss für den Driftterm  $\mathbf{a}(\mathbf{0}, s) = \mathbf{0}$  und für den Diffusionsterm  $\mathbf{b}(\mathbf{0}, s) = \mathbf{0}$  gelten.

Die Lösung  $\mathbf{X}_s = \mathbf{0}$  heißt stabil mit Wahrscheinlichkeit 1 für  $s \geq s_0$ , wenn für beliebige  $s_0 \geq 0$  und  $\epsilon > 0$

$$\lim_{\mathbf{X}_{s_0} \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{P} \left\{ \sup_{s \geq s_0} \|\mathbf{X}_s\| > \epsilon \right\} = 0$$

gilt. Des Weiteren heißt die Lösung  $\mathbf{X}_s = \mathbf{0}$  asymptotisch stabil mit Wahrscheinlichkeit 1, wenn sie stabil mit Wahrscheinlichkeit 1 ist und zusätzlich

$$\lim_{\mathbf{X}_{s_0} \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{P} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}_s\| = 0 \right\} = 1$$

gilt. Ist diese Eigenschaft unabhängig von den Anfangswerten

$$\mathcal{P} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}_s\| = 0 \right\} = 1,$$

wird sie als asymptotisch stabil mit Wahrscheinlichkeit 1 im Ganzen bezeichnet. Die Definitionen gehen für einen verschwindenden Diffusionsterm  $\mathbf{b}(\mathbf{X}_s, s) \equiv \mathbf{0}$  in diejenigen des deterministischen Falls über, sodass die stochastische Stabilitätsdefinition als Verallgemeinerung angesehen werden kann.

Die Stabilitätsaussagen können für die triviale Lösung  $\mathbf{X}_s = \mathbf{0}$  des Systems (D.1)

aufgrund des Hartmann-Grobmann Theorems für hyperbolische Fixpunkte mithilfe des größten Lyapunov-Exponenten

$$\Lambda_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \frac{\|\Delta \mathbf{X}_s\|}{\|\Delta \mathbf{X}_{s_0}\|}$$

und den linearisierten Systemgleichungen

$$d\Delta \mathbf{X}_s = \left. \frac{\partial \mathbf{a}(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} \Delta \mathbf{X}_s ds + \left. \frac{\partial \mathbf{b}(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} \Delta \mathbf{X}_s dW_s$$

getroffen werden (Theorem 7.1 und Theorem 7.2 von Khasminskii [123]). Die Existenz des Grenzwertes ist durch das Multiplikative Ergodentheorem von Oseledec gesichert. Die Lösung  $\mathbf{X}_s = \mathbf{0}$  kann für  $\Lambda_1 < 0$  als asymptotisch stabil mit Wahrscheinlichkeit 1 und für  $\Lambda_1 > 0$  als instabil mit Wahrscheinlichkeit 1 klassifiziert werden. Für den Sonderfall  $\Lambda_1 = 0$  lässt sich auch für lineare Systeme zumeist nur eine asymptotische Stabilität ausschließen.

Neben der hier vorgestellten Variante der stochastischen Stabilitätstheorie existiert ebenfalls der historisch ältere Ansatz, die Stabilitätsaussagen an die Erwartungswerte zu koppeln. Diese Vorgehensweise lohnt sich in der Regel jedoch nur bei normalverteilten Prozessen, da diese komplett über die ersten beiden Momente beschrieben sind. Weiterführende Informationen hierzu lassen sich in [11, 123] finden.

Die Ausdrücke für die Driftterme in Gleichung (5.9) lauten

$$\begin{aligned} f_1 &= \left( \frac{1 - \zeta_{11}}{2} \sin(2\varphi) - 2\delta_1 \sin(\varphi)^2 \right) \cos(\vartheta)^2 - \left( \frac{\zeta_{22}}{2} \sin(2\psi) + 2\delta_2 \sin(\psi)^2 \right) \sin(\vartheta)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\zeta_{21}}{2} \cos(\varphi) \sin(\psi) + \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos(\psi) (\zeta_{12} - \mu_d - \Delta \sin(\phi) \cos(\theta)) \right) \sin(2\vartheta), \\ f_2 &= (1 - \zeta_{11}) \cos(\varphi)^2 - 1 - \delta_1 \sin(2\varphi) \\ &\quad - \cos(\varphi) \cos(\psi) \tan(\vartheta) (\zeta_{12} - \mu_d - \Delta \sin(\phi) \cos(\theta)), \\ f_3 &= -\zeta_{21} \cos(\varphi) \cos(\psi) \cot(\vartheta) - \zeta_{22} \cos(\psi)^2 - 1 - \delta_2 \sin(2\psi), \\ f_4 &= \left( \left( \frac{\zeta_{11} - 1}{4} \sin(2\varphi) + \delta_1 \sin(\varphi)^2 - \frac{\zeta_{22}}{4} \sin(2\psi) - \delta_2 \sin(\psi)^2 \right) \sin(2\vartheta) \right. \\ &\quad \left. + \sin(\varphi) \cos(\psi) \sin(\vartheta)^2 (\zeta_{12} - \mu_d - \Delta \sin(\phi) \cos(\theta)) \right. \\ &\quad \left. - \zeta_{21} \cos(\varphi) \sin(\psi) \cos(\vartheta)^2 \right) \text{sign}(\sin(2\vartheta)), \\ f_5 &= -\frac{2D\Omega_\tau}{1 + 2l} \left( 2l \tan(\phi) \sin(\theta)^2 - \cot(\phi) \cos(\theta)^2 \right) \text{sign}(\sin(2\phi)), \end{aligned}$$

$$f_6 = \Omega_\tau - D\Omega_\tau \sin(2\theta) \left( 1 + \frac{2}{1+2l} \cot(\phi)^2 \right).$$

Die Ausdrücke für die Diffusionsterme in Gleichung (5.9) lauten

$$f_7 = - \sqrt{\frac{4D\Omega_\tau}{1+2l}} \sin(\theta) \operatorname{sign}(\sin(\phi)),$$

$$f_8 = - \sqrt{\frac{4D\Omega_\tau}{1+2l}} \cot(\phi) \cos(\theta) \operatorname{sign}(\cos(\phi)).$$



# Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Realisierung einer rauen Oberfläche bei  $46^{\circ}4'57''\text{N}$ ,  $7^{\circ}21'59''\text{O}$  . . . . . II

Abb. 2.1: Leistungsdichtespektrum  $S_{ZZ}^{\text{iso}}(\omega)$  gemäß Gleichung (2.6) . . . . . 18

Abb. 2.2: Verschiedene Realisierungen  $z^{(j)}(x, y)$ ,  $j = 1, \dots, 6$  rauer Oberflächen der Länge  $L_x = L_y = 1$  mm mit Hurst-Exponent  $H = 0.8$  – wenn nicht anderweitig angegeben gilt  $Z_s \sim \mathcal{N}(0, S_q^2)$  . . . . . 19

Abb. 2.3: Simulationsablauf für die Erzeugung stationärer, ergodischer Oberflächen oder Reibwerte . . . . . 20

Abb. 2.4: Drei verschiedene qualitative Verläufe des deterministischen Reibwertanteils  $\mu_d$  . . . . . 21

Abb. 2.5: Halbraum mit kontinuierlicher und diskretisierter Oberflächenbelastung 30

Abb. 2.6: Darstellung periodisch fortgesetzter Oberfläche der Dimension  $M \times N$  mit verschiedenen Einflussradien  $r_{oi}$  . . . . . 34

Abb. 2.7: CG-Verfahren für das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit Nebenbedingung  $0 \leq x \leq H$  . . . . . 36

Abb. 2.8: Minimalmodelle für reibungserregte Schwingungen . . . . . 38

Abb. 2.9: Verlauf von Real- und Imaginärteilen der Eigenwerte für den Sonderfall gleichmäßiger Dämpfung  $d_1 = d_2$  . . . . . 40

Abb. 3.1: Thermomechanischer Kontakt zweier gleitender Körper  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  mit rauen Oberflächen – ein repräsentativer Ausschnitt der scheinbaren Kontaktfläche  $A_s$  ist vergrößert dargestellt . . . . . 44

Abb. 3.2: Ausschnitt eines Halbraums mit äquidistant diskretisierter Oberfläche sowie elementweise konstanten mechanischen und thermischen Oberflächenlasten – Druck  $p_{\square}$ , Scherspannung  $\tau_{\square x}$  und  $\tau_{\square y}$ , Wärmestrom  $q_{\square}$  und Temperaturdifferenz  $\vartheta_{\square}$  . . . . . 46

Abb. 3.3: Beliebiger zeitlicher Wärmestrom- oder Temperaturverlauf eines Oberflächenelementes . . . . . 60

Abb. 3.4: Vergleich verschiedener Einflussfunktionen für  $\beta = 1$  . . . . . 65

Abb. 3.5:	Verschiebungen aufgrund eines parabolischen Druckfeldes – Vergleich von Gleichung (3.44) mit Johnson [119] . . . . .	67
Abb. 3.6:	Temperaturfelder aufgrund einer rechteckigen Wärmequelle – Vergleich von Gleichung (3.46) mit Jaeger [114] für die verschiedenen Péclet-Zahlen $P_e = 0.01, 0.1, 1$ nach einem Gleitweg von $6l_a$ . . . . .	68
Abb. 3.7:	Stationäre Temperaturerhöhung aufgrund einer runden Wärmequelle – Vergleich von Gleichungen (3.48) mit Johnson [119] . . . . .	70
Abb. 3.8:	Thermoelastische Verschiebungen aufgrund einer parabolischen Wärmequelle – Vergleich von Gleichung (3.50) mit Martini et al. [163] für die verschiedenen Zeitdauern des Wärmeeintrags $t_h = 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5$ s . . . . .	71
Abb. 3.9:	Stationäre thermoelastische Verschiebungen aufgrund einer runden Wärmequelle – Vergleich von Gleichung (3.52) mit Johnson [119] . . . . .	73
Abb. 3.10:	Thermoelastische Verschiebungen aufgrund eines runden Temperaturfeldes – Vergleich von Gleichung (3.55) mit Sternberg und McDowell [232] . . . . .	74
Abb. 3.11:	Relative Verschiebungen aufgrund eines parabolischen Druckfeldes für den Fall einer wärmeisolierten und einer wärmedurchlässigen Oberfläche – Vergleich mit McNamee und Gibson [167] . . . . .	75
Abb. 3.12:	Relative Differenz zwischen den instantanen Verschiebungsfeldern bei voll-gekoppelten und einseitig gekoppelten Gleichungen aus Gleichung (3.59) für den Fall einer wärmeisolierten und einer wärmedurchlässigen Oberfläche bei Druckbelastung für die Querkontraktionszahlen $\nu = 0, 0.1, \dots, 0.4$ . . . . .	77
Abb. 3.13:	Relative Verschiebungen $2\mu(w - w _{t=0})/p_0r_a$ und Temperaturen für die Fälle 1 und 2 aus Abschnitt 3.1.3 aufgrund eines parabolischen Druckfeldes . . . . .	78
Abb. 3.14:	Relative Temperaturerhöhung und Verschiebungen für die Fälle 3 und 4 aus Abschnitt 3.1.3 . . . . .	79
Abb. 3.15:	Auswirkung von Periodendauer $T$ und Einflussradius $r_{oi} = N_T T$ auf die effektive Einflussfunktion $\bar{C}_{zz}^{\text{eff}}$ . . . . .	80
Abb. 3.16:	Verschiedene Konfigurationen für die thermomechanische Kontaktsimulation . . . . .	82
Abb. 3.17:	Qualitative stationäre Temperaturverläufe aus Gleichung (3.68) bei temperatur- und geschwindigkeitsabhängigem Wärmeeintrag für verschiedene $R_\theta$ und $R_v$ . . . . .	85
Abb. 3.18:	Simulationsablauf bis gewünschte Zeit $t_{\text{end}}$ erreicht ist . . . . .	86
Abb. 4.1:	Ausgewählte Eigenschaften der neuen und eingelaufenen Oberflächenhöhen von den Konfigurationen Isotrop 1, Isotrop 2 und Isotrop 3 aus Tabelle 4.1 . . . . .	90

Abb. 4.2:	Temperaturfelder $\theta$ und thermoelastische Verschiebungsfelder $w_\theta$ auf Oberfläche 1 für unterschiedliche Gleitwege . . . . .	92
Abb. 4.3:	Temperaturfelder $\theta$ und thermoelastische Verschiebungsfelder $w_\theta$ auf Oberfläche 2 für unterschiedliche Gleitwege . . . . .	93
Abb. 4.4:	Ausgewählte Ergebnisse für die eingelaufene Konfiguration Isotrop 1 bei einer Gleitgeschwindigkeit $v_{\text{rel}} = 0.5$ m/s und einer Einrückung $d \approx 2.08 \mu\text{m}$ . . . . .	95
Abb. 4.5:	Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfiguration Isotrop 1 . . . . .	96
Abb. 4.6:	Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfigurationen Isotrop 2 und Isotrop 3 . . . . .	97
Abb. 4.7:	Ausgewählte Eigenschaften der neuen und eingelaufenen Oberflächenhöhen von den Konfigurationen Anisotrop 1, Anisotrop 2 und Anisotrop 3 aus Tabelle 4.1 . . . . .	100
Abb. 4.8:	Bereiche auf den Oberflächen der drei anisotropen Konfigurationen, die mindestens in einem inkrementellen Zeitschritt in Kontakt stehen bei der Gleitgeschwindigkeit $v_{\text{rel}} = 0.5$ m/s und vergleichbarer Last .	101
Abb. 4.9:	Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfiguration Anisotrop 1 . . .	103
Abb. 4.10:	Zusammenfassende Ergebnisse für die Konfigurationen Anisotrop 2 und Anisotrop 3 . . . . .	104
Abb. 4.11:	Einfluss von temperaturabhängigen Materialparametern auf das Temperaturfeld . . . . .	110
Abb. 5.1:	Vergleich von Autokorrelations- und Verteilungsdichtefunktion mit den erhaltenen Ergebnissen der thermomechanischen Kontaktsimulation für Konfiguration Isotrop 2 in Unterkapitel 4.1 . . . . .	114
Abb. 5.2:	Verteilungsdichtefunktion und Leistungsdichtespektrum des Reibwerts für verschiedene Filterparameter . . . . .	115
Abb. 5.3:	Stabilitätskarten für das homogene Gleichungssystem (5.7) und einen harmonischen Reibwert $\mu_s = \Delta \cos(\Omega_\tau \tau)$ und $\delta_1 = \delta_2 = 0$ – dunkel eingefärbte Flächen kennzeichnen die instabilen Bereiche . . . . .	119
Abb. 5.4:	Größter Lyapunov-Exponent von dem homogenen Gleichungssystem (5.7) für einen harmonischen Reibwert ( $D = 0$ ) und für einen stochastischen Reibwert mit $D = 0.01, 0.35$ bei $\mu_d = \mu_1 < \mu_i$ . . . . .	121





# Tabellenverzeichnis

Tab. 3.1: Lösung $\Pi$ . . . . .	48
Tab. 3.2: Lösungen für reine Normal- und reine Tangentialbelastung auf der Oberfläche eines Halbraums . . . . .	49
Tab. 3.3: Vorgehensweise für vorgegebenes Druckfeld $p$ auf Halbraum mit wärmeisolierter Oberfläche . . . . .	63
Tab. 3.4: Vorgehensweise für vorgegebenes Druckfeld $p$ auf Halbraum mit wärmedurchlässiger Oberfläche . . . . .	63
Tab. 3.5: Vorgehensweise für vorgegebenen Wärmestrom $q$ auf Halbraum und spannungsfreier Oberfläche . . . . .	63
Tab. 3.6: Vorgehensweise für vorgegebenes Temperaturfeld $\vartheta$ auf Halbraum mit spannungsfreier Oberfläche . . . . .	63
Tab. 4.1: Verschiedene Konfigurationen für isotrope und anisotrope Oberflächen	87
Tab. 4.2: Verwendete Materialparameter (wenn nicht anderweitig angegeben) . .	88
Tab. 4.3: Zusammenfassung der Ergebnisse aller isotropen und anisotropen Konfigurationen (gerundet auf die dritte Nachkommastelle) . . . . .	106



# Literaturverzeichnis

- [1] AFFERRANTE, L. und M. CIAVARELLA (2007): Thermo-Elastic Dynamic Instability (TEDI) – a review of recent results. *Journal of Engineering Mathematics* **61**(2-4), S. 285–300. DOI: [10.1007/s10665-007-9184-0](https://doi.org/10.1007/s10665-007-9184-0).
- [2] AHARONOV, E. und C. H. SCHOLZ (2018): A Physics-Based Rock Friction Constitutive Law: Steady State Friction. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **123**(2), S. 1591–1614. DOI: [10.1002/2016jb013829](https://doi.org/10.1002/2016jb013829).
- [3] AHMAD, O. (2013): *Stochastic representation and analysis of rough surface topography by random fields and integral geometry – Application to the UHMWPE cup involved in total hip arthroplasty*. Diss. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.
- [4] AKBARI, M., D. SINTON und M. BAHRAMI (2009): Moving Heat Sources in a Half Space: Effect of Source Geometry. In: ASMEDC. DOI: [10.1115/ht2009-88562](https://doi.org/10.1115/ht2009-88562).
- [5] ALLWOOD, J. (2005): Survey and Performance Assessment of Solution Methods for Elastic Rough Contact Problems. *Journal of Tribology* **127**(1), S. 10–23. DOI: [10.1115/1.1828073](https://doi.org/10.1115/1.1828073).
- [6] ALMQVIST, A. (2006): *On the effects of surface roughness in lubrication*. Diss. Lulea University of Technology.
- [7] ARCHARD, J. F. und W. HIRST (1956): The wear of metals under unlubricated conditions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **236**(1206), S. 397–410. DOI: [10.1098/rspa.1956.0144](https://doi.org/10.1098/rspa.1956.0144).
- [8] ARCHARD, J. F. (1957): Elastic deformation and the laws of friction. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **243**(1233), S. 190–205. DOI: [10.1098/rspa.1957.0214](https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0214).
- [9] ARCHARD, J. F. (1959): The temperature of rubbing surfaces. *Wear* **2**(6), S. 438–455. DOI: [10.1016/0043-1648\(59\)90159-0](https://doi.org/10.1016/0043-1648(59)90159-0).
- [10] ARGYRIS, J., G. FAUST, M. HAASE und R. FRIEDRICH (2017): *Die Erforschung des Chaos*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-662-54546-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-54546-1).
- [11] ARNOLD, L. (1998): *Random Dynamical Systems*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-662-12878-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12878-7).

- [12] ARZT, E., H. QUAN, R. M. McMEEKING und R. HENSEL (2021): Functional surface microstructures inspired by nature – From adhesion and wetting principles to sustainable new devices. *Progress in Materials Science* **120**, S. 100823. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2021.100823.
- [13] ASTROM, K. J. und C. C. DE-WIT (2008): Revisiting the LuGre friction model. *IEEE Control Systems* **28**(6), S. 101–114. DOI: 10.1109/mcs.2008.929425.
- [14] AUGUSTI, G. (2005): *Safety and reliability of engineering systems and structures : proceedings of the ninth International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR '05, Rome, Italy 19-23 June 2005*. Rotterdam, Netherlands: Millpress.
- [15] BAEHR, H. D. und K. STEPHAN (2019): *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-58441-5.
- [16] BARBER, J. R. (1967): The influence of thermal expansion on the friction and wear process. *Wear* **10**(2), S. 155–159. DOI: 10.1016/0043-1648(67)90087-7.
- [17] BARBER, J. R. und K. WRIGHT (1967): The thermal distortion due to a uniform circular heat source on the surface of a semi-infinite solid. *International Journal of Mechanical Sciences* **9**(12), S. 811–815. DOI: 10.1016/0020-7403(67)90009-4.
- [18] BARBER, J. R. (1969): Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **312**(1510), S. 381–394. DOI: 10.1098/rspa.1969.0165.
- [19] BARBER, J. R. (1970): The conduction of heat from sliding solids. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **13**(5), S. 857–869. DOI: 10.1016/0017-9310(70)90131-6.
- [20] BARBER, J. R. (1972): Distortion of the semi-infinite solid due to transient surface heating. *International Journal of Mechanical Sciences* **14**(6), S. 377–393. DOI: 10.1016/0020-7403(72)90080-x.
- [21] BARBER, J. R. (1980): The transient thermoelastic contact of a sphere sliding on a plane. *Wear* **59**(1), S. 21–29. DOI: 10.1016/0043-1648(80)90267-7.
- [22] BARBER, J. R. (1999): Thermoelasticity and Contact. *Journal of Thermal Stresses* **22**(4-5), S. 513–525. DOI: 10.1080/014957399280850.
- [23] BARBER, J. R. (2010): *Elasticity*. Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-90-481-3809-8.
- [24] BARTZ, W. (1988): *Zur Geschichte der Tribologie*. Ehningen bei Böblingen: Expert.
- [25] BENGISU, M. T. und A. AKAY (1999): Stick-slip oscillations: Dynamics of friction and surface roughness. *The Journal of the Acoustical Society of America* **105**(1), S. 194–205. DOI: 10.1121/1.424580.
- [26] BENNETT, A. I., K. L. HARRIS, K. D. SCHULZE, J. M. URUENA, A. J. MCGHEE, A. A. PITENIS, M. H. MÜSER, T. E. ANGELINI und W. G. SAWYER (2017): Contact Measurements of Randomly Rough Surfaces. *Tribology Letters* **65**(4). DOI: 10.1007/s11249-017-0918-5.

- [27] BERGER, E. J. (2002): Friction modeling for dynamic system simulation. *Applied Mechanics Reviews* **55**(6), S. 535–577. DOI: 10.1115/1.1501080.
- [28] BEYER, F. und K. WILLNER (2014): Surface Deformation due to Shear and Ploughing in a Halfspace. *PAMM* **14**(1), S. 239–240. DOI: 10.1002/pamm.201410107.
- [29] BIOT, M. A. (1941): General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics* **12**(2), S. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886.
- [30] BIOT, M. A. (1956): Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics. *Journal of Applied Physics* **27**(3), S. 240–253. DOI: 10.1063/1.1722351.
- [31] BLOK, H. (1963): The flash temperature concept. *Wear* **6**(6), S. 483–494. DOI: 10.1016/0043-1648(63)90283-7.
- [32] BOGDANOVICH, P. N. und D. V. TKACHUK (2009): Thermal and thermomechanical phenomena in sliding contact. *Journal of Friction and Wear* **30**(3), S. 153–163. DOI: 10.3103/s1068366609030015.
- [33] BOLEY, B. A. und J. H. WEINER (2011): *Theory of Thermal Stresses*. Dover Publ Inc.
- [34] BOSMAN, R. und M. B. DE ROOIJ (2010): Transient Thermal Effects and Heat Partition in Sliding Contacts. *Journal of Tribology* **132**(2). DOI: 10.1115/1.4000693.
- [35] BOUCLY, V., D. NELIAS, S. LIU, Q. J. WANG und L. M. KEER (2005): Contact Analyses for Bodies With Frictional Heating and Plastic Behavior. *Journal of Tribology* **127**(2), S. 355–364. DOI: 10.1115/1.1843851.
- [36] BOWDEN, F. P. und D. TABOR (2001): *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford Univ Pr.
- [37] BRAUN, D. (2015): *Größeneffekte bei strukturierten tribologischen Wirkflächen*. Diss. DOI: 10.5445/IR/1000048548.
- [38] BUCHER, F., K. KNOTHE und A. THEILER (2002): Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness. *Wear* **253**(1-2), S. 204–218. DOI: 10.1016/s0043-1648(02)00102-3.
- [39] BURTON, R. A. und V. NERLIKAR (1975): Large Disturbance Solutions for Initially Flat, Frictionally Heated Thermoelastically Deformed Surfaces. *Journal of Lubrication Technology* **97**(3), S. 539–544. DOI: 10.1115/1.3452666.
- [40] BURTON, R. A. (1980): Thermal deformation in frictionally heated contact. *Wear* **59**(1), S. 1–20. DOI: 10.1016/0043-1648(80)90266-5.
- [41] BUSH, A. W., R. D. GIBSON und T. R. THOMAS (1975): The elastic contact of a rough surface. *Wear* **35**(1), S. 87–111. DOI: 10.1016/0043-1648(75)90145-3.
- [42] CAMPANA, C. und M. H. MÜSER (2007): Contact mechanics of real vs. randomly rough surfaces: A Green's function molecular dynamics study. *Europhysics Letters (EPL)* **77**(3), S. 38005. DOI: 10.1209/0295-5075/77/38005.
- [43] CAMPANA, C., B. N. J. PERSSON und M. H. MÜSER (2011): Transverse and normal interfacial stiffness of solids with randomly rough surfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter* **23**(8), S. 085001. DOI: 10.1088/0953-8984/23/8/085001.

- [44] CAMPBELL, J. D. und W. G. FERGUSON (1970): The temperature and strain-rate dependence of the shear strength of mild steel. *Philosophical Magazine* **21**(169), S. 63–82. DOI: [10.1080/14786437008238397](https://doi.org/10.1080/14786437008238397).
- [45] CANTONI, C., R. CESARINI, G. MASTINU, G. ROCCA und R. SICIGLIANO (2009): Brake comfort – a review. *Vehicle System Dynamics* **47**(8), S. 901–947. DOI: [10.1080/00423110903100432](https://doi.org/10.1080/00423110903100432).
- [46] CARPICK, R. W. (2018): The contact sport of rough surfaces. *Science* **359**(6371), S. 38–38. DOI: [10.1126/science.aaq1814](https://doi.org/10.1126/science.aaq1814).
- [47] CARSLAW, H. S. (1959): *Conduction of heat in solids*. Oxford: Clarendon Press.
- [48] CHEN, W. W. und Q. J. WANG (2008): A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions. *Mechanics of Materials* **40**(11), S. 936–948. DOI: [10.1016/j.mechmat.2008.06.002](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.06.002).
- [49] CHEN, W. W. und Q. J. WANG (2008): Thermomechanical Analysis of Elastoplastic Bodies in a Sliding Spherical Contact and the Effects of Sliding Speed, Heat Partition, and Thermal Softening. *Journal of Tribology* **130**(4). DOI: [10.1115/1.2959110](https://doi.org/10.1115/1.2959110).
- [50] CHEN, W. W., Q. J. WANG und W. KIM (2009): Transient Thermomechanical Analysis of Sliding Electrical Contacts of Elastoplastic Bodies, Thermal Softening and Melting Inception. *Journal of Tribology* **131**(2). DOI: [10.1115/1.3084214](https://doi.org/10.1115/1.3084214).
- [51] CHICHINADZE, A. V. (1995): Processes in heat dynamics and modelling of friction and wear (dry and boundary friction). *Tribology International* **28**(1), S. 55–58. DOI: [10.1016/0301-679x\(95\)99495-7](https://doi.org/10.1016/0301-679x(95)99495-7).
- [52] CHILAMAKURI, S. K. und B. BHUSHAN (1998): Contact analysis of non-Gaussian random surfaces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* **212**(1), S. 19–32. DOI: [10.1243/1350650981541868](https://doi.org/10.1243/1350650981541868).
- [53] CHIU, Y. P. (1977): On the Stress Field Due to Initial Strains in a Cuboid Surrounded by an Infinite Elastic Space. *Journal of Applied Mechanics* **44**(4), S. 587–590. DOI: [10.1115/1.3424140](https://doi.org/10.1115/1.3424140).
- [54] CHOUDHRY, J., A. ALMQVIST und R. LARSSON (2021): A Multi-scale Contact Temperature Model for Dry Sliding Rough Surfaces. *Tribology Letters* **69**(4). DOI: [10.1007/s11249-021-01504-z](https://doi.org/10.1007/s11249-021-01504-z).
- [55] CHOUDHRY, J., A. ALMQVIST und R. LARSSON (2022): Validation of a Multi-Scale Contact Temperature Model for Dry Sliding Rough Surfaces. *Lubricants* **10**(3), S. 41. DOI: [10.3390/lubricants10030041](https://doi.org/10.3390/lubricants10030041).
- [56] CIAVARELLA, M. (2018): A Comment on Meeting the Contact-Mechanics Challenge by Müser et al. [1]. *Tribology Letters* **66**(1). DOI: [10.1007/s11249-018-0985-2](https://doi.org/10.1007/s11249-018-0985-2).
- [57] CICHON, M. G. (2006): *Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische Systeme*. Diss. DOI: [10.5445/KSP/1000004093](https://doi.org/10.5445/KSP/1000004093).

- [58] CLAESSON, J. und T. PROBERT (1996): *Thermoelastic Stress Due to a Rectangular Heat Source in a Semi-infinite Medium: Derivation of an Analytical Solution*. Techn. Ber.
- [59] CLAESSON, J. und T. PROBERT (1998): Thermoelastic stress due to a rectangular heat source in a semi-infinite medium. Presentation of an analytical solution. *Engineering Geology* **49**(3-4), S. 223–229. DOI: 10.1016/s0013-7952(97)00053-7.
- [60] COULIBALY, M., G. CHASSAING und S. PHILIPPON (2014): Thermomechanical coupling of rough contact asperities sliding at very high velocity. *Tribology International* **77**, S. 86–96. DOI: 10.1016/j.triboint.2014.04.014.
- [61] CZICHOS, H. und K.-H. HABIG, (Hrsg.) (2015): *Tribologie-Handbuch*. Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI: 10.1007/978-3-8348-2236-9.
- [62] DAHL, P. R. (1968): *A Solid Friction Model*. Techn. Ber. DOI: 10.21236/ada041920.
- [63] DAPP, W. B., N. PRODANOV und M. H. MÜSER (2014): Systematic analysis of Persson's contact mechanics theory of randomly rough elastic surfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter* **26**(35), S. 355002. DOI: 10.1088/0953-8984/26/35/355002.
- [64] DERJAGUIN, B. V., V. M. MULLER und Y. P. TOPOROV (1975): Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid and Interface Science* **53**(2), S. 314–326. DOI: 10.1016/0021-9797(75)90018-1.
- [65] DESRUISSEAUX, N. R. und R. D. ZERKLE (1970): Temperature in Semi-Infinite and Cylindrical Bodies Subjected to Moving Heat Sources and Surface Cooling. *Journal of Heat Transfer* **92**(3), S. 456–464. DOI: 10.1115/1.3449689.
- [66] DIETERICH, J. H. und B. D. KILGORE (1994): Direct observation of frictional contacts: New insights for state-dependent properties. *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH* **143**(1-3), S. 283–302. DOI: 10.1007/bf00874332.
- [67] DOW, T. A. und R. A. BURTON (1973): The Role of Wear in the Initiation of Thermoelastic Instabilities of Rubbing Contact. *Journal of Lubrication Technology* **95**(1), S. 71–75. DOI: 10.1115/1.3451739.
- [68] DOWSON, D. (1998): *History of Tribology*. Wiley.
- [69] DUNDURS, J. (1974): Distortion of a body caused by free thermal expansion. *Mechanics Research Communications* **1**(3), S. 121–124. DOI: 10.1016/0093-6413(74)90001-9.
- [70] DUO, Y., T. JINYUAN, Z. WEI und W. YUQIN (2021): Study on Roughness Parameters Screening and Characterizing Surface Contact Performance Based on Sensitivity Analysis. *Journal of Tribology* **144**(4). DOI: 10.1115/1.4051733.
- [71] DUPONT, P., B. ARMSTRONG und V. HAYWARD (2000): Elasto-plastic friction model: contact compliance and stiction. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*. IEEE. DOI: 10.1109/acc.2000.876665.

- [72] DYDO, J. R. und H. R. BUSBY (1995): Elasticity solutions for constant and linearly varying loads applied to a rectangular surface patch on the elastic half-space. *Journal of Elasticity* **38**(2), S. 153–163. DOI: 10.1007/bf00042496.
- [73] ELMAIAN, A., F. GAUTIER, C. PEZERAT und J.-M. DUFFAL (2014): How can automotive friction-induced noises be related to physical mechanisms? *Applied Acoustics* **76**, S. 391–401. DOI: 10.1016/j.apacoust.2013.09.004.
- [74] EMDE, T. (2009): *Mechanisches Verhalten metallischer Werkstoffe über weite Bereiche der Dehnung, der Dehnrate und der Temperatur*. Diss. Aachen.
- [75] ETSION, I. (2010): Revisiting the Cattaneo–Mindlin Concept of Interfacial Slip in Tangentially Loaded Compliant Bodies. *Journal of Tribology* **132**(2). DOI: 10.1115/1.4001238.
- [76] FARFAN-CABRERA, L. I. (2019): Tribology of electric vehicles: A review of critical components, current state and future improvement trends. *Tribology International* **138**, S. 473–486. DOI: 10.1016/j.triboint.2019.06.029.
- [77] FEENY, B., A. GURAN, N. HINRICHS und K. POPP (1998): A Historical Review on Dry Friction and Stick-Slip Phenomena. *Applied Mechanics Reviews* **51**(5), S. 321–341. DOI: 10.1115/1.3099008.
- [78] FELDMANN, J. (2012): Roughness-Induced Vibration Caused by a Tangential Oscillating Mass on a Plate. *Journal of Vibration and Acoustics* **134**(4). DOI: 10.1115/1.4005828.
- [79] FENG, Q. (2003): A discrete model of a stochastic friction system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**(20-21), S. 2339–2354. DOI: 10.1016/s0045-7825(03)00241-x.
- [80] FRÉROT, L., R. AGHABABAEI und J.-F. MOLINARI (2018): A mechanistic understanding of the wear coefficient: From single to multiple asperities contact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **114**, S. 172–184. DOI: 10.1016/j.jmps.2018.02.015.
- [81] FULLER, K. N. G. und D. TABOR (1975): The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **345**(1642), S. 327–342. DOI: 10.1098/rspa.1975.0138.
- [82] GALLEGO, L., D. NÉLIAS und S. DEYBER (2010): A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III. *Wear* **268**(1-2), S. 208–222. DOI: 10.1016/j.wear.2009.07.019.
- [83] GAUS, N. (2013): *Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss auf reibungserregte Schwingungen*. Diss. DOI: 10.5445/KSP/1000036844.
- [84] GOMERINGER, R., R. KILGUS, V. MENGES, S. OESTERLE und T. RAPP (2022): *Tabellenbuch Metall mit Formelsammlung*. Europa Lehrmittel Verlag.



- [85] GÖRKE, D. (2010): *Experimentelle und numerische Untersuchung des Normal- und Tangentialkontaktverhaltens rauher metallischer Oberflächen*. Diss. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU).
- [86] GORYACHEVA, I., M. PAGGI und V.L. POPOV, (Hrsg.) (2021): *Contact Mechanics Perspective of Tribology*. Frontiers Media SA. DOI: 10.3389/978-2-88966-761-1.
- [87] GOTTSTEIN, G. (2007): *Physikalische Grundlagen der Materialkunde : mit 28 Tabellen*. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-71105-6.
- [88] GREENWOOD, J. A. und J. B. P. WILLIAMSON (1966): Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **295**(1442), S. 300–319. DOI: 10.1098/rspa.1966.0242.
- [89] GREENWOOD, J. A. und J. J. WU (2001): Surface Roughness and Contact: An Apology. *Meccanica* **36**(6), S. 617–630. DOI: 10.1023/a:1016340601964.
- [90] GRÜTZMACHER, P. G., F. J. PROFITO und A. ROSENKRANZ (2019): Multi-Scale Surface Texturing in Tribology – Current Knowledge and Future Perspectives. *Lubricants* **7**(11), S. 95. DOI: 10.3390/lubricants7110095.
- [91] HAUER, F. (2014): *Die elasto-plastische Einglättung rauher Oberflächen und ihr Einfluss auf die Reibung in der Umformtechnik*. Diss. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU).
- [92] HERTZ, H. (1882): Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **1882**(92), S. 156–171. DOI: 10.1515/crll.1882.92.156.
- [93] HESS, D. P. und A. SOOM (1990): Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities. *Journal of Tribology* **112**(1), S. 147–152. DOI: 10.1115/1.2920220.
- [94] HESS, D. P. und A. SOOM (1991): Normal Vibrations and Friction Under Harmonic Loads: Part II – Rough Planar Contacts. *Journal of Tribology* **113**(1), S. 87–92. DOI: 10.1115/1.2920608.
- [95] HESS, D. P., A. SOOM und C. H. KIM (1992): Normal vibrations and friction at a Hertzian contact under random excitation: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration* **153**(3), S. 491–508. DOI: 10.1016/0022-460x(92)90378-b.
- [96] HESS, D. P. und A. SOOM (1993): Normal Vibrations and Friction at a Hertzian Contact Under Random Excitation: Perturbation Solution. *Journal of Sound and Vibration* **164**(2), S. 317–326. DOI: 10.1006/jsvi.1993.1216.
- [97] HESS, D. P. und N. J. WAGH (1995): Evaluating Surface Roughness From Contact Vibrations. *Journal of Tribology* **117**(1), S. 60–64. DOI: 10.1115/1.2830607.
- [98] HILLS, D. A., R. RAMESH, J. R. BARBER und M. R. MOORE (2018): Methods to solve half-plane partial slip contact problems. *International Journal of Solids and Structures* **155**, S. 155–159. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.07.019.

- [99] HINRICHS, N., M. OESTREICH und K. POPP (1997): Dynamics of oscillators with impact and friction. *Chaos, Solitons & Fractals* **8**(4), S. 535–558. DOI: [10.1016/S0960-0779\(96\)00121-X](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(96)00121-X).
- [100] HINRICHS, N., M. OESTREICH und K. POPP (1998): On the modelling of friction oscillators. *Journal of Sound and Vibration* **216**(3), S. 435–459. DOI: [10.1006/jsvi.1998.1736](https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1736).
- [101] HOFFMANN, N., M. FISCHER, R. ALLGAIER und L. GAUL (2002): A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics Research Communications* **29**(4), S. 197–205. DOI: [10.1016/S0093-6413\(02\)00254-9](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(02)00254-9).
- [102] HOFFMANN, N. und L. GAUL (2003): Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *ZAMM* **83**(8), S. 524–534. DOI: [10.1002/zamm.200310022](https://doi.org/10.1002/zamm.200310022).
- [103] HOLMBERG, K., P. ANDERSSON und A. ERDEMIR (2012): Global energy consumption due to friction in passenger cars. *Tribology International* **47**, S. 221–234. DOI: [10.1016/j.triboint.2011.11.022](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2011.11.022).
- [104] HOLMBERG, K., P. ANDERSSON, N.-O. NYLUND, K. MÄKELÄ und A. ERDEMIR (2014): Global energy consumption due to friction in trucks and buses. *Tribology International* **78**, S. 94–114. DOI: [10.1016/j.triboint.2014.05.004](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2014.05.004).
- [105] HOLMBERG, K., P. KIVIKYTÖ-REPONEN, P. HÄRKISAARI, K. VALTONEN und A. ERDEMIR (2017): Global energy consumption due to friction and wear in the mining industry. *Tribology International* **115**, S. 116–139. DOI: [10.1016/j.triboint.2017.05.010](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2017.05.010).
- [106] HOLMBERG, K. und A. ERDEMIR (2019): The impact of tribology on energy use and CO2 emission globally and in combustion engine and electric cars. *Tribology International* **135**, S. 389–396. DOI: [10.1016/j.triboint.2019.03.024](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2019.03.024).
- [107] HYUN, S., L. PEI, J.-F. MOLINARI und M. O. ROBBINS (2004): Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. *Physical Review E* **70**(2), S. 026117. DOI: [10.1103/physreve.70.026117](https://doi.org/10.1103/physreve.70.026117).
- [108] HYUN, S. und M. O. ROBBINS (2007): Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths. *Tribology International* **40**(10-12), S. 1413–1422. DOI: [10.1016/j.triboint.2007.02.003](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2007.02.003).
- [109] IBRAHIM, R. A. (1994): Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos – Part I: Mechanics of Contact and Friction. *Applied Mechanics Reviews* **47**(7), S. 209–226. DOI: [10.1115/1.3111079](https://doi.org/10.1115/1.3111079).
- [110] IBRAHIM, R. A. (1994): Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos – Part II: Dynamics and Modeling. *Applied Mechanics Reviews* **47**(7), S. 227–253. DOI: [10.1115/1.3111080](https://doi.org/10.1115/1.3111080).

- [111] JACOBS, T. D. B., T. JUNGE und L. PASTEWKA (2017): Quantitative characterization of surface topography using spectral analysis. *Surface Topography: Metrology and Properties* **5**(1), S. 013001. DOI: 10.1088/2051-672x/aa51f8.
- [112] JACOBS, T. D. B., N. MILLER, M. H. MÜSER und L. PASTEWKA (2022): The surface-topography challenge: Problem definition. DOI: 10.48550/arXiv.2206.13384.
- [113] JACQ, C., D. NELIAS, G. LORMAND und D. GIRODIN (2002): Development of a Three-Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code. *Journal of Tribology* **124**(4), S. 653–667. DOI: 10.1115/1.1467920.
- [114] JAEGER, J. C. (1942): Moving sources of heat and the temperature of sliding contacts. In: *Proceedings of the royal society of New South Wales*. Bd. 76, S. 203–224.
- [115] JANA, T., A. MITRA und P. SAHOO (2017): Dynamic contact interactions of fractal surfaces. *Applied Surface Science* **392**, S. 872–882. DOI: 10.1016/j.apsusc.2016.09.025.
- [116] JENG, Y.-R., Z.-W. LIN und S.-H. SHYU (2004): Changes of Surface Topography During Running-In Process. *Journal of Tribology* **126**(3), S. 620–625. DOI: 10.1115/1.1759344.
- [117] JOHNSON, K. L. (1955): Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **230**(1183), S. 531–548. DOI: 10.1098/rspa.1955.0149.
- [118] JOHNSON, K. L., K. KENDALL und A. D. ROBERTS (1971): Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **324**(1558), S. 301–313. DOI: 10.1098/rspa.1971.0141.
- [119] JOHNSON, K. L. (2004): *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- [120] JU, Y. und T. N. FARRIS (1996): Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. *Journal of Tribology* **118**(2), S. 320–328. DOI: 10.1115/1.2831303.
- [121] KAREV, A. (2021): *Asynchronous Parametric Excitation in Dynamical Systems*. Diss. DOI: 10.26083/TUPRINTS-00017554.
- [122] KENNEDY, F. E. (1984): Thermal and thermomechanical effects in dry sliding. *Wear* **100**(1-3), S. 453–476. DOI: 10.1016/0043-1648(84)90026-7.
- [123] KHASHINSKII, R. (2012): *Stochastic Stability of Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-23280-0.
- [124] KHONSARI, M. M., S. GHATREHSAMANI und S. AKBARZADEH (2021): On the running-in nature of metallic tribo-components: A review. *Wear* **474-475**, S. 203871. DOI: 10.1016/j.wear.2021.203871.
- [125] KIM, T. W., B. BHUSHAN und Y. J. CHO (2006): The contact behavior of elastic/plastic non-Gaussian rough surfaces. *Tribology Letters* **22**(1), S. 1–13. DOI: 10.1007/s11249-006-9036-5.

- [126] KINKAID, N. M., O. M. O'REILLY und P. PAPADOPOULOS (2003): Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration* **267**(1), S. 105–166. DOI: [10.1016/S0022-460X\(02\)01573-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01573-0).
- [127] KLIMA, J. (2018): *Lubricant transport towards tribocontact in capillary surface structures*. Diss. DOI: [10.5445/KSP/1000084131](https://doi.org/10.5445/KSP/1000084131).
- [128] KLOEDEN, P. E. und E. PLATEN (2011): *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-662-12616-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5).
- [129] KNOTHE, K. und S. STICHEL (2003): *Schienenfahrzeugdynamik*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-642-55766-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-55766-8).
- [130] KONTOROVICH, V. Y. und V. Z. LYANDRES (1995): Stochastic differential equations: an approach to the generation of continuous non-Gaussian processes. *IEEE Transactions on Signal Processing* **43**(10), S. 2372–2385. DOI: [10.1109/78.469853](https://doi.org/10.1109/78.469853).
- [131] KOTWAL, C. A. und B. BHUSHAN (1996): Contact Analysis of Non-Gaussian Surfaces for Minimum Static and Kinetic Friction and Wear. *Tribology Transactions* **39**(4), S. 890–898. DOI: [10.1080/10402009608983609](https://doi.org/10.1080/10402009608983609).
- [132] KRESS, R. (2014): *Linear Integral Equations*. Springer New York. DOI: [10.1007/978-1-4614-9593-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9593-2).
- [133] LAHRIRI, S. und I. F. SANTOS (2013): Experimental quantification of contact forces with impact, friction and uncertainty analysis. *Tribology International* **66**, S. 93–104. DOI: [10.1016/j.triboint.2013.04.016](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2013.04.016).
- [134] LI, J. (2016): Probability density evolution method: Background, significance and recent developments. *Probabilistic Engineering Mechanics* **44**, S. 111–117. DOI: [10.1016/j.probengmech.2015.09.013](https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2015.09.013).
- [135] LI, Z., H. OUYANG und Z. GUAN (2016): Nonlinear Friction-Induced Vibration of a Slider-Belt System. *Journal of Vibration and Acoustics* **138**(4). DOI: [10.1115/1.4033256](https://doi.org/10.1115/1.4033256).
- [136] LI, Z., H. OUYANG und Z.-H. WEI (2021): Insights into instability of friction-induced vibration of multi-degree-of-freedom models. *Journal of Sound and Vibration* **503**, S. 116107. DOI: [10.1016/j.jsv.2021.116107](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116107).
- [137] LIM, S. C., M. F. ASHBY und J. H. BRUNTON (1989): The effects of sliding conditions on the dry friction of metals. *Acta Metallurgica* **37**(3), S. 767–772. DOI: [10.1016/0001-6160\(89\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0001-6160(89)90003-5).
- [138] LIN, Y. und T. C. OVAERT (2003): The Stress and Displacement Fields Produced in a Semi-Infinite Solid by a Uniform Heat Source Over a Rectangular Area on the Surface. *Journal of Tribology* **125**(4), S. 709–712. DOI: [10.1115/1.1573234](https://doi.org/10.1115/1.1573234).
- [139] LIN, Y. K. und G. Q. CAI (2004): *Probabilistic Structural Dynamics*. McGraw Hill Book Co.

- [140] LIU, G., Q. WANG und S. LIU (2000): A Three-Dimensional Thermal-Mechanical Asperity Contact Model for Two Nominally Flat Surfaces in Contact. *Journal of Tribology* **123**(3), S. 595–602. DOI: 10.1115/1.1308044.
- [141] LIU, J., L. L. KE und Y. S. WANG (2018): Frictionally excited thermoelastic dynamic instability of functionally graded materials. *Acta Mechanica Sinica* **35**(1), S. 99–111. DOI: 10.1007/s10409-018-0804-x.
- [142] LIU, S., M. J. RODGERS, Q. WANG und L. M. KEER (2000): A Fast and Effective Method for Transient Thermoelastic Displacement Analyses. *Journal of Tribology* **123**(3), S. 479–485. DOI: 10.1115/1.1308010.
- [143] LIU, S. und Q. WANG (2000): A Three-Dimensional Thermomechanical Model of Contact Between Non-Conforming Rough Surfaces. *Journal of Tribology* **123**(1), S. 17–26. DOI: 10.1115/1.1327585.
- [144] LIU, S., Q. WANG und G. LIU (2000): A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear* **243**(1-2), S. 101–111. DOI: 10.1016/S0043-1648(00)00427-0.
- [145] LIU, S. und Q. WANG (2001): Studying Contact Stress Fields Caused by Surface Tractions With a Discrete Convolution and Fast Fourier Transform Algorithm. *Journal of Tribology* **124**(1), S. 36–45. DOI: 10.1115/1.1401017.
- [146] LIU, S., M. J. RODGERS, Q. WANG, L. M. KEER und H. S. CHENG (2002): Temperature distributions and thermoelastic displacements in moving bodies. *Computer Modeling in Engineering and Sciences* **3**(4), S. 465–482.
- [147] LIU, S. und Q. WANG (2002): Transient Thermoelastic Stress Fields in a Half-Space. *Journal of Tribology* **125**(1), S. 33–43. DOI: 10.1115/1.1501087.
- [148] LIU, S., Q. WANG und S. J. HARRIS (2003): Surface Normal Thermoelastic Displacement in Moving Rough Contacts. *Journal of Tribology* **125**(4), S. 862–868. DOI: 10.1115/1.1574517.
- [149] LIU, S., S. LANNOU, Q. WANG und L. KEER (2004): Solutions for Temperature Rise in Stationary/Moving Bodies Caused by Surface Heating With Surface Convection. *Journal of Heat Transfer* **126**(5), S. 776–785. DOI: 10.1115/1.1795234.
- [150] LIU, S., D. HUA, W. W. CHEN und Q. J. WANG (2007): Tribological modeling: Application of fast Fourier transform. *Tribology International* **40**(8), S. 1284–1293. DOI: 10.1016/j.triboint.2007.02.004.
- [151] LIU, Y. und J. R. BARBER (2014): Transient Heat Conduction Between Rough Sliding Surfaces. *Tribology Letters* **55**(1), S. 23–33. DOI: 10.1007/s11249-014-0328-x.
- [152] LONGUET-HIGGINS, M. S. (1957): Statistical properties of an isotropic random surface. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **250**(975), S. 157–174. DOI: 10.1098/rsta.1957.0018.

- [153] LONGUET-HIGGINS, M. S. (1957): The statistical analysis of a random, moving surface. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **249**(966), S. 321–387. DOI: [10.1098/rsta.1957.0002](https://doi.org/10.1098/rsta.1957.0002).
- [154] LOVE, A. E. H. (1929): The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **228**(659-669), S. 377–420. DOI: [10.1098/rsta.1929.0009](https://doi.org/10.1098/rsta.1929.0009).
- [155] LUBRECHT, A. A. und E. IOANNIDES (1991): A Fast Solution of the Dry Contact Problem and the Associated Sub-Surface Stress Field, Using Multilevel Techniques. *Journal of Tribology* **113**(1), S. 128–133. DOI: [10.1115/1.2920577](https://doi.org/10.1115/1.2920577).
- [156] MA, X., M. DE ROOIJ und D. SCHIPPER (2010): A load dependent friction model for fully plastic contact conditions. *Wear* **269**(11-12), S. 790–796. DOI: [10.1016/j.wear.2010.08.005](https://doi.org/10.1016/j.wear.2010.08.005).
- [157] MACHERAUCH, E. (2008): *Praktikum in Werkstoffkunde : Über 100 ausführliche Versuche aus wichtigen Gebieten der Werkstofftechnik*. Wiesbaden: Vieweg, F.
- [158] MAISSEN, A. (1993): Festkörperreibung: Reibungszahlen verschiedener Werkstoffe. DOI: [10.5169/SEALS-78120](https://doi.org/10.5169/SEALS-78120).
- [159] MAKSIMOV, I. L. und A. L. RAKHMANOV (1987): The thermofrictional oscillations under sliding. *Physics Letters A* **121**(8-9), S. 399–402. DOI: [10.1016/0375-9601\(87\)90485-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(87)90485-3).
- [160] MAKSIMOV, I. L. (1988): Thermal Instability of Sliding and Oscillations Due to Frictional Heating Effect. *Journal of Tribology* **110**(1), S. 69–72. DOI: [10.1115/1.3261577](https://doi.org/10.1115/1.3261577).
- [161] MANCA, O. und V. NASO (1994): Solution to steady-state three-dimensional conduction for a rectangular surface heat source on a semi-infinite body. *International Communications in Heat and Mass Transfer* **21**(6), S. 799–808. DOI: [10.1016/0735-1933\(94\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0735-1933(94)90033-7).
- [162] MANG, T., (Hrsg.) (2014): *Encyclopedia of Lubricants and Lubrication*. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-642-22647-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22647-2).
- [163] MARTINI, A., S. LIU und Q. J. WANG (2005): Transient Three-Dimensional Solution for Thermoelastic Displacement Due to Surface Heating and Convective Cooling. *Journal of Tribology* **127**(4), S. 750–755. DOI: [10.1115/1.1924574](https://doi.org/10.1115/1.1924574).
- [164] MARTINS, J. A. C., J. T. ODEN und F. M. F. SIMÕES (1990): A study of static and kinetic friction. *International Journal of Engineering Science* **28**(1), S. 29–92. DOI: [10.1016/0020-7225\(90\)90014-a](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90014-a).
- [165] MARX, B. und W. VOGT (2011): *Dynamische Systeme*. Spektrum Akademischer Verlag. DOI: [10.1007/978-3-8274-2448-8](https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2448-8).
- [166] MATYSIAK, S. J., D. M. PERKOWSKI und R. KULCHYTSKY-ZHYHAILO (2017): On temperature and stresses in a thermoelastic half-space with temperature dependent

- properties. *Meccanica* **52**(11-12), S. 2789–2799. DOI: [10.1007/s11012-016-0610-0](https://doi.org/10.1007/s11012-016-0610-0).
- [167] McNAMEE, J. und R. E. GIBSON (1960): Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **13**(2), S. 210–227. DOI: [10.1093/qjmam/13.2.210](https://doi.org/10.1093/qjmam/13.2.210).
- [168] MEDINA, S., A. V. OLVER und D. DINI (2012): The Influence of Surface Topography on Energy Dissipation and Compliance in Tangentially Loaded Elastic Contacts. *Journal of Tribology* **134**(1). DOI: [10.1115/1.4005641](https://doi.org/10.1115/1.4005641).
- [169] MINDLIN, R. D. (1949): Compliance of Elastic Bodies in Contact. *Journal of Applied Mechanics* **16**(3), S. 259–268. DOI: [10.1115/1.4009973](https://doi.org/10.1115/1.4009973).
- [170] MINDLIN, R. D. und H. DERESIEWICZ (1953): Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces. *Journal of Applied Mechanics* **20**(3), S. 327–344. DOI: [10.1115/1.4010702](https://doi.org/10.1115/1.4010702).
- [171] MOLINARI, A., Y. ESTRIN und S. MERCIER (1999): Dependence of the Coefficient of Friction on the Sliding Conditions in the High Velocity Range. *Journal of Tribology* **121**(1), S. 35–41. DOI: [10.1115/1.2833808](https://doi.org/10.1115/1.2833808).
- [172] MRÓZ, Z. und S. STUPKIEWICZ (1994): An anisotropic friction and wear model. *International Journal of Solids and Structures* **31**(8), S. 1113–1131. DOI: [10.1016/0020-7683\(94\)90167-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90167-8).
- [173] MULLER, V. M., B. V. DERJAGUIN und Y. P. TOPOROV (1983): On two methods of calculation of the force of sticking of an elastic sphere to a rigid plane. *Colloids and Surfaces* **7**(3), S. 251–259. DOI: [10.1016/0166-6622\(83\)80051-1](https://doi.org/10.1016/0166-6622(83)80051-1).
- [174] MÜSER, M. H. und W. B. DAPP (2015): The contact mechanics challenge: Problem definition. DOI: [10.48550/arXiv.1512.02403](https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.02403).
- [175] MÜSER, M. H., W. B. DAPP, R. BUGNICOURT, P. SAINOT, N. LESAFFRE, T. A. LUBRECHT, B. N. J. PERSSON, K. HARRIS, A. BENNETT, K. SCHULZE, S. ROHDE, P. IFJU, W. G. SAWYER, T. ANGELINI, H. A. ESFAHANI, M. KADKHODAEI, S. AKBARZADEH, J.-J. WU, G. VORLAUFER, A. VERNES, S. SOLHJOO, A. I. VAKIS, R. L. JACKSON, Y. XU, J. STREATOR, A. ROSTAMI, D. DINI, S. MEDINA, G. CARBONE, F. BOTTIGLIONE, L. AFFERRANTE, J. MONTI, L. PASTEWKA, M. O. ROBBINS und J. A. GREENWOOD (2017): Meeting the Contact-Mechanics Challenge. *Tribology Letters* **65**(4). DOI: [10.1007/s11249-017-0900-2](https://doi.org/10.1007/s11249-017-0900-2).
- [176] MÜSER, M. H. (2018): Response to A Comment on Meeting the Contact-Mechanics Challenge. *Tribology Letters* **66**(1). DOI: [10.1007/s11249-018-0986-1](https://doi.org/10.1007/s11249-018-0986-1).
- [177] NATKE, H. G. (1992): *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg Teubner Verlag. DOI: [10.1007/978-3-322-94266-1](https://doi.org/10.1007/978-3-322-94266-1).
- [178] NAYAK, P. R. (1971): Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology* **93**(3), S. 398–407. DOI: [10.1115/1.3451608](https://doi.org/10.1115/1.3451608).

- [179] NÉLIAS, D., V. BOUCLY und M. BRUNET (2005): Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces: Proposal for a Wear or Running-In Model. *Journal of Tribology* **128**(2), S. 236–244. DOI: 10.1115/1.2163360.
- [180] NÉLIAS, D., E. ANTALUCA, V. BOUCLY und S. CRETU (2007): A Three-Dimensional Semianalytical Model for Elastic-Plastic Sliding Contacts. *Journal of Tribology* **129**(4), S. 761–771. DOI: 10.1115/1.2768076.
- [181] NODA, N. (1991): Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties. *Applied Mechanics Reviews* **44**(9), S. 383–397. DOI: 10.1115/1.3119511.
- [182] NOSKO, O. (2015): Analytical Study of Sliding Instability due to Velocity- and Temperature-Dependent Friction. *Tribology Letters* **61**(1). DOI: 10.1007/s11249-015-0628-9.
- [183] NOWACKI, W. (1970): Problems of thermoelasticity. *Progress in Aerospace Sciences* **10**, S. 1–63. DOI: 10.1016/0376-0421(70)90003-5.
- [184] NOWACKI, W. (1975): *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Springer Netherlands.
- [185] NOWACKI, W. (1986): *Thermoelasticity*. Oxford New York Warszawa: Pergamon Press PWN-Polish Scientific Publishers.
- [186] ODEN, J. T. und J. A. C. MARTINS (1985): Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **52**(1-3), S. 527–634. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90009-x.
- [187] OLSSON, H., K. J. ÅSTRÖM, C. C. DE WIT, M. GÄFVERT und P. LISCHINSKY (1998): Friction Models and Friction Compensation. *European Journal of Control* **4**(3), S. 176–195. DOI: 10.1016/s0947-3580(98)70113-x.
- [188] PAGGI, M. und M. CIAVARELLA (2010): The coefficient of proportionality  $\kappa$  between real contact area and load, with new asperity models. *Wear* **268**(7-8), S. 1020–1029. DOI: 10.1016/j.wear.2009.12.038.
- [189] PAGGI, M., R. POHRT und V. L. POPOV (2014): Partial-slip frictional response of rough surfaces. *Scientific Reports* **4**(1). DOI: 10.1038/srep05178.
- [190] PANAGOULI, O. K. und K. MASTRODIMOU (2017): Dependence of friction coefficient on the resolution of asperities in metallic rough surfaces under cyclic loading. *International Journal of Solids and Structures* **108**, S. 85–97. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.11.010.
- [191] PARKER, R. C. und P. R. MARSHALL (1948): The Measurement of the Temperature of Sliding Surfaces, with Particular Reference to Railway Brake Blocks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* **158**(1), S. 209–229. DOI: 10.1243/pime\_proc\_1948\_158\_026\_02.
- [192] PARKUS, H. (1959): *Instationäre Wärmespannungen*. Springer Vienna. DOI: 10.1007/978-3-7091-5710-7.
- [193] PARKUS, H. (1976): *Thermoelasticity*. Springer Vienna. DOI: 10.1007/978-3-7091-8447-9.



- [194] PAWLUS, P., R. REIZER und M. WIECZOROWSKI (2020): A review of methods of random surface topography modeling. *Tribology International* **152**, S. 106530. DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106530.
- [195] PENG, W. und B. BHUSHAN (2000): A Numerical Three-Dimensional Model for the Contact of Layered Elastic/Plastic Solids With Rough Surfaces by a Variational Principle. *Journal of Tribology* **123**(2), S. 330–342. DOI: 10.1115/1.1308004.
- [196] PENG, W. und B. BHUSHAN (2001): Sliding Contact Analysis of Layered Elastic/Plastic Solids With Rough Surfaces. *Journal of Tribology* **124**(1), S. 46–61. DOI: 10.1115/1.1401018.
- [197] PENNESTRI, E., V. ROSSI, P. SALVINI und P. P. VALENTINI (2015): Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear Dynamics* **83**(4), S. 1785–1801. DOI: 10.1007/s11071-015-2485-3.
- [198] PÉREZ-RÀFOLS, F. und A. ALMQVIST (2019): Generating randomly rough surfaces with given height probability distribution and power spectrum. *Tribology International* **131**, S. 591–604. DOI: 10.1016/j.triboint.2018.11.020.
- [199] PERSSON, B. N. J. (1999): Sliding friction. *Surface Science Reports* **33**(3), S. 83–119. DOI: 10.1016/S0167-5729(98)00009-0.
- [200] PERSSON, B. N. J., O. ALBOHR, F. MANCOSU, V. PEVERI, V. N. SAMOILOV und I. M. SIVBAEK (2003): On the nature of the static friction, kinetic friction and creep. *Wear* **254**(9), S. 835–851. DOI: 10.1016/S0043-1648(03)00234-5.
- [201] PERSSON, B. N. J. (2006): Contact mechanics for randomly rough surfaces. *Surface Science Reports* **61**(4), S. 201–227. DOI: 10.1016/j.surfrep.2006.04.001.
- [202] PERSSON, B. N. J. (2014): On the Fractal Dimension of Rough Surfaces. *Tribology Letters* **54**(1), S. 99–106. DOI: 10.1007/s11249-014-0313-4.
- [203] PEYRET, N., M. ROSATELLO, G. CHEVALLIER und J.-L. DION (2017): A Mindlin derived Dahl friction model. *Mechanism and Machine Theory* **117**, S. 48–55. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.06.019.
- [204] POHRT, R. und Q. LI (2014): Complete boundary element formulation for normal and tangential contact problems. *Physical Mesomechanics* **17**(4), S. 334–340. DOI: 10.1134/s1029959914040109.
- [205] POLLACK, H. N. (1965): Steady heat conduction in layered mediums: The half-space and sphere. *Journal of Geophysical Research* **70**(22), S. 5645–5648. DOI: 10.1029/jz070i022p05645.
- [206] POLONSKY, I. A. und L. M. KEER (1999): A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear* **231**(2), S. 206–219. DOI: 10.1016/S0043-1648(99)00113-1.

- [207] POLONSKY, I. A. und L. M. KEER (1999): Fast Methods for Solving Rough Contact Problems: A Comparative Study. *Journal of Tribology* **122**(1), S. 36–41. DOI: 10.1115/1.555326.
- [208] POPOVA, E. und V. L. POPOV (2015): The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction. *Friction* **3**(2), S. 183–190. DOI: 10.1007/s40544-015-0074-6.
- [209] POPP, K. und W. SCHIEHLEN (1993): *Fahrzeugdynamik eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug - Fahrweg*. Stuttgart: Teubner.
- [210] PULLEN, J. und J. B. P. WILLIAMSON (1972): On the plastic contact of rough surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **327**(1569), S. 159–173. DOI: 10.1098/rspa.1972.0038.
- [211] PUTELAT, T., J. H. P. DAWES und J. R. WILLIS (2011): On the microphysical foundations of rate-and-state friction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **59**(5), S. 1062–1075. DOI: 10.1016/j.jmps.2011.02.002.
- [212] PYR'YEV, Y. und J. AWREJCWICZ (2009): *Nonsmooth Dynamics of Contacting Thermoelastic Bodies*. Springer New York. DOI: 10.1007/978-0-387-09653-7.
- [213] QIAN, H. H., J. L. MO, Z. Y. XIANG, Z. Y. FAN, Y. K. WU und Z. R. ZHOU (2021): The effect of the macroscopic surface morphology caused by the uneven wear on friction induced vibration. *Tribology International* **154**, S. 106672. DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106672.
- [214] RABINOWICZ, E. (1951): The Nature of the Static and Kinetic Coefficients of Friction. *Journal of Applied Physics* **22**(11), S. 1373–1379. DOI: 10.1063/1.1699869.
- [215] RABINOWICZ, E. (1956): Autocorrelation Analysis of the Sliding Process. *Journal of Applied Physics* **27**(2), S. 131–135. DOI: 10.1063/1.1722321.
- [216] REITZLE, D., S. GEIGER und A. KIENLE (2019): Semi-analytical solution of the time-dependent heat equation for three-dimensional anisotropic multi-layered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **134**, S. 984–992. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.174.
- [217] REN, N. und S. C. LEE (1993): Contact Simulation of Three-Dimensional Rough Surfaces Using Moving Grid Method. *Journal of Tribology* **115**(4), S. 597–601. DOI: 10.1115/1.2921681.
- [218] RÖBLER, A. (2004): Coefficients of Runge-Kutta Schemes for Itô Stochastic Differential Equations. *PAMM* **3**(1), S. 571–572. DOI: 10.1002/pamm.200310553.
- [219] RÖBLER, A. (2006): Runge-Kutta Methods for Itô Stochastic Differential Equations with Scalar Noise. *BIT Numerical Mathematics* **46**(1), S. 97–110. DOI: 10.1007/s10543-005-0039-7.
- [220] RUSLI, M. und M. OKUMA (2007): Effect of surface topography on mode-coupling model of dry contact sliding systems. *Journal of Sound and Vibration* **308**(3-5), S. 721–734. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.03.046.

- [221] SCHNEIDER, J., V. DJAMIYKOV und C. GREINER (2018): Friction reduction through biologically inspired scale-like laser surface textures. *Beilstein Journal of Nanotechnology* **9**, S. 2561–2572. DOI: 10.3762/bjnano.9.238.
- [222] SCHREIBER, T. und A. SCHMITZ (1996): Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests. *Physical Review Letters* **77**(4), S. 635–638. DOI: 10.1103/physrevlett.77.635.
- [223] SHAKHVOROSTOV, D. (2005): *Untersuchung der Dissipationsmechanismen der Metall/Metall-Reibpaarung mit Hilfe der Radionuklidtechnik und faseroptischen IR-Temperaturmessung*. Diss. DOI: 10.14279/DEPOSITONCE-1166.
- [224] SHI, X., A. WU, C. JIN und S. QU (2015): Thermomechanical modeling and transient analysis of sliding contacts between an elastic–plastic asperity and a rigid isothermal flat. *Tribology International* **81**, S. 53–60. DOI: 10.1016/j.triboint.2014.08.004.
- [225] SHI, Z. und S. RAMALINGAM (2001): Thermal and mechanical stresses in transversely isotropic coatings. *Surface and Coatings Technology* **138**(2-3), S. 173–184. DOI: 10.1016/s0257-8972(00)01167-1.
- [226] SIMOES, N. und A. TADEU (2005): Fundamental solutions for transient heat transfer by conduction and convection in an unbounded, half-space, slab and layered media in the frequency domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **29**(12), S. 1130–1142. DOI: 10.1016/j.enganabound.2005.06.002.
- [227] SIMON, M. (2004): *Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer Anregung*. Diss. DOI: 10.5445/KSP/1402004.
- [228] SLAVIČ, J., M. D. BRYANT und M. BOLTEŽAR (2007): A new approach to roughness-induced vibrations on a slider. *Journal of Sound and Vibration* **306**(3-5), S. 732–750. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.06.036.
- [229] SOOM, A. und C. KIM (1983): Interactions Between Dynamic Normal and Frictional Forces During Unlubricated Sliding. *Journal of Lubrication Technology* **105**(2), S. 221–229. DOI: 10.1115/1.3254574.
- [230] SOOM, A. und J.-W. CHEN (1986): Simulation of Random Surface Roughness-Induced Contact Vibrations at Hertzian Contacts During Steady Sliding. *Journal of Tribology* **108**(1), S. 123–127. DOI: 10.1115/1.3261131.
- [231] STANLEY, H. M. und T. KATO (1997): An FFT-Based Method for Rough Surface Contact. *Journal of Tribology* **119**(3), S. 481–485. DOI: 10.1115/1.2833523.
- [232] STERNBERG, E. und E. L. McDOWELL (1957): On the steady-state thermoelastic problem for the half-space. *Quarterly of Applied Mathematics* **14**(4), S. 381–398. DOI: 10.1090/qam/87367.
- [233] SUGIMURA, J., T. WATANABE und Y. YAMAMOTO (1994): Effects of Surface Roughness Pattern on the Running-In Process of Rolling/Sliding Contacts. In: *Tribology Series*. Elsevier, S. 125–137. DOI: 10.1016/s0167-8922(08)70302-x.

- [234] SUTTER, G. und N. RANC (2010): Flash temperature measurement during dry friction process at high sliding speed. *Wear* **268**(11-12), S. 1237–1242. doi: 10.1016/j.wear.2010.01.019.
- [235] TADEU, A. und N. SIMOES (2006): Three-dimensional fundamental solutions for transient heat transfer by conduction in an unbounded medium, half-space, slab and layered media. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **30**(5), S. 338–349. doi: 10.1016/j.enganabound.2006.01.011.
- [236] TAN, X. (2002): Comparisons of friction models in bulk metal forming. *Tribology International* **35**(6), S. 385–393. doi: 10.1016/s0301-679x(02)00020-8.
- [237] TIAN, X. und F. E. KENNEDY (1994): Maximum and Average Flash Temperatures in Sliding Contacts. *Journal of Tribology* **116**(1), S. 167–174. doi: 10.1115/1.2927035.
- [238] TIAN, X. und B. BHUSHAN (1996): A Numerical Three-Dimensional Model for the Contact of Rough Surfaces by Variational Principle. *Journal of Tribology* **118**(1), S. 33–42. doi: 10.1115/1.2837089.
- [239] TRUESDELL, C., (Hrsg.) (1973): *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-39776-3.
- [240] TZANAKIS, I., M. HADFIELD, B. THOMAS, S. M. NOYA, I. HENSHAW und S. AUSTEN (2012): Future perspectives on sustainable tribology. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **16**(6), S. 4126–4140. doi: 10.1016/j.rser.2012.02.064.
- [241] VAKIS, A. I., V. A. YASTREBOV, J. SCHEIBERT, L. NICOLA, D. DINI, C. MINFRAY, A. ALMQVIST, M. PAGGI, S. LEE, G. LIMBERT, J. F. MOLINARI, G. ANCIAUX, R. AGHABAEI, S. E. RESTREPO, A. PAPANGELO, A. CAMMARATA, P. NICOLINI, C. PUTIGNANO, G. CARBONE, S. STUPKIEWICZ, J. LENGIEWICZ, G. COSTAGLIOLA, F. BOSIA, R. GUARINO, N. M. PUGNO, M. H. MÜSER und M. CIAVARELLA (2018): Modeling and simulation in tribology across scales: An overview. *Tribology International* **125**, S. 169–199. doi: 10.1016/j.triboint.2018.02.005.
- [242] VERRUIJT, A. (1969): The completeness of Biot’s solution of the coupled thermoelastic problem. *Quarterly of Applied Mathematics* **26**(4), S. 485–490. doi: 10.1090/qam/239802.
- [243] VICK, B. und M. J. FUREY (2001): A basic theoretical study of the temperature rise in sliding contact with multiple contacts. *Tribology International* **34**(12), S. 823–829. doi: 10.1016/s0301-679x(01)00082-2.
- [244] VOLK, R. (2018): *Rauheitsmessung*. Beuth Verlag.
- [245] WADDAD, Y., V. MAGNIER, P. DUFRÉNOY und G. D. SAXCÉ (2019): Heat partition and surface temperature in sliding contact systems of rough surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **137**, S. 1167–1182. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.04.015.
- [246] WADDAD, Y., V. MAGNIER, P. DUFRÉNOY und G. D. SAXCÉ (2019): Multiscale thermomechanical modeling of frictional contact problems considering wear –

- Application to a pin-on-disc system. *Wear* **426-427**, S. 1399–1409. DOI: [10.1016/j.wear.2018.12.063](https://doi.org/10.1016/j.wear.2018.12.063).
- [247] VON WAGNER, U. und W. V. WEDIG (2000): On the Calculation of Stationary Solutions of Multi-Dimensional Fokker-Planck Equations by Orthogonal Functions. *Nonlinear Dynamics* **21**(3), S. 289–306. DOI: [10.1023/a:1008389909132](https://doi.org/10.1023/a:1008389909132).
- [248] VON WAGNER, U., D. HOCHLENERT und P. HAGEDORN (2007): Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration* **302**(3), S. 527–539. DOI: [10.1016/j.jsv.2006.11.023](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.11.023).
- [249] WANG, D. W., J. L. MO, M. Q. LIU, H. OUYANG und Z. R. ZHOU (2016): Noise performance improvements and tribological consequences of a pad-on-disc system through groove-textured disc surface. *Tribology International* **102**, S. 222–236. DOI: [10.1016/j.triboint.2016.05.030](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.05.030).
- [250] WANG, Q. J. und Y.-W. CHUNG, (Hrsg.) (2013): *Encyclopedia of Tribology*. Springer US. DOI: [10.1007/978-0-387-92897-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5).
- [251] WANG, Q. J. und D. ZHU (2019): *Interfacial Mechanics*. CRC Press. DOI: [10.1201/9780429131011](https://doi.org/10.1201/9780429131011).
- [252] WANG, Q. J., L. SUN, X. ZHANG, S. LIU und D. ZHU (2020): FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics. *Frontiers in Mechanical Engineering* **6**. DOI: [10.3389/fmech.2020.00061](https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00061).
- [253] WANG, W. Z., H. WANG, Y. C. LIU, Y. Z. HU und D. ZHU (2003): A comparative study of the methods for calculation of surface elastic deformation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* **217**(2), S. 145–154. DOI: [10.1243/13506500360603570](https://doi.org/10.1243/13506500360603570).
- [254] WANG, Z.-J., W.-Z. WANG, H. WANG, D. ZHU und Y.-Z. HU (2010): Partial Slip Contact Analysis on Three-Dimensional Elastic Layered Half Space. *Journal of Tribology* **132**(2). DOI: [10.1115/1.4001011](https://doi.org/10.1115/1.4001011).
- [255] WANG, Z.-j., W.-z. WANG, F.-m. MENG und J.-x. WANG (2011): Fretting Contact Analysis on Three-Dimensional Elastic Layered Half Space. *Journal of Tribology* **133**(3). DOI: [10.1115/1.4004104](https://doi.org/10.1115/1.4004104).
- [256] WILLNER, K. (2004): Elasto-Plastic Normal Contact of Three-Dimensional Fractal Surfaces Using Halfspace Theory. *Journal of Tribology* **126**(1), S. 28–33. DOI: [10.1115/1.1631019](https://doi.org/10.1115/1.1631019).
- [257] WILLNER, K. (2008): Fully Coupled Frictional Contact Using Elastic Halfspace Theory. *Journal of Tribology* **130**(3). DOI: [10.1115/1.2913537](https://doi.org/10.1115/1.2913537).
- [258] XIAO, H., Y. SHAO und M. J. BRENNAN (2015): On the contact stiffness and nonlinear vibration of an elastic body with a rough surface in contact with a rigid flat surface. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **49**, S. 321–328. DOI: [10.1016/j.euromechsol.2014.08.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.08.005).

- [259] YASTREBOV, V. A., G. ANCIAUX und J.-F. MOLINARI (2015): From infinitesimal to full contact between rough surfaces: Evolution of the contact area. *International Journal of Solids and Structures* **52**, S. 83–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.09.019.
- [260] YASTREBOV, V. A., G. ANCIAUX und J.-F. MOLINARI (2017): The role of the roughness spectral breadth in elastic contact of rough surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **107**, S. 469–493. DOI: 10.1016/j.jmps.2017.07.016.
- [261] YU, C., Z. WANG und Q. J. WANG (2014): Analytical frequency response functions for contact of multilayered materials. *Mechanics of Materials* **76**, S. 102–120. DOI: 10.1016/j.mechmat.2014.06.006.
- [262] YU, H., S. LIU, Q. J. WANG und Y. W. CHUNG (2004): Influence of Temperature-Dependent Yield Strength on Thermomechanical Asperity Contacts. *Tribology Letters* **17**(2), S. 155–164. DOI: 10.1023/b:tril.0000032440.19767.17.
- [263] ZHAI, C., D. HANAOR und Y. GAN (2017): Contact stiffness of multiscale surfaces by truncation analysis. *International Journal of Mechanical Sciences* **131-132**, S. 305–316. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.018.
- [264] ZHANG, X. und Q. J. WANG (2020): Thermoelastic contact of layered materials with interfacial imperfection. *International Journal of Mechanical Sciences* **186**, S. 105904. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105904.
- [265] ZHOU, Y., M. PENG, X. ZUO und J. XU (2021): Correlation Between Friction Coefficient and Friction Vibration in Running-In Process Based on Cross Recurrence Plots. *Journal of Tribology* **144**(1). DOI: 10.1115/1.4050806.
- [266] ZHU, W. Q. und G. Q. CAI (2014): Generation of non-Gaussian stochastic processes using nonlinear filters. *Probabilistic Engineering Mechanics* **36**, S. 56–62. DOI: 10.1016/j.probengmech.2014.03.004.
- [267] ZMITROWICZ, A. (1981): A theoretical model of anisotropic dry friction. *Wear* **73**(1), S. 9–39. DOI: 10.1016/0043-1648(81)90207-6.
- [268] ZMITROWICZ, A. (1989): Mathematical descriptions of anisotropic friction. *International Journal of Solids and Structures* **25**(8), S. 837–862. DOI: 10.1016/0020-7683(89)90034-6.

## Eigene Publikationen

- [269] KAPELKE, S., L. J. OESTRINGER und W. SEEMANN (2017): Investigation of Vibrations Induced by Dry Friction in a Pin-on-Disk Experimental Set-up. *PAMM* **17**(1), S. 375–376. DOI: [10.1002/pamm.201710157](https://doi.org/10.1002/pamm.201710157).
- [270] OESTRINGER, L. J. und C. PROPPE (2019): On the calculation of a dry friction coefficient. *PAMM* **19**(1). DOI: [10.1002/pamm.201900407](https://doi.org/10.1002/pamm.201900407).
- [271] OESTRINGER, L. J. und C. PROPPE (2021): On the influence of surface roughness on friction-induced oscillations. *PAMM* **21**(1). DOI: [10.1002/pamm.202100013](https://doi.org/10.1002/pamm.202100013).
- [272] OESTRINGER, L. J. und C. PROPPE (2022): On the transient thermomechanical contact simulation for two sliding bodies with rough surfaces and dry friction. *Tribology International* **170**, S. 107425. DOI: [10.1016/j.triboint.2021.107425](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.107425).
- [273] OESTRINGER, L. J. und C. PROPPE (2023): On the fully coupled quasi-static equations for the thermoelastic halfspace. *Mechanics of Materials* **177**, S. 104554. DOI: [10.1016/j.mechmat.2022.104554](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104554).





## Betreute Abschlussarbeiten

- [274] BECKER, C. (2020): *Implementierung der homogenisierten Reynoldsgleichung für die Berechnung der Kontaktkräfte beim einseitig rauhen Schmierpalt*. Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [275] PADHY, M. (2021): *Homogenisierung und numerische Implementierung der Reynolds-Gleichung für einen zweiseitig rauhen Schmierpalt*. Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [276] SEKOL, P. (2022): *Einfluss von Leistungs- und Verteilungsdichte trockener Reibwerte auf die Stabilität eines Reibschwingers*. Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [277] WINHEIM, L. (2022): *Nicht-äquidistante Diskretisierungen in der numerischen Kontaktmechanik am Beispiel des partiellen Gleitens*. Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.



- Band 1**      **Marcus Simon**  
Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer  
Anregung.  
ISBN 3-937300-13-9
- Band 2**      **Clemens Reitze**  
Closed Loop, Entwicklungsplattform für mechatronische  
Fahr-dynamikregelsysteme.  
ISBN 3-937300-19-8
- Band 3**      **Martin Georg Cichon**  
Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische  
Systeme.  
ISBN 3-86644-003-0
- Band 4**      **Rainer Keppler**  
Zur Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen  
unter Berücksichtigung von Greifkontakt bei Robotern.  
ISBN 978-3-86644-092-0
- Band 5**      **Bernd Waltersberger**  
Struktur-dynamik mit ein- und zweiseitigen Bindungen  
aufgrund reibungsbehafteter Kontakte.  
ISBN 978-3-86644-153-8
- Band 6**      **Rüdiger Benz**  
Fahrzeugsimulation zur Zuverlässigkeitsabsicherung  
von karosseriefesten Kfz-Komponenten.  
ISBN 978-3-86644-197-2
- Band 7**      **Pierre Barthels**  
Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungsunter-  
drückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen.  
ISBN 978-3-86644-217-7

- Band 8**      **Hartmut Hetzler**  
Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens.  
ISBN 978-3-86644-229-0
- Band 9**      **Frank Dienerowitz**  
Der Helixaktor – Zum Konzept eines vorverwundenen Biegeaktors.  
ISBN 978-3-86644-232-0
- Band 10**     **Christian Rudolf**  
Piezoelektrische Self-sensing-Aktoren zur Korrektur statischer Verlagerungen.  
ISBN 978-3-86644-267-2
- Band 11**     **Günther Stelzner**  
Zur Modellierung und Simulation biomechanischer Mehrkörpersysteme.  
ISBN 978-3-86644-340-2
- Band 12**     **Christian Wetzel**  
Zur probabilistischen Betrachtung von Schienen- und Kraftfahrzeugsystemen unter zufälliger Windanregung.  
ISBN 978-3-86644-444-7
- Band 13**     **Wolfgang Stamm**  
Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen mit flächigen Reibkontakten.  
ISBN 978-3-86644-605-2
- Band 14**     **Felix Fritz**  
Modellierung von Wälzlagern als generische Maschinenelemente einer Mehrkörpersimulation.  
ISBN 978-3-86644-667-0
- Band 15**     **Aydin Boyaci**  
Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern.  
ISBN 978-3-86644-780-6

- Band 16**     **Ruggeri Toni Liong**  
Application of the cohesive zone model to the analysis  
of rotors with a transverse crack.  
ISBN 978-3-86644-791-2
- Band 17**     **Ulrich Bittner**  
Strukturakustische Optimierung von Axialkolbeneinheiten.  
Modellbildung, Validierung und Topologieoptimierung.  
ISBN 978-3-86644-938-1
- Band 18**     **Alexander Karmazin**  
Time-efficient Simulation of Surface-excited Guided  
Lamb Wave Propagation in Composites.  
ISBN 978-3-86644-935-0
- Band 19**     **Heike Vogt**  
Zum Einfluss von Fahrzeug- und Straßenparametern  
auf die Ausbildung von Straßenunebenheiten.  
ISBN 978-3-7315-0023-0
- Band 20**     **Laurent Ineichen**  
Konzeptvergleich zur Bekämpfung der Torsionsschwingungen  
im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs.  
ISBN 978-3-7315-0030-8
- Band 21**     **Sietze van Buuren**  
Modeling and simulation of porous journal bearings in  
multibody systems.  
ISBN 978-3-7315-0084-1
- Band 22**     **Dominik Kern**  
Neuartige Drehgelenke für reibungsarme Mechanismen.  
ISBN 978-3-7315-0103-9
- Band 23**     **Nicole Gaus**  
Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss  
auf reibungserregte Schwingungen.  
ISBN 978-3-7315-0118-3
- Band 24**     **Fabian Bauer**  
Optimierung der Energieeffizienz zweibeiniger  
Roboter durch elastische Kopplungen.  
ISBN 978-3-7315-0256-2

- Band 25**    **Benedikt Wiegert**  
Nichtlineare Schwingungen von Systemen  
mit elastohydrodynamischen Linienkontakten.  
ISBN 978-3-7315-0350-7
- Band 26**    **Arsenty Tikhomolov**  
Analytische, numerische und messtechnische  
Untersuchung der Dynamik von Fahrzeugkupplungen  
am Beispiel des Trennproblems.  
ISBN 978-3-7315-0362-0
- Band 27**    **Daniel Maier**  
On the Use of Model Order Reduction Techniques  
for the Elastohydrodynamic Contact Problem.  
ISBN 978-3-7315-0369-9
- Band 28**    **Xiaoyu Zhang**  
Crosswind stability of vehicles under nonstationary  
wind excitation.  
ISBN 978-3-7315-0376-7
- Band 29**    **Jens Deppler**  
Ein Beitrag zur viskoelastischen Modellierung nichtholonomer  
Bindungsgleichungen.  
ISBN 978-3-7315-0548-8
- Band 30**    **Georg Jehle**  
Zur Modellbildung und Simulation reibungserregter  
Schwingungen in Pkw-Schaltgetrieben.  
ISBN 978-3-7315-0668-3
- Band 31**    **Joachim Klima**  
Lubricant transport towards tribocontact in capillary  
surface structures.  
ISBN 978-3-7315-0814-4
- Band 32**    **Gábor Kenderi**  
Nonparametric identification of nonlinear dynamic systems.  
ISBN 978-3-7315-0834-2

- Band 33**     **Jan Henrik Schmidt**  
An efficient solution procedure for elasto-hydrodynamic contact problems considering structural dynamics.  
ISBN 978-3-7315-0872-4
- Band 34**     **Ulrich Johannes Römer**  
Über den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen.  
ISBN 978-3-7315-0887-8
- Band 35**     **Simon Kapelke**  
Zur Beeinflussung reibungsbehafteter Systeme mithilfe überlagerter Schwingungen.  
ISBN 978-3-7315-0905-9
- Band 36**     **Jens Burgert**  
On direct and inverse problems related to longitudinal impact of non-uniform elastic rods.  
ISBN 978-3-7315-1087-1
- Band 37**     **Tim Leister**  
Dynamics of Rotors on Refrigerant-Lubricated Gas Foil Bearings.  
ISBN 978-3-7315-1112-0
- Band 38**     **Simon Schröders**  
Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der hydraulischen Ventilsteuerungen.  
ISBN 978-3-7315-1221-9
- Band 39**     **Lukas Julian Oestringer**  
Thermomechanischer Kontakt und stochastische Dynamik gleitender Körper mit rauen Oberflächen.  
ISBN 978-3-7315-1297-4

Die Funktionserfüllung vieler technischer Systeme lässt sich auf den gleitenden Kontakt zweier oder mehrerer Körper zurückführen. Für die Weiterentwicklung dieser reibungsbehafteten Systeme – sei es aus funktionaler oder ökonomischer Sicht – ist entsprechend ein möglichst umfassendes Verständnis der zugrundeliegenden Zusammenhänge im Kontakt notwendig.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich daher mit der Fragestellung, inwieweit der Reibwert für den Kontakt zweier gleitender metallischer Körper in Abhängigkeit verschiedener physikalischer Parameter berechnet werden kann. Dafür wird ein thermomechanisches Modell entwickelt, das die rauen Oberflächen der Körper mit einbezieht und die Berechnung verschiedener kontaktmechanischer Größen wie beispielsweise den Verschiebungen, den Spannungen, dem Temperaturfeld, der tatsächlichen Kontaktfläche und insbesondere einem stochastischen Reibwert ermöglicht. Weiterführende Untersuchungen hinsichtlich den grundsätzlichen Instabilitätsmechanismen bei reibungserregten Schwingungen unter Einbezug der Erkenntnisse aus den thermomechanischen Kontaktsimulationen schließen sich in der Folge an. Diese zeigen stabilisierende und destabilisierende Auswirkungen des stochastischen Reibwerts auf Systeme mit tribologischen Kontakten.

