Keynote Speaker

La prospettiva solida come strumento di analisi delle transizioni tra lo spazio euclideo e lo spazio della rappresentazione

Riccardo Migliari

doi.org/10.3280/oa-1016-c279

Avvertenze
Il termine 'camera di Ames' indica nel testo la particolare prospettiva che assume le proprietà percettive tipiche della camera inventata da Adelbert Ames [Ittelson 1952] e dai suoi collaboratori intorno alla metà del Novecento.

Questa breve comunicazione anticipa i risultati di uno studio che ha coinvolto Leonardo Baglioni, Federico Fallavollita, me e Marta Salvatore e che sarà pubblicata per esteso a breve. Debbo anche fare una precisazione che riguarda il linguaggio adottato: molti dei concetti e dei ruoli degli enti geometrici dei quali parlerò, non hanno ancora una denominazione consolidata, a partire dal termine stesso *prospettiva solida*, che molti confondono con la *prospettiva rilievo*. Lo studio della storia serve anche a stabilire quali possano essere i termini più facilmente condivisi, in italiano come in inglese o in francese, anche se la più ricca messe di dati, al riguardo, viene dalla letteratura di lingua tedesca.

Dallo spazio visivo allo spazio mentale

Parlando di transizioni, il primo esempio che mi viene in mente è quello della transizione dalla visione alla forma reale dello spazio. Tutti noi percepiamo lo spazio come una prospettiva, ma sappiamo che quella immagine di pareti che convergono "nell'indistinto vertice di un cono", *angusta fastigia coni*, come diceva Lucrezio [Lucrezio, p. 286], corrisponde a pareti che corrono parallele nella profondità dello spazio euclideo (fig. 1).
Dunque possiamo dire, in breve, che nella nostra esperienza quotidiana esistono due spazi sovrapposti: lo spazio visivo, prospettico, e lo spazio mentale, euclideo.
La transizione dall'uno all'altro è in noi tanto connaturata che la pratichiamo in ogni momento senza pensarci, fatta eccezione per le nostre attività di architetti, quando questa transizione diviene consapevole, traducendo in rappresentazioni ciò che vediamo e ciò che progettiamo.

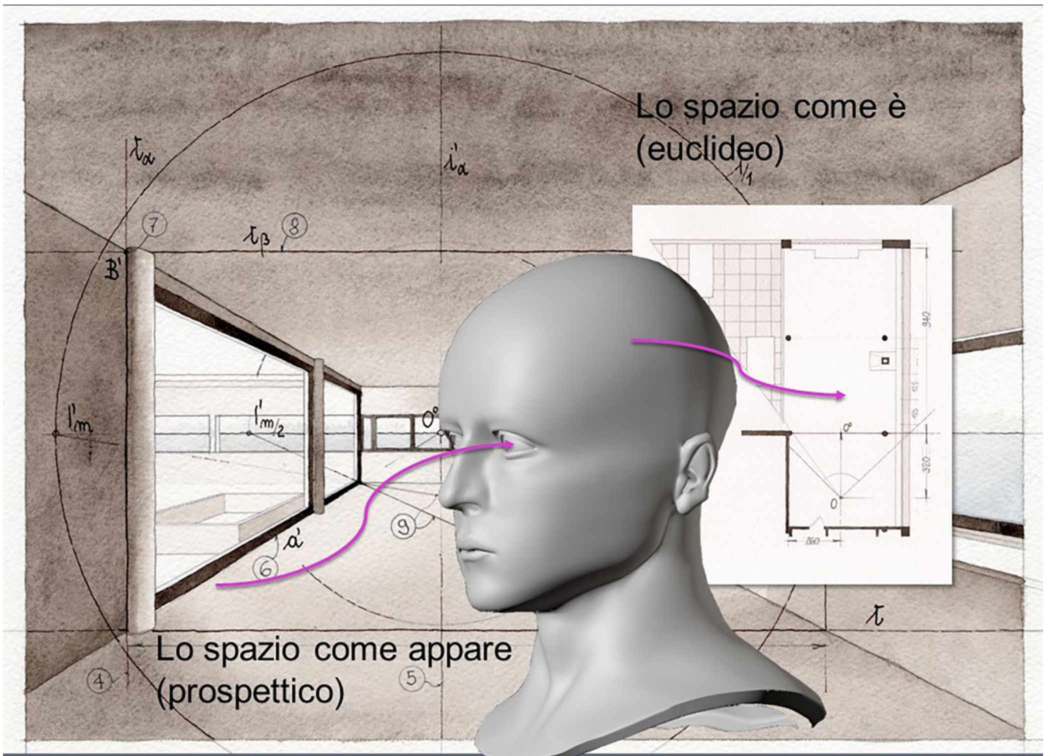


Fig. 1. Lo schema descrive il passaggio mentale dallo spazio come viene percepito allo spazio come viene pensato.

Dallo spazio prospettico allo spazio euclideo

Vorrei ora soffermarmi su un possibile modello della transizione che ci interessa. Si tratta di un modello geometrico che ha una lunga e affascinante storia, il cui esordio si potrebbe collocare nel 1480 e precisamente nell'abside della Chiesa di Santa Maria presso San Satiro di Bramante, mentre la tappa fondamentale che trasforma quella straordinaria intuizione in una teoria scientifica vede la luce nel 1822 con il trattato di Jean Victor Poncelet [Poncelet 1822]. Durante questo lasso di tempo e oltre, tre linee di ricerca artistica e matematica si sono evolute in parallelo, spesso scambiandosi risultati e suggestioni (tab. 1). Si tratta della prospettiva scenografica, della prospettiva rilievo e della omologia solida: tutte concorrono a formare, oggi, la teoria e le applicazioni della prospettiva solida. Marta Salvatore ha approfondito questo argomento.
La costruzione alla quale ho accennato è formata da un centro di proiezione *O* e da quattro piani paralleli tra loro (fig. 2) che chiamiamo:
π piano delle fughe, che corrisponde al piano all'infinito dello spazio euclideo;
τ piano delle tracce, luogo di punti uniti;
ω piano principale, che comprende il centro, luogo di rette unite;
α piano anteriore o delle sparizioni, che corrisponde al piano all'infinito dello spazio prospettico.
Sicuramente riconoscerete in queste denominazioni alcuni termini noti della prospettiva, altri invece, come il piano delle sparizioni, sono poco note, questa in particolare è di Carl Theodor Anger, un astronomo tedesco che si è occupato del tema subito dopo Poncelet, nel 1834.
Consideriamo ora una retta *r* orizzontale dello spazio euclideo e vediamo come la macchina geometrica che ho descritto ne costruisce la prospettiva solida:
- si conduce per il centro di proiezione *O* una retta parallela a *r* fino a incontrare il piano delle fughe nel punto *I'*;
- si costruisce la retta che passa per il punto *T* che *r* ha in comune con il piano delle tracce e per il punto *I'*;
- la retta *TI'* è *r'*, la prospettiva solida della retta *r*.
Infine, consideriamo alcuni punti della retta *r*, costruendone la prospettiva per mezzo di rette proiettanti:

	Prospettiva scenografica	Prospettiva-rilievo	Omologia solida
1600	Guidobaldo del Monte [pp. 283–310]		
1628	Ludovico Cardi detto il Cigoli		
1636	Niccolò Sabbattini		
1665		Abraham Bosse [pp. 114–117]	
1758	Ennemond Alexandre Petitot [pp. 14–16]	Ennemond Alexandre Petitot [pp. 16–20]	
1798		Johann Adam Breysig	
1822			Jean Victor Poncelet [pp. 369–416]
1834			Carl Theodor Anger
1853	Michel Chasles		
1859	Jules de La Gournerie [pp. 241–270]	Jules de La Gournerie [pp. 225–240]	
1860		Noël-Germinal Poudra	
1869		Rudolf Staudigl	
1871			Wilhelm Fiedler [pp. 121–138]
1883		Ludwig Burmester	
1884			Christian Wiener [pp. 645–649]
1887		Christian Wiener [pp. 468–477]	
1888			Gustav von Peschka [pp. 571–574]
1888			Ferdinando Aschieri [pp. 314–335]
1895			Ferdinando Aschieri [pp. 66–137]
1913	Louis Cloquet [pp. 136–150]	Louis Cloquet [pp. 51–71]	
1914		Ernst Johann Adolph Stuhlmann	
1921	Jules Jean Pillet [pp. 267–278]		
1925			Gino Fano [pp. 215–216]
1927		Georg Scheffers [pp. 424–430]	
1984	Bruno Mello		
2019		Alberto Sdegno [pp. 1375–1384]	

Tab. 1. La cronologia della prospettiva solida divisa nelle sue componenti. In questa cronologia sono presenti solo alcuni dei numerosi autori di opere dedicate ai tre argomenti principali della prospettiva solida. Sono ripetuti i nomi degli Autori che hanno trattato più argomenti in diversi capitoli. I riferimenti sono nella bibliografia a corredo del testo.

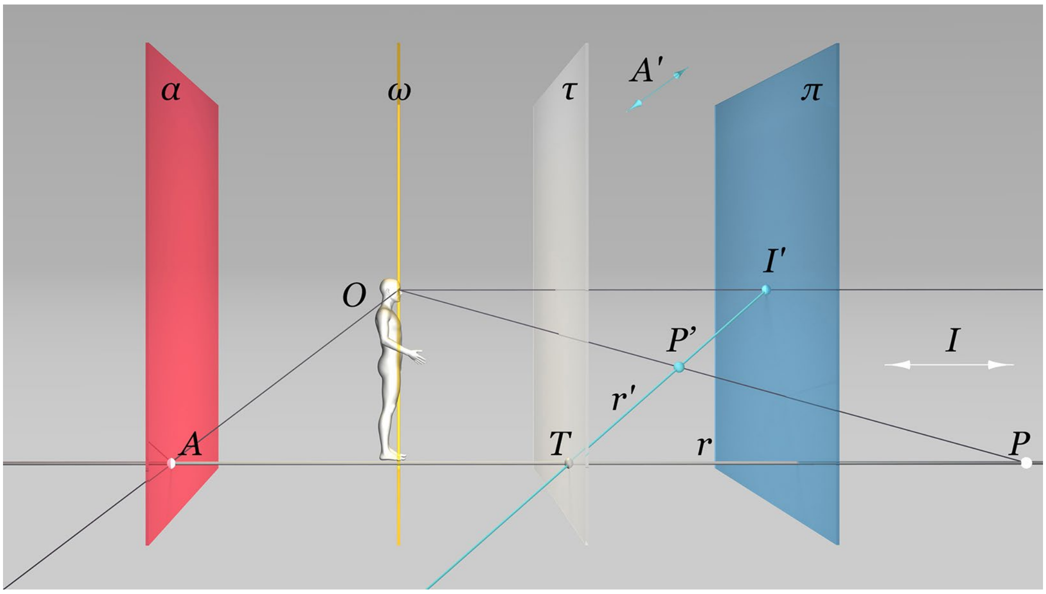


Fig. 2. La costruzione geometrica della transizione dallo spazio euclideo allo spazio prospettico e viceversa.

- un punto generico *P* ha come prospettiva *P'*;
- il punto *T* ha come prospettiva sé stesso e perciò si dice "unito";
- la prospettiva del punto *A*, che sta sul piano α scompare, perché la retta che la proietta è parallela alla retta che dovrebbe sostenerla, cioè *r'*.

Fermiamoci pure qui: non chiedo altri sforzi alla vostra attenzione. Tutto il resto lo farà il computer grazie alle semplici formule che descrivono la transizione dallo spazio euclideo allo spazio prospettico, e viceversa.

La continuità della transizione

Il presupposto fondamentale della transizione dallo spazio prospettico allo spazio euclideo e viceversa è la continuità. Ciò significa che gli infiniti punti di uno spazio corrispondono senza eccezioni a punti dell'altro spazio in una relazione biunivoca, cioè a due sensi.
Tuttavia, per semplificare la nostra analisi conviene dividere lo spazio euclideo in tre zone alle quali corrispondono altrettante zone dello spazio prospettico.
La prima di queste zone dello spazio euclideo è quella che va dal piano all'infinito euclideo al piano principale, cioè all'osservatore. In questo semispazio si sviluppa la *transizione teatrale* (fig. 3).
La seconda zona va dal piano principale al piano anteriore o delle sparizioni; in questa zona si sviluppa la *transizione di Ames* (fig. 4).
Infine la terza zona dello spazio euclideo è quella in cui si sviluppa la *transizione inversa* e va dal piano delle sparizioni al piano all'infinito prospettico (fig. 5).
Esamineremo ora, più da vicino, queste transizioni, cercando di mettere in luce i rapporti che ciascuna di esse ha con la storia, più precisamente con la storia dell'arte e della scienza.

La prospettiva teatrale
Questa transizione trasforma un qualsiasi spazio euclideo nella corrispondente prospettiva a tre dimensioni, perciò è tipica delle scene teatrali. Bisognerebbe, però distinguere due casi:
- quello in cui l'oggetto euclideo è tutto al di là del piano delle tracce (fig. 6);
- e quello in cui invade lo spazio compreso tra il piano delle tracce e il piano principale (fig. 7).

Il primo caso è tipico delle scene, il secondo è più frequente in architettura.
Infatti l'origine storica di questa transizione si può ricercare nel trattato di Guidobaldo del Monte che per primo intuisce nello spazio scenico una contrazione dello spazio euclideo e insegna a realizzare la giusta convergenza delle rette che rappresentano le perpendicolari al boccascena.
Tuttavia bisogna fuggire dalla tentazione di considerare la nostra prospettiva solida come

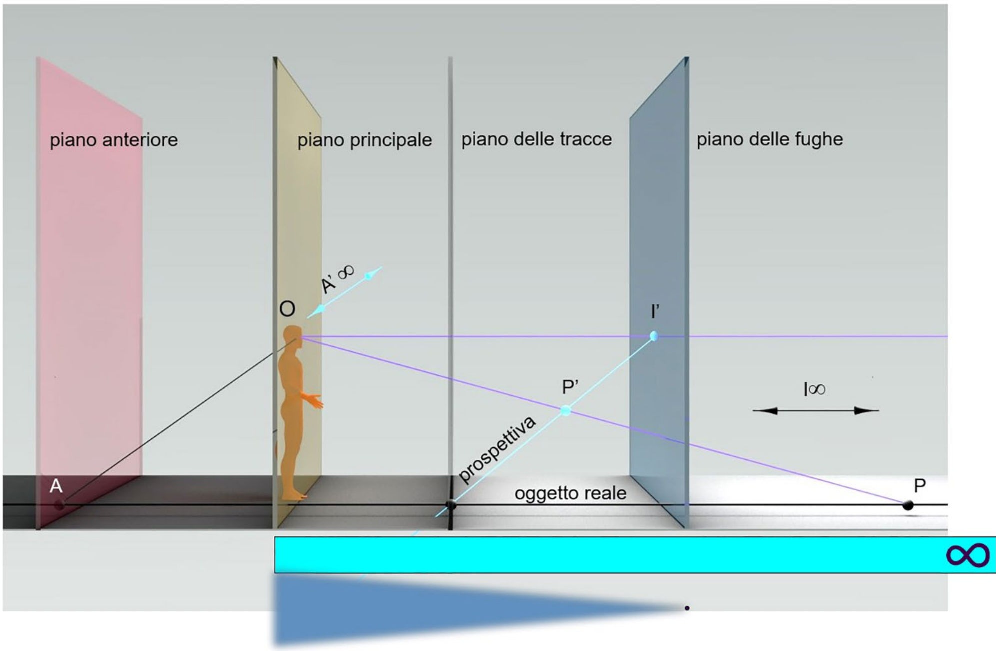


Fig. 3. La transizione teatrale.

una evoluzione della teoria di Guidobaldo perché la prospettiva scenografica e la scenotecnica si sviluppano autonomamente, dopo Guidobaldo, fino ai nostri giorni.
Per quanto riguarda lo spazio teatrale, o prospettiva-rilievo, il primo riferimento è senza dubbio il trattato di Johann Adam Breysig [Breysig 1798] che precede Poncelet (fig. 8).
Mentre lo spazio teatrale avanzato, invece, figura nel trattato di Rudolf Staudigl [Staudigl 1868] di settant'anni più tardo.

La prospettiva di Ames o divergente

Quando un oggetto descritto nello spazio euclideo invade la zona compresa tra il piano principale e il piano anteriore o delle sparizioni, la prospettiva si espande ulteriormente.
L'aspetto sorprendente di questa prospettiva è che può essere osservata guardando all'indietro.
Questa osservazione dello spazio posto alle spalle dell'osservatore è impensabile nella prospettiva piana, mentre è agevole nella prospettiva solida proprio grazie alla sua natura tridimensionale (fig. 9).

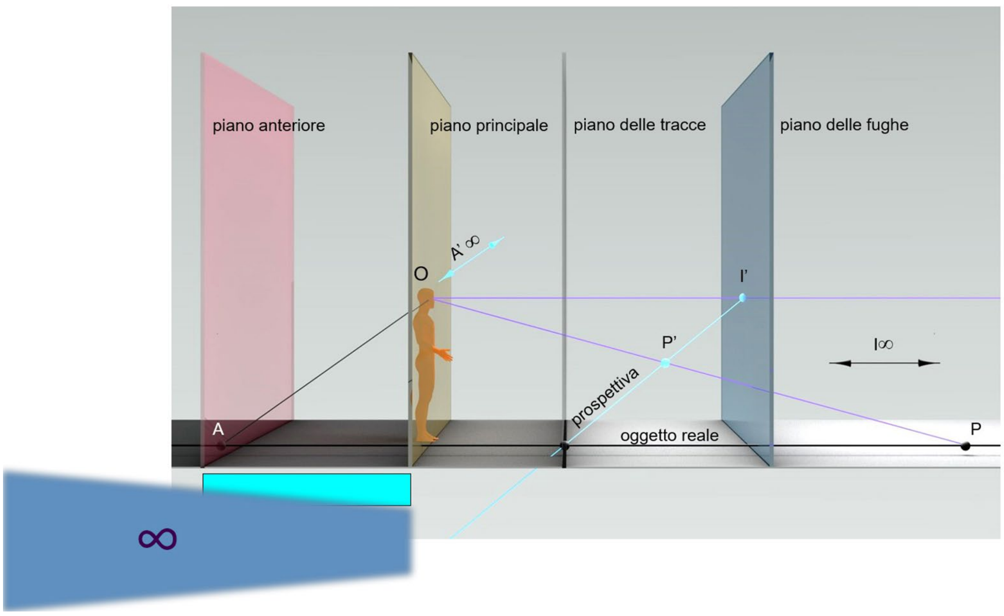


Fig. 4. La transizione di Ames.

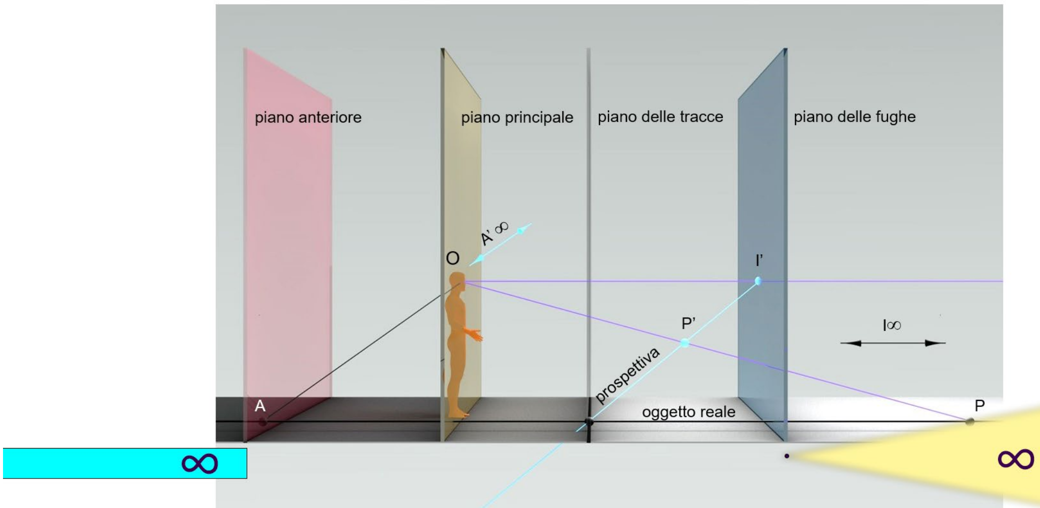


Fig. 5. La transizione inversa.

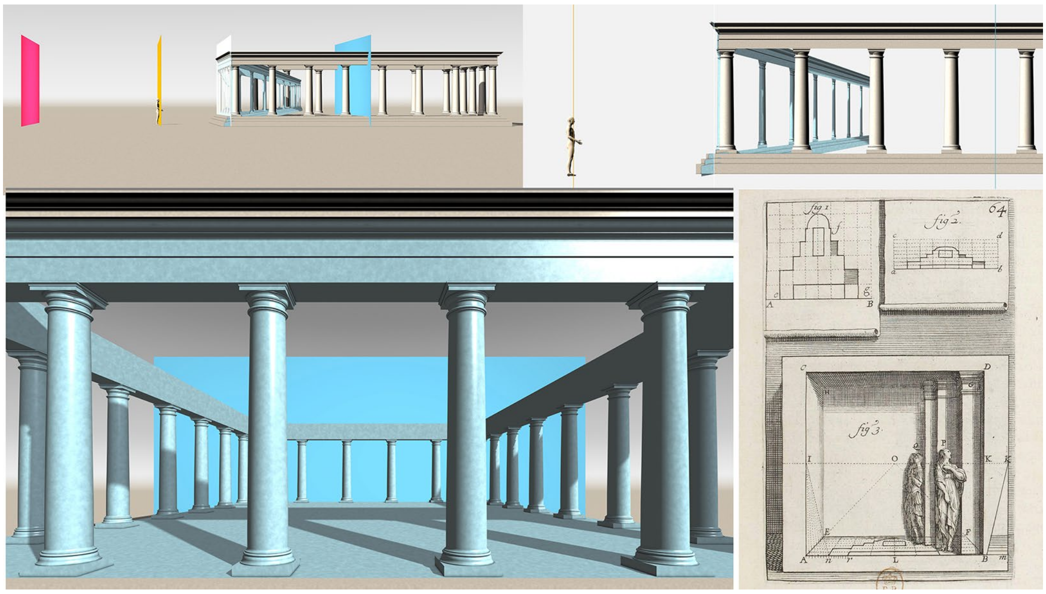


Fig. 6. La transizione dallo spazio euclideo allo spazio teatrale e una tavola da Breysig (1798).

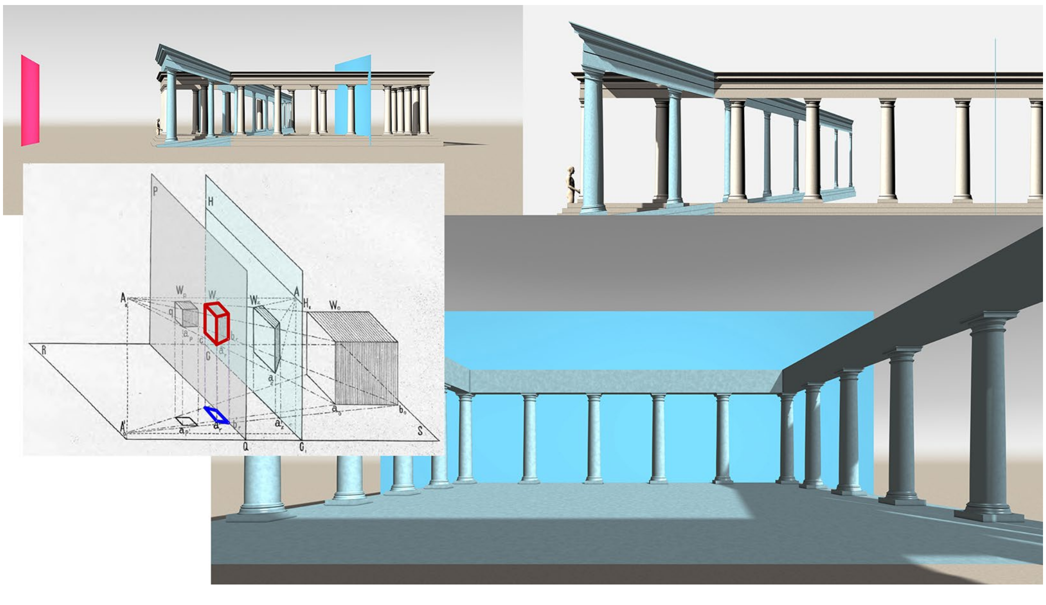


Fig. 7. La transizione dallo spazio euclideo allo spazio teatrale avanzato e una tavola da Abraham Bosse (1665).

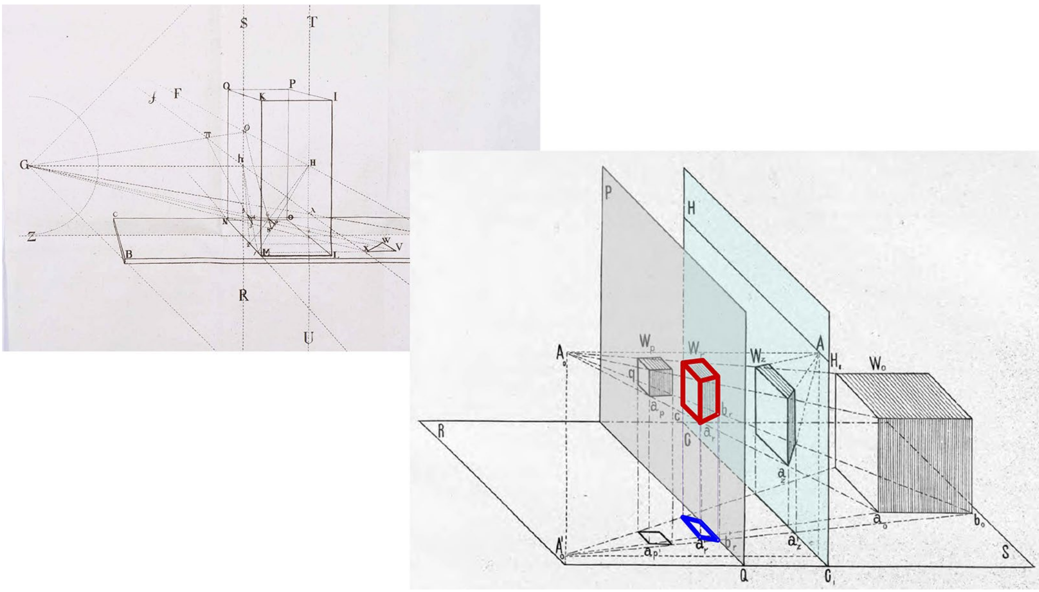


Fig. 8. La transizione dallo spazio euclideo allo spazio teatrale nella concezione di Breysig (1798) e Staudigl (1868). Il primo contiene la prospettiva rigidamente all'interno di un volume che rappresenta i limiti tridimensionali del rilievo, come la cornice di un quadro contiene la prospettiva piana. Il secondo costruisce la prospettiva tridimensionale anche davanti al piano delle tracce, avanzando verso l'osservatore.

Se l'oggetto è obliquo rispetto al piano principale, come avviene in una prospettiva d'angolo, la prospettiva assume la conformazione che è tipica della camera di Ames. Intendo dire che se due personaggi di eguale statura, che si muovono nello spazio euclideo, si posizionano accanto a due colonne, si può osservare il noto paradosso (fig. 10).
Questa circostanza ci ha indotto a dedicare il nome di questa transizione ad Adelbert Ames jr. (1880-1955) per l'importanza che i suoi studi rivestono nella comprensione del fenomeno della visione e perciò anche della prospettiva.
Leonardo Baglioni ha approfondito questo argomento.

La prospettiva inversa

La transizione che segue ha un interesse meramente teorico perché non corrisponde ad alcuna esperienza visiva. L'oggetto euclideo attraversa il piano delle sparizioni e si scompone in due parti (fig. 11):
- una porzione si trova alle spalle dell'osservatore, ma è incompleta, perché al di là del piano anteriore (in rosso nella figura) letteralmente scompare;
- l'altra parte si trova davanti all'osservatore, anch'essa incompleta, ma capovolta, come

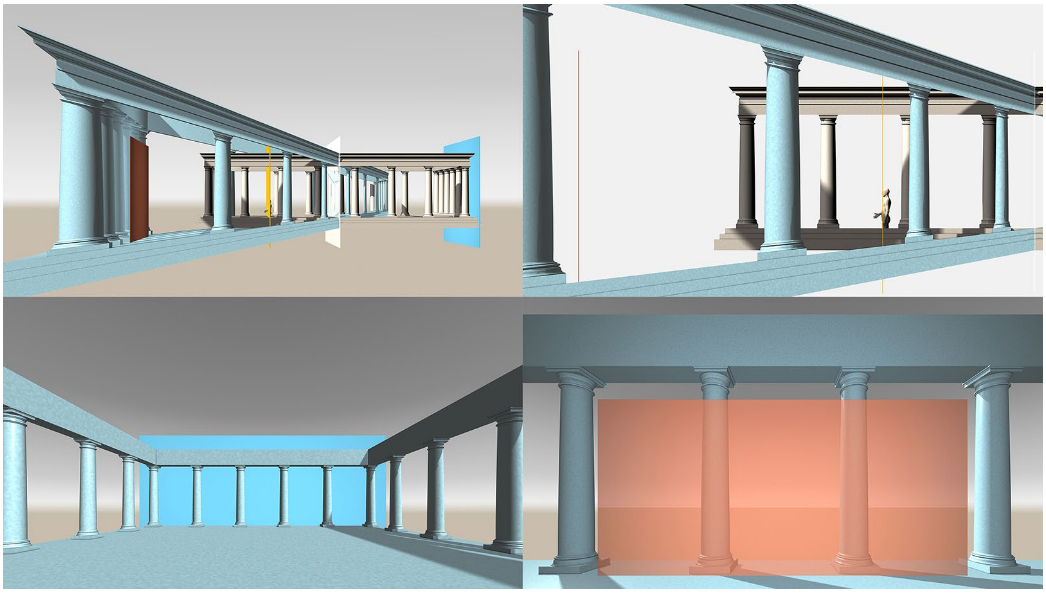


Fig. 9. La transizione dallo spazio euclideo allo spazio di Ames frontale.

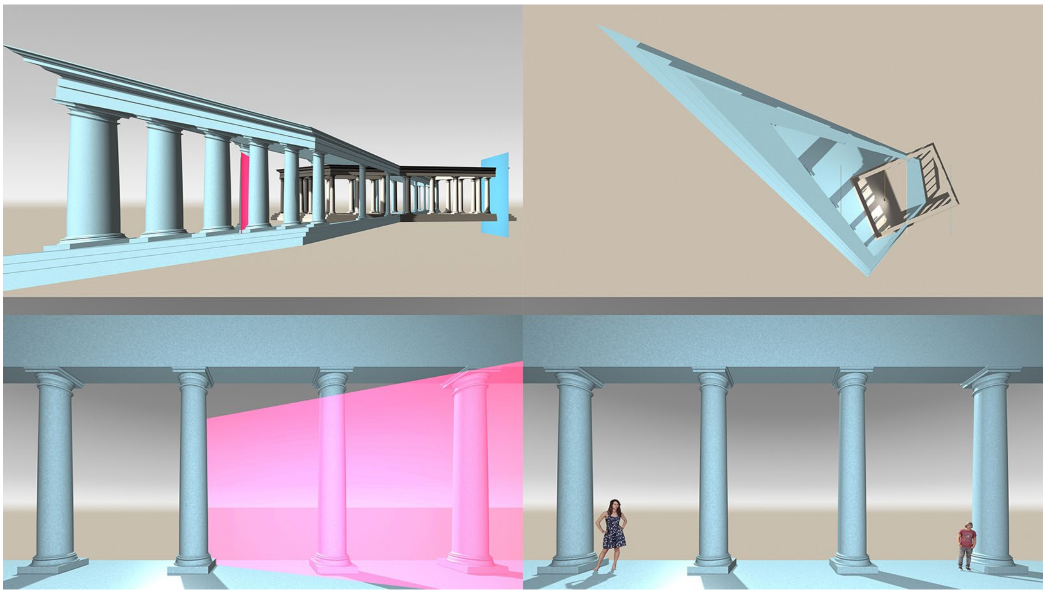


Fig. 10. La transizione dallo spazio euclideo allo spazio di Ames d'angolo.

avviene nella prospettiva piana quando si rappresenta qualcosa che si trova alle spalle dell'osservatore come, per esempio, una sorgente di luce.

La prospettiva solida come "teoria generale dell'arte di modellare"

Wilhelm Fiedler, nel 1871, ha descritto la prospettiva solida come la teoria generale dell'arte di modellare [Fiedler 1871, p. 121].
In questa sala, presumo, saranno presentati molti disegni, molti modelli, molte rappresentazioni. Ebbene, sono tutte figlie della macchina geometrica che ho mostrato. Un solo carattere metrico deve essere fissato: la distanza *d* tra il piano delle fughe e il piano delle tracce deve essere eguale alla distanza *d* tra il piano principale e il piano delle sparizioni. Ogni variazione nella posizione dei quattro piani paralleli è possibile, per esempio:

- il piano delle tracce può coincidere con il piano delle fughe, condizione che porta il piano delle sparizioni a coincidere con il piano principale: in tal caso la prospettiva solida degenera in una prospettiva piana;

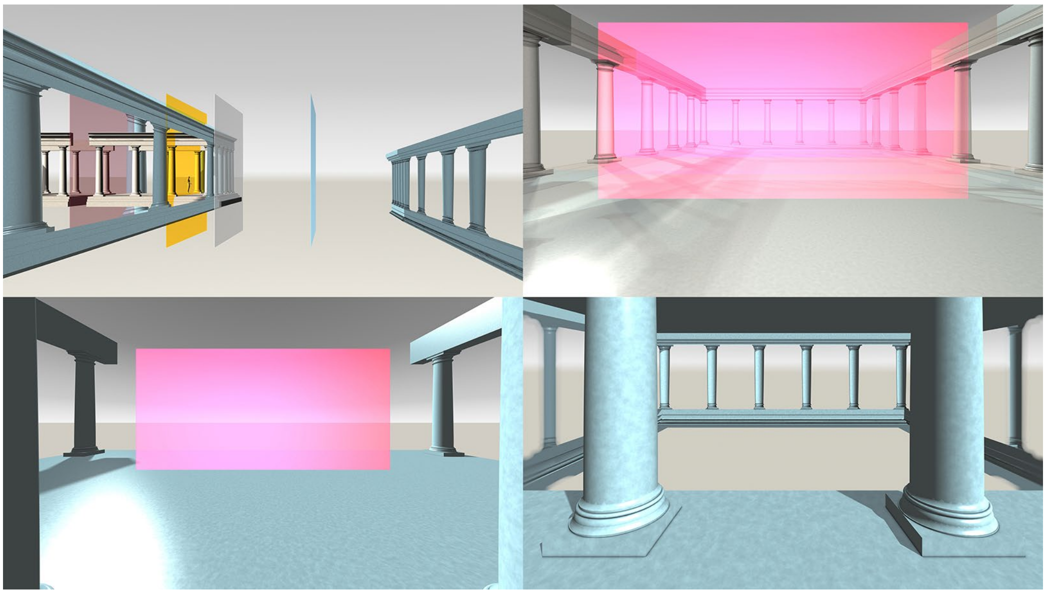


Fig. 11. La transizione dallo spazio euclideo allo spazio prospettico inverso. Nella figura in alto a destra è stato visualizzato anche il modello euclideo per dimostrare come sia rispettata, in ogni caso, la continuità dei due spazi, ma la prospettiva scompare nel momento in cui l'oggetto euclideo supera il piano rosso, per ricomparire dalla parte opposta, a rovescio.

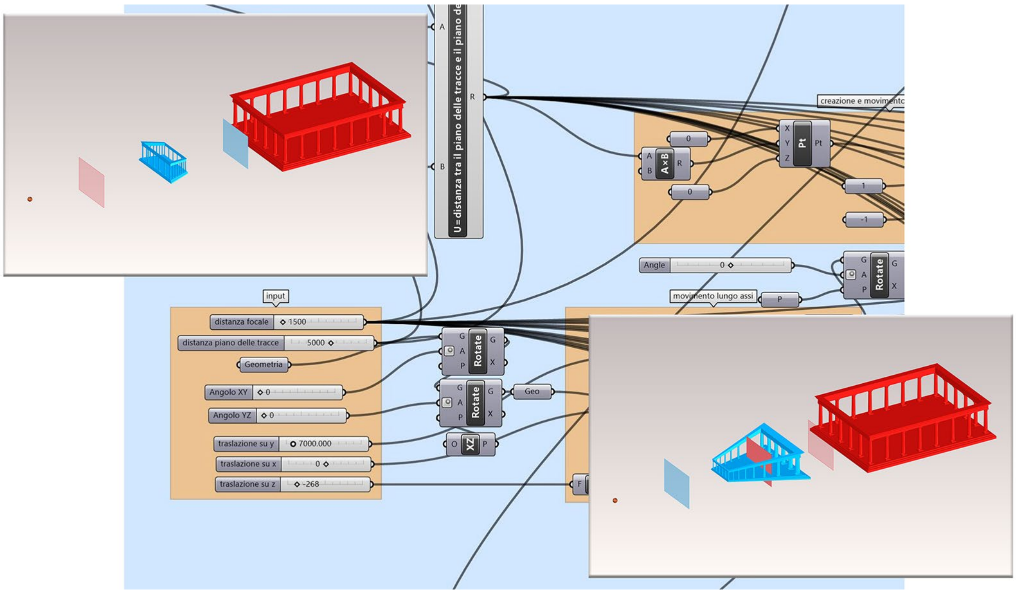


Fig. 12. Il modello matematico, che permette di esplorare qualsiasi configurazione della prospettiva solida in tempo reale, è stato realizzato da Federico Fallavollita.

- il centro di proiezione con il piano principale possono traslare allontanandosi indefinitamente dall'oggetto rappresentato, in tal caso la prospettiva solida si trasforma in una prospettiva parallela (piana o solida);
- il piano delle fughe può traslare all'infinito, producendo effetti analoghi a quelli della transizione precedente;
- i piani possono scambiarsi nell'ordine e cioè assumere la posizione l'uno dell'altro;
- il piano delle fughe e il piano delle sparizioni possono coincidere, generando una involuzione.

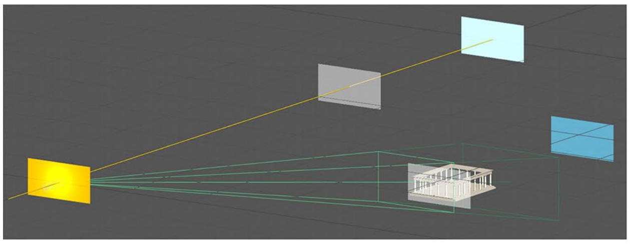
Noi possiamo esplorare e studiare nel dettaglio tutte queste transizioni grazie a un potente modello interattivo sviluppato da Federico Fallavollita (fig. 12).
Consideriamo due esempi.

La prospettiva solida parallela
Se poniamo il piano delle fughe a grande distanza dall'osservatore in modo da rendere impercettibile la convergenza prospettica di rette che sono parallele nello spazio euclideo, è possibile ottenere una prospettiva parallela, vale a dire una assonometria solida, ortogonale oppure obliqua (fig. 13). Sulle applicazioni all'arte e all'indagine teorica di queste rappresentazioni aveva scritto, già nel 2019, Alberto Sdegno [Sdegno 2019, pp. 1375-1384]. Alla luce del suo lavoro queste transizioni assumono una precisa collocazione storica.

L'involuzione
Se facciamo coincidere il piano delle fughe con il piano delle sparizioni, la transizione diventa involutoria. Ciò significa che, dato un oggetto euclideo si genera una prospettiva solida, ma se quella stessa prospettiva solida viene assunta come oggetto euclideo e se ne genera la prospettiva, si ottiene un oggetto identico all'oggetto euclideo per primo considerato e con quello coincidente (fig. 14). Quindi la prospettiva e la realtà si scambiano i rispettivi ruoli. L'involuzione è un concetto sfuggente, ma questa applicazione lo rende evidente.

Le configurazioni della prospettiva solida

Federico Fallavollita ha osservato come sia possibile generare una prospettiva solida anche modificando la disposizione dei quattro piani che ho presentato all'inizio (fig. 2). L'unico vincolo da rispettare, come ho detto, è l'eguaglianza delle distanze che separano il piano delle fughe dal piano delle tracce, il piano principale dal piano anteriore, cioè: ($d(\pi - \tau) = d(\omega - \alpha)$), indipendentemente dal segno di d.



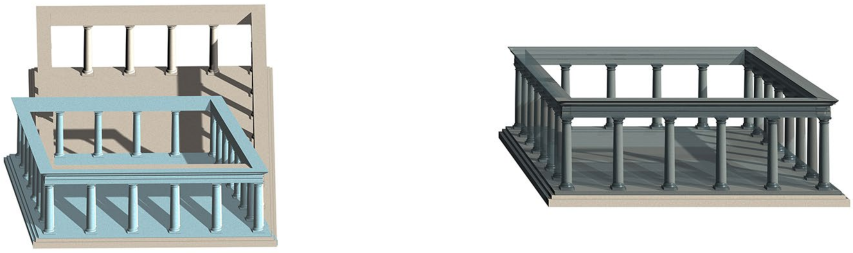


Fig. 13. Una prospettiva solida cavaliera: la distanza *f* tra l'osservatore e il piano delle fughe deve essere molto grande in rapporto alle dimensioni dell'oggetto rappresentato. La distanza *d* tra il piano delle fughe e il piano delle tracce controlla il rapporto di accorciamento.

Le disposizioni dei quattro elementi $(\alpha, \omega, \tau, \pi)$ opportunamente ordinate, sono:
α (α,ω,τ,π); (α,ω,π,τ); (α,τ,ω,π); (α,τ,π,ω); (α,π,ω,τ); (α,π,τ,ω);
ω (ω,α,τ,π); (ω,α,π,τ); (ω,τ,α,π); (ω,τ,π,α); (ω,π,α,τ); (ω,π,τ,α);
τ (τ,α,ω,π); (τ,α,π,ω); (τ,ω,α,π); (τ,ω,π,α); (τ,π,α,ω); (τ,π,ω,α);
π (π,α,ω,τ); (π,α,τ,ω); (π,ω,α,τ); (π,ω,τ,α); (π,τ,α,ω); (π,τ,ω,α);
Tuttavia si debbono escludere le disposizioni che non verificano l'equazione suddetta ($d(\pi - \tau) = d(\omega - \alpha)$), come per esempio la quaterna $(\alpha, \tau, \pi, \omega)$ nella quale la distanza (τ, π) è compresa nella distanza $(\omega - \alpha)$ e perciò è più piccola (a meno di coincidenze che riconducono ai casi della prospettiva piana o dell'involuzione). Infine si debbono escludere le disposizioni che invertono l'ordine interno di una delle coppie (α, ω) e (τ, π) perché in tal caso la prospettiva di una retta, come *r'(T I')* e la retta che ne proietta la direzione come AO non sarebbero parallele. Dunque è possibile la disposizione $(\alpha, \omega, \tau, \pi)$ e anche la disposizione $(\omega, \alpha, \pi, \tau)$, ma non è possibile $(\alpha, \omega, \pi, \tau)$ perché sovverte l'ordine della coppia (π, τ), rispetto alla prima (α, ω).
Restano perciò otto disposizioni (fig. 15):
α (α,ω,τ,π); (α,τ,ω,π);

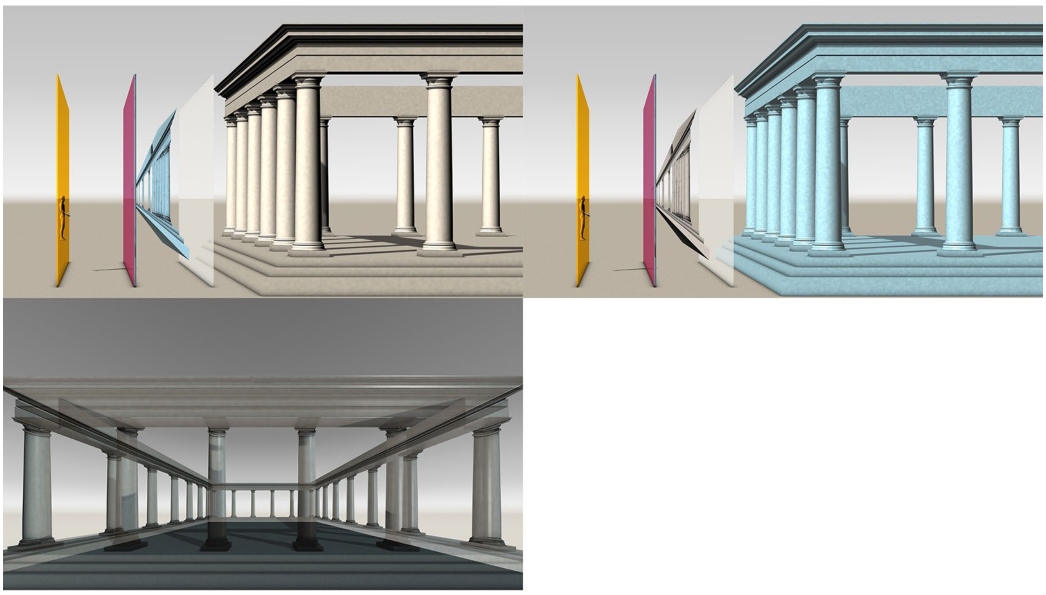


Fig. 14. Una prospettiva solida involutoria.

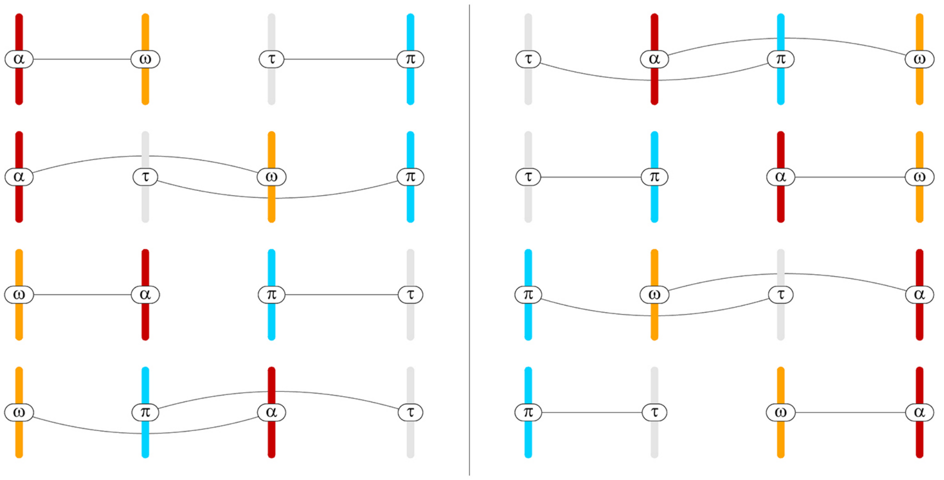


Fig. 15. Questo schema raccoglie le possibili disposizioni dei quattro piani che strutturano la corrispondenza tra spazio euclideo e spazio prospettico.

$\omega\ (\omega,\alpha,\pi,\tau);\ (\omega,\pi,\alpha,\tau);$
$\tau\ (\tau,\alpha,\pi,\omega);\ (\tau,\pi,\alpha,\omega);$
$\pi\ (\pi,\omega,\tau,\alpha);\ (\pi,\tau,\omega,\alpha);$
A queste si aggiungono le posizioni già discusse, che sono specializzazioni del caso normale:
prospettiva piana ($\alpha \equiv \omega$, $\tau \equiv \pi$)
prospettiva involutoria ($\alpha \equiv \pi$, $\omega \equiv \tau$)
per un totale di dodici possibili disposizioni. Tra queste figurano alcune configurazioni simmetriche, come per esempio la prima e l'ultima dell'elenco che precede. Queste generano comunque prospettive diverse.

Una importante questione linguistica

Ho accennato ai problemi che derivano dalla mancanza di un dizionario condiviso almeno dalle lingue europee. Questa lacuna coinvolge in generale la geometria descrittiva ed è all'origine di molti equivoci, come quello che riguarda in particolare la prospettiva-rilievo, confusa ora con la scenografia, ora con l'omologia solida. Ma entrando nel dettaglio dei termini usati per indicare le componenti della prospettiva solida la confusione aumenta. Un solo esempio tra i molti possibili: chi fa riferimento alla prospettiva piana, considerando quella in rilievo come una estensione della prima, chiama "piano delle fughe" e "piano anteriore" i due piani limite della relazione tra i due spazi euclideo e prospettico. Gli autori di lingua tedesca come Staudigl, Burmester e Stuhlmann concordemente utilizzano il prefisso *Verschwindung* che equivale all'inglese *vanishing* (scomparsa) per i punti del piano anteriore e il prefisso *Flucht* (fuga) per i punti del piano delle fughe.
A ben vedere, però, nessuno di questi termini rende bene la transizione che vogliono descrivere e cioè la corrispondenza tra piani accessibili e piani all'infinito dei due spazi in relazione proiettiva.
Occorre dunque una ricerca sistematica sui termini utilizzati per arrivare a una proposta condivisa che renda più agevole lo scambio delle idee su questa materia.

Conclusioni

C'è un aspetto di questo studio che per ragioni di tempo non ho potuto approfondire: è quello che riguarda i rapporti tra arte e scienza. Ma è forse l'aspetto più coinvolgente di questi studi. E sempre, senza eccezioni, è l'arte a suggerire intuizioni e stimoli alla scienza. Alcuni esempi, tra gli innumerevoli che si possono citare ma che ognuno di noi può ritrovare scavando nella propria memoria.
Bramante (1480) precede di tre secoli la prima trattazione teorica, degna di que-

sto nome, della prospettiva-rilievo e cioè quella di Johann Adam Breysig (1798). Nella edizione del 1822 dell'opera di Jean Victor Poncelet che ha fondato la geometria proiettiva, la parola *perspective* usata nel senso che aveva già nel Rinascimento, ricorre 155 volte e ancora altre 144 nella edizione in due volumi del 1865: *Dans ce qui suit, nous donnerons presque toujours au mot de projection le même sens que celui de perspective; ainsi la projection sera conique ou centrale* [Poncelet 1822, p. 3].

Infine, "l'arte di modellare" è esplicitamente richiamata nella teoria della collineazione centrale degli spazi di Wilhem Fiedler: *Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierung-Methoden* (La collineazione centrale dei sistemi spaziali come teoria dei metodi di modellazione) [Fiedler 1871, p. 121].

L'analisi dello spazio prospettico e delle sue relazioni con lo spazio euclideo, che abbiamo sopra brevemente descritto, ha dunque un rapporto diretto con le nostre attività di architetti e di studiosi del disegno, vuoi sotto il profilo scientifico, vuoi sotto il profilo artistico e applicativo.

E giustifica l'adozione del termine "prospettiva solida" (*solid perspective*) in luogo di "prospettiva-rilievo" (*relief-perspective*) o anche "omologia solida" (*solid homology*): perché la prospettiva-rilievo guarda lo spazio prospettico nella sola ed esclusiva direzione che procede davanti all'osservatore, l'omologia solida vede l'intero spazio ma esclude l'uomo, mentre la prospettiva solida lo mette al centro, libero di volgere ovunque lo sguardo e lo rende capace di contemplare l'infinito.

Riferimenti bibliografici

Anger C.T. (1834). *Analytische Darstellung der Basrelief - Perspective*. Danzig: Sam. Gerhard.

Aschieri F. (1888). *Geometria projettiva. Lezioni di Ferdinando Aschieri, professore nella R. Università di Pavia*. Milano: Ulrico Hoepli.

Aschieri F. (1895). *Geometria projettiva dello spazio*. Milano: Ulrico Hoepli.

Baglioni L., Fallavollita F. (2021). Generative Models for Relief Perspective Architectures. In *Nexus Network Journal,* n. 23, pp. 879-898.

Bosse A. (1665). *Traité des pratiques geometrales et perspectives, enseignées dans l'Academie royale de la peinture et sculpture. Par A. Bosse. Tres utiles pour ceux qui desirent exceller en ces arts, et autres, où il faut employer la regle et le compas*. Paris: Chez l'Auteur.

Breysig J.A. (1798). *Versuch einer Erläuterung der Reliefsperspektive, zugleich für Mahler eingerichtet*. Magdeburg: Georg Christian Steil.

Burmester L. (1883). *Grundzüge der Reliefperspective nebst Anwendung zur Herstel- lung reliefperspectivischer Modelle: Als Ergänzung zum Perspectiv-Unterricht an Kunstakademien, Kunstgewerbeschulen und technischen Lehranstalten*. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Cardi L. (detto „il Cigoli") (1559). *Trattato pratico di prospettiva di Ludovico Cardi detto "il Cigoli": manoscritto Ms 2660A del Gabinetto dei disegni e delle stampe degli Uffizi*. [A cura di R. Profumo (1992). Roma: Bonsignori].

Chasles M. (1860). Rapport fait à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 12 décembre 1853, sur un ouvrage intitulé: Traité de Perspective-relief, avec les applications à la construction des bas-reliefs, aux décorations théâtrales et à l'architecture; par M. Poudra, ancien élève de l'École Polytechnique officier supérieur en retriate au corps d'état-major. In *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, pp. 880–901.

Cloquet L. (1913). *Traité de perspective pittoresque - Perspective de la couleur. Vol. II, Perspective de la couleur.* Paris: H. Laurens.

Cloquet L. (1913). *Traité de perspective pittoresque - Perspective du relief. Vol. III, Perspective du relief.* Paris: H. Laurens.

De La Gournerie J. (1859). *Traité de Perspective linéaire contenant les tracés pour les tableaux plans et courbes, les bas-reliefs et les décorations théatrales, avec une théorie des effets de perspective*. Paris: Dalmond et Dunod.

Fallavollita F. (2017). The Relief Perspective Camera. A Journey Into Deep Space. In Y. Yamaguchi, H. Suzuki, N. Ando (a cura di). *The 11th Asian Forum on Graphic Science (AFGS 2017)*. Tokyo: Japan Society for Graphic Science.

Fano G. (1925). *Lezioni di geometria descrittiva date nel R. Politecnico di Torino*. Torino: Paravia.

Fiedler W. (1871). *Die Darstellende Geometrie. ein Grundriss für Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbststudium*. Leipzig: G. Teubner.

Guidobaldo del Monte (1600). *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis Perspectivæ libri sex*. Pisauri.

Ittelson W.H. (1952). *The Ames Demonstrations in Perception, a Guide to their Construction and Use*. New Jersey: Princeton University Press.

Lucrezio. *Della Natura*. [A cura di A. Fellin (1963). Torino: UTET].

Mello B. (1984). *Trattato di scenotecnica. Prospettiva teatrale, restituzioni, pratica nella pittura e nella confezione delle scene, macchineria, trucchi di palcoscenico, materiale elettrico, luministica e illuminotecnica, impianto elettronico*. Görlich. Novara: Istituto Geografico De Agostini.

Peschka von G.A. (1888). *Freie Perspektive [Centrale Projection]*. Vol. 1. Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlun.

Petitot E.A. (1758). *Raisonnement sur la perspective, Pour en faciliter l'usage aux Artistes - Ragionamento sopra la prospettiva, Per agevolarne l'uso a' Professori*. Parma: Chez Les Frères Faure Libraires.

Pillet J.J. (1921). *Traité de perspective linéaire précedé du Tracé des ombres usuelles (rayons a 45 degrées) et du Rendu dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines*. Paris: Blanchard.

Poncelet J.V. (1822). *Traité des propriétés projectives des figures; ouvrage utile a ceux qui s'occupent des application de la Géométrie Descriptive et d'operations géométriques sur le terrain; par J.V. Poncelet, Ancien Elève de l'école Polytechnique, Capitaine au corps royal du Génie, Membre de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Metz*. Paris: Bachelier.

Poudra N.G. (1860). *Traité de perspective-relief.* Paris: J. Corréard.

Sabbattini N. (1637). *Pratica di fabricar scene, e machine ne' teatri*. Pesaro: Pietro de' Paoli e Giovan Battista Giovannelli.

Scheffers G. (1927). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie. Vol. II. Zweiter band.* Berlin: Julius Springer.

Sdegno A. (2019). Modelli assonometrici per lo studio del disegno di architettura. In P. Belardi (a cura di). *Riflessioni, l'arte del disegno / il disegno dell'arte. Atti del 41° Convegno internazionale dei docenti delle discipline della rappresentazione*. Perugia, 19-21 settembre 2019, pp. 1375-1384. Roma: Gangemi.

Staudigl R. (1868). *Grundzüge der Reliefperspektive*. Wien: Seidel & Sohn.

Stuhlmann E.J.A. (1914). *Lehrbuch der Reliefperspektive*. Hamburg: Boysen & Maasch.

Wiener C. (1884). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie*. Vol. 1. Leipzig: B. G. Teubner.

Wiener C. (1887). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie*. Vol. 2. Leipzig: B. G. Teubner.

Autore
Riccardo Migliari, Professore Emerito, Sapienza Università di Roma, riccardo.migliari@gmail.com

Per citare questo capitolo: Migliari Riccardo (2023). La prospettiva solida come strumento di analisi delle transizioni tra lo spazio euclideo e lo spazio della rappresentazione/The solid perspective as a tool for analysing transitions between Euclidean space and representation space. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (a cura di). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 34-59.

 Isbn 9788835155119

Keynote Speaker

Solid Perspective as a Tool for Analysing Transitions between Euclidean Space and Representation Space

Riccardo Migliari

doi.org/10.3280/oa-1016-c279

Warnings
The term 'Ames chamber' indicates in the text the particular perspective that takes on the perceptual properties typical of the chamber invented by Adelbert Ames [Ittelson 1952] and his collaborators around the middle of the 20th century.

The short report that follows anticipates the outcomes of a study developed by Leonardo Baglioni, Federico Fallavollita, me and Marta Salvatore, which will be published in the near future. I immediately declare that most of the concepts that will be discussed below, and most of the roles played by geometrical entities, do not yet have an agreed denomination: *solid perspective*, for instance, is often confused with *relief perspective*. The study of history contributes to establish which terms can be more easily shared, in Italian as in English or in French languages; it must be pointed out that the richest source of data, for this subject, comes from German specialist literature.

From visual space to mental space

If we refer to 'transitions', the first example that comes to mind is the transition from vision to real space. We all perceive space as a perspective, but we know that the image of walls converging "at the indistinct vertex of a cone", that Lucretius named *angusta fastigia coni* [Lucrezio, p. 286], corresponds to walls running parallel in the Euclidean space (fig. 1).
In brief, we can say that in our daily experience there are two overlapping spaces: the visual, perspective space, and the mental, Euclidean space.
The transition from one space to the other is natural for us and we constantly shift between them, without even thinking about it; when we act as architects, then this transition becomes conscious, and we translate what we see and what we design into drawings and models.

From perspective space to Euclidean space

I wish to focus your attention on a model of the transition we are discussing of: it is a geometric model whose wide and fascinating history could be started in 1480, in the apse of

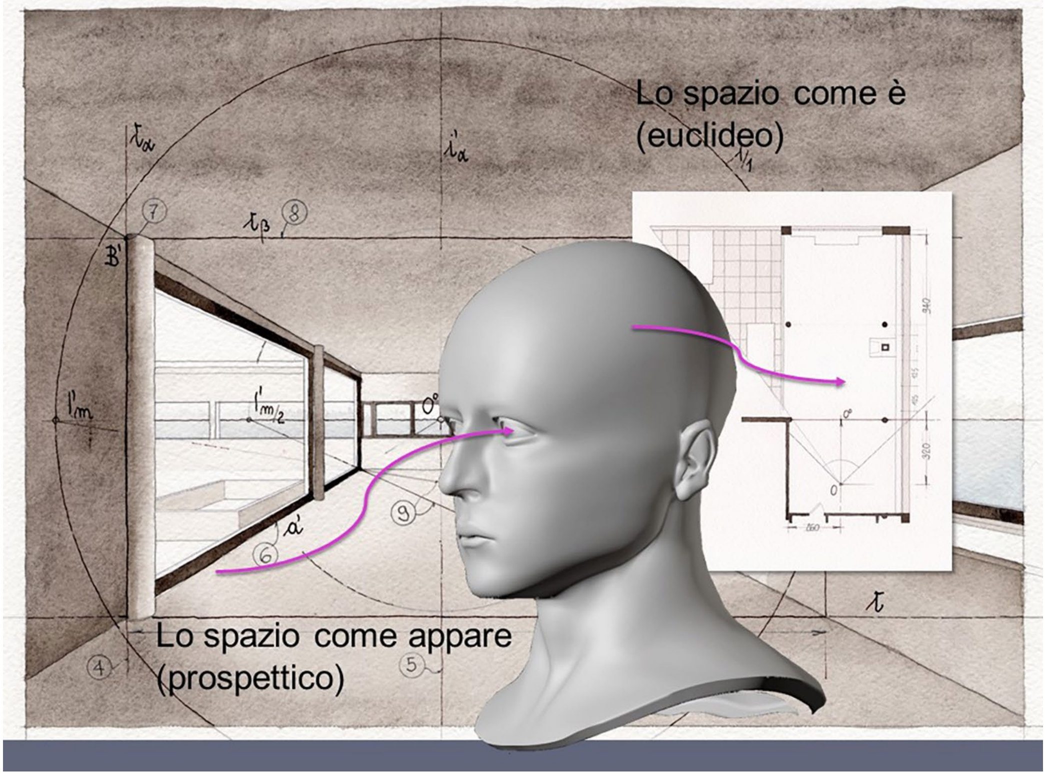


Fig. 1. The diagram describes the mental transition from space as perceived to space as thought.

the church of Santa Maria at San Satiro. The intuition of Bramante will become a scientific theory in 1822 thanks to the treatise of Jean Victor Poncelet [Poncelet 1822]. Three lines of artistic and mathematical research, that today gather in the theory and applications of solid perspective, evolved in parallel in this period and beyond, often exchanging results and suggestions (tab. 1): i) scenography perspective, ii) relief perspective, iii) solid homology. Marta Salvatore has deepened this topic.

The construction I refer to is formed by a projection center *O* and by four parallel planes (fig. 2) which are named:

π vanishing plane, i.e. the plane of vanishing points and lines, which corresponds to the plane at infinity in the Euclidean space;

τ plane of traces, locus of joined points;

ω principal plane, which includes the projection center *O*, locus of joined lines;

α 'fore' plane or 'plane of the disappearances', which corresponds to the plane at infinite of the perspective space.

Surely you will recognize in these denominations some well-known terms of perspective, while others, such as 'plane of disappearances', are not so common; we owe this locution to Carl Theodor Anger, a German astronomer who dealt with the subject soon after Poncelet, in 1834.

Let us now consider a horizontal straight line *r* in Euclidean space and see how the geometric device I have introduced models its solid perspective:

- the projection line, i.e. the line through *O*, parallel to *r*, intersects the vanishing plane π in the point *I'*;
- the line *r* intersects the plane of traces τ in the point *T*;
- the line *r'*, that runs through *T* and *I'*, is the solid perspective of *r*;

Given some points of *r*, their solid perspective will be calculated with projection lines:

- a generic point *P* has perspective *P'*;
- point *T* overlaps its perspective and is therefore named 'joined point';
- the perspective of point *A*, which lies on the fore plane (or plane of the disappearances) α, disappears, since its projection line is parallel to *r'*.

Let's stop here: I won't ask further efforts to your visual imagination. The computer will provide an effective visualization of these concepts, thanks to the simple formulas that translate the transition from Euclidean space to perspective space, and vice versa.

	Prospettiva scenografica	Prospettiva-rilievo	Omologia solida
1600	Guidobaldo del Monte [pp. 283–310]		
1628	Ludovico Cardi detto il Cigoli		
1636	Niccolò Sabbattini		
1665		Abraham Bosse [pp. 114–117]	
1758	Ennemond Alexandre Petitot [pp. 14–16]	Ennemond Alexandre Petitot [pp. 16–20]	
1798		Johann Adam Breysig	
1822			Jean Victor Poncelet [pp. 369–416]
1834			Carl Theodor Anger
1853	Michel Chasles		
1859	Jules de La Gournerie [pp. 241–270]	Jules de La Gournerie [pp. 225–240]	
1860		Noël-Germinal Poudra	
1869		Rudolf Staudigl	
1871			Wilhelm Fiedler [pp. 121–138]
1883		Ludwig Burmester	
1884			Christian Wiener [pp. 645–649]
1887		Christian Wiener [pp. 468–477]	
1888			Gustav von Peschka [pp. 571–574]
1888			Ferdinando Aschieri [pp. 314–335]
1895			Ferdinando Aschieri [pp. 66–137]
1913	Louis Cloquet [pp. 136–150]	Louis Cloquet [pp. 51–71]	
1914		Ernst Johann Adolph Stuhlmann	
1921	Jules Jean Pillet [pp. 267–278]		
1925			Gino Fano [pp. 215–216]
1927		Georg Scheffers [pp. 424–430]	
1984	Bruno Mello		
2019		Alberto Sdegno [pp. 1375–1384]	

Tab. 1. The chronology of solid perspective divided into its components. This chronology includes only a few of the many authors of works devoted to the three main topics of solid perspective. The names of authors who have dealt with several topics in different chapters are repeated. References are in the bibliography accompanying the text.

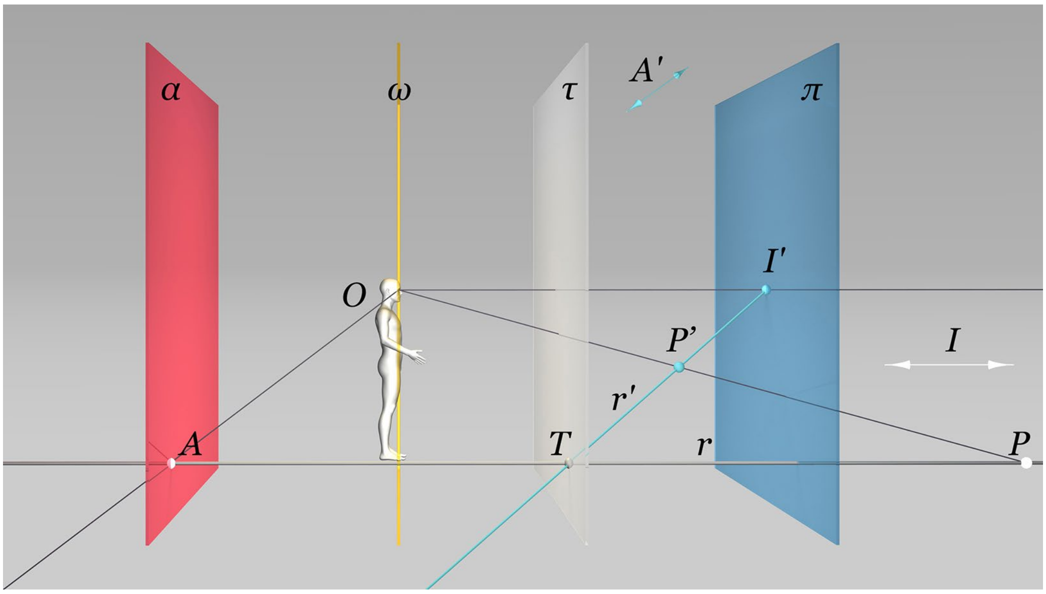


Fig. 2. The geometric construction of the transition from the Euclidean to the perspective space and vice versa.

The continuity of transition

Continuity is the fundamental assumption of the transition from perspective to Euclidean space and vice versa; this means that the points of one space correspond without exception to points of the other space in a bijective relationship, i.e. in two directions.
The division of the Euclidean space into three parts, corresponding to three parts of the perspective space, helps our discussion.
The first part of Euclidean space goes from the plane at infinite of the Euclidean space to the principal plane ω, that is, to the projection center. This is the part of the 'theatrical' transition (fig. 3).
The second part goes from principal plane ω to the plane of disappearances α; this is the part of the Ames transition (fig. 4).
Finally, the third part of the Euclidean space, where the inverse transition is performed, goes from the plane of disappearances α to the plane at infinite of the perspective space (fig. 5).
We will now examine these transitions more closely, trying to highlight their relationships with history, more precisely with the history of art and science.

Theatrical perspective

This transition transforms any Euclidean space into the corresponding three-dimensional perspective, typical of theatrical scenes. Two cases, related to the location of objects in the Euclidean space, can be distinguished:

- in the first one the Euclidean object is entirely beyond the plane of the traces τ (fig. 6);
- in the second one the Euclidean object goes into the space between the plane of traces τ and the principal plane ω (fig. 7).

The first case is typical of theatrical scenes, the second one is more used in architecture.
The historical origin of the 'theatrical' transition can be found in the treatise on perspective by Guidobaldo del Monte, who was the first to acknowledge, in the 'theatrical' space, a contraction of the Euclidean space; Guidobaldo shows how to manage the convergence of the straight lines that represent the lines perpendicular to the proscenium.
Despite this, solid perspective cannot be considered as an evolution of Guidobaldo's theory, because scenographic perspective has developed independently.
The first reference to theatrical space, or relief-perspective, is undoubtedly due to the treatise by Johann Adam Breysig (1798) that anticipates Poncelet (fig. 8).
The 'advanced' theatrical space, i.e. the second case mentioned above, is discussed seventy years later in the treatise by Rudolf Staudigl (1868).

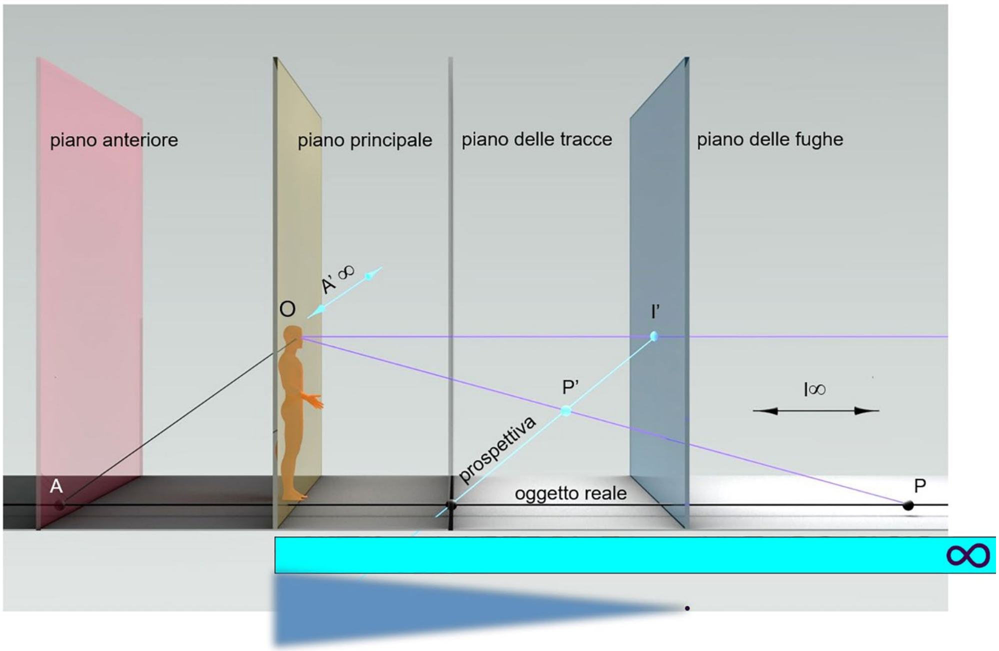


Fig. 3. The theatrical transition.

Divergent 'Ames' Perspective
When an object of the Euclidean space goes into the area between the principal plane ω and the plane of the disappearances α, the perspective expands.
This perspective is puzzling because it can be perceived even when looking backwards. The representation of the space behind *O* is unconceivable in plane perspective, while it is possible in solid perspective, due to its three-dimensional layout (fig. 9).
If the object is oblique to the principal plane ω, as it happens in a 'corner' perspective, then the solid perspective assumes the features of the Ames room: if two people of equal height, placed in the Euclidean space, stand close to two columns, the well-known paradox can be observed (fig. 10).
This circumstance has led us to dedicate this transition to Adelbert Ames jr. (1880-1955) for the importance of his studies on the phenomenon of vision and on perspective.
Leonardo Baglioni has studied this topic.

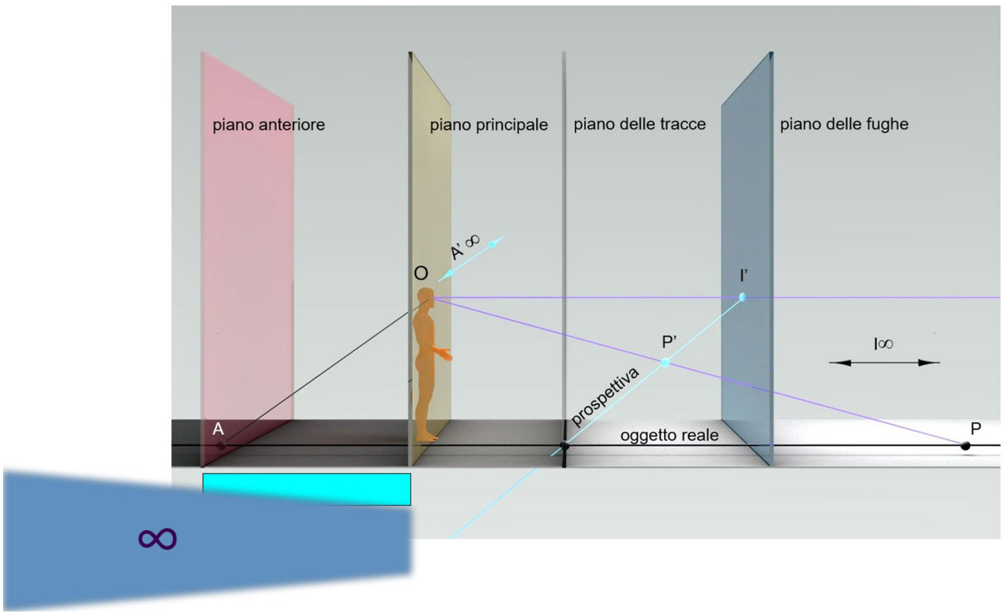


Fig. 4. The Ames transition.

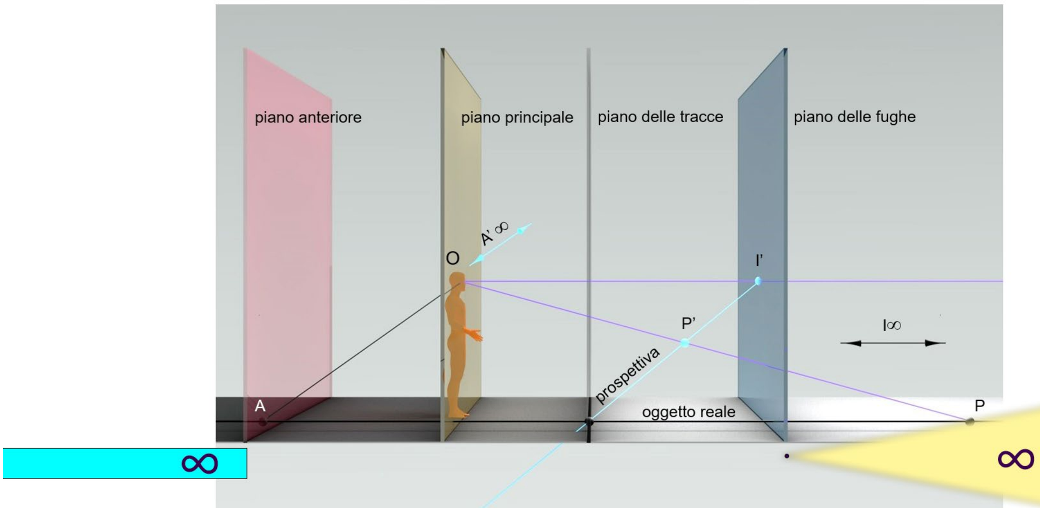


Fig. 5. The reverse transition.

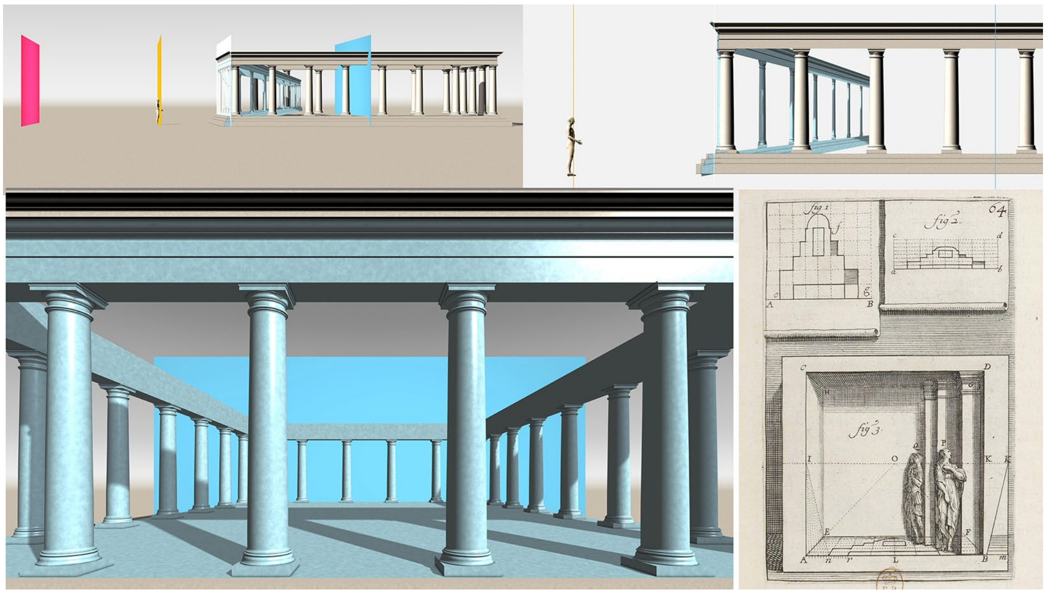


Fig. 6. The transition form the Euclidean to the theatrical space and one plate from Breysig (1798)

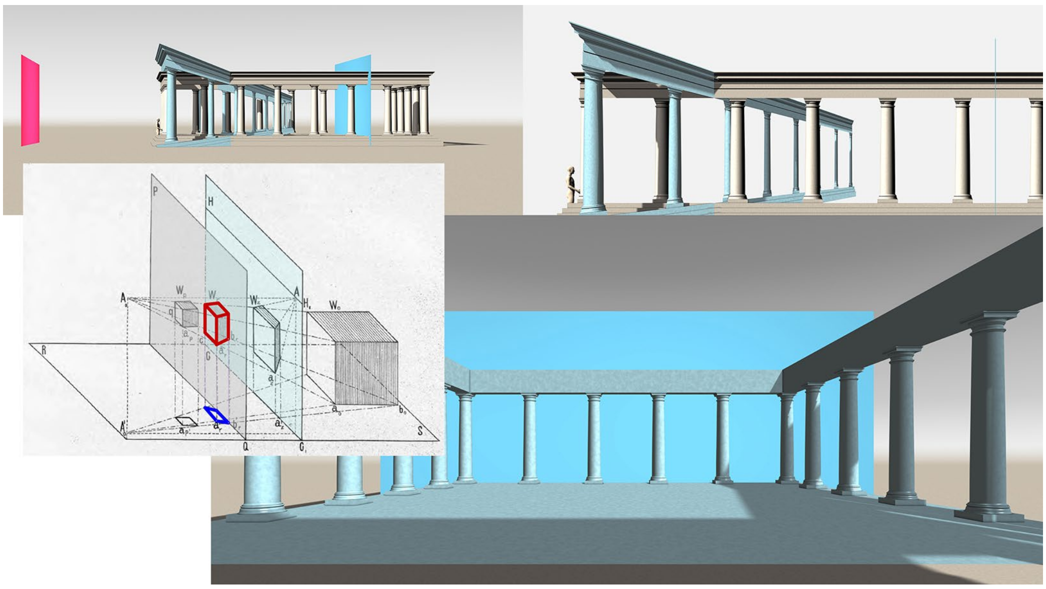


Fig. 7. The transition from Euclidean space to advanced theatrical space and a table from Abraham Bosse (1665).

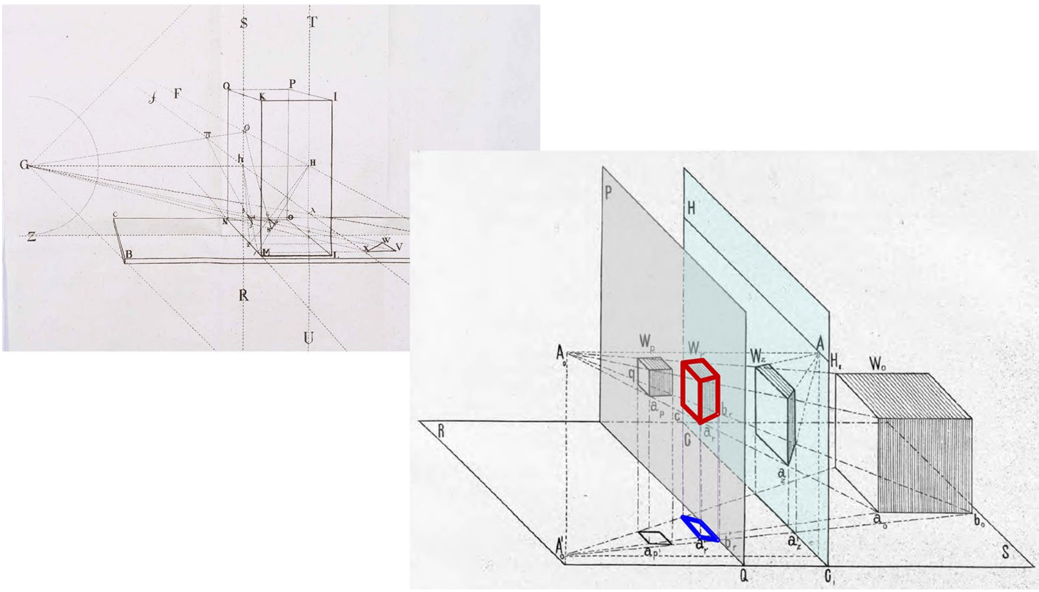


Fig. 8. The transition from Euclidean space to theatrical space in the conception of Breysig (1798) and Staudigl (1868). The former contains perspective rigidly within a volume representing the three-dimensional limits of the relief, just as the frame of a painting contains plane perspective. The second also constructs three-dimensional perspective in front of the plane of traces, advancing towards the observer.

Inverse perspective

The 'reverse' transition is of purely theoretical, because it does not correspond to any visual experience. The Euclidean object crosses the plane of the disappearances α and breaks up into two parts (fig. 11):

- the part located behind the observer is incomplete, because beyond α (highlighted in red) it literally disappears;
- the part in front of the projection center *O* is incomplete and upside down, as it happens in flat perspective when we represented something that is located behind the observer, e.g. a light source.

Solid perspective as a "general theory of the art of modelling"

In 1871 Wilhelm Fiedler described solid perspective as the general theory of the art of modeling [Fiedler 1871, p. 121]. In the UID annual conference many drawings, models and

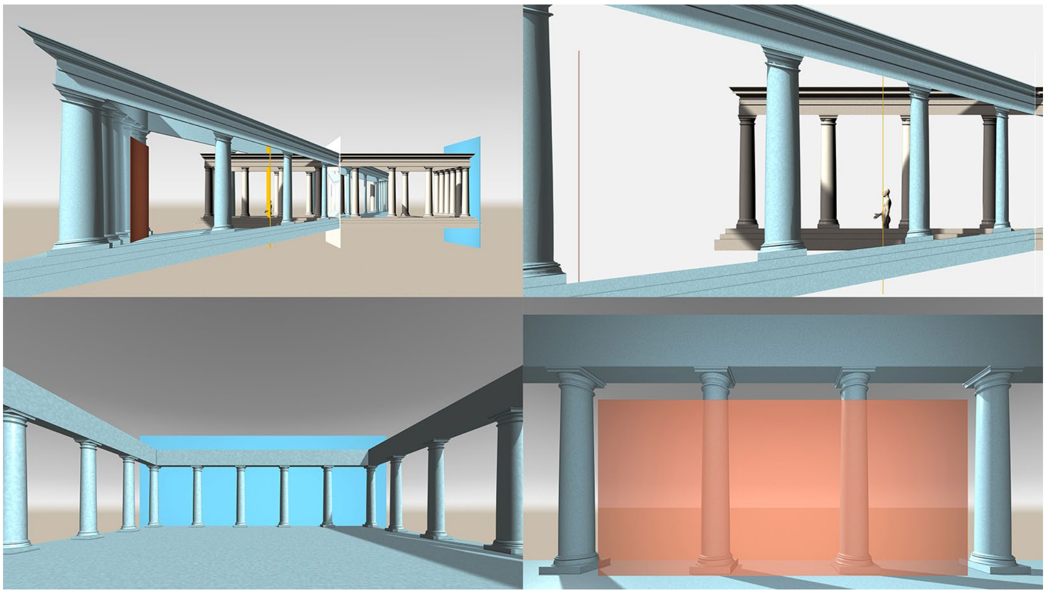


Fig. 9. The transition from Euclidean space to frontal Ames space.

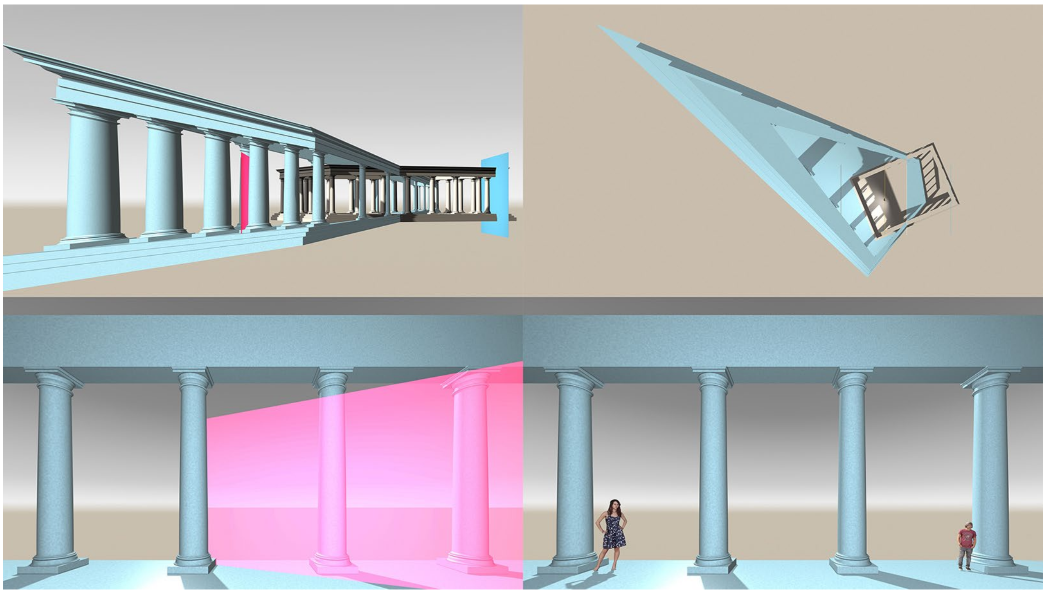


Fig. 10. The transition from Euclidean space to corner Ames space.

representations are usually presented. We can say that all of them can be generated by the geometric device that I have shown.

One only mandatory condition is needed: the distance d between the vanishing plane π and the plane of the traces τ must be equal to the distance d between the principal plane ω and the plane of the disappearances (fore plane) α. Any variation in the position of the four parallel planes is allowed:

- the plane of the traces τ can overlap π; in this case the plane of the disappearances α overlaps the principal plane ω and the solid perspective degenerates into a plane perspective;
- the center of projection O and the principal plane ω move away at an infinite distance from the object in the Euclidean space; in this case the solid perspective is transformed into a parallel perspective (plane or solid);
- the same effect is produced by the movement of the vanishing plane π at an infinite distance;
- the sequence of planes can change, i.e. each plane can take the place of another one;
- the vanishing plane π and the plane of disappearances α can overlap, and thus generate an involution.

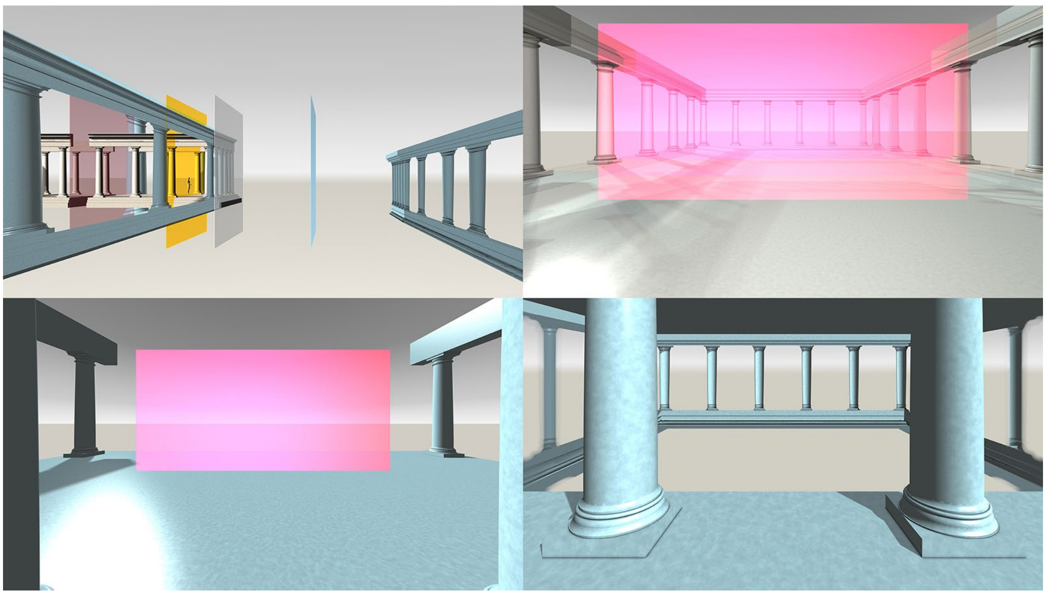


Fig. 11. The transition from Euclidean space to inverse perspective space. In the upper right figure, the Euclidean model has also been visualised to demonstrate how the continuity of the two spaces is respected. However, the perspective disappears the moment the Euclidean object crosses the red plane, to reappear on the opposite side, in reverse.

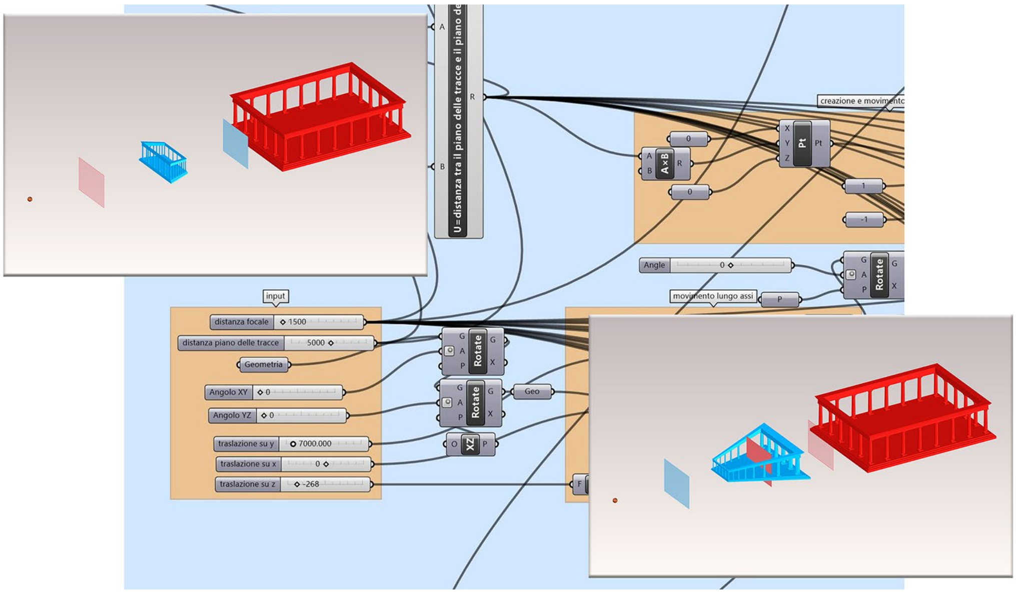


Fig. 12. The mathematical model that allows any configuration of the solid perspective to be explored in real time was created by Federico Fallavollita.

We can study and explore in detail all these transitions thanks to a powerful interactive model developed by Federico Fallavollita (fig. 12).
Let us consider two examples.

The parallel solid perspective

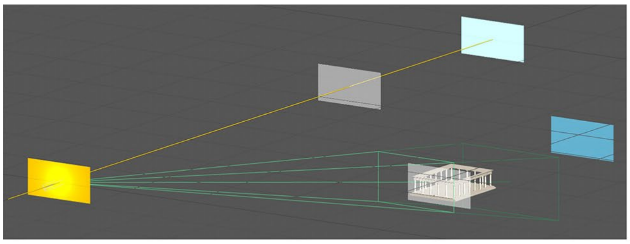
If the vanishing plane π moves at a great distance from *O* and the perspective convergence of lines, that are parallel in Euclidean space, becomes imperceptible, it is possible to generate a parallel perspective, i.e. a solid, orthogonal or oblique axonometry (fig. 13). In 2019, Alberto Sdegno has studied the application of these representations to art and to theoretical investigation [Sdegno 2019, pp. 1375-1384]. Thanks to his work, these transitions take their place in the history of representation.

The involution

If the vanishing plane π overlaps the plane of disappearances α, the transition becomes an involution: given an Euclidean object *a* and its solid perspective *b*, we assume that b is an Euclidean object; the solid perspective of *b* will match *a* (fig. 14). This transition produces a switch between perspective and reality. Involution is an elusive concept, but this application makes it clear.

Solid perspective arrangements

Federico Fallavollita has shown that a solid perspective can be generated even if the arrangement of the four floors is modified (fig. 12). The only constraint to respect, as I stated above, is the invariance of the distances *d* between the vanishing plane π and the plane of traces τ and the distance between the principal plane ω and the plane of disappearances α: $(d\ (\pi-\tau) = d\ (\omega-\alpha))$, regardless the sign of *d*.
The four planes $(\alpha, \omega, \tau, \pi)$, can be ordered as follows:
α: (α,ω,τ,π); (α,ω,π,τ); (α,τ,ω,π); (α,τ,π,ω); (α,π,ω,τ); (α,π,τ,ω);
ω: (ω,α,τ,π); (ω,α,π,τ); (ω,τ,α,π); (ω,τ,π,α); (ω,π,α,τ); (ω,π,τ,α);
τ: (τ,α,ω,π); (τ,α,π,ω); (τ,ω,α,π); (τ,ω,π,α); (τ,π,α,ω); (τ,π,ω,α);
π: (π,α,ω,τ); (π,α,τ,ω); (π,ω,α,τ); (π,ω,τ,α); (π,τ,α,ω); (π,τ,ω,α).
The arrangements that do not verify the equation $(d\ (\pi-\tau) = d\ (\omega-\alpha))$ must be excluded; this happens, for instance, in the sequence $(\alpha, \tau, \pi, \omega)$, where the distance $(\tau\text{-}\pi)$ is included in the distance $(\omega\text{-}\alpha)$ and is therefore smaller (excluding those coincidences that lead back to the cases of plane perspective or involution). Finally, one must exclude arrangements that reverse



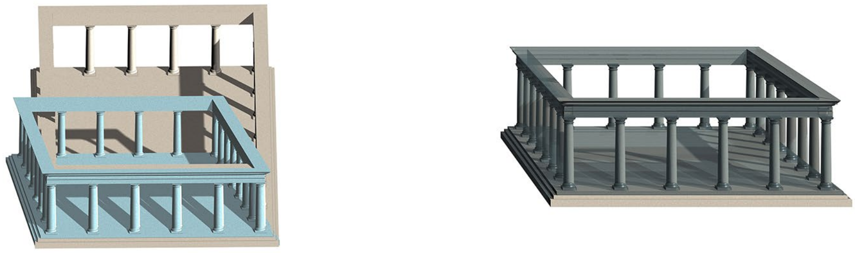


Fig. 13. A cavalier solid perspective: the distance *f* between the observer and the plane of the joints must be very large in relation to the size of the depicted object. The distance *d* between the plane of the joints and the plane of the traces controls the shortening ratio.

the internal order of one of the pairs (α, ω) and (τ, π), because in that case the perspective of a line such as *r'(T I')* would not be parallel to the line through the point A and O that projects its direction. Hence, the arrangements ($\alpha, \omega, \tau, \pi$) and ($\omega, \alpha, \pi, \tau$) are possible, but ($\alpha, \omega, \pi, \tau$) is not possible, because it modifies the order of the pair (π, τ), with respect to the pair (α, ω). This leaves eight arrangements (fig. 15):
α (α,ω,τ,π); (α,τ,ω,π);
ω (ω,α,π,τ); (ω,π,α,τ);
τ (τ,α,π,ω); (τ,π,α,ω);
π (π,ω,τ,α); (π,τ,ω,α);
If we add the specialisations of the normal case:
plane perspective ($\alpha \equiv \omega, \tau \equiv \pi$), ($\pi \equiv \tau, \omega \equiv \alpha$)
involutional perspective ($\omega, \alpha \equiv \pi, \tau$), ($\tau, \pi \equiv \alpha, \omega$)
we have finally twelve possible arrangements.
In the list some symmetric arrangements appear, e.g. the one that starts the first line (α,ω,τ,π) and the last to appear in the final line (π,τ,ω,α). These arrangements generate different perspectives.

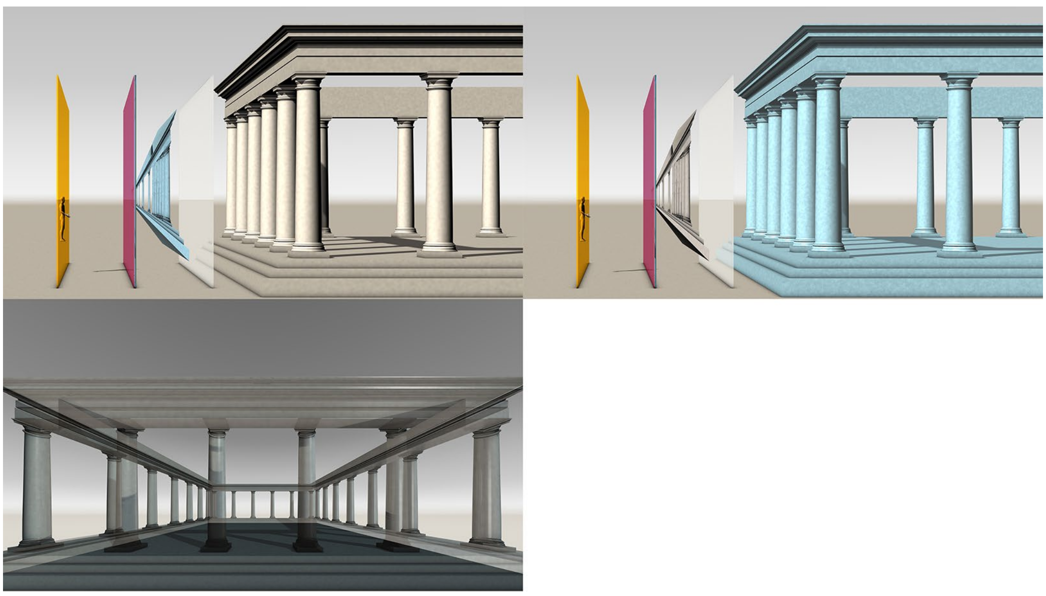


Fig. 14. An involutional solid perspective.

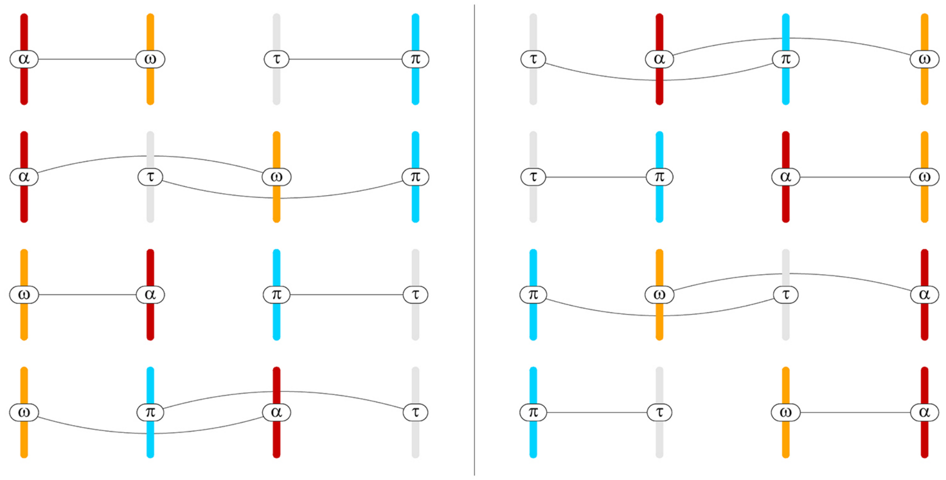


Fig. 15. This diagram collects the possible arrangements of the four planes that structure the correspondence between Euclidean space and perspective space.

A relevant linguistic matter

I mentioned the problems that arise from the lack of a shared terminology even in European languages. This gap involves descriptive geometry in general and causes many misunderstandings, such as the one about relief-perspective, that is often confused with scenography, or with solid homology.
If we consider the terms used to indicate the components of the solid perspective, the confusion increases.
Just to make an example, when relief-perspective is considered an extension of plane perspective, the planes that delimit the layout of the transition between Euclidean and Perspective space are called respectively 'vanishing' and 'frontal plane'. German-language authors such as Staudigl, Burmester and Stuhlmann agree on using the prefix *Verschwindung* which is equivalent to the English vanishing (disappearance) for the points of the plane of disappearances α and the prefix *Flucht* (run, escape) for the points of the vanishing plane.
None of these terms properly renders the correspondence between accessible planes and planes at infinite of the two spaces in projective relationship.
A systematic research on terminology is therefore needed, if we aim at a shared standard that makes the exchange of ideas on this subject easier.

Conclusions

In this paper the relationship between art and science, a relevant matter of investigation, has remained undiscussed, though it can be considered the most engaging feature of these studies; indeed, without exception, art gives science intuitions and stimulations.
Few evidences, among the countless that can be quoted or retrieved in our memory, prove this assertion.
In the apse of Santa Maria at San Satiro, Bramante (1480) anticipated the first theoretical discussion of relief-perspective, made three centuries later by Johann Adam Breysig (1798).
The word 'perspective', referred to the concept developed in the Renaissance, occurs 155 times in the 1822 edition of the work of Jean Victor Poncelet, the founder of projective geometry, and 144 times in the two-volume edition of 1865: *Dans ce qui suit, nous donnerons presque toujours au mot de projection le même sens que celui de perspective; ainsi la projection sera conique ou centrale* [Poncelet 1822, p. 3].
Finally, the "art of modeling" is explicitly referred to in Wilhem Fiedler's theory of the central collineation of spaces: *Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der marchierung-Methoden* (The central collineation of spatial systems as a theory of modeling methods) [Fiedler 1871, p. 121].

The analysis of the perspective space and its relations with the Euclidean space, which we have shortly illustrated above, has a direct relationship with our activities as architects and scholars of science of representation, both in a scientific point of view and for its use in art and architecture productions.
The discussion has proved that the locution "solid perspective" has to be preferred to "relief-perspective" or "solid homology", because relief-perspective can be perceived only in one direction, i.e. in front of the observer, whereas solid homology embraces the whole space but excludes the observer. In solid perspective the man is the center, the pivot of the arrangement; he can turn his gaze to any direction and, at the same time, he can contemplate the infinite.

References

Anger C.T. (1834). *Analytische Darstellung der Basrelief - Perspective*. Danzig: Sam. Gerhard.

Aschieri F. (1888). *Geometria projettiva. Lezioni di Ferdinando Aschieri, professore nella R. Università di Pavia*. Milan: Ulrico Hoepli.

Aschieri F. (1895). *Geometria projettiva dello spazio*. Milan: Ulrico Hoepli.

Baglioni L., Fallavollita F. (2021). Generative Models for Relief Perspective Architectures. In *Nexus Network Journal,* No. 23, pp. 879–898.

Bosse A. (1665). *Traité des pratiques geometrales et perspectives, enseignées dans l'Academie royale de la peinture et sculpture. Par A. Bosse. Tres utiles pour ceux qui desirent exceller en ces arts, et autres, où il faut employer la regle et le compas*. Paris: Chez l'Auteur.

Breysig J.A. (1798). *Versuch einer Erläuterung der Reliefsperspektive, zugleich für Mahler eingerichtet*. Magdeburg: Georg Christian Steil.

Burmester L. (1883). *Grundzüge der Reliefperspective nebst Anwendung zur Herstel- lung reliefperspectivischer Modelle: Als Ergänzung zum Perspectiv-Unterricht an Kunstakademien, Kunstgewerbeschulen und technischen Lehranstalten*. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Cardi L. (detto „il Cigoli") (1559). *Trattato pratico di prospettiva di Ludovico Cardi detto "il Cigoli": manoscritto Ms 2660A del Gabinetto dei disegni e delle stampe degli Uffizi*. [R. Profumo (ed.). (1992). Roma: Bonsignori].

Chasles M. (1860). Rapport fait à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 12 décembre 1853, sur un ouvrage intitulé: Traité de Perspective-relief, avec les applications à la construction des bas-reliefs, aux décorations théâtrales et à l'architecture; par M. Poudra, ancien élève de l'École Polytechnique officier supérieur en retriate au corps d'état-major. In *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, pp. 880–901.

Cloquet L. (1913). *Traité de perspective pittoresque - Perspective de la couleur. Vol. II, Perspective de la couleur.* Paris: H. Laurens.

Cloquet L. (1913). *Traité de perspective pittoresque - Perspective du relief. Vol. III, Perspective du relief.* Paris: H. Laurens.

De La Gournerie J. (1859). *Traité de Perspective linéaire contenant les tracés pour les tableaux plans et courbes, les bas-reliefs et les décorations théatrales, avec une théorie des effets de perspective*. Paris: Dalmond et Dunod.

Fallavollita F. (2017). The Relief Perspective Camera. A Journey Into Deep Space. In Y. Yamaguchi, H. Suzuki, N. Ando (eds.). *The 11th Asian Forum on Graphic Science (AFGS 2017)*. Tokyo: Japan Society for Graphic Science.

Fano G. (1925). *Lezioni di geometria descrittiva date nel R. Politecnico di Torino*. Torino: Paravia.

Fiedler W. (1871). *Die Darstellende Geometrie. ein Grundriss für Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbststudium*. Leipzig: G. Teubner.

Guidobaldo del Monte (1600). *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis Perspectivæ libri sex*. Pisauri.

Ittelson W.H. (1952). *The Ames Demonstrations in Perception, a Guide to their Construction and Use*. New Jersey: Princeton University Press.

Lucrezio. *Della Natura*. [A. Fellin (ed.). (1963). Torino: UTET].

Mello B. (1984). *Trattato di scenotecnica. Prospettiva teatrale, restituzioni, pratica nella pittura e nella confezione delle scene, macchineria, trucchi di palcoscenico, materiale elettrico, luministica e illuminotecnica, impianto elettronico*. Görlich. Novara: Istituto Geografico De Agostini.

Peschka von G.A. (1888). *Freie Perspektive [Centrale Projection]*. Vol. 1. Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlun.

Petitot E.A. (1758). *Raisonnement sur la perspective, Pour en faciliter l'usage aux Artistes - Ragionamento sopra la prospettiva, Per agevolarne l'uso a' Professori*. Parma: Chez Les Frères Faure Libraires.

Pillet J.J. (1921). *Traité de perspective linéaire précedé du Tracé des ombres usuelles (rayons a 45 degrées) et du Rendu dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines*. Paris: Blanchard.

Poncelet J.V. (1822). *Traité des propriétés projectives des figures; ouvrage utile a ceux qui s'occupent des application de la Géométrie Descriptive et d'operations géométriques sur le terrain; par J.V. Poncelet, Ancien Elève de l'école Polytechnique, Capitaine au corps royal du Génie, Membre de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Metz*. Paris: Bachelier.

Poudra N.G. (1860). *Traité de perspective-relief*. Paris: J. Corréard.

Sabbattini N. (1637). *Pratica di fabricar scene, e machine ne' teatri*. Pesaro: Pietro de' Paoli e Giovan Battista Giovannelli.

Scheffers G. (1927). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie*. *Vol. II. Zweiter band.* Berlin: Julius Springer.

Sdegno A. (2019). Modelli assonometrici per lo studio del disegno di architettura. In P. Belardi (ed.). *Riflessioni, l'arte del disegno / il disegno dell'arte. Atti del 41° Convegno internazionale dei docenti delle discipline della rappresentazione*. Perugia, 19-21 September 2019, pp. 1375-1384. Roma: Gangemi Editore.

Staudigl R. (1868). *Grundzüge der Reliefperspektive*. Wien: Seidel & Sohn.

Stuhlmann E.J.A. (1914). *Lehrbuch der Reliefperspektive*. Hamburg: Boysen & Maasch.

Wiener C. (1884). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie*. Vol. 1. Leipzig: B. G. Teubner.

Wiener C. (1887). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie*. Vol. 2. Leipzig: B. G. Teubner.

Author
Riccardo Migliari, Emeritus Professor, Sapienza Università di Roma, riccardo.migliari@gmail.com

To cite this chapter: Migliari Riccardo (2023). La prospettiva solida come strumento di analisi delle transizioni tra lo spazio euclideo e lo spazio della rappresentazione/The solid perspective as a tool for analysing transitions between Euclidean space and representation space. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (Eds.). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 34-59.

Isbn 9788835155119