Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik

RESEARCH

Sebastian Kollhoff

# Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs

## Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung

OPEN ACCESS

Springer Spektrum

# Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik

Band 6

**Reihe herausgegeben von**

Andrea Peter-Koop, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Rudolf vom Hofe, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Michael Kleine, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Miriam Lüken, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Die Reihe Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik fokussiert sich auf aktuelle Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik in allen Schulstufen und –formen einschließlich des Elementarbereichs und des Studiums sowie der Fort- und Weiterbildung. Dabei ist die Reihe offen für alle diesbezüglichen Forschungsrichtungen und –methoden. Berichtet werden neben Studien im Rahmen von sehr guten und herausragenden Promotionen und Habilitationen auch

- empirische Forschungs- und Entwicklungsprojekte,
- theoretische Grundlagenarbeiten zur Mathematikdidaktik,
- thematisch fokussierte Proceedings zu Forschungstagungen oder Workshops.

Die Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik nehmen Themen auf, die für Lehre und Forschung relevant sind und innovative wissenschaftliche Aspekte der Mathematikdidaktik beleuchten.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/13433

Sebastian Kollhoff

# Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs

## Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung

Springer Spektrum

Sebastian Kollhoff
Institut für Didaktik der Mathematik
Universität Bielefeld
Bielefeld, Deutschland

Dissertation Universität Bielefeld, 2020.

I acknowledge support for the publication costs by the Open Access Publication Fund of Bielefeld University.

ISSN 2199-739X ISSN 2199-7403 (electronic)
Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik
ISBN 978-3-658-33980-7 ISBN 978-3-658-33981-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

# Geleitwort

Die Frage, wie vorhandene Wissensstrukturen erweitert und auf neue Anwendungsgebiete übertragen werden können, ist seit langem eines der wichtigsten Themen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Sowohl in der Theorie als auch in der Praxis werden solche Übertragungen als „Transfer" beschrieben, wobei bislang kein einheitliches, auf den Mathematikunterricht bezogenes Begriffsverständnis hierzu existiert, sondern unterschiedliche, von der jeweiligen Bezugswissenschaft abhängige Interpretationen, die eher psychologisch motiviert sind. In der Praxis wird „Transfer" allgemein intendiert und „ausbleibender Transfer" häufig beklagt, wobei dies in der Regel an der Fähigkeit „Transferaufgaben" zu lösen festgemacht wird. Was man unter „Transferaufgaben" versteht, wird wiederum sehr unterschiedlich gehandhabt, da auch die Unterrichtspraxis von einem allgemein akzeptierten Begriffsverständnis weit entfernt ist. Gründe hierfür liegen u. a. darin, dass die Frage, was genau „Transfer" in mathematischen Lernsituationen bedeutet und wie entsprechende Prozesse im Detail verlaufen, in wichtigen Teilen noch unbeantwortet ist. Auch bislang vorliegende empirische Studien können hier zur Klärung nur begrenzt beitragen, da diese eher psychologisch ausgerichtet sind, das Lernen von Mathematik nur begrenzt erfassen und Prozesse des Transfers in authentischen schulischen Lernkontexten kaum betrachten. Insofern besteht im Hinblick auf „Transferprozesse" sowohl Bedarf an begrifflicher Klärung als auch an empirischer Forschung.

Im Bereich dieser Fragestellung bewegt sich die vorliegende Arbeit von Sebastian Kollhoff. Er beginnt mit einer vergleichenden Darstellung und Analyse relevanter Transfertheorien. Diese zeigt, dass bisherige Untersuchungen meist in klinischen Settings mit Laborcharakter durchgeführt wurden, sich häufig auf schematische, kalkülorientierte Fertigkeiten beziehen und Transfererfolg punktuell und produktorientiert am erfolgreichen Lösen von Testitems messen. Kaum erfasst werden hierdurch die zugrundeliegenden Lern- bzw. Übertragungsprozesse, die Entwicklung von konzeptuellem Verständnis und die komplexen Lern- und Interaktionsstrukturen authentischer Lernsituationen. Dies führt ihn zum einen zur Entwicklung eines Transferkonzepts, das Übertragungsprozesse fokussiert, zum anderen zu einem Untersuchungsdesign, das zur Verbesserung der o. g. Desiderata beitragen soll: Eine über mehrere Wochen laufende Erhebung in einer authentischen Lerngruppe mit dem Focus auf Transferprozessen.

In detaillierten Fallstudien zu drei thematischen Sequenzen, die wesentliche Etappen zur Ausbildung des Bruchzahlbegriffs repräsentieren, befasst sich der Autor mittels interpretativer Methoden mit der Rekonstruktion und Analyse individueller Transferprozesse der untersuchten Lerngruppen. In diesen Analysen bewährt sich der vom Autor prozessbezogen formulierte und hinsichtlich der zu übertragenden Strukturen differenzierende Transferbegriff. Auf diese Weise identifiziert der Autor eine Vielzahl von authentischen Transferprozessen, die sich auf Übertragung von Darstellungen, Kontexten oder Rechenstrategien beziehen, wobei sich bereits bei ersten elementaren Schritten – z. B. bei der Übertragung eines Verfahrens zur Anteilbildung von einer Kreis- auf eine Rechteckdarstellung – erhebliche individuelle Unterschiede in der Ausprägung des Transfers ergeben, wie sie bislang in der vorliegenden Detailliertheit nicht dokumentiert wurden. Es handelt sich hierbei aus normativer Sicht um elementare Schritte, die in der traditionellen Didaktik als einfach und leicht zu übertragen gelten. Die Ergebnisse des Autors bestätigen zum Teil solche normativ intendierten Übertragungen, zeigen jedoch auch auf, wie klassische didaktische Anschauungshilfen – wie Operatorpfeile – bei einzelnen Lernenden nicht die intendierte Erweiterung des Verständnisses unterstützen, sondern eher zur Konfusion mit den zugrundeliegenden Rechenschritten führen oder sich zu einer ritualisierten Pflichtaufgabe entwickeln, die neben der eigentlichen Anforderung abgearbeitet wird. Ähnliches zeigt sich im Hinblick auf die als handlungsorientiertes Erklärungsmodell zum Kürzen und Erweitern gedachte Vorstellung des Verfeinerns und Vergröberns, die sich ebenfalls in vielen beobachteten Fällen als ritualisiertes und isoliertes Schema entwickelt, während die damit zusammenhängenden Aufgaben rein rechnerisch gelöst werden. Schließlich dokumentieren die Ergebnisse des Autors auch zahlreiche bekannte Hindernisse für erfolgreiche Übertragungsprozesse, – z. B. fehlerhafte Übertragungen von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen – die sich aus der begrifflichen Sicht des Autors als negativer Transfer beschreiben lassen.

Insgesamt entwickelt Sebastian Kollhoff Ergebnisse zu drei zentralen didaktischen Feldern:

- Die auf der Basis seines begrifflichen Instrumentariums umgesetzten Fallstudien liefern neue Erkenntnisse über die Genese des Bruchzahlbegriffs und tragen somit zur Erweiterung des didaktischen Wissens über die Bruchrechnung bei.
- Sebastian Kollhoff entwickelt in seiner Arbeit eine theoretisch fundierte Analysemethodik, die unabhängig vom Beispiel der Bruchrechnung auch auf andere Inhaltsbereiche angewendet werden kann und insofern konkrete Perspektiven für die weitere Forschung zum Transferbegriff aufzeigt.
- Darüber hinaus entwickelt der Autor auf der Basis seines prozessorientierten Transferbegriffs Vorschläge für die normative und deskriptive Analyse von Transferprozessen in mathematischen Lernsituationen und damit neue Perspektiven für die Planung und Analyse von Unterricht.

Es ist zu wünschen, dass diese Arbeit das Interesse der Community findet und zur weiteren theoretischen und empirischen Klärung der Bedeutung von Transferprozessen für das Lehren und Lernen von Mathematik beitragen kann.

Bielefeld
im Dezember 2020

Rudolf vom Hofe

# Danksagung

Auf dem Weg dieser Arbeit haben mich viele Menschen begleitet. Sie haben mich auf höchst unterschiedliche Weise unterstützt und sich für mich eingesetzt, wofür ich mich an dieser Stelle auf das herzlichste bedanken möchte. Mein besonderer Dank gilt:

- Meinem Doktorvater Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, für sein ständiges Vertrauen, seinen wertvollen Rat und seine unerschöpfliche Geduld;
- Prof. Dr. Marcus Schütte, der das Zweitgutachten für diese Arbeit übernommen hat;
- OStR Jan Rotter, der die Durchführung der Studie ermöglicht und tatkräftig unterstützt hat, sowie den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern;
- meinen (ehemaligen) Arbeitskolleginnen und -kollegen, insbesondere der Arbeitsgruppe Empirische Unterrichtsforschung, am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, für die immer freundschaftlich-familiäre Arbeitsatmosphäre und die gedeihlichen Gespräche;
- meiner Familie und meinen Freunden, die mir menschlich immer Rückhalt gegeben haben.

Der größte Dank gebührt meiner Frau und meinen Kindern, die leider die größten Entbehrungen auf sich nehmen mussten. Ihnen ist diese Arbeit gewidmet:

Für

*Hanna, Emma Isabel, Thea Hermine & Oskar Anton*

Warendorf
im Dezember 2020

Sebastian Kollhoff

# Einleitung

*„Eine Schildkröte kann dir mehr über den Weg erzählen als ein Hase.“*

*– Chinesisches Sprichwort*

In einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht sollen die Lernenden kein isoliertes Faktenwissen erwerben, sondern allgemeine Prinzipien verstehen und Denkweisen entwickeln, die ihnen einen Zugang zum gesellschaftlichen, kulturellen und beruflichen Leben nach der Schule eröffnen: Wissen soll angewendet werden.

Der Idealvorstellung der Anwendung von Wissen in außerschulischen Kontexten geht der Erwerb transferfähigen Wissens voraus. In der Entwicklung von aufeinander aufbauenden und miteinander vernetzten Wissensstrukturen „verstärkt sich der Einfluss inhaltsspezifischer Vorkenntnisse auf die Verarbeitung neuer Informationen und die Nutzung des bereits Gelernten, während die Rolle der allgemeinen Intelligenz [...] abnimmt“ (Weinert, 2002, S. 24). Hierbei ist jedoch nicht der Umfang der Vorkenntnisse entscheidend, sondern die Qualität der vorhandenen Vorwissensstrukturen (vgl. Steiner, 2006): Sie müssen tragfähig, hinreichend miteinander vernetzt, flexibel nutzbar und anschlussfähig sein.

Aus diesem Grund wird Transfer sowohl im Rahmen kompetenzorientierter schulischer Lernprozesse sowie auch in der empirischen Lernforschung als zentrales Kriterium für erfolgreiches Lernen betrachtet und für das Ausbleiben von Transfer wird zumeist fehlendes Verständniswissen verantwortlich gemacht (vgl. Renkl, 1996, S. 82). Gleichzeitig ist das Ausbleiben von Transfer einer der häufigsten Befunde der psychologischen und mathematikdidaktischen Forschung: „There is no such thing as guaranteed transfer of knowledge, insight and ability from one context or domain to another“ (Niss, 1999, S. 22). Dies ist im Hinblick auf ein fortgesetztes Mathematiklernen von besonderer Bedeutung, da dieses eine stetige Weiterentwicklung, Reorganisation und Anpassung von vorhandenen Wissensstrukturen erfordert (vgl. vom Hofe & Blum, 2016).

In der experimentalpsychologischen Literatur findet sich eine Vielzahl von Studien zum Transfer mit mathematischen Inhalten als Untersuchungsgegenstand. Eine eingehende Betrachtung dieser Untersuchungen wirft jedoch Fragen auf und offenbart Forschungsdesiderata:

- Die psychologische Forschung konzentriert sich häufig auf schematische Inhalte und Problemlösesituationen, wie etwa das Umformen von Gleichungen (vgl. Sweller & Cooper, 1985) oder die Anwendung von Pfadregeln in der Stochastik (vgl. Berthold & Renkl, 2009). Es wird in der Regel ein Verfahren gelernt und in einer späteren Transferphase gemessen, wie das Verfahren in einer neuen Lernsituation angewendet wird. Aufgrund der Fertigkeitsorientierung dieser Studien bleibt zumeist offen, inwieweit die Probanden ein tiefergehendes Verständnis für das Verfahren entwickelt haben oder lediglich gelernt haben, die Bedingungen zur Anwendung eines Lösungsalgorithmus zu erkennen und diesen fehlerfrei anzuwenden. Daher stellt sich die Frage, wie sich Transfer im Aufbau inhaltlicher Vorstellungen und dem Verständnis mathematischer Strukturen und Begriffe darstellt.
- Zudem folgen die Studien im Wesentlichen zwei Paradigmen: Einerseits haben sie einen Laborcharakter und es wird in kontrollierten instruktionalen Settings eine spezifische Verhaltensänderung der Probanden gefördert. Andererseits finden sich Einzelfallstudien (z. B. Wagner, 2006), die zum Teil ebenfalls unter Laborbedingungen Wahrnehmungs- und Verhaltensänderungen einzelner Probanden über einen mehrstündigen Lehrgang verfolgen. Die Studien werden häufig mit Studierenden und nicht mit Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Inwieweit sich die hier gewonnen Kenntnisse auf einen schulischen Lernkontext übertragen lassen, ist nicht geklärt.
- Ungeachtet der theoretischen Vielfalt und Vielzahl empirischer Studien zum Transfer mit mathematischen Konzepten als Untersuchungsgegenstand erlauben diese nur wenige Übertragungsmöglichkeiten auf schulische Lernprozesse. Für das schulische Mathematiklernen bedarf es differenzierter Erkenntnisse über Transferprozesse, die zum einen eine Grundlage für die Planung von Unterricht bilden und zum anderen für die Analyse von Lernentwicklungsverläufen bei Schülerinnen und Schülern zur konstruktiven Erarbeitung von Fördermaßnahmen dienen können.

Vor diesem Hintergrund besteht das zentrale Forschungsinteresse dieser Arbeit darin, Transferprozesse in einem authentischen schulischen Lernkontext zu untersuchen. Als inhaltlich-konzeptueller Schwerpunkt für diese Untersuchung wird die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs gewählt, da sich diese als eine besondere Herausforderung im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe I darstellt und durch eine Vielzahl an erforderlichen Vernetzungen charakterisiert ist (vgl. Hefendehl-Hebeker, 1996). Zudem kann in diesem Inhaltsbereich auf eine reichhaltige empirische Befundlage zurückgegriffen werden, die die Hauptschwierigkeiten in fehlerhaften Übertragungen von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen und ausbleibenden konzeptuellen Erweiterungen der Lernenden beschreibt (vgl. Wartha, 2007).

In dieser Arbeit wird zunächst anhand der vorhandenen Literatur und Forschungsbefunde zum Transfer diskutiert, was Transfer allgemein und speziell beim Mathematiklernen bedeutet. Es soll untersucht werden, welche theoretischen Modelle und Perspektiven bereits existieren und welche Folgerungen sich für den Mathematikunterricht ableiten lassen. Auf dieser Basis wird im Rahmen des Konzepts von Grundvorstellungen die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs in Bezug auf erforderliche Transferprozesse analysiert. Im Rahmen der empirischen Studie soll untersucht werden, welche Transferprozesse in den Bearbeitungen der Lernenden rekonstruiert werden können, und inwieweit diese die didaktischen Erwartungen und Intentionen widerspiegeln. Die Ergebnisse der empirischen Untersuchung sollen Aufschluss darüber geben, wie Transferprozesse in der Entwicklung elementarer Bruchzahlkonzepte identifiziert und konstruktiv unterstützt werden können.

**Gliederung der Arbeit:** Für eine theoretische Rahmung dieser Arbeit werden im ersten Kapitel im Anschluss an eine Übersicht über unterschiedliche Transferbegriffe (Abschnitt 1.1) verschiedene Transfertheorien und -Perspektiven sowie die mit ihnen verbundenen zentralen empirischen Befunde unter drei Paradigmen diskutiert: Kognitionspsychologische Theorien (1.2), Perspektiven der Situierten Kognition (1.3) und integrierende Theorien vom Transfer beim Mathematiklernen (1.4). Es werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den theoretischen Perspektiven herausgestellt und Forschungsdesiderata abgeleitet (1.5).

Im zweiten Kapitel werden die Ergebnisse der Diskussion der theoretischen Perspektiven zu Transfer im Rahmen des didaktischen Konzepts der Ausbildung von Grundvorstellungen von Bruchzahlen betrachtet. Dazu wird zunächst das Konzept der Grundvorstellungen dargestellt und in Bezug auf die Ergebnisse des ersten Kapitels diskutiert (2.1). Das sich daraus ergebende Modell für Transferprozesse stellt die Grundlage für die didaktische Analyse der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs dar (2.2). In Abschnitt 2.3 wird anhand von ausgewählten Beispielen diskutiert, wie Transferprozesse auf normativer Ebene analysiert werden können. Zum Abschluss des Kapitels wird ein Fazit gezogen und weitere Forschungsdesiderata abgeleitet.

In Kapitel 3 wird die Konzeption und die Anlage der empirischen Studie dargestellt. Dazu werden zunächst in Abschnitt 3.1 die Forschungsfragen konkretisiert. Auf Grundlage der formulierten Forschungsfragen werden in Abschnitt 3.2 die konzeptionellen Überlegungen zur Anlage der empirischen Studie dargelegt und die Erhebungsinstrumente (3.3) beschrieben. In Abschnitt 3.4 werden die eingesetzten Materialien anhand ausgewählter Beispiele beschrieben, bevor in Abschnitt 3.5 die Methoden zur Auswertung der erhobenen Daten dargestellt werden.

Das vierte Kapitel befasst sich mit den Auswertungen der Ergebnisse des Vor- und Nachtests der Studie. In Abschnitt 4.1 wird auf Grundlage der Vortestergebnisse das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu Bruchzahlen zu Beginn der Unterrichtseinheit beschrieben, das in Abschnitt 4.2 mit den Nachtestergebnissen verglichen und vor dem Hintergrund der Leistungsentwicklung über den Verlauf der Unterrichtseinheit analysiert wird. Im Hinblick auf die Erhebung von Prozessdaten in der empirischen Studie wird in Abschnitt 4.3 die Zusammensetzung der Lernendenpaare anhand ihrer Ergebnisse im Vor- und Nachtest beschrieben.

Das fünfte Kapitel stellt den Kern der empirischen Untersuchung dar. Hier werden die erhobenen Prozessdaten der Lernenden im Detail analysiert. Das Kapitel gliedert sich nach den inhaltlichen Schwerpunkten der Datenerhebungen: Anteile von einem Ganzen (5.1), Anteile von beliebigen Größen (5.2) und Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung (5.3). In Abschnitt 5.4 werden die Ergebnisse der Analysen zusammengeführt und in Hinsicht auf die Forschungsfragen verglichen und diskutiert.

Im letzten Kapitel 6 werden die Ergebnisse der Arbeit auf theoretischer und empirischer Ebene zusammengefasst (6.1), bevor abschließend eine konzeptuelle Reflexion vorgenommen (6.2) und Perspektiven für die Forschung und die Unterrichtspraxis aufgezeigt werden (6.3).

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# 1 Transfer – Theoretische Perspektiven

Seit den Anfängen der Erforschung des Lehrens und Lernens suchen Wissenschaftler Antworten auf die Frage, inwieweit Transfer des Gelernten möglich ist. Hoffnungen, umfassende Antworten auf diese Frage gefunden zu haben, werden jedoch bis heute mit jedem neuen Experiment oder Reformprogramm enttäuscht (vgl. Prenzel & Mandl, 1992), weshalb Resnick (1989, S. 8) sogar so weit ging diese Forschungsbemühungen mit der Suche nach dem heiligen Gral gleichzusetzen. Die Suche nach Erklärungen für Transfer, Transfermechanismen, transferförderliche Instruktionsmethoden sowie Erklärungen für das Ausbleiben von Transfer brachte eine Vielzahl von Theorien hervor, die Transfer aus zum Teil sehr unterschiedlichen epistemologischen Perspektiven beschreiben. Für eine theoretische Rahmung dieser Arbeit werden in diesem Kapitel verschiedene Transfertheorien und die mit ihnen verbundenen zentralen empirischen Befunde unter drei Paradigmen diskutiert:

*Kognitionspsychologische Theorien* argumentieren auf Grundlage von Informationsverarbeitungsmodellen und beschreiben Transfer als den Abruf von Vorwissensstrukturen, die als Schemata im Langzeitgedächtnis abgelegt sind. Entscheidend für ihre Aktivierung sind zum einen Gemeinsamkeiten in elementaren Eigenschaften sowie Ähnlichkeiten in der Oberflächen- und Tiefenstruktur von Lern- und Anforderungssituation.

*Aus Perspektive der Situierten Kognition* wird Lernen als ein aktiver Sozialisationsprozess beschrieben, in dem Wissen in bereichs- und situationsspezifischen Aushandlungen mit der Umwelt entsteht und somit an diese gebunden ist. Durch aktives Handeln entwickeln Lernende situative Handlungsmodelle als Werkzeuge zum mentalen Operieren, die eine Aktivierung in funktional ähnlichen Anforderungssituationen ermöglichen.

*Integrierende Theorien vom Transfer beim Mathematiklernen* beschreiben Transfer als individuelle Konstruktion von Zusammenhängen durch Lernende. Mathe-



S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs,* Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_1

matisches Wissen wird nicht als statische Entität, sondern auf Grundlage dynamischer mentaler Repräsentationen beschrieben, die stetig neu strukturiert werden und auf individuellen Interpretationen sowie individuellen Generalisierungen der Lernenden beruhen.

Obgleich man aus einer sprachlichen Sicht mit dem Begriff *Transfer* in erster Linie eine *Übertragung* versteht, werden bei der Darstellung der verschiedenen Transferperspektiven teils beträchtliche Begriffsunterschiede und -verwendungen deutlich. Aus diesem Grund erfolgt zu Beginn dieses Kapitels eine Übersicht zu verschiedenen Transferbegriffen.

Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass die Darstellung in diesem Kapitel nicht vollständig ist, sondern eine Auswahl hinsichtlich ihrer Relevanz für diese Arbeit und ihrer Anwendbarkeit auf schulisches Lernen getroffen wurde.

## 1.1 Transferbegriffe

In seinem lateinischen Ursprung bedeutet „Transfer" so viel wie „übertragen". In der frühen deutschen Psychologie des 19. und 20. Jahrhunderts wurde vermehrt von Effekten der „Mitübung" oder „Übertragungsübung" gesprochen (Klauer, 2011, S. 16). Hierbei versuchte man zu erklären, dass in einem Übertragungsprozess auch immer etwas mitgeübt wird, was nicht im Zentrum des Lehrgangs oder allgemeiner der Instruktion stand. Gleichwohl implizierte der Begriff der Übertragungsübung, dass „Übung nicht nur auf das Geübte wirkt, sondern dass sie auch auf etwas anderes übertragen wird" (Klauer, 2011, S. 16). Von dieser Idee ausgehend wurde insbesondere im vergangenen Jahrhundert der Begriff „Lerntransfer" entwickelt und etabliert. Dieser Begriff wurde häufig synonym mit dem Begriff „Wissenstransfer" gebraucht, obgleich die beiden Begriffe unterschiedliche Übertragungen zum Ausdruck bringen. Wohingegen der Begriff „Wissenstransfer" ein Übertragen bestehenden Wissens beschreibt, benennt der Begriff „Lerntransfer" die Übertragung von Prozessen des Lernens. Auch in der englischsprachigen Literatur wird nur selten explizit zwischen „transfer of learning" und „knowledge transfer" unterschieden, obgleich sie unterschiedliche Aspekte des Transfers betonen.

Im Verlauf des 20. Jahrhunderts gehörte der Transferbegriff zu einem der meist diskutierten Themen der sich rasant entwickelnden Lern- und Instruktionspsychologie (vgl. Lobato, 1996; Mähler & Stern, 2010; Klauer, 2011). Nicht zuletzt besteht seit jeher ein wesentliches Ziel schulischen Lernens im Aufbau von tragfähigem, flexiblem und bereichsunabhängig anwendbarem Wissen. Lernen dient keinem Selbstzweck, sondern soll in alle Bereiche des Lebens wirken. Aufgrund dieser hohen

Bedeutungszuschreibung wurden in den verschiedenen lernpsychologischen Disziplinen zahlreiche Erklärungsversuche des Transferphänomens (vgl. Dettermann, 1993) unternommen. Die Transferforschung entwickelte sich zu einem vielschichtigen Forschungsfeld, aus dem eine Vielzahl an zum Teil sehr speziellen und domänenspezifischen Begriffsdefinitionen und -Unterscheidungen hervorgingen: „[...] every conceptualization of transfer reflects its own time and the concept of learning related to it“ (Tuomi-Gröhn & Engeström, 2003, S. 33).

In seinen pädagogisch psychologischen Ursprüngen ist Transfer im Lernen zu verorten und bezeichnet eine spezielle Art von Lernprozessen. So definiert Klauer Lerntransfer als einen „nichttriviale[n] Lerneffekt, d. h. ein[en] Lerneffekt bei Aufgaben, die in dem fraglichen Prozess weder gelernt noch geübt wurden“ (Klauer, 2011, S. 17). Dabei unterscheidet er zwischen trivialen und nichttrivialen Lernprozessen, wobei triviale Lernprozesse Effekte bezeichnen, die konkret in den Aufgaben auftreten, mit denen gelernt oder geübt wurde. Hingegen bezeichnet er „Lern- oder Übungseffekte, [die] bei Aufgaben auftreten, die überhaupt nicht gelernt oder geübt wurden“ (Klauer, 2011, S. 17) als nichttriviale Lerneffekte. Eine ähnliche Darstellung findet sich auch bei Larkin:

> „Transfer means applying old knowledge in a setting sufficiently novel that it also requires new knowledge. If there were no transfer, then solving problems in a new domain would require totally mastering a set of necessary new knowledge. To the extent that transfer occurs, some of this necessary knowledge is transferred from earlier experience and need not be learned. Because necessary knowledge is transferred from earlier experience and need not be learned, the usual measure of transfer is the difference in time required to learn a new task for learners with certain prior experience as opposed to other learners who lack this experience“. (Larkin, 1989, S. 283 f.)

Ähnlich definieren auch Mähler und Stern Transfer als „die erfolgreiche Anwendung angeeigneten Wissens bzw. erworbener Fertigkeiten im Rahmen einer neuen, in der Situation nicht vorgekommenen Anforderung“ (Mähler & Stern, 2010, S. 859). Sie fügen hinzu, dass wenn „eine Intervention in einem Anforderungsbereich (A) das Lernen in einem unabhängigen Anforderungsbereich (B) [erleichtert], wird dies als Produkt des Transfers angesehen“ (Mähler & Stern, 2010, S. 859). Diese Definitionen von Transfer haben zwei zentrale Elemente gemeinsam: Erstens findet ein Transfer zwischen zwei Anforderungssituationen statt, d. h. es gibt eine Lern- und eine Transfersituation. Dabei wird in einer Lernsituation Wissen erworben und in einer zweiten von der Lernsituation unabhängigen Situation angewendet. Die erforderliche Transferwirkung ist dabei besonders von der Qualität des Vorwissens abhängig: „Dort, wo etwas nicht solide gelernt und eingeübt wurde, gibt es auch nichts zu transferieren“ (Steiner, 2006, S. 193). Zweitens findet eine Interaktion zwischen den beiden Situationen statt, die von einer Anforderungssituation A auf eine zweite Anforderungssituation B wirkt. Transfer hat somit eine Wirkungsrichtung.

**Proaktiver und retroaktiver Transfer:** Transfer, der auf eine neue Situation wirkt, wird als *proaktiver* Transfer bezeichnet (vgl. Hasselhorn & Gold, 2013, S. 146 f.). Als Beispiel für einen proaktiven Transfer kann die Übertragung des schriftlichen Additionsverfahrens von den natürlichen Zahlen auf die schriftliche Addition von Dezimalzahlen angeführt werden. Die proaktive bzw. in der Zeit vorwärts wirkende Transferrichtung ist für die meisten Unterscheidungen von Transferbegriffen und -wirkungen charakteristisch: „Gäbe es diesen Lerntransfer nicht, müssten wir unendlich viele hochspezifische Verhaltensweisen im Einzelnen erlernen" (Hasselhorn & Gold, 2013, S. 147).

Im Gegensatz zu proaktivem Transfer wird ein Transfer, der rückwirkend auf bereits bekannte Situationen wirkt, als *retroaktiver* Transfer bezeichnet (Hasselhorn & Gold, 2013, S. 147). Hohensee (2014, S. 136) beschreibt rückwirkenden Transfer als den Einfluss neu erworbenen Wissens auf die Verarbeitung und Weiterentwicklung von bestehendem konzeptuellem Wissen:

> „I define backward transfer as the influence that constructing and subsequently generalizing new knowledge has on one's ways of reasoning about related mathematical concepts that one has encountered previously." (Hohensee, 2014, S. 136)

Als Beispiel für rückwirkenden Transfer können die Ergebnisse von Hohensee (2014) angeführt werden, der positive Effekte einer Intervention in Form der Einführung von quadratischen Funktionen auf das Verständnis der Probanden von linearen Funktionen und proportionalen Zusammenhängen berichtet. In 16 Unterrichtseinheiten wurden die Probanden zu quadratischen Funktionen unterrichtet. In den Unterrichtseinheiten wurden insbesondere auch proportionale Wertveränderungen zur Kontrastierung von quadratischen Funktionen behandelt. In den an die Unterrichtsphase anschließenden Interviews zeigten fünf der sieben Probanden ein wesentlich umfassenderes Verständnis von proportionalen Mengenveränderungen und den elementaren Eigenschaften linearer Gleichungen:

> „Results showed that students' ways of reasoning about essential properties of linear functions were productively influenced. Furthermore, conceptual connections were identified linking changes in students' ways of reasoning about linear functions to what they learned during the quadratics unit." (Hohensee, 2014, S. 135)

Auf Grundlage seiner Beobachtungen formuliert Hohensee (2014, S. 164 f.) drei Charakteristika rückwirkenden Transfers:

- Rückwirkender Transfer ist kein zufälliger Prozess, sondern resultiert in systematischen Einflüssen auf das Vorwissen der Lernenden, d. h. obwohl es individuelle Unterschiede zwischen den Lernenden gibt, so lässt sich doch eine übergreifende Richtung der Vorwissensveränderung identifizieren.
- Rückwirkender Transfer kann positive und negative Effekte haben, die sich aber nicht zwingend in einer normativen Testbeurteilung widerspiegeln, d. h. die Wirkung von neuem Wissen kann auch zu neuen Schwierigkeiten führen, die zuvor nicht bestanden. Zudem kann es sein, dass die Effekte nur in einer deskriptiven Rekonstruktion des Lernprozesses sichtbar werden und sich der normativen Perspektive verschließen.
- Rückwirkende Transfereffekte sind nicht linear gerichtet, sondern wirken auf vielfältige Weise über verschiedene Handlungsfelder, d. h. auch in Inhalts- und Aufgabenbereichen, die nicht im Zentrum des Lernprozesses stehen, können Effekte rückwirkenden Transfers identifiziert werden.

Hohensee berichtet, dass die Probanden im Anschluss an die Intervention vor allem andere konzeptuelle Beziehungen und Eigenschaften von linearen Funktionen wahrgenommen haben als in den Interviews vor Beginn der Unterrichtseinheit.

**Positiver und Negativer Transfer:** Proaktive Transferdefinitionen beschreiben zumeist eine positive Wirkung. Zum Beispiel beschreibt Steiner Transfer als „die Nutzung von früher erworbenem Wissen im Hinblick auf neue Inhalte oder neue Situationen“, wodurch sich die „Leichtigkeit des Lernens oder Problemlösens“ erhöht und der „zeitliche Aufwand reduziert wird“ (Steiner, 2006, S. 193). Wenn „neues Lernen oder Problemlösen durch vorangegangenes Lernen erleichtert wird, spricht man von *positivem* Transfer“ (Hasselhorn & Gold, 2013, 148, Hervorhebung im Original; vgl. auch Mähler & Stern, 2010). Wird zum Beispiel das schriftliche Additionsverfahren, das im Zahlbereich der natürlichen Zahlen erarbeitet wurde, angewendet um Dezimalzahlen schriftlich miteinander zu addieren, handelt es sich um einen positiven Transfer.

Im Gegensatz zu einer Erleichterung des Lernens kann bestehendes Wissen jedoch auch neues Lernen beeinträchtigen. In diesem Fall spricht man von *negativem* Transfer (Hasselhorn & Gold, 2013, S. 148) oder dem Auftreten von „Interferenzen“ (vgl.Singley & Anderson, 1989; Pennington & Rehder, 1995). Negativer Transfer ist in der mathematikdidaktischen Forschung häufig dokumentiert. Insbesondere in Studien zum Aufbau des Bruchzahlbegriffs ist eine der häufigsten Ursachen für die

Entwicklung von fehlerhaften Vorstellungen und Fehlermustern, dass Eigenschaften und Operationsstrukturen vom Rechnen mit natürlichen Zahlen auf den Umgang mit Bruchzahlen übertragen werden (vgl. Wartha, 2007; Wartha, 2009; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012). So kann zum Beispiel die Übertragung der Vorgänger-Nachfolger-Beziehung natürlicher Zahlen auf die Bruchzahlen als negativer Transfer bezeichnet werden.

Novick (1988, S. 512) weist in ihrer Studie zum Transfer beim Lösen von analogen Problemen darauf hin, dass ein Ausbleiben von Transfer („transfer failure“) von negativem Transfer zu unterscheiden sei. Auf der einen Seite werden überhaupt keine Informationen aus einem Basisproblem auf ein Transferproblem übertragen (ausbleibender Transfer) und auf der anderen Seite werden Informationen aus einem Basisproblem auf ein Transferproblem übertragen, in dem sie zu einer falschen Lösung führen oder sind allgemein nicht in diesem anwendbar (negativer Transfer).

**Bewusster und Automatischer Transfer:** In einem Literaturreview über die Ausdifferenzierung verschiedener Transfermechanismen beleuchten Salomon und Perkins (1989) den bewussten kognitiven Aufwand bzw. das Bemühen, das eine Person in Transferleistungen investiert. Zur Ordnung von unterschiedlichen Qualitäten von Transfer trennen sie zunächst voneinander „wie“ etwas transferiert wird, d. h. die Mechanismen, die zu einem Transfer führen, und „was“ transferiert wird, d. h. die Arten von Wissensstrukturen und Fertigkeiten, die in einem Transfer übertragen werden. Zudem unterscheiden sie weiterhin „in welchem Umfang“ und „mit welcher Distanz“ etwas transferiert wird (Salomon & Perkins, 1989, S. 115 ff.).

Als Ergebnis ihrer Diskussion beschreiben sie zwei Arten von Transfer: „Low-Road“ und „High-Road“ Transfer:

> „Low- road transfer primarily reflects extended practice; distance of transfer depends on [the] amount of practice and variability of contexts in which the practice has occured. High-road transfer, on the other hand, depends on the mindful abstracting of knowledge from a context.“ (Salomon & Perkins, 1989, S. 115)

Der Schlüsselaspekt von Low-Road Transfer ist das Üben in einer Vielzahl unterschiedlicher Kontexte. Durch wiederholte Übung in verschiedenen Anwendungsbereichen wird die Informationsverarbeitung bzw. das Verhalten der Lernenden schneller, müheloser und uneingeschränkt in Bezug auf die kognitiven Kapazitäten der Lernenden. Low-Road Transfer bedarf in der Folge keiner bewussten Aufmerksamkeit oder Anstrengung und vorhandene Fertigkeiten bzw. vorhandene Wissenselemente werden quasi automatisch auf neue Anforderungen übertragen, weshalb in der Literatur auch häufig die Bezeichnung *automatischer* Transfer genutzt wird (vgl. Hasselhorn & Gold, 2013, S. 150). Übertragen werden immer nur ganze Bündel von Fertigkeiten oder Wissensstrukturen und der Transfer von einzelnen Fragmenten oder Teilfertigkeiten sei nicht zu erwarten (Salomon & Perkins, 1989, S. 123).

Während Low-Road Transfer als automatischer Prozess beschrieben wird, der von bestimmten Stimuli ausgelöst und durch umfangreiche Übung unterstützt wird, ist die zentrale Eigenschaft von High-Road Transfer die bewusste und systematische Dekontextualisierung oder Abstraktion von kognitiven Elementen. Dabei verstehen Salomon und Perkins unter einer Abstraktion sowohl ein Produkt als auch einen Prozess der mentalen Repräsentation:

> „An abstraction is a representation of some sort that is more general, less specified, than another representation to which it is compared. [...] A process of abstraction is any process that achieves abstraction by a variety of information-processing maneuvers". (Salomon & Perkins, 1989, S. 124 f.)

Abstraktionen beinhalten sowohl die Loslösung von einem Kontext als auch eine kontextbefreite Repräsentation von Informationen in allgemeiner Form sowie Zusammenfassungen von mehreren Fällen. Diese haben die Form von Regeln, Prinzipien, Begriffen, schematischen Mustern oder Kategorien: „This makes clear how abstraction leads to transfer: It yields a re-presentation that subsumes a greater range of cases" (Salomon & Perkins, 1989, S. 125). Da diese Abstraktionsprozesse nicht von selbst bzw. automatisch ablaufen und vom Lernenden aktiv und bewusst sowie zum Teil unter großen Anstrengungen erarbeitet werden müssen, wird High-Road Transfer auch häufig als *bewusster* Transfer bezeichnet (vgl. Hasselhorn & Gold, 2013, S. 150).

**Naher und Weiter Transfer – Das Problem der Transferdistanz:** Die Vielfalt der im vorigen dargestellten Transferbegriffe und Begriffsunterscheidungen kann einerseits auf den Versuch zurückgeführt werden, verschiedene Qualitäten von Transfer in unterschiedlichen Wissensdomänen zu unterscheiden und zu charakterisieren. Andererseits wird in der Vielfalt der Begriffe deutlich, dass es keine gemeinschaftlich akzeptierte Definition davon gibt, was überhaupt ein „Übertragen", einen neuen „Kontext" oder eine neue „Situation" konstituiert.

In Hinsicht auf eine Verallgemeinerung der in den verschiedenen Transferbegriffen konzeptualisierten Qualitätsunterschiede und Differenzierungen hat sich der Begriff der *Transferdistanz* herauskristallisiert, der die Qualität von Transferleistungen auf einem räumlichen Kontinuum ordnet und veranschaulicht, auf dem zwischen nahem und weitem Transfer unterschieden wird:

> „*Naher Transfer* findet statt, wenn Lern- und Transfermaterial einander ähnlich sind, sich stark überschneiden. [...] Ist jedoch die inhaltliche Überschneidung gering oder gar zu vernachlässigen, handelt es sich um *weiten Transfer*.“ (Klauer, 2011, 29, Hervorhebung des Autors)

Hinter der Unterscheidung zwischen nahem und weitem Transfer steht die Grundannahme, dass

> „es ein Kontinuum von Bewährungssituationen bzw. Leistungsanforderungen gibt, mit zunehmender Unähnlichkeit von der ursprünglichen Lernsituation bzw. Lernanforderung, und dass eine Transferwirkung umso erstaunlicher ist, je weiter man sich auf diesem Kontinuum von der ursprünglichen Lernsituation (Situationstransfer) bzw. von der ursprünglichen Lernanforderung (Anforderungstransfer) entfernt.“ (Hasselhorn & Gold, 2013, S. 149)

Obgleich diese Unterscheidung weitgehend theorieneutral ist, bleibt eine vergleichbare Einordnung von Transferdistanzen auf dem Distanzkontinuum problematisch, da es ohne präzise inhaltsspezifische Festlegungen nicht möglich ist, bedeutsame Unterschiede zwischen Transfereffekten und -Leistungen zu beurteilen. Ungeachtet dessen werden im Folgenden zwei Taxonomien als Versuch der Ordnung von Transferdistanzen und -Qualitäten vorgestellt:

Haskell (2001, S. 29 f.) unterscheidet sechs Stufen von Transfer auf Grundlage einer subjektiven Ähnlichkeit von Ausgangs- und Zielsituation:

„*Level 1: Nonspecific transfer* Nonspecific transfer implies that all learning essentially is transfer of learning because all learning is contingent upon being connected to past learning. This level of transfer, though true and thoroughly necessary, is perhaps trivial in light of daily experiences of transfer.

*Level 2: Application transfer:* Application transfer refers to the application of what we have learned to specific situations. For example, after having learned about computer programming, we are then able to genuinely apply this knowledge to actually program a computer.

*Level 3: Context transfer:* Context transfer, in contrast, refers to the application of what we have learned under slightly different situations. A lack of transfer may occur if the context changes, even if the learned task itself does not change. We experience this type of transfer when „place learning“ plays a central role in learning because learning may be retrieved due to cues being provided by the physical place itself. For example, some of us have failed to recognize someone even though they may be staring at us.

*Level 4: Near transfer:* Near transfer occurs when we transfer previous knowledge to new situations closely similar to, yet not identical to, initial situations. Transferring our experiences associated with driving a car with a manual transmission to driving a truck with a manual transmission reflects an example of near procedural transfer.

*Level 5: Far transfer:* Far transfer entails the application of learning to situations entirely dissimilar to the initial learning. This level of transfer of learning reflects analogical reasoning. For example, learning about logarithms in algebra and applying this knowledge in assessing the growth of bacteria in microbiology.

*Level 6: Displacement or creative transfer:* Displacement or creative transfer results in the creation of a new concept because of the interaction of the newly perceived similarity between the new and the old. This type of transfer of learning involves more than the mere insight that something is similar to something else. For example, the effects of the downward pull of the earth's uniform gravitational field that we experience while standing on earth is equivalent to the effects that we experience while standing in an elevator that is accelerating upwards at precisely the right rate. This transfer of learning, that acceleration and gravity is actually the same thing, refers to the Principle of Equivalence–a basic postulate of Einstein's Theory of General Relativity." (Haskell, 2001, S. 29 f.)

Der Grad der Ähnlichkeit zwischen Lernsituationen, der dieser Hierarchie unterliegt, ist in hohem Maße subjektiv und es ist in vielen Fällen nicht eindeutig, wie nah oder fern sich verschiedene Lernsituationen oder Informationsstrukturen sind. Daher bedarf die Unterscheidung von Transferdistanzen einer bereichsspezifischen und differenzierten Definition. Zudem hängt die Wahrnehmung von Ähnlichkeit stark vom individuellen Vorwissen der Lernenden ab. So kann ein naher Transfer für unerfahrene Lernende sehr weit und ein weiter Transfer für sehr erfahrene Lernende sehr nah sein. Haskell (2001, S. 30) erklärt, dass die beiden ersten Stufen seiner Transfertaxonomie weniger echte („proper") Fälle von Transfer sind, sondern im Grunde als einfache („simple") Lernprozesse zu verstehen sind. Die erste Stufe, auf der wirklich von einem Transfer zu sprechen sei, sei Stufe 4, die in Bezug auf eine zunehmende Unähnlichkeit der Situation und Informationsverarbeitungsprozesse auf den Stufen 5 und 6 erweitert werde. Im Gegensatz zu den Stufen 1–3 erfordern die Stufen 4–6 neue Lernprozesse, damit es zu einem Transfer kommen kann. Nach Haskell (2001, S. 30) ist die Erforderlichkeit neuen Lernens das ausschlaggebende Kriterium für Transfer, da in allen anderen Fällen lediglich bestehendes Wissen zur Anwendung komme.

Einen anderen Zugang zur Unterscheidung von Transferdistanzen und zur Ordnung von Transferqualitäten beschreiben Barnett und Ceci (2002). Für eine Metaanalyse von Transferstudien aus verschiedenen Disziplinen entwickeln sie ein Rahmenmodell für eine vergleichende Beurteilung der Transferdistanz. Sie stellen fest, dass die Frage, welche Art von Transfer in einer Studie berichtet wird, komplexer ist als die Begriffe „nah" und „weit" implizieren:

> „*Near* and *far* can mean many different things, and researchers are not consistent in their usage. Second, it suggests that the memory demands of the task–the manner in which use of transferred knowledge is tested– may affect transfer success and thus may need to be explicitly considered. Third, it cautions that the issue of whether the skill to be transferred is specific or general should not be confounded with discussions of whether the task constitutes near or far transfer." (Barnett & Ceci, 2002, 621, Hervorhebungen im Original)

Aus diesem Grund unterscheiden sie zwischen zwei Ebenen[1] von Transfer (Barnett & Ceci, 2002, S. 621): Der inhaltlichen Ebene („What is transferred?") und der Ebene des Kontexts („When and where learning is transferred from and to?"). Diese Ebenen unterteilen sie jeweils in mehrere Unterkategorien bzw. Dimensionen, auf denen sie ein Kontinuum von Transferdistanzen spezifizieren.

Die Inhaltskomponente brechen sie auf drei Dimensionen herunter: „(a) the specificity–generality of the learned skill, (b) the nature of the performance change assessed, and (c) the memory demands of the transfer task" (Barnett & Ceci, 2002, S. 621).

Auf der Dimension der Spezifität-Generalität der erlernten Fähigkeit unterscheiden Barnett und Ceci (2002 S. 621 f.) zwischen der Übertragung von Faktenwissen, spezifischen und eng umschriebenen Prozeduren, Repräsentationsformen oder allgemeinen Problemlösestrategien und Prinzipien. Dabei verstehen sie unter einer spezifischen Prozedur das Durchlaufen einer bestimmten Schrittfolge im Sinne eines Algorithmus (z. B. schriftliche Rechenverfahren). Demgegenüber setzt der Transfer eines Prinzips ein wesentlich tieferes, strukturelles und kausales Verständnis voraus, wie zum Beispiel die Interpretation einer Statistik vor dem Hintergrund des empirischen Gesetzes der großen Zahlen. Unter dem Transfer einer Repräsentation verstehen sie die Nutzung einer bestimmten Darstellungsweise für einen inhaltlichen Zusammenhang, wie z. B. die Darstellung von Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm oder die Matrizenschreibweise von Parametern. Barnett und Ceci (2002, S. 621) merken an, dass die Unterscheidung einer spezifischen und

[1] Im Wortlaut unterscheiden Barnett und Ceci zwischen zwei Faktoren von Transfer: Dem Inhaltsfaktor und dem Kontextfaktor (Barnett & Ceci, 2002, S. 621). In dieser Darstellung wird jedoch der Begriff „Ebene" gewählt, da die Autoren keine direkten Einfluss*faktoren* beschreiben, sondern Transfer auf zwei Ebenen entlang verschiedener Dimensionen charakterisieren und ordnen.

| **A Content: What transferred** | | | |
|---|---|---|---|
| **Learned skill** | Procedure | Representation | Principle or heuristic |
| **Performance change** | Speed | Accuracy | Approach |
| **Memory demands** | Execute only | Recognize and execute | Recall, recognize, and execute |

| **B Context: When and where transferred from and to** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Near** ← | | | → | **Far** |
| **Knowledge domain** | Mouse vs. rat | Biology vs. botany | Biology vs. economics | Science vs. history | Science vs. art |
| **Physical context** | Same room at school | Different room at school | School vs. research lab | School vs. home | School vs. the beach |
| **Temporal context** | Same session | Next day | Weeks later | Months later | Years later |
| **Functional context** | Both clearly academic | Both academic but one nonevaluative | Academic vs. filling in tax forms | Academic vs. informal questionnaire | Academic vs. at play |
| **Social context** | Both individual | Individual vs. pair | Individual vs. small group | Individual vs. large group | Individual vs. society |
| **Modality** | Both written, same format | Both written, multiple choice vs. essay | Book learning vs. oral exam | Lecture vs. wine tasting | Lecture vs. wood carving |

**Abbildung 1.1** Inhalts- und Kontextebene der Transfertaxonomie von Barnett und Ceci (2002, S. 621)

allgemeinen Fähigkeit direkt vom Lernstand bzw. vom Vorwissen der Lernenden abhängt, womit es unabdingbar sei den Kenntnisstand der Lernenden im Vorhinein zu erheben. Auf den weiteren Inhaltsdimensionen unterscheiden sie die Art der Leistungsveränderung durch einen Transfer, wobei sie zwischen Veränderungen der Geschwindigkeit, der Qualität und dem Zugang der Bearbeitung unterscheiden, sowie den Anforderungen an die Informationsverarbeitung, wobei das Unterscheidungskontinuum von einem bloßen Ausführen einer Handlung bis hin zum Abwägen und Entscheiden zwischen unterschiedlichen Handlungsalternativen reicht.

Ähnlich der Auffächerung der inhaltlichen Ebene unterteilen Barnett und Ceci (2002, S. 623 f.) auch die Kontextebene in mehrere Dimensionen, innerhalb derer jeweils ein Kontinuum von nahen bis weitem Transfer anhand von dimensionsspezifischen Beispielen aufgespannt wird (vgl. Abb. 1.1). Hier unterscheiden sie zwischen dem Inhaltsbereich („Knowledge domain"), aus dem das übertragene Wissen bzw. die übertragene Fähigkeit stammt, dem physischen Kontext als räumliche Distanz zwischen Lern- und Transfersituation, dem zeitlichen Kontext zum Vergleich des zeitlichen Abstands zwischen Lern- und Transferanforderung, dem funktionalen Kontext, in dem zwischen unterschiedlichen Formalitäten von Lern- und Transfersituation unterschieden wird, dem sozialen Kontext und der Modalität von Lern- und Transferanforderung.

Die beiden dargestellten Taxonomien von Haskell (2001) und Barnett und Ceci (2002) haben gemeinsam, dass sie die Distanz eines Transfers auf einem Kontinuum von nah bis weit klassifizieren. Es wird deutlich, dass die Unterscheidung von nahem und weitem Transfer mit einer gewissen Unschärfe behaftet ist. Obgleich bei Haskell die „subjektive Ähnlichkeit" (Haskell, 2001, S. 29 f.) von Ausgangs- und Transfersituation der Ausgangspunkt für die Unterscheidung verschiedener Transferqualitäten ist, so ist festzustellen, dass die Stufen in Haskells Modell vielmehr die kognitiven Anforderungen eines Transfers repräsentieren, wie sie von Barnett und Ceci (2002) auf der inhaltlichen Ebene formuliert werden.

Während Haskells Unterscheidung von nahem und weitem Transfer im Wesentlichen darin besteht, dass für einen nahen Transfer die Anforderungen einander ähnlich, jedoch nicht identisch sind und für einen weiten Transfer keine Ähnlichkeit aufweisen, differenzieren Barnett und Ceci anhand verschiedener Ebenen und Dimensionen von Ähnlichkeit ein breites Spektrum von Transferdistanzen. Es wird deutlich, dass die beiden Klassifikationsschemata sehr allgemein gehalten und nicht für die inhaltliche Planung von Unterricht vorgesehen sind. Ihr Beitrag liegt vielmehr darin, ein Rahmenmodell für den Vergleich verschiedener Transferanforderungen bzw. – im Fall der Taxonomie von Barnett und Ceci – ein Modell zum Vergleich verschiedener empirischer Untersuchungen anzubieten. Die Frage, was genau ein naher und was ein weiter Transfer ist, wird durch die Klassifikationsschemata nicht beantwortet. Diese Frage kann nur auf einer inhaltlichen Ebene im entsprechenden Inhaltsbereich beantwortet werden. Es kann jedoch festgehalten werden, dass die Unterscheidung zwischen einem nahen und weiten Transfer nicht eindeutig ist, sondern nur auf einem Kontinuum und in einem entsprechenden Referenzrahmen vorgenommen werden kann.

**Zusammenfassung**
In diesem Abschnitt wurde ein Ausschnitt aus dem breiten Spektrum an Transferbegriffen dargestellt, die in der Literatur zu finden sind. Die verschiedenen Begriffsunterscheidungen gehen auf diverse theoretische Hintergründe und Grundannahmen des Lernens zurück und sind daher nur bedingt im Rahmen einer hier vorgenommen Gegenüberstellung miteinander vergleichbar. Es soll dennoch festgehalten werden, dass mit dem Begriff Transfer in seinem wörtlichen Sinn stets eine *Übertragung von Elementen des Wissens oder des Lernens* zum Ausdruck gebracht wird. Unter der Annahme, dass Lernen stets in einer Form von Wissen resultiert, wird im Weiteren nicht zwischen diesen Begriffen differenziert, sondern ganz allgemein der Begriff Transfer verwendet.

Das illustrierte Spektrum unterschiedlicher Wirkungsrichtungen und Qualitäten von Transfer ist im Wesentlichen als Ergebnis von Untersuchungen zum Transfer in verschiedenen Wissensdomänen mit unterschiedlichen theoretischen Konzepten von Wissen und Lernen zu interpretieren. Im Hinblick auf den Mathematikunterricht und das Mathematiklernen im Allgemeinen wurde die Darstellung in diesem Abschnitt auf Begriffsunterscheidungen reduziert, die sich auf mathematische Lernprozesse anwenden lassen: Die zeitliche Wirkungsrichtung eines Transfers (proaktiver und retroaktiver bzw. rückwirkender Transfer), die Unterscheidung zwischen lernförderlichem, lernhinderlichem (positiver und negativer) Transfer sowie ausbleibendem Transfer, der kognitiven Bemühung der Lernenden um einen Transfer (automatischer und bewusster Transfer) und zuletzt die Unterscheidung verschiedener Transferdistanzen (naher und weiter Transfer), die als Hilfe für eine inhaltliche Strukturierung von Unterrichtsmaterial von Nutzen sein kann.

Die aufgeführten Begriffsunterscheidungen entstammen zum Teil sehr verschiedenen Forschungstraditionen zu sehr unterschiedlichen Wissensdomänen und sind aus diesem Grund so theorieneutral wie möglich formuliert. In den folgenden Abschnitten werden verschiede Forschungsrichtungen, theoretische Perspektiven, Modelle und empirische Untersuchungen zu Transfer dargestellt und diskutiert, die den theoretischen Hintergrund für diese Arbeit und die Konzeption der empirischen Untersuchung bilden.

## 1.2 Kognitionspsychologische Theorien von Transfer

Die in diesem Abschnitt diskutierten theoretischen Perspektiven stehen im Kontext der Entwicklung von kognitionspsychologischen Konzeptionen von Lernen.

Einen Ausgangspunkt für diese Entwicklung stellen die frühen systematischen Untersuchungen von Thorndike und Woodworth (1901a; 1901b; 1901c) dar, die in ihren experimentellen Studien eine Gegenposition zu den Annahmen der formalen Bildung formulierten und feststellten, dass eine Schulung universeller geistiger Fähigkeiten keinen Einfluss auf das Erlernen spezifischen Wissens hat. In diesem Zusammenhang entwickelte Thorndike seine Theorie der identischen Elemente.

Als Gegenposition zu Thorndikes Theorie der identischen Elemente wird die Theorie des Transfers durch Erkennen von Prinzipien vorgestellt. Im Gegensatz zu Thorndikes Arbeiten schreiben Judd (1908; 1939) und andere Vertreter der Gestaltpsychologie dem Verstehen von allgemeinen Prinzipien und Regelhaftigkeiten eine größere Bedeutung zu. Sie argumentieren, dass aus praktischer Sicht nicht „Drill und Übung", sondern verstehenszentrierte Instruktionsmethoden Transfer ermöglichen.

Mit der Entwicklung von kognitiven Architekturen menschlicher Informationsverarbeitung rückten diese in das Zentrum der Erforschung und Erklärung von Lern- und Transferprozessen. Auf dieser Grundlage wurden einerseits frühe Theorien aufgegriffen, anhand von Informationsverarbeitungsprozessen präzisiert und erweitert. Im zweiten Teil dieses Abschnitt erfolgt zunächst eine kurze Beschreibung der Grundannahmen eines zentralen Modells der menschlichen Informationsverarbeitung. Aufbauend auf dieser werden zwei einflussreiche theoretische Transfertheorien bzw. -Paradigmen dargestellt und diskutiert: Die ACT*(-R) Theorie von Anderson und Kollegen sowie Arbeiten zum Transfer durch Analogiebildung.

### 1.2.1 Frühe systematische Untersuchungen zum Transfer

**Thorndikes Theorie der identischen Elemente**

Thorndike erklärt in seiner Theorie der identischen Elemente, dass ein Wissenstransfer zwischen zwei Aufgaben nur dann stattfinden kann, wenn für die Bearbeitung beider Aufgaben auf die gleichen Wissenselemente zurückgegriffen werden kann.

Diese theoretische Positionierung stellte zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts einen Gegenpol zu den damals weit verbreiteten Annahmen der formalen Bildung dar. Eine Grundannahme der formalen Bildung war, dass das menschliche Gedächtnis aus einer Ansammlung allgemeiner Fähigkeiten, wie z. B. dem Erinnerungsvermögen, der Wahrnehmung, dem Unterscheidungsvermögen oder dem logischen Denken, besteht und diese auf verschiedene Wissensgebiete und Denkanforderungen übertragen werden. So wurde angenommen, dass etwa ein eingehendes Latein- und Geometriestudium diese allgemeinen Fähigkeiten schulen und somit entscheidend zur Entwicklung einer bereichsunabhängigen Denk- und Lernfähigkeit beitragen würde.

Entgegen dieser weit verbreiteten Sicht auf Lernen und Denken wollte Thorndike durch seine Experimente zeigen, dass es keine allgemeinen Denk- und Lernfähigkeiten gibt, sondern das menschliche Gedächtnis aus einem Konglomerat spezifischer Assoziationen besteht: Bestimmte Reize lösen bestimmte Reaktionen aus. Auf diese Weise sei das menschliche Gedächtnis eine Ansammlung unzähliger spezifischer Reiz-Reaktions-Ketten. Somit sei ein Transfer zwischen zwei Anforderungen nur dann möglich, wenn diese in Teilen identisch sind und auf die gleichen Wissenselemente zurückgegriffen wird:

> „One mental function or activity improves others insofar as and because they are in part identical with it, because it contains elements common to them. Addition improves multiplication because multiplication is largely addition; knowledge of Latin gives increased ability to learn French because many of the facts learned in the one case are needed in the other." (Thorndike, 1906, S. 243)

In ihren Experimenten bezeichnen Thorndike und Woodworth (1901a) diese spezifischen Assoziationen als mentale Funktionen, die sie als Grundlage für spezifische Handlungen, wie z. B. Buchstabieren, Multiplizieren, das Unterscheiden von Längen, Flächen, Gewichten, oder etwa das Markieren von Buchstaben in einem Text (Thorndike & Woodworth, 1901a, S. 247) betrachten. Funktionen definieren sie dabei spezifisch für eine bestimmte Handlung, wobei es keine Rolle spielt, ob diese Handlung aus verschiedenen Teilhandlungen besteht. Die Grundidee ihrer Experimente war, dass das Training von einer ersten Funktion oder Gruppe von Funktionen sich auf das Training einer zweiten Funktion oder Funktionsgruppe überträgt und diese verbessert.

In einer frühen Studie untersuchten Thorndike und Woodworth unter dieser Annahme, ob die Funktion des Schätzens von Flächeninhalten von Rechtecken die Funktionen des Schätzens von Flächeninhalten anderer Figuren, wie z. B. Kreisen und Dreiecken, verbessert. Zu diesem Zweck schätzten die Probanden zunächst die Flächeninhalte von Rechtecken (Testserie 1) und anderen Formen (Testserie 2). Dabei hatten alle Figuren einen Flächeninhalt zwischen 10 und 100 $cm^2$ und die Probanden konnten für ihre Schätzungen auf drei Quadrate mit den Flächeninhalten 1, 25 und 100 $cm^2$ als Referenzgröße zurückgreifen. In einer Übungsphase trainierten die Probanden im Anschluss das Schätzen von Flächeninhalten von Rechtecken mit einer Vielzahl von verschieden großen rechteckigen Papierausschnitten, auf deren Rückseite der genaue Flächeninhalt angegeben war. Nach etwa 1000 bis 2000 Übungen wiederholten die Probanden den Ausgangstest (Testserien 1 und 2).

Es stellte sich heraus, dass die Probanden Flächeninhalte rechteckiger Flächen nach dem Training wesentlich besser schätzen konnten als vor dem Training, jedoch nur leicht verbesserte Ergebnisse beim Schätzen der Flächeninhalte von Kreisen und Dreiecken zeigten. Thorndike und Woodworth (1901a) schließen aus diesen Ergebnissen, dass die Fähigkeit bzw. die mentale Funktion des Schätzens der Flächeninhalte von Rechtecken nicht auf das Schätzen von Flächeninhalten anderer Figuren übertragen werden konnte. Diese Beobachtung begründen die Autoren mit der Annahme, dass das Schätzen von Flächeninhalten keine isolierte Funktion sei, sondern eine Gruppe von Funktionen, die aus verschiedenen Funktionen zusammengesetzt ist und von diversen Eigenschaften des Schätzobjekts, z. B. Form und Größe, abhängt: „The function of estimating areas is really a function-group, varying according to the data (shape, size, etc.)“ (Thorndike & Woodworth, 1901a, S. 255).

In einem anschließenden Experiment versuchten Thorndike und Woodworth (1901a) diesen Befund noch weiter zu bestärken, indem sie dasselbe Experiment erneut durchführten, die Flächeninhalte der zu schätzenden Figuren jedoch auf 40 bis 50 $cm^2$ einschränkten. Damit wollten sie zeigen, dass diese wesentlich eingeschränktere Fähigkeit, Flächeninhalte von Figuren mit 40 bis 50 $cm^2$ zu schätzen, nicht eine isolierte Funktion ist, sondern ebenfalls eine Funktionsgruppe ist. Die Ergebnisse dieses Experiments bestätigten Thorndike und Woodworth in genau dieser Annahme und unterstützten ihre Reiz-Reaktions-Erklärung von Lernen. Sie beobachteten, dass die Probanden z. B. Rechtecke mit einem Flächeninhalt von 42 $cm^2$ besser schätzten als Rechtecke mit einem Flächeninhalt von 41 $cm^2$. Die Autoren schlossen aus diesem Experiment, dass die Fähigkeit den Flächeninhalt eines Rechtecks zu schätzen nicht dazu beiträgt, den Flächeninhalt eines unwesentlich größeren Rechtecks zu schätzen. Folglich sei es möglich, dass zwei sehr ähnliche mentale Funktionen unabhängig voneinander und zum Teil sehr unterschiedlich entwickelt sind:

> „[...] the ability to judge one magnitude is sometimes demonstrably better than the ability to judge the next magnitude; one function is better developed than its neighbor. The functions of judging nearly equal magnitudes are, sometimes at least, largely separate and independent. A high degree of ability in one sometimes coexists with a low degree of ability in the others.“ (Thorndike & Woodworth, 1901a, S. 261)

In einem anderen Experiment (Thorndike & Woodworth, 1901c) ließen Thorndike und Woodworth die Probanden Wörter in Texten markieren, die bestimme Buchstaben enthalten. Dabei trainierten die Probanden unter anderem Wörter zu finden, die die Buchstaben e und s enthalten. Nach dieser Übung wurden die Fähigkeiten der Probanden getestet Wörter mit den Buchstaben e und r, s und p sowie zwei neuer Buchstaben zu markieren. Die Ergebnisse dieses Experiments zeigten, dass die Probanden im Anschluss an das Training bessere Ergebnisse beim Markieren von Wörtern mit den Buchstaben e und s hatten als beim Markieren von Wörtern mit zwei neuen Buchstaben. Dieses Ergebnis interpretierten die Autoren als eine weitere Bekräftigung ihrer Theorie der identischen Elemente, da lediglich die Fähigkeiten verbessert wurden, die identisch zu den Inhalten des Trainings waren. Es stellte jedoch auch heraus, dass die Ergebnisse der Probanden, die das Training durchlaufen hatten, beim Markieren von Wörtern mit zwei neuen Buchstaben signifikant bessere Ergebnisse zeigten als die Probanden der Kontrollgruppe, die kein Training durchlaufen hatten. Folglich konnte ein Transfer beobachtet werden, der nicht allein durch die Reiz-Reaktions-Theorie erklärt werden konnte.

Ein wesentliches Problem mit Thorndikes Theorie der identischen Elemente war, dass er nicht genau spezifizieren konnte, wann genau zwei Wissenselemente *identisch* sind. Auch nach einer Vielzahl unterschiedlicher Experimente derart, wie sie hier beschrieben wurden, konnte Thorndike diesen Kern seiner Theorie nicht hinreichend beschreiben:

> „By identical elements are meant mental processes which have the same cell action in the brain as their physical correlate. It is of course often not possible to tell just what features of two mental abilities are thus identical.“ (Thorndike, 1914, S. 249)

Zusammenfassend besagt die Theorie der identischen Elemente, dass ein Transfer nur dann stattfindet, wenn in der Anwendungssituation Wissenselemente benötigt werden, die in identischer Weise in der Lernsituation trainiert wurden. Die Theorie orientiert sich an festen Reiz-Reaktions-Verknüpfungen und damit an vermeintlich objektiven Merkmalen der Lernsituation: Ein bestimmter Reiz löst eine bestimmte Handlung bzw. einen Transfer aus. Es bleibt jedoch ungeklärt, was genau *identische* Wissenselemente sind.

**Transfer durch Erkennen von Prinzipien**

Eine der ersten Arbeiten, die Thorndikes Theorie der identischen Elemente nachhaltig in Frage gestellt hat, war die von Judd (Judd, 1908). Von der deutschen Gestaltpsychologie beeinflusst argumentierte Judd, dass Transfer im Wesentlichen davon abhängt, inwieweit die Lernenden die *kausalen Prinzipien* und die *Tiefenstruktur* der Lern- und Transferanforderung verstanden haben. Sofern die Lernenden das allgemeine Prinzip verstanden haben, sind sie in der Lage die gemeinsamen kausalen Strukturen zweier Situationen zu erkennen und in der Folge das Gelernte zu übertragen.

In seinem klassischen Experiment (Judd, 1908) wurde jungen Schülern die Aufgabe gestellt, Dartpfeile auf ein Ziel unter der Wasseroberfläche eines Teichs zu werfen. Während die Kontrollgruppe ohne jegliche Instruktion Gelegenheit bekam, ihre Zielwürfe zu üben, wurde der Experimentalgruppe in dieser Zeit erklärt, wie Wasser Licht bricht und inwieweit dieses Prinzip dabei helfen kann, das Ziel besser zu treffen. Die Probanden in der Experimentalgruppe hatten währenddessen keine Gelegenheit Würfe zu üben. Im Anschluss an die Lernphase wurden die Ergebnisse beim Wurf auf das unveränderte Ziel erhoben. Die Ergebnisse zeigten dabei keinen signifikanten Unterschied in den Wurfergebnissen der beiden Gruppen. Im Anschluss an diesen ersten Durchlauf wurde der Abstand zwischen dem Ziel und der Wasseroberfläche verändert. Nach diesen Veränderungen zeigte die Experimentalgruppe wesentlich bessere Wurfergebnisse als die Gruppe, die keine Erklärung zur Lichtbrechung durch Wasser erhalten hatte:

> „The boys without theory were very much confused. The practice gained with twelve inches of water did not help them with four inches. Their errors were large and persistent. On the other hand, the boys who had the theory, fitted themselves to four inches very rapidly. Their theory evidently helped them to see the reason why they must not apply the twelve-inch habit to four inches of water. Note that theory was not of value until it was backed with practice, but when practice and theory were both present the best adjustment was rapidly worked out." (Judd, 1908, S. 37)

Die Ergebnisse dieses Experiments stützen somit Judds Argument, dass durch das Erlernen, Verstehen und Anwenden eines *Prinzips* Ergebnisse erzielt werden konnten, die allein durch Übung nicht zu erreichen waren.

Ähnliche Ergebnisse berichten auch Katona (1940) und Wertheimer (1959). Sie bezeichnen die Art des Lernens, wie sie Assoziationisten wie Thorndike postulierten, als „senseless learning" und plädieren für ein „meaningful learning" bzw. verständiges Lernen, das auf der Organisation von strukturell verbundenen Ideen beruht (Katona, 1940; vgl. auch Singley & Anderson, 1989, S. 9). So unterrichtete Katona (1940) Lernende in Karten- und Streichholzlegetricks. Eine Gruppe wurde dabei mit einer Gedächtnismethode unterrichtet, die andere mit einer Verstehensmethode. Die Lernenden in der Gedächtnisgruppe lernten die sukzessiven Handlungsabläufe eines Tricks auswendig, während bei der Instruktion der Lernenden in der Verständnisgruppe die verständige Erarbeitung des zugrundeliegenden Prinzips im Vordergrund stand. Während die Lernenden der Gedächtnisgruppe bessere Ergebnisse bei der Reproduktion des Tricks zeigten als die Verständnisgruppe, gelang es den Lernenden der Verständnisgruppe wesentlich besser neue Tricks zu erlernen. Katona (1940) folgert aus diesen Ergebnissen, dass durch Auswendiglernen lediglich spezifische Reaktionen ausgebildet würden, deren Anwendbarkeit auf isomorphe Probleme beschränkt sei. Im Gegensatz dazu führe das Lernen durch Verstehen dazu, dass die Lernenden allgemeine Prinzipien und Gesetzmäßigkeiten erkennen, die auf unterschiedliche Problemsituationen angewendet werden können.

Wertheimer (1959) verdeutlichte dies in einem Experiment mit mathematischem Untersuchungsgegenstand: Der Flächenberechnung von Parallelogrammen. In seinem Experiment wurde den Lernenden gezeigt, wie sie über zweimaliges Fällen eines Lots ein Parallelogramm in ein Rechteck transformieren können (vgl. Abb. 1.2), um so die ihnen hinreichend bekannte Formel zum Berechnen des Flächeninhalts eines Rechtecks anwenden zu können. Wertheimer stellte jedoch fest, dass nicht alle Lernenden das Prinzip der Transformation eines Parallelogramms in ein Rechteck erkannt hatten und stattdessen lediglich die Handlung des Fällens der Lote bzw. des Einzeichnens von zwei Senkrechten als Lösungsmethode auswendig gelernt haben. In Folge der Lernphase bearbeiteten die Lernenden Transferaufgaben, bei denen einerseits die Orientierung des Parallelogramms geändert wurde, und andererseits verschiedene Figuren zur Flächenberechnung vorgegeben wurden. Wertheimer beobachtete, dass die Lernenden, die das Prinzip der Transformation von einem Parallelogramm in ein Rechteck erkannt und als Strategie verstanden hatten, diese Lösungsstrategie auch erfolgreich in den Transferaufgaben anwenden konnten. Im Gegensatz dazu übertrugen die Lernenden, die das Prinzip der Transformation nicht erkannt hatten, das Vorgehen aus der Lernaufgabe in fehlerhafter Weise. So ignorierten diese Lernenden etwa die geänderte Orientierung des Parallelogramms und zeichneten dennoch senkrechte Linien auf die vermeintliche Grundfläche des Parallelogramms (siehe (b) in Abb. 1.2) oder übertrugen selbiges Verfahren auf Figuren, in denen keine Anwendung möglich war (siehe (c) in Abb. 1.2). Wertheimer schloss aus seinen Beobachtungen, dass die Lernenden in der gleichen Lernsituation unterschiedlich sinnvolle Strategien entwickeln und dass die Ergebnisse bei der Bearbeitung von Transferaufgaben zeigen, was die Lernenden tatsächlich gelernt haben.

Ungeachtet dieser und weiterer Befunde von Judd und verschiedenen Gestaltpsychologen blieben sie hinter dem Einfluss der Theorie der identischen Elemente zurück und bestärkten die derzeitige Sicht, dass Transfer ein höchst seltenes Phänomen ist und lediglich dann zu beobachten ist, wenn Lern- und Transferaufgabe einander sehr ähnlich in ihren Oberflächenmerkmalen sind und die Lernenden einen direkten Hinweis für die Möglichkeit des Übertragens von bekannten Problemlösestrategien erhalten. Damit es dann zu diesem Transfer kommen kann, ist es zudem notwendig, dass dieselben allgemeinen Regeln, die für die Lösung der Lernaufgabe bzw. in der Lernsituation erforderlich sind, auch in der Transferaufgabe gelten und

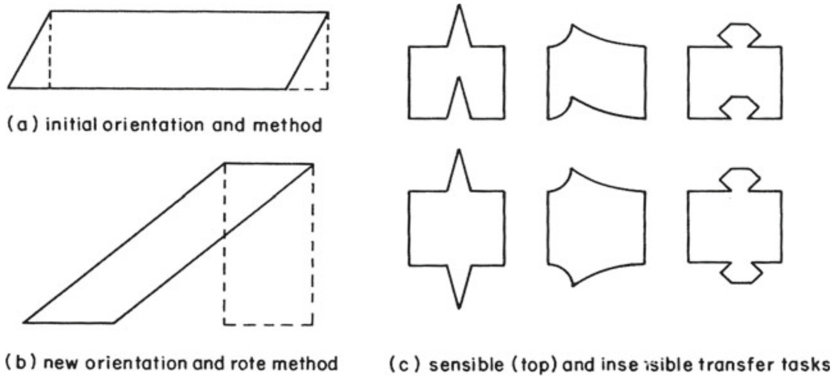



**Abbildung 1.2** Bestimmen der Flächeninhalte von Parallelogrammen und weiteren Figuren (Wertheimer, 1959; Abbildung nach Singley & Anderson 1989, S. 10)

zur Lösung genutzt werden können. Die Regeln und Prinzipien, die die Lernenden in der ursprünglichen Lernphase kennengelernt haben, können im Weiteren als Abstraktionen für eine ganze Klasse von Aufgabentypen anwendbar sein. Dadurch hängt der Wert der erarbeiteten Regeln und Prinzipien ganz entscheidend von ihrer Nutzungsflexibilität ab (vgl. Hasselhorn & Gold, 2013, S. 152).

Allgemein impliziert die Theorie des Transfers durch Erkennen von Prinzipien, dass es in praktischer Sicht nicht „Drill und Übung“, sondern verstehenszentrierte Lehr- und Lernmethoden sind, die eine „reflexive kognitive Informationsverarbeitung auslösen“ (vgl. Hasselhorn & Gold, 2013, S. 153) und dadurch Transfer ermöglichen. Entgegen dem Auswendiglernen von Faktenwissen ist es das Abstrahieren von spezifischem Wissen sowie das Generieren von Regelwissen und allgemeinen Prinzipien, was zu einem Lern- und Transfererfolg führt.

### 1.2.2 Transfer auf Grundlage von Informationsverarbeitungsprozessen

Moderne kognitionspsychologische Transfertheorien beschreiben die Übertragung von Wissen und Lernen auf Grundlage von Informationsverarbeitungsprozessen. Diesen liegt ein Modell der Architektur des menschlichen Gedächtnisses zugrunde, in dem die Verarbeitung und Speicherung von Informationen die Kernprozesse des Lernens darstellen. Im ersten Teil dieses Abschnitts werden zunächst Grundannahmen dieses Modells beschrieben. Im zweiten Teil wird die ACT*(-R) Theorie von Anderson beschrieben, in dessen Rahmen die Kompilierung von Wissen entscheidend für den Transfer von Wissen und Fertigkeiten ist. Obgleich diese Theorie bereits die Bildung von Analogien beschreibt, wurde dieser Transfermechanismus wesentlich umfassender im Bereich des Problemlösens untersucht, sodass im dritten Teil dieses Abschnitts die zentralen Befunde zum Transfer durch Analogiebildung dargestellt werden.

**Grundannahmen der menschlichen Informationsverarbeitung**
Das Modell der Informationsverarbeitung geht davon aus, dass die kognitive Architektur in drei Gedächtnistypen organisiert ist: Informationen gelangen als Reize zunächst in die *sensorischen Register*[2] und werden von dort in das *Arbeitsgedächtnis* (z.T. als Kurzzeitgedächtnis bezeichnet) weitergeleitet. Im Arbeitsgedächtnis werden die Informationen in Interaktion mit dem *Langzeitgedächtnis* verarbeitet, in dem sie schließlich in Form von *Schemata* gespeichert werden (vgl. R. C. Atkinson & Shiffrin, 1968; Baddeley, 1997; Anderson, 1983).

**Langzeitgedächtnis:** Das Langzeitgedächtnis gilt als zentraler Speicher des kognitiven Systems. In ihm werden Wissen und Fertigkeiten langfristig gespeichert und es enthält alle Informationen, die gegenwärtig nicht benutzt werden, jedoch für das Verstehen benötigt werden (vgl. Bower, 1968; Kirschner, 2002, S. 2). Dadurch bestimmen die im Langzeitgedächtnis gespeicherten Informationen nahezu jegliche kognitive Aktivität (vgl. Sweller, 2005, S. 20). Es wird angenommen, dass das Langzeitgedächtnis eine unbegrenzte Speicherkapazität hat und Informationen permanent gespeichert werden (vgl. Kirschner, 2002, S. 2 f.).

Informationen werden in Form von *Schemata* im Langzeitgedächtnis gespeichert. Schemata sind kognitive Konstrukte, die Informationselemente entsprechend ihrer Anwendungsmöglichkeiten kategorisieren (vgl. Chi, Glaser & Rees, 1982) und zu Einheiten zusammenfassen. Auf diese Weise werden Begriffe, Prozeduren, etc. hierarchisch organisiert und miteinander verknüpft (vgl. Bartlett, 1932, S. 200; Anderson, 1983, S. 37; Gick & Holyoak, 1983, S. 6; Kirschner, 2002, S. 3). Schemata können große Informationsmengen enthalten und werden dennoch als Einheiten im Arbeitsgedächtnis verarbeitet (vgl. Kirschner, 2002, S. 3). Durch sie können von

[2] Die sensorischen Register nehmen alle Eindrücke auf, die auf die verschiedenen Sinnessysteme einwirken. Sie speichern kurzfristig akustische, visuelle, taktile und andere Reize für weitere Verarbeitungsprozesse (vgl. Vaterrodt-Plünnecke & Bredenkamp, 2006, S. 298). Da die sensorischen Register für die nachfolgenden Beschreibungen kognitiver Transfermechanismen lediglich von untergeordneter Relevanz sind, wird auf eine nähere Erörterung in dieser Arbeit verzichtet.

Lernenden erkannte Muster bereits gespeicherten bzw. erlernten strukturähnlichen Mustern (z. B. im Rahmen von Problemlöseprozessen) zugeordnet werden und auf diese Weise die situationsentsprechenden Reaktionen spezifiziert werden, die mit den bekannten Mustern verknüpft sind (vgl. Sweller & Cooper, 1985, S. 60).

Schemata sind sehr spezifisch. So werden für die Bestimmung von $a$ in den Gleichungen $ab = c$ und $a + b = c$ unterschiedliche Schemata benötigt, da sie zu unterschiedlichen Kategorien gehören und unterschiedliche Rechenschritte erfordern (vgl. Sweller & Cooper, 1985, S. 60). Während für das Auflösen nach $a$ in der Gleichung $ab = c$ aufgrund des in Schemaform organisierten Vorwissens erkannt werden muss, dass $ab$ ein Produkt ist und demnach eine Division durch $b$ benötigt wird, muss für die Gleichung $a + b = c$ erkannt werden, dass $a + b$ eine Summe ist und folglich $b$ subtrahiert werden muss. Demnach bedarf es für ein Auflösen der Gleichung $ab = c$ ein (Problemlöse-) Schema für das Auflösen eines Produkts und für die Gleichung $a + b = c$ ein Schema zum Auflösen einer Summe.

Lernen bedeutet somit die Bildung, Restrukturierung oder Verknüpfung bereits vorhandener und neu erworbener Schemata. Ein wichtiger Teilprozess dabei ist die Automatisierung von Schemata:

> „Automatic detection develops when stimuli are consistently mapped to responses; then the targets develop the ability to attract attention and initiate responses automatically; immediately, and regardless of other inputs or memory load.“ (Schneider & Shiffrin, 1977, S. 51)

Das Aktivieren von neu erworbenen oder neu verknüpften Schemata bedarf bewusster Anstrengung und Konzentration. Mit zunehmender Automatisierung wird ihr Einsatz flexibler und müheloser und es besteht ein breites Spektrum von Automatisierungsgraden zwischen einem nicht entwickelten und einem voll automatisierten Schema (vgl. Kirschner, 2002, S. 3; Sweller, 1994, S. 297).

Die Ausbildung von Schemata erfolgt durch die Verarbeitung von Informationen im Arbeitsgedächtnis der Lernenden.

**Arbeitsgedächtnis:** Das Arbeitsgedächtnis ist ein Kurzzeitspeicher (vgl. R. C. Atkinson & Shiffrin, 1968), der für alle bewussten Aktivitäten genutzt wird und der direkten Kontrolle des Lernenden untersteht (vgl. Kirschner, 2002, S. 2; Sweller, 2004, S. 12). Wohingegen die Speicherung von Wissen im Langzeitgedächtnis vorgenommen wird, findet die Verarbeitung und Verknüpfung von Wissen im Arbeitsgedächtnis statt. Diese Informationen können sowohl bereits strukturiert und aus dem Langzeitgedächtnis abrufbar sein, als auch neue bisher nicht gespeicherte

Informationen sein, die durch die sensorischen Register in das Arbeitsgedächtnis gelangen.

Das Arbeitsgedächtnis hat im Gegensatz zum Langzeitgedächtnis eine sehr geringe Kapazität und es können je nach Bekanntheitsgrad und Vernetzung der Informationen bis zu sieben (vgl. Miller, 1956; Baddeley, 1992) neue Informationen im Arbeitsgedächtnis kurzzeitig aktiviert werden. Sofern diese Informationen miteinander vernetzt oder verarbeitet werden, reduziert sich diese Anzahl auf vier Informationseinheiten (vgl. Cowan, 2000, S. 107), wobei individuelle Dispositionen diese Zahl weiter begrenzen können. Entsprechend ihres Grads an Komplexität können Informationen ohne mündliche Wiederholung bis zu einer Minute lang im Arbeitsgedächtnis abgerufen werden (vgl. Dosher, 2003, S. 570). Für Informationen, die aus dem Langzeitgedächtnis im Arbeitsgedächtnis abgerufen und verarbeitet werden, sind bislang keine Kapazitätsgrenzen bekannt (vgl. Sweller, 2004, S. 13).

**Interaktion zwischen Arbeits- und Langzeitgedächtnis:** Zur Ausbildung von Schemata müssen die benötigten Informationen im Arbeitsgedächtnis organisiert werden, bevor sie im Langzeitgedächtnis integriert werden können. Da das Arbeitsgedächtnis aufgrund seiner geringen Speicherkapazität nur wenige Informationen gleichzeitig verarbeiten kann, gilt dieses als „bottleneck“ (Miller, 1956, S. 95) des Informationsverarbeitungsprozesses bzw. als begrenzendes Element im Lernprozess. Verstehen wird auf Grundlage dieses kognitiven Modells als die gleichzeitige Verarbeitung der für ein bestimmtes Ziel benötigten verknüpften Elemente definiert, womit eine Veränderung der Strukturen im Langzeitgedächtnis verbunden ist (vgl. Sweller, 2005, S. 20; Marcus, Cooper & Sweller, 1996, S. 93).

Neben seiner Funktion als Langzeitspeicher für Informationen unterstützt das Langzeitgedächtnis auch den Prozess der Informationsverarbeitung, indem es Schemata zur Bildung von *chunks* im Arbeitsgedächtnis verfügbar macht (vgl. Miller, 1956, S. 93; Sweller, 1994, S. 299). Chunks bezeichnen Zusammenfassungen von mehreren Informationseinheiten zu einer übergreifenden Einheit, die im Arbeitsgedächtnis als einzelne Information verarbeitet werden kann (Simon, 1974, S. 483):

> „A single tree, not thousands of leaves and branches needs to be remembered; a single word, not the individual letters or marks on a piece of paper need be remembered; the number of words on a page may exceed working memory but the number of ideas or concepts may not.“ (Sweller, 1994, S. 299)

Entgegen der begrenzten Anzahl an Informationseinheiten, die im Arbeitsgedächtnis behalten werden können, ermöglichen chunks die Anzahl an Informationen im

Arbeitsgedächtnis beträchtlich zu erhöhen, was als eine zentrale Funktion der Schemabildung betrachtet wird (vgl. Sweller, 1994, S. 299).

Sweller und Cooper (1985) konnten in einer Reihe von Experimenten zu Äquivalenzumformungen von algebraischen Gleichungen zeigen, dass ein Verständnis von Umformungsregeln, wie z. B. dem Distributivgesetz $a(b+c) = ab+bc$, auf der Verknüpfung von verschiedenen Anwendungserfahrungen beruht: „[...] a representation of a rule that allows its errorless use may need to be abstracted from a large number of the schemas that incorporate it" (Sweller & Cooper, 1985, S. 77 f.). Dadurch ist es den Lernenden möglich eine Struktur in einer Gleichung zu erkennen und zu entscheiden, ob zum Beispiel das Ausklammern in Gleichungen, wie $(a+b)\cdot e = \frac{afg}{a}$ oder $\frac{a\cdot(a+f)}{a} + b = g$, zur Freistellung der Variable $a$ beiträgt oder nicht. Im Vergleich zu einem Anfänger, der diese Regeln noch nicht automatisiert und abstrahiert hat und aus diesem Grund ineffiziente und fehlerhafte Umformungen vornimmt, können fortgeschrittene Lernende auf ihre vorhandenen Erfahrungen zurückgreifen, machen dadurch weniger Fehler und lösen Gleichungen effizienter in weniger Schritten. Analoge Effekte konnte zuvor de Groot (1965) bei der Rekonstruktion von Brettstellungen im Schachspiel nachweisen.

Wohingegen ein bewusster Einsatz nicht ausreichend automatisierter Schemata zu einer erhöhten kognitiven Belastung führt (vgl. Sweller, 1994, S. 298), können ausreichend automatisierte Schemata, die im Langzeitgedächtnis abgelegt sind, in nahezu unbegrenzter Anzahl ohne kognitive Belastung im Arbeitsgedächtnis geladen werden (vgl. Ericsson & Kintsch, 1995, S. 239; Paas, van Gog & Sweller, 2010, S. 117). Im Vergleich zu neuen Informationen, die nur sehr kurze Zeit im Arbeitsgedächtnis gespeichert werden können, unterliegt die Aktivierung von im Langzeitgedächtnis gespeicherten Schemata keiner zeitlichen Begrenzung (vgl. Kalyuga, 2011, S. 12).

**Adaptive Control of Thought (ACT*) und Wissenskompilierung**

In der Folge der Entwicklung der ersten kognitiven Architekturen beschrieben Singley und Anderson (1989) eines der ersten Transfermodelle auf Ebene von Informationsverarbeitungsprozessen. Aufbauend auf Andersons (1983; 1987; 1993) ACT-Theorie der Wissensaneignung präzisieren und erweitern Singley und Anderson (1989) Thorndikes Theorie der identischen Elemente, indem sie die Identität von Wissenselementen auf kognitiver Ebene als Produktionsregeln definierten und beschrieben.

Anderson (1982, S. 370; vgl. auch 1983; 1987; 1993) unterscheidet zwei Arten von Informationen, die im Langzeitgedächtnis gespeichert werden: Deklaratives Wissen und prozedurales Wissen. Während deklarative Wissensstrukturen im Sinne eines semantischen Netzwerks Fakten und Annahmen beinhalten, die insbesondere dazu dienen, Informationen zu entschlüsseln und zu interpretieren, beinhalten prozedurale Wissensstrukturen ausschließlich Wissen über die Durchführung spezifischer Verfahren.

Den Erwerb von Wissen beschreiben Singley und Anderson auf zwei Stufen:

> „A *declarative* stage, where a declarative representation of the skill is interpreted by general productions, and a *procedural* stage, where the skill is directly embodied in domain-specific productions“. (Singley & Anderson, 1989, 31, Hervorhebungen im Original)

Folglich bedarf es zunächst einer Interpretation der neuen Informationen auf Grundlage bereits vorhandener deklarativer Wissensstrukturen, bevor eine neue Fähigkeit als spezifisches Verfahren integriert wird. Wissen wird in diesem Modell in Form von *Produktionen* bzw. *Produktionsregeln* gespeichert, die als spezifische Verknüpfungen von Bedingungen mit Handlungen (Wenn-Dann-Regeln) beschrieben werden: „The production has a condition that specifies the circumstances under which the production can apply and an action that specifies what should be done when the production applies“ (Anderson, 1982, S. 370). Diese Produktionen können sehr komplexe Bedingungskonstellationen sowie anspruchsvolle Handlungen umfassen.

Die Ausbildung derartiger Produktionsregeln erfolgt über die *Wissenskompilierung*, in der deklarative in prozedurale Wissensstrukturen überführt werden (1982, S. 370; 1989, S. 31). Die Kompilierung von Wissen kann als Generalisierung durch die wiederholte analoge Verwendung derselben Wissensstruktur verstanden werden. Über die wiederholte Anwendung in verschiedenen Situationen werden in diesem Kompilierungsprozess charakteristische Merkmale der Anwendungsbedingungen und -Handlungen abstrahiert (vgl. Singley & Anderson, 1989, S. 31). Nach der Kompilierung gelten die Produktionsregeln als hoch gebrauchsspezifisch und ihre Anwendung erfolgt größtenteils automatisch (vgl. Anderson & Fincham, 1994; Pennington, Nicolich & Rahm, 1995): Wenn eine bestimmte Handlungskonstellation eintritt, wird die spezifische Handlungsfolge ausgelöst.

Die Überführung von deklarativem Wissen in prozedurales Wissen beschreibt Anderson (1983; 1987; vgl. auch Renkl, 1996) in drei Stufen:

1. In der ersten Stufe, der *interpretative stage*, wird deklaratives Wissen über allgemeine (domänenspezifische) Problemlöseprozeduren interpretiert, was mit einer hohen kognitiven Belastung verbunden ist. Bei einer wiederholten Anwendung dieser sogenannten schwachen Prozeduren auf bestimmte deklarative Wissenseinheiten kommt es zur zweiten Stufe.

2. In der zweiten Stufe, der *procedural stage*, kommt es zur Wissenskompilierung, wobei eine prozedurale Repräsentation einer Fertigkeit generiert wird. Diese Fertigkeit ist in Grenzen unmittelbar anwendbar.
3. Auf der dritten und letzten Stufe erfolgt eine sogenannte Feinabstimmung (*tuning*) der prozeduralen Wissenseinheit. Diese Feinabstimmung erfolgt über Generalisierungsprozesse, die das Anwendungsfeld einer Prozedur erweitern, Diskriminierungsprozesse, durch die Anwendungsbedingungen begrenzt werden, und Stärkungsprozesse, die erfolgreiche Prozeduren stärken und weniger erfolgreiche Prozeduren schwächen.

Auf Grundlage dieses Modells kommt es dann zu einem Transfer zwischen zwei Anforderungen, wenn diese mindestens eine Produktionsregel gemeinsam haben, d. h. wenn genau dieselbe Handlung unter den genau gleichen Bedingungskonstellationen gefordert ist: „To the extent that the production sets overlap, transfer would be positive from one task to another“ (Singley & Anderson, 1989, S. 31 f.). Entscheidend für einen Transfer ist somit, dass die Anforderungen eine Handlung gemeinsam haben, die durch dieselben Bedingungen ausgelöst werden.

Auf Grundlage von Überschneidungen von Wissenseinheiten kann das ACT-Modell Transfer auf vier Arten beschreiben (Singley & Anderson, 1989, S. 32 ff.):

DEKLARATIV- DEKLARATIV: Diese Art von Transfer tritt auf, wenn existierende deklarative Wissensstrukturen den Erwerb neuer deklarativer Wissensstrukturen unterstützen oder beeinträchtigen. Der zentrale Befund zu diesem Transfer ist, dass Fakten, sofern sie einmal erlernt wurden, nicht noch einmal gelernt werden müssen, unabhängig vom Kontext oder der Wissensdomäne, in der die bekannten Fakten vorkommen (vgl. Harvey & Anderson, 1996). Thibadeau, Just und Carpenter (1982) konnten zum Beispiel beobachten, dass bereits bekannte Wörter oder Konzepte in einem Text etwa 600 bis 700 *ms* schneller erkannt werden.

DEKLARATIV- PROZEDURAL: Diesen Transfer bezeichnen Singley und Anderson (1989, S. 34) als häufig auftretend, da er im ACT-Modell dem Prozess der Wissenskompilierung entspricht und folglich immer dann auftritt, wenn eine neue Fähigkeit erlernt wird, indem eingekapseltes deklaratives Wissen benutzt wird um ein neues Verfahren zu konstruieren. Beim Lösen von Problemen wird dieser Transfer zumeist durch die Bildung von Analogien mediiert: Durch die Bildung einer Analogie werden die deklarativen Wissensrepresentationen der Lösung eines Problems auf die Lösung eines neuen Problems übertragen (vgl. auch Bovair & Kieras, 1991; Harvey & Anderson, 1996; Singley & Anderson, 1989).

PROZEDURAL- DEKLARATIV: Dieser Transfer tritt immer dann auf, wenn kognitive Fähigkeiten den Erwerb neuen deklarativen Wissens unterstützen. Singley und Anderson (1989, S. 34 f.) sehen diesen Transfer insbesondere in der Nutzung elementarer sprachlicher Fähigkeiten, wie Lesen und dem Verstehen von Gesprochenem, ohne die kaum etwas erlernt werden könne. In dem später entwickelten ACT-R Modell (Anderson & Fincham, 1994) wird dieser Transfer auf Situationen beschränkt, wenn eine kompilierte Produktionsregel noch nicht ausreichend ausgeprägt ist.

PROZEDURAL- PROZEDURAL: Diese Art von Transfer steht im Zentrum des ACT-Modells und beschreibt die direkte Übertragung einer erlernten Produktionsregel auf eine Transferaufgabe. Im Allgemeinen wurde dieser Typ Transfer in Studien zumeist so operationalisiert, dass die Probanden artifizielle Produktionsregeln in Form von mathematischen Rechenregeln oder Programmierfunktionen (z. B. in der Programmiersprache LISP) lernen und in der Folge die kontrollierte Anwendung dieser Regeln oder Verfahren anhand von vermeintlich einfachem Material und der Umkehrbarkeit dieser Regel getestet wird (vgl. Anderson & Fincham, 1994; Pennington et al. 1995).

Allgemein stellt die ACT-Theorie drei Postulate auf (Singley & Anderson, 1989, S. 223; vgl. auch Klauer, 2011, S. 54):

1. Wenn Lern- und Transferaufgabe identische Elemente haben, findet positiver Transfer statt.
2. Haben die Aufgaben keine gemeinsamen Elemente, findet kein Transfer statt.
3. Es gibt keinen negativen Transfer.

Während Singley und Anderson in ihren Studien in der Programmiersprache LISP zeigen konnten, dass gemeinsame Elemente in Form von gemeinsamen Produktionsregeln einen positiven Transfer fördern (Singley & Anderson, 1989; Bovair, Kieras & Polson, 1990; vgl. auch Katz, 1991), und somit die erste Hypothese stützen, hielten die zweite und dritte Hypothese empirischen Prüfungen nicht stand.

In ihrer Studie mit der gleichen Programmiersprache, mit der auch Singley und Anderson (1989) gearbeitet haben, untersuchten Pennington, Nicholich und Rahm (1995) den Transfer von Produktionsregeln in Form der Generierung und Evaluation von Programmierinstruktionen. Dazu entwickelten die Autoren ein Simulationsmodell auf Basis der ACT-Architektur, mit dessen Hilfe die Übereinstimmungen der Produktionsregeln im Lern- und Transfermaterial berechnet werden konnten (10 % Übereinstimmung bei Generierungsaufgaben, 20 % Übereinstimmung bei Evaluationsaufgaben) und entsprechend Aussagen über den erwarteten Transfer getroffen werden konnten. In der Folge wurden die Probanden in acht Gruppen geteilt, wobei die Teilnehmer der vier Experimentalgruppen in einer Trainingsphase Probleme selber lösten und die Teilnehmer der vier Kontrollgruppen lediglich die Lösungen der Probleme eintippten ohne sie selber gelöst zu haben. In der Bearbeitung der Transferaufgaben zeigten die Probanden der Experimentalgruppen ein bedeutend höheres Maß an Transfer als auf Grundlage des Simulationsmodells zu erwarten gewesen war. Die Autoren bestätigten in ihrem Experiment die erste Hypothese, dass Transfer bei gemeinsamen Inhalten möglich ist, widerlegten aber die Annahme, dass Transfer nur in dem Maße möglich sei, indem sich die Produktionsregeln überlappen. Obgleich lediglich 10 bis 20 Prozent der Produktionsregeln im Lern- und Transfermaterial übereinstimmten, zeigten die Probanden Transfer im Ausmaß von 50 bis 60 Prozent. Die Autoren folgern, dass die Gebrauchsspezifität in der ACT-Theorie überschätzt werde und der Einfluss deklarativen Wissens sowie das Verständnis der Inhalte einen wesentlichen Einfluss auf Transfereffekte habe: „Learning by rote results in transfer to highly similar problems (i.e. procedural transfer) but learning by "understanding" results in transfer to less similar or novel problems as well" (Pennington et al. 1995, S. 221).

Als zentrales Element aus der ACT-Theorie ist der kognitive Mechanismus der Wissenskompilierung herauszustellen. Renkl (1996, S. 82 f.) beschreibt in einer Übersicht zum Phänomen des *trägen Wissens*[3] „mangelnde Wissenskompilierung" als Strukturdefiziterklärung für ausbleibenden Transfer. Renkl (1996, S. 82) argumentiert, dass in instruktionalen Settings, wie z. B. der Schule, vor allem deklaratives Wissen („Wissen, daß") vermittelt werde, das nicht unmittelbar handlungsleitend sei, sondern über einen Kompilierungsprozess in effektives Handlungswissen (prozedurales Wissen – „Wissen, wie") überführt werden müsse. Mit Verweis auf Bransford, Goldman und Vye (1991) erläutert Renkl (1996, S. 83), dass beim schulischen Lernen selten die Phase der Feinabstimmung erreicht wird, wodurch Generalisierungs-, Diskriminierungs- und Stärkungsprozesse weitgehend ausbleiben und folglich keine konditionalisierten Wissensstrukturen ausgebildet werden, die für eine spontane Anwendbarkeit vorausgesetzt werden.

In den Beschreibungen der Ausbildungsprozesse von Produktionsregeln und der Wissenskompilierung wird das Bilden von Analogien als ein zentraler Funktionsmechanismus beschrieben. Im folgenden Abschnitt werden die theoretischen Annahmen und empirischen Befunde zum Transfer durch Analogiebildung in einem breiteren Rahmen dargestellt.

---

[3] Der Begriff des trägen Wissens geht auf die Bezeichnung „inert knowledge" von Whitehead (1929) zurück und bezeichnet die ausbleibende Anwendung bzw. ausbleibende Effekte bereits erlernten Wissens, die sich insbesondere darin zeigen, dass nur wenig bzw. gar kein Transfer zu beobachten ist.

**Transfer durch Analogiebildung**

Ähnlich der Präzisierung und Erweiterung, die Thorndikes Theorie der identischen Elemente in der ACT*-Theorie von Singley und Anderson erfuhr, rückten auch die Kernannahmen Judds Theorie des Transfers durch Erkennen von Prinzipien seit Beginn der 1980er Jahre erneut ins Zentrum des Interesses der psychologischen Lehr- und Lernforschung. Unter dem Paradigma des mathematischen und naturwissenschaftlichen Problemlösens[4] wurde umfassend untersucht, welche Bedingungen einen Transfer beim Lösen analoger Probleme ermöglichen und welche kognitiven Prozesse das Bilden von Analogien zwischen strukturähnlichen Problemstellungen maßgeblich beeinflussen.

Eine Analogie[5] bezeichnet dabei allgemein eine strukturelle Ähnlichkeit zwischen zwei Gegenstandsbereichen (vgl. Ruppert, 2017, S. 24). Spezieller wird für eine Analogie zwischen dem Ausgangsbereich („source-analog“) und dem Zielbereich („target-analog“) einer Analogie unterschieden (vgl. Gentner, 1983; Gick & Holyoak, 1983; Klauer, 2011; Nokes-Malach, VanLehn, Belenky, Lichtenstein & Cox, 2013; Ruppert, 2017). Zur Bildung einer Analogie ist es erforderlich strukturelle Ähnlichkeiten zwischen dem vertrauten bzw. bekannten Ausgangsbereich und dem weniger bekannten Zielbereich zu identifizieren, um durch die Übertragung dieser Zusammenhänge neue Erkenntnisse in dem Zielbereich zu gewinnen: „analogy is used to generate knowledge applicable to a novel *target* domain by transferring knowledge from a *source* domain that is better understood“ (Holyoak & Koh, 1987, 332, Hervorhebung im Original). Wenngleich sich der Ausgangs- und Zielbereich einer Analogie zum Teil wesentlich in ihren spezifischen Merkmalen und Eigenschaften, den Oberflächenmerkmalen („surface features“), unterscheiden können, so liegt ihnen eine gemeinsame Tiefenstruktur („deep structure“) in Form der Relationen zwischen Objekten zugrunde, die sie miteinander verbinden (Chi & VanLehn, 2012, S. 178).

Ruppert (2017, S. 45) resümiert, dass die Ähnlichkeiten von analogen Mathematikaufgaben vor allem auf drei Ebenen beschrieben werden können: Der *Objektebene*, der *Relationsebene* und der *Handlungsebene*. Auf diesen drei Ebenen kann die Analogie zwischen den exemplarischen Aufgaben in Abbildung 1.3 wie folgt beschrieben werden: Auf der Objektebene werden die enthaltenen (mathematischen) Objekte beschrieben. In Aufgabe A sollen die Seitenlängen eines Rahmens aus Flachstahl berechnet werden. Die zugehörige Größe ist dabei eine Länge in der Einheit Zentimeter. Im Vergleich zu Aufgabe A ist die zentrale Größe in Aufgabe

[4] Eine umfangreiche Übersicht und Diskussion theoretischer Modelle und unterrichtspraktischer Konzepte zum Problemlösen findet sich bei Heinze (2007).

[5] Eine umfassende Darstellung der Genese und wissenschaftstheoretischen Aspekte des Analogiebegriffs findet sich bei Ruppert (2017).

**Aufgabe A**

Schlosser Willy hat den Auftrag, aus einem 180 cm langen Flachstahl einen rechteckigen Rahmen anzufertigen. Benachbarte Seiten des Rahmens sollen sich in der Länge um 20 cm unterscheiden. Welche Seitenlängen für den Rahmen muss der Schlosser wählen?

**Lösung:**

1. *Definition von Variablen:*

   Länge der kurzen Seite in cm: $x$
   Länge der anderen Seite in cm: $y$

2. *Aufstellen von Gleichungen:*

   Der Flachstahl ist 180 cm lang:
   $2x + 2y = 180$ (Umfang Rechteck)

   Die Seitenlängen unterscheiden sich um 20 cm: $y - x = 20$ (Differenz d. Seitenlängen)

3. *Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems:*

   $$2x + 2y = 180$$
   $$y - x = 20$$

   Das System hat die Lösung:
   $$x = 35 \;,\; y = 55$$

4. *Formulierung des Ergebnisses:*

   Der Rahmen hat die Seitenlängen 35 cm und 55 cm.

**Aufgabe B**

Ein Erlebnisbad hat unterschiedliche Preise für Kinder und Erwachsene. 2 Erwachsene und 2 Kinder müssen insgesamt 26 € Eintritt zahlen. Erwachsene zahlen für den Eintritt 3 € mehr als Kinder. Wie teuer sind die Einzelpreise für Erwachsene und Kinder?

**Lösung:**

1. *Definition von Variablen:*

   Eintritt für 1 Erwachsenen in €: $x$
   Eintritt für 1 Kind in €: $y$

2. *Aufstellen von Gleichungen:*

   Der Eintritt für 2 Erwachsene und 3 Kinder kostet 31 €: $2x + 2y = 26$

   Erwachsene zahlen 3 € mehr Eintritt als Kinder: $x - y = 3$

3. *Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems:*

   $$2x + 2y = 26$$
   $$x - y = 3$$

   Das System hat die Lösung:
   $$x = 8 \;,\; y = 5$$

4. *Formulierung des Ergebnisses:*

   Der Eintritt für einen Erwachsenen kostet 8 € und für ein Kind 5 €.

**Abbildung 1.3** Exemplarische Gegenüberstellung von zwei Aufgaben mit unterschiedlichen Oberflächenmerkmalen und analoger Tiefenstruktur

B ein Geldbetrag in Euro und es sollen die Eintrittspreise für einen Besuch im Schwimmbad für Erwachsene und Kinder bestimmt werden. Obgleich die Objekte in den beiden Aufgaben unterschiedlich sind, so verfügen sie doch über dieselben Relationen. Genau wie in Aufgabe A, in der für die Summe von zwei kurzen und zwei langen Seiten, eine Größe vorgegeben ist, so ist in Aufgabe B ebenfalls eine Größe für die Summe von je zwei Eintrittspreisen für Erwachsene und Kinder vorgegeben. Zudem ist jeweils eine Differenz zwischen den beiden gesuchten Größen vorgegeben, eine Länge von 20 cm und ein Geldbetrag in Höhe von 3 Euro. Somit können auf der Handlungsebene analoge mathematische Tätigkeiten beschrieben werden, die in beiden Aufgaben zu einer Lösung führen (vgl. Abbildung 1.3). Die Aufgabenlösungen folgen denselben Schritten und auch die jeweils aufzustellenden linearen Gleichungssysteme sind im Fall dieser beiden Aufgaben identisch, wenn auch die Ergebnisse aufgrund der unterschiedlichen Größen bzw. unterschiedlichen Objekte voneinander verschieden sind.

Über einen Prozess des Vergleichens, können die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen zwei analogen Aufgaben herausgestellt und eine Abbildung

(„Mapping“, vgl. Gentner, 1983; 1989) zwischen den relationalen Strukturen der beiden Aufgaben hergestellt werden: „At the core of analogical thinking lies the process of *mapping*: the construction of orderly correspondences between the elements of a source analog and those of a target“ (Holyoak & Thagard, 1989, 295, Hervorhebung im Original). Über dieses Herausstellen der Gemeinsamkeiten und Unterschiede wird die relationale Struktur abstrahiert, was zur Ausbildung einer mentalen Repräsentation in Form eines Schemas führen kann, das in späteren Lern- oder Transfersituationen abgerufen und angewendet werden kann (vgl. Gick & Holyoak, 1983; Novick & Holyoak, 1991; Nokes-Malach et al. 2013; Kubricht, Lu & Holyoak, 2017).

Im Prozess der Analogiebildung ist das Abbilden der relationalen Struktur ein wesentlicher Subprozess: „It is generally recognized that analogical reasoning involves several subprocesses, most notably retrieval of a related source analog, mapping, inference, and subsequent generalization“ (Kubricht et al. 2017, S. 576). Vorausgesetzt Lernende haben bereits eine entsprechende und adäquate mentale Repräsentation in vorhergehenden Lernsituationen aufgebaut, so muss diese zunächst aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden. Wenn eine entsprechende Repräsentation abgerufen wurde, bedarf es eines Abbildens der relationalen Struktureigenschaften zwischen dem abgerufenen (Lösungs-) Schemata und der vorliegenden Problemstellung. Sofern ein adäquates Lösungsverfahren abgerufen werden kann, müssen Lernende Schlussfolgerungen („inferences“, Gentner, 1989, S. 206) ziehen und den Lösungsweg möglicherweise auf die Transferanforderung anpassen („procedure adaptation“, Novick, 1988, S. 511). Sofern all diese Subprozesse erfolgreich waren, besteht die Möglichkeit einer Generalisierung des Lösungsschemas.

Zur Untersuchung von Prozessen der Analogiebildung beim Lösen mathematischer Aufgaben mit dem Ziel Ansatzpunkte für die Entwicklung von Maßnahmen zur Förderung der Analogiebildungsfähigkeit im Mathematikunterricht zu identifizieren, unterteilt Ruppert (2017, S. 68 f.) den Prozess der Analogiebildung in vier Phasen:

1. „**Strukturieren:** Der Lerner ordnet Objekte, Relationen oder Handlungen im Ausgangs- oder Zielbereich und entwickelt entsprechende mentale Repräsentationen.
2. **Abbilden:** Der Lerner stellt Entsprechungen zwischen Objekten, Relationen oder Handlungen im Ausgangs- oder Zielbereich her.
3. **Schließen:** Der Lerner ergänzt fehlende Entsprechungen im Zielbereich und kommt so zu neuen Erkenntnissen.
4. **Beurteilen:** Der Lerner überprüft die Gültigkeit der gewonnenen Erkenntnisse im gegebenen Kontext.“

Entsprechend des Struktur-Abbildungs-Ansatzes von Gentner (1983) argumentiert Ruppert, dass die Lernenden in der ersten Phase, dem Strukturieren, über das Ordnen der Objekte, Relationen und Handlungen im Ausgangs- und Zielbereich eine entsprechende mentale Repräsentation als Grundlage für den Abbildungsprozess aufbauen. Die Annahme, dass die Lernenden eine mentale Repräsentation der Transfersituation in selbiger ausbilden, ist auf die genutzte Untersuchungsmethode und den Einsatz von Lösungsbeispielen als Ausgangsbereich für die Analogiebildung zurückzuführen. Entgegen der Annahme, dass die Lernenden eine mentale Repräsentation in der Transfersituation entwickeln, beschreiben Gick und Holyoak (1983), dass eine abstrakte Repräsentation in der ursprünglichen Lernsituation konstruiert wird und als Entität in die Transfersituation übertragen wird. Diese beiden Perspektiven stehen jedoch nicht im Widerspruch. Novick und Holyoak (1991, S. 399) argumentieren, dass ein erfolgreicher Analogietransfer zur Ausbildung eines abstrakten Schemas für eine Problemklasse führt, das durch den Ausgangs- und den Zielbereich der Analogie in der Lernsituation repräsentiert wird. Während Gentner (1983) in ihrem Struktur-Abbildungsansatz vor allem das Lernen durch die Bildung von Analogien beschreibt, beschreiben Gick und Holyoak (1983) bereits den initialen Lernprozess als Analogiebildung, wodurch die Adaption einer bestehenden mentalen Repräsentation als Konstruktion einer veränderten mentalen Repräsentation in der Transfersituation interpretiert werden kann.

In seiner qualitativen Untersuchung von Verläufen in Prozessen der Analogiebildung kommt Ruppert (2017) zu dem Schluss, dass die oben beschriebenen Phasen nicht linear durchlaufen werden, sondern die Lernenden immer wieder zwischen den einzelnen Phasen wechseln. Ferner resümiert Ruppert, dass die „Wege", die im Prozess der Analogiebildung durchlaufen werden, nicht unbedingt die erfolgreiche Lösung einer analogen Transferaufgabe bedingen:

> „Es können kurze, zielstrebige Gedankengänge, die zum Ziel führen, genauso beobachtet werden, wie Denkprozesse, die in mehreren Anläufen zu einem Ergebnis kommen. Scheinbar stringente Aufgabenbearbeitungen können ebenso zu einem falschen Resultat führen, wie Argumentationen, die immer wieder unterbrochen und an einer anderen Stelle wieder aufgenommen werden." (Ruppert, 2017, S. 219)

Anders als die detaillierten Prozessstudien von Ruppert (2017) sind die üblichen Untersuchungsmethoden zur Analogiebildung und zum Transfer durch Analogiebildung quantitativer Natur. Die Probanden werden in Untersuchungsgruppen eingeteilt und studieren in der Lernphase unter Verwendung unterschiedlicher Methoden ein oder mehrere Ausgangsprobleme aus zum Teil unbekannten Sachzusammenhängen. Im Anschluss an die Lernphase werden den Probanden zum Teil mit zeitlichem Abstand analoge Transferprobleme zur Bearbeitung vorgelegt, deren Lösungsraten zum Gruppenvergleich herangezogen werden. Die experimentellen Studien werden zumeist in einem streng kontrollierten Rahmen mit Studierenden der Psychologie oder Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, durchgeführt.

Die zentralen empirischen Erkenntnisse zum Lösen von analogen Problemaufgaben können wie folgt zusammengefasst werden[6]:

Gick und Holyoak (1980; 1983) untersuchten unter Verwendung des klassischen Strahlungsproblems von Duncker (1945) die Analogiebildungsprozesse unter verschiedenen Bedingungen. Während die Probanden in der Kontrollgruppe kein Ausgangsproblem als Grundlage für die Bearbeitung eines Transferproblems erhielten, studierten die Probanden in den Experimentalgruppen die Lösung verschiedener Problemstellungen. Die Bearbeitungen der Transferaufgaben ergaben, dass die Probanden in der Kontrollgruppe die vorgelegte Problemaufgabe lediglich zu zehn Prozent korrekt lösen konnten, während Probanden, die zuvor die Lösung eines höchst unähnlichen analogen Problems studiert hatten, eine Lösungsrate von 30 Prozent aufwiesen. Wurden die Probanden jedoch explizit darauf hingewiesen, sich noch einmal genau das Ausgangsproblem und die Lösung desselbigen in Erinnerung zu rufen, erhöhte sich die Lösungsrate für das Transferproblem auf rund 50 Prozent. Die Experimente von Gick und Holyoak (1980; 1983) zeigten, dass nur wenige Lernende spontan die Relevanz des Ausgangsproblems für die Lösung des Transferproblems erkannten, jedoch zum Teil erfolgreich die Strukturen der analogen Probleme aufeinander abbilden und die entsprechenden Schlussfolgerungen ziehen konnten, sofern sie explizit dazu aufgefordert wurden. Insbesondere die höchst verschiedenen Oberflächenmerkmale des Ausgangs- und des Transferproblems führten dazu, dass die Lernenden die zuvor studierte Problemlösung nicht als relevant für die Lösung des Transferproblems erkannten und folglich auch keine Beziehungen zwischen diesen herstellen konnten.

In anknüpfenden Experimenten konnte gezeigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit für einen spontanen Analogietransfer zwischen zwei Problemen höher ist, wenn die Ähnlichkeit zwischen Ausgangs- und Zielbereich der Problemstellungen erhöht wird (vgl. Keane, 1987). Holyoak und Koh (1987) konnten zudem zeigen, dass insbesondere bei Problemen, die eine direkte bzw. isomorphe Abbildung, sowohl in der Tiefenstruktur sowie den Oberflächenmerkmalen, zu spontanem analogen Transfer führen können, selbst wenn zwischen der Präsentation des Ausgangsproblems und der Bearbeitung der Transferaufgabe mehrere Tage liegen. Die Autoren berichten zudem, dass sowohl die Tiefenstruktur als auch die Oberflächenmerkmale der Probleme einen bedeutenden Einfluss auf den Abruf von Analogien aus

[6] Eine umfangreiche Übersicht über die Befunde zum analogen Denken und Problemlösen findet sich bei Holyoak (2012).

dem Langzeitgedächtnis haben, die strukturellen Eigenschaften jedoch einen größeren Einfluss auf die Anwendbarkeit einer Analogie haben, sofern deren Relevanz erkannt wurde.

**Analoges Vergleichen:** Die Instruktionsmethode des Vergleichens analoger Problemlösungen[7] („analogical comparison") ist eine Folgerung der zuvor beschriebenen Befunde und besteht darin, dass die Lernenden zwei oder mehr Beispiele bzw. Problemlösungen direkt miteinander vergleichen (vgl. Gick & Holyoak, 1983; Catrambone & Holyoak, 1989; Loewenstein, Thompson & Gentner, 2003; Richey & Nokes-Malach, 2015). Durch den direkten Vergleich zweier Probleme sollen die Schwierigkeiten beim Abruf analoger Problemlösungen aus dem Langzeitgedächtnis umgangen werden und durch einen begleiteten Abbildungsprozess der Aufbau einer mentalen Repräsentation dieser Probleme unterstützt werden. Somit bedarf es für eine Analogiebildung nunmehr der Prozesse des Abbildens und Schließens.

Rittle-Johnson und Star (2011) unterscheiden für das Mathematiklernen zwischen u. a. vier Typen des Vergleichs:

*Vergleich von Problemen:* Es werden zwei verschiedene aber strukturell isomorphe Probleme verglichen, die mit der gleichen Methode gelöst werden können. Das Ziel ist das Erlernen einer allgemeinen Lösungsmethode (Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 201 ff.).

*Vergleich von Problemkategorien:* Es werden unterschiedliche Probleme verglichen, die keine isomorphe Struktur aufweisen und unterschiedliche Methoden zur Lösung erfordern. Das Ziel hierbei ist, dass die Lernenden erkennen, inwieweit sich Probleme unterscheiden, die leicht verwechselbaren Problemkategorien angehören (Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 204).

*Vergleich von Lösungsmethoden:* Anstelle von verschiedenen Problemaufgaben werden unterschiedliche Methoden zur Lösung desselben Problems verglichen. Das Ziel ist die Effizienz die Flexibilität der Lernenden beim Problemlösen zu erhöhen (Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 204 f.).

*Vergleich von Konzepten[8]:* Es werden vielfältige Beispiele desselben Konzepts verglichen. Durch diesen Vergleich sollen die Lernenden erkennen, welches Konzept die Beispiele gemeinsam haben und dadurch eine Hilfe zum tieferen Verstehen des Konzepts erhalten (Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 207 f.).

[7] Ein ausführliches Literaturreview zu Studien zum Vergleich analoger Problemlösungen findet sich bei Goldwater und Schalk (2016) sowie bei Alfieri, Nokes-Malach und Schunn (2013).

[8] Die Bezeichnung „Konzept" bezieht sich hier auf die Bedeutung des englischen Begriffes „concept"

**Befunde zum Vergleich von Problemen:** Der direkte Vergleich analoger Problemlösungen soll zu einer strukturellen Ausrichtung der Aufgaben- bzw. Lösungsbeispiele durch die Lernenden führen. Dadurch sollen die gemeinsamen Relationen der betrachteten Beispiele herausgestellt und somit der Aufbau einer allgemeinen und abstrakten strukturellen Repräsentation unterstützt werden (Goldwater & Schalk, 2016, S. 738; Richey & Nokes-Malach, 2015, S. 199). Obgleich der direkte Vergleich zweier Problemlösungen zumeist den Transfer auf ähnliche Problemstellungen unterstützt, ist dies jedoch bei neuen Problemstellungen mit nicht unmittelbar zuzuordnenden Eigenschaften nicht der Fall (vgl. Novick & Holyoak, 1991). Hierfür bedarf es einer spezifischen Adaption an die strukturellen Eigenschaften der neuen Aufgaben, wobei die zugrunde liegenden Prinzipien und Konzepte von den Ausgangsbeispielen losgelöst werden müssen, um sie in entsprechender Weise in neuen Anforderungssituationen anwenden zu können.

In verschiedenen Studien konnte gezeigt werden, dass das Vergleichen von analogen Problemaufgaben den Aufbau von abstrakten Schemata und das Verknüpfen von zentralen Problemeigenschaften mit den ihnen zugrunde liegenden Prinzipien unterstützen kann (Catrambone & Holyoak, 1989; Novick & Holyoak, 1991). Damit es dazu kommt, bedarf es jedoch zumeist einer differenzierten Anleitung, die die Lernenden darauf hinweist und differenzierte Anweisungen gibt, welche Aspekte der Problemaufgaben sie vergleichen sollen (vgl. Reed, 1989; Kurtz, Miao & Gentner, 2001; Richland, Zur & Holyoak, 2007). Erfolgt die Instruktionsphase ohne eine differenzierte Anleitung zum Vergleich, so orientieren sich die Lernenden beim Vergleich zumeist ausschließlich an den Oberflächenmerkmalen der Aufgaben und der Transfer der Lösungsprozeduren ist auf die Lösung von isomorphen Aufgaben beschränkt, die sowohl die gleichen Oberflächenmerkmale wie auch die gleiche Tiefenstruktur aufweisen (vgl. Holyoak & Koh, 1987). Zudem konnten Gick und Holyoak (1983) zeigen, dass das Formulieren der allgemeinen Lösungsmethode nach dem Vergleich zweier Beispielaufgaben die Wahrscheinlichkeit eines Transfers auf die Lösung eines neuen Problems signifikant erhöht.

Die positiven Effekte des Vergleichens von Problemen auf den Transfer beim Problemlösen sind jedoch begrenzt. Reed (1989) berichtet von drei Experimenten, in denen Studierende zwei algebraische Textaufgaben und ihre Lösungen erarbeitet haben, dass der Vergleich der Probleme und ihrer Lösungen nicht den Transfer auf neue Probleme unterstützt hat. Reed (1989) argumentiert, dass komplexe und mehrschrittige Problemlösungen möglicherweise schwieriger über einen direkten Vergleich zu erlernen sind als einfachere Lösungen, wie sie in den Experimenten von Gick und Holyoak (1983) eingesetzt wurden. Das Lernen komplexer Probleme und Problemlösungen und die Verallgemeinerung in Hinsicht auf die erfolgreiche Bearbeitung von Transferaufgaben sei möglicherweise nicht allein durch den Vergleich von zwei Beispielaufgaben ohne weitere Hilfen zu erreichen. Scheiter und Gerjets (2006) konnten in diesem Zusammenhang beobachten, dass die Anzahl der in der Instruktionsphase verglichenen Aufgaben nur bedingt einen Einfluss auf einen Lern- und Transfererfolg der Lernenden hat. Sie argumentieren, dass sich der Lern- und Transfererfolg nur selten proportional zu der Anzahl der erarbeiteten und verglichenen Beispielaufgaben verhält. Stattdessen sind ihren Ergebnissen zu Folge die Lernbedingungen, unter denen die Lernenden die Aufgaben vergleichen, von einer höheren Bedeutung. Haben die Lernenden nicht genug Zeit für die Bearbeitung von drei Beispielaufgaben in der Instruktionsphase, so hat dies einen wesentlich geringeren und in einigen Fällen auch einen negativen Effekt auf den Lern- und Transfererfolg. In ihrer Studie zeigten die Lernenden, die ausreichend Zeit für das Studium eines einzigen Beispiels hatten, wesentlich bessere Ergebnisse als Lernende, die in derselben Zeit drei Beispiele erarbeitet hatten und somit weniger Zeit für die Erarbeitung der einzelnen Beispiele aufwenden konnten.

**Befunde zum Vergleich von Problemkategorien:** Im Gegensatz zur ersten Kategorie werden beim Vergleich von Problemkategorien Probleme verglichen, deren Lösung unterschiedliche Methoden erfordern und somit unterschiedlichen, zum Teil leicht verwechselbaren, Problemkategorien zugehörig sind. In drei Experimenten mit Studierenden beobachtete Cummins (1992), dass Probanden, die algebraische Textaufgaben direkt miteinander verglichen („analogical comparison processing"), bessere Ergebnisse beim Einordnen von neuen Problemen in Problemkategorien sowie beim Beschreiben der strukturellen Eigenschaften dieser Probleme zeigten, als Probanden, die die Beispielaufgaben einzeln nacheinander studierten („intraproblem processing") oder lediglich nacheinander durchlasen. Zudem konnte beobachtet werden, dass diejenigen Probanden, die nicht mit der Methode des analogen Vergleichens gearbeitet hatten, die Kategorisierung der Probleme vor allem auf Grundlage der Oberflächenmerkmale vornahmen. Ähnliche Befunde berichten auch Vanderstoep und Seifert (1993) aus Experimenten mit Kombinations- und Permutationsaufgaben. Während die Experimentalgruppe die Lösungsbeispiele anhand eines Leitfadens miteinander verglich, wurden der Kontrollgruppe lediglich dieselben Lösungsbeispiele ohne Leitfaden zum Vergleich der Lösungsbeispiele vorgelegt. Auch die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen, dass die Lernenden, die die Lösungsbeispiele miteinander verglichen hatten, bessere Ergebnisse beim Zuordnen neuer Aufgaben zu den Gruppen Kombinations- oder Permutationsaufgabe erreichten und zudem ihre Zuordnungen besser begründen konnten.

Day, Goldstone und Hills (2010) konnten zeigen, dass nicht allein die Aktivität des Vergleichens, sondern das Vergleichen von Lösungsbeispielen aus unterschiedlichen Problemkategorien dazu beiträgt, dass Lernende besser zwischen unterschiedlichen Problemkategorien unterscheiden können. In einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der Mittelstufe verglichen sie die Effekte des Vergleichs von Beispielen von „Feedback loops“ aus leicht verwechselbaren unterschiedlichen (positive und negative Feedback-Schleifen) und derselben Kategorie (positive Feedback-Schleifen). Ihre Ergebnisse zeigen, dass diejenigen Lernenden, die Beispiele unterschiedlicher Problemkategorien miteinander verglichen hatten, besser neue und unbekannte Beispiele klassifizieren konnten, als diejenigen, die in der Instruktionsphase Beispiele derselben Kategorie miteinander verglichen hatten.

Insgesamt zeigt sich, dass der Vergleich von Problemkategorien die Fähigkeit des Zuordnens von Problemen zu Kategorien fördert. Diese Fähigkeit zum Kategorisieren von Problemen ist beim Problemlösen insbesondere dann hilfreich, wenn Problemkategorien ähnliche oder gar dieselben zentralen Merkmale aufweisen (vgl. Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 204).

**Befunde zum Vergleich von Lösungsmethoden:** Anstelle des Vergleichs von verschiedenen Problemen, die ähnliche Lösungsstrategien erfordern, werden bei diesem Typ des Vergleichs verschiedene Lösungswege für ein und dasselbe Problem miteinander verglichen. Den Lernenden wird dazu zumeist die Frage gestellt, welcher der vorgegebenen Lösungswege effizienter bzw. besser ist und warum (vgl. Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 202). Der Einsatz dieser Vergleichsmethode konnte zunächst vermehrt im Unterricht von sehr guten Mathematiklehrern (vgl. Lampert, 1990) sowie Ländern mit sehr hohen Ergebnissen in nationalen Vergleichsstudien (vgl. Richland et al., 2007) beobachtet werden.

Abseits dieser Beobachtungen im Unterricht legen empirische Befunde nahe, dass der Einsatz des Vergleichs verschiedener korrekter Lösungswege die Flexibilität beim Problemlösen („procedural flexibility“) erhöht (vgl. Rittle-Johnson & Star, 2007; Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 205). Die Kenntnis verschiedener Lösungswege und die Möglichkeit auf Grundlage der Problemeigenschaften einen effizienten Lösungsweg auszuwählen unterstützt den Transfer auf neue Problemstellungen in Transfersituationen (z. B. Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009) und kann mit einem tieferen Verständnis für die zugrunde liegenden Konzepte assoziiert werden (vgl. Hierbert et al., 1996; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson, 1998; Blöte, der Burg & Klein, 2001).

Rittle-Johnson und Star (2011) berichten von zwei Studien mit Schülerinnen und Schülern, in denen sie untersuchten, inwieweit sich die Lerneffekte des direkten Vergleichs verschiedener Lösungswege und des sequentiellen Studiums ähnlicher

**A. Compare Methods Condition**

| **Shanequa's Solution:** | **Jill's Solution:** |
|---|---|
| $\frac{1}{2}(x+1) = 8$<br>$x+1 = 16$ __________<br>$x = 15$ *Subtract on both* | $\frac{1}{2}(x+1) = 8$<br>$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} = 8$ __________<br>$\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$ *Subtract on both*<br>$x = 15$ *Multiply on both* |

Label the first step for each solution in the blank space provided above.

1. Shanequa and Jill solved the problem differently, but they got the same answer. Why?

2. Why might you choose to use Shanequa's way?

**B. Sequential Condition**

**Jill's Solution:**

$\frac{1}{2}(x+1) = 8$

$x+1 = 16$ __________

$x = 15$ *Subtract on both*

Label the first step in the blank space provided above.

1. When Jill subtracted on both sides, what number did she subtract? Why did she subtract that number?

***-----NEXT PAGE-----***

**Shanequa's Solution:**

$\frac{1}{2}(x+3) = 14$

$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} = 14$ __________

$\frac{1}{2}x = 12\frac{1}{2}$ *Subtract on both*

$x = 25$ *Multiply on both*

Label the first step in the blank space provided above.

1. Do you think the solution method used on this problem is a good one? Why?

**Abbildung 1.4** Exemplarische Darstellungen zum direkten (oben) und sequentiellen (unten) Vergleich von Aufgaben zu algebraischen Termumformungen (Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 211)

Aufgaben und Aufgabenlösungen unterscheiden (vgl. Abbildung 1.4). Ihren Ergebnissen zu Folge zeigten die Schülerinnen und Schüler, die in der Instruktionsphase zwei korrekte Lösungswege direkt miteinander verglichen hatten, bessere Ergebnisse beim Lösen neuer Gleichungen und mehr Flexibilität in ihren Lösungswegen (Rittle-Johnson & Star, 2007). Ähnliche Ergebnisse berichten sie auch von einer

Studie, in der die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse zweistelliger Multiplikationsaufgaben (z. B. $37 \cdot 29$) schätzen sollten (Rittle-Johnson & Star, 2009).

Neben Vergleichen von verschiedenen Methoden zur korrekten Lösung eines Problems können auch korrekte mit inkorrekten Lösungswegen verglichen werden. Mit dem Vergleich von korrekten mit inkorrekten Lösungsmethoden ist das Ziel verbunden, dass die Lernenden erkennen, warum die korrekte Methode zur Lösung des Problems führt und die inkorrekte nicht. Auf diese Weise soll der Entwicklung von fehlerhaften Strategien und falschen Denkweisen entgegengewirkt werden (vgl. Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 205). Aufgrund der geringen Befundlage zum analogen Vergleich von korrekten und inkorrekten Lösungsmethoden wird von einer eingehenden Darstellung in dieser Arbeit jedoch abgesehen.

**Vergleich von Konzepten:** Während beim analogen Vergleich zumeist verschiedene Beispiele zu demselben Konzept verglichen werden, werden beim Vergleich von Konzepten Beispiele zu unterschiedlichen Konzepten verglichen. Das Ziel hierbei ist es, Unterschiede zwischen ähnlichen und verwandten Konzepten zu identifizieren, um Konzepte besser voneinander abzugrenzen und auf diese Weise das Verständnis der Konzepte zu verbessern. Zu dieser Art des analogen Vergleichs gibt es jedoch nur wenige Studien aus dem Bereich des analogen Problemlösens bzw. zum Transfer durch Analogiebildung.

Hattikudur und Alibali (2010) berichten von einer Studie mit Lernenden der dritten und vierten Klasse zum Verständnis des Gleichheitszeichens. Während eine Lerngruppe ausschließlich mit korrekten und inkorrekten Beispielen zum Gleichheitszeichen instruiert wurde (z. B. $1 + 12 = 8$, $11 - 3 = 8$, $5 = 9 - 4$), erarbeitete eine weitere Lerngruppe Beispiele, in denen sie das Gleichheitszeichen mit den Vergleichsoperatoren $<$ und $>$ verglichen (z. B. $1 + 12 > 8$, $11 - 3 < 8$, $5 = 9 - 4$). Die Autoren berichten, dass die Gruppe der Lernenden, die in der Instruktionsphase das Gleichheitszeichen mit den Vergleichsoperatoren $<$ und $>$ verglichen hatten, im Posttest ein besseres konzeptuelles Verständnis des Gleichheitszeichens zeigten als die Gruppe, die ausschließlich mit Beispielen zum Gleichheitszeichen gearbeitet hatte. Beim Lösen von Problemaufgaben konnten die Autoren (Hattikudur & Alibali, 2010, S. 23) jedoch keine Unterschiede in den Leistungen der beiden Gruppen feststellen. Sie argumentieren, dass sie in ihrer Studie nicht kontrolliert haben, wie die Lernenden die Vergleiche vorgenommen haben, ob sie etwa die Beispiele zu Gleichheitszeichen und Vergleichsoperatoren oder tatsächlich Beispiele mit unterschiedlichen Zeichen miteinander verglichen haben (2010, S. 29). Sie schließen:

> „[...] comparison can promote understanding of mathematical *concepts*. Specifically, a lesson in which elementary school students compared inequality symbols and the

> equal sign facilitated a relational understanding of the equal sign more than a lesson in which students learned about the equal sign alone in the same amount of time. Thus, a comparison-based instructional method can be of value in teaching and learning mathematical concepts.“ (Hattikudur & Alibali, 2010, S. 29 f., Hervorhebung im Original)

In ähnlicher Weise argumentieren auch Gentner und Markman (1997), dass der Vergleich von Beispielen des gleichen oder unterschiedlicher Konzepte dabei hilft, die strukturellen Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Beispiele herauszuarbeiten und auf diese Weise ein tieferes Verständnis von Konzepten auszubilden.

Insgesamt zeigt sich, dass der Vergleich von Konzepten dabei helfen kann, die Konzepte besser zu lernen und zu verstehen. Es gibt jedoch keine empirischen Belege dafür, dass diese Methode auch den Transfer auf neue Aufgabenstellungen oder Problemlösungen fördert (vgl. Rittle-Johnson & Star, 2011, S. 207).

Wie in einigen Erläuterungen von Untersuchungen zum Transfer durch Analogiebildung angemerkt, werden in diesen häufig Lösungsbeispiele in der initiierenden Lernphase eingesetzt. Eine Vielzahl von Studien zeigt, dass die Instruktion mit Lösungsbeispielen in frühen Phasen des Wissenserwerbs besonders effektiv ist und bezüglich der Entwicklung von Problem- oder Lösungsschemata zu besseren Ergebnissen führt als problemlösende Ansätze.

**Lernen mit Lösungsbeispielen:** Ein Lösungsbeispiel besteht aus drei Komponenten: Einer Aufgabenstellung, einer Darstellung der relevanten Lösungsschritte und der Lösung der Aufgabe (R. K. Atkinson, Renkl & Merrill, 2003, S. 774; Renkl, 2005, S. 230). Im Zentrum steht die Darstellung der relevanten Lösungsschritte, die zusammen mit der Aufgabenstellung und dem Ergebnis bzw. der Lösung ein Lösungsschema für eine Klasse von Problemstellungen vorgibt (vgl. R. K. Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000, S. 181 f.). Die Lösungsschritte können in einer unterschiedlichen Ausführlichkeit kommentiert werden, um etwa Zusammenhänge und Übergänge zwischen den einzelnen Schritten zu erklären und herauszustellen (vgl. Abbildungen 1.5 und 1.6). Im Gegensatz zu einem Lehrtext werden die Lösungsprozeduren explizit aufgeführt und müssen nicht einem Text entnommen und aus diesem herausgelöst werden (Salle, 2015, S. 24; Stark, 1999, S. 20).

Der Einsatz von Lösungsbeispielen in frühen Lernphasen, in denen die Lernenden noch wenig über die thematisierten mathematischen Inhalte und Strukturen wissen, erweist sich in empirischen Vergleichsstudien als wesentlich effizienter als das eigenständige Lösen von Problemen (vgl. Sweller & Cooper, 1985; Cooper & Sweller, 1987; Renkl, Gruber, Weber, Lerche & Schweizer, 2003). Durch die Präsentation der relevanten Schritte und Zusammenhänge in Lösungsbeispielen sind die

1. For the equation $a = ag + b$, express $a$ in terms of the other variables.

$$a = ag + b$$

$$a - ag = b$$

$$a(1 - g) = b$$

$$a = \frac{b}{1-g}$$

2. For the equation $\frac{b(a + c)}{e} = d$, express $a$ in terms of the other variables.

$$\frac{b(a + c)}{e} = d$$

$$b(a + c) = ed$$

$$a + c = \frac{ed}{b}$$

$$a = \frac{ed}{b} - c$$

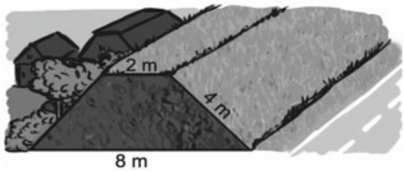
**Abbildung 1.5** Zwei Lösungsbeispiele zu elementaren Termumformungen (Sweller & Cooper, 1985, S. 70)

Lernenden nicht gezwungen, oberflächliche Strategien zur Lösung von Problemen anzuwenden, sondern können zunächst ein grundlegendes Verständnis des relevanten Prinzips und seiner Anwendung gewinnen bevor sie selber beginnen analoge Problemstellungen zu bearbeiten:

> „One tried-and-tested method of preventing [...] premature and unproductive problem solving is to first present worked examples that the students should try to understand. Only after having gained some understanding of the relevant principle and its application (e.g., multiplication rule in probability), the students work on problems.“ (Renkl, 2017, S. 572)

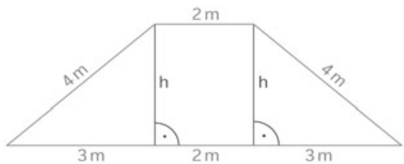
Zudem hat es sich als höchst effektiv dargestellt, den Übergang zum eigenständigen Problemlösen und der Lösung von Transferaufgaben durch den Einsatz unvollständiger Beispiele zu gestalten (Renkl, Atkinson, Maier & Staley, 2002; Renkl, 2017; Salle, 2015; Salden, Aleven, Renkl & Schwonke, 2009). Unvollständige Beispiele

**1.** Zum Schutz vor Straßenlärm soll ein 155 m langer Erdwall errichtet werden. Der Querschnitt des Walls ist ein gleichschenkliges Trapez mit den angegebenen Maßen.
Wie viel $m^3$ Erde werden benötigt?




Lösung

A ist die Größe der Querschnittsfläche.
Für das Volumen V gilt dann:
$V = A \cdot 155\ m$
Wir müssen also nur noch A bestimmen.



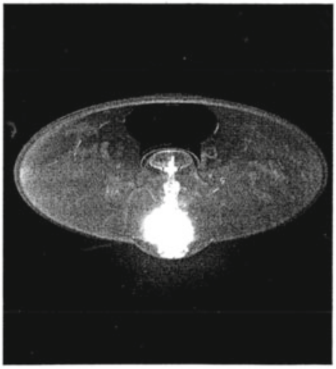

In das Trapez zeichnen wir zwei Höhen so ein, dass rechts und links jeweils ein rechtwinkliges Dreieck entsteht.
Da das Trapez gleichschenklig ist, sind die unteren Katheten der Dreiecke jeweils 3 m lang.
Die Trapezhöhe h berechnen wir nun mit dem Satz des Pythagoras:
$h^2 = (4\ m)^2 - (3\ m)^2 = 7\ m^2$
$h = \sqrt{7\ m^2} \approx 2{,}65\ m$
Damit erhalten wir: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{8\ m + 2\ m}{2} \cdot 2{,}65\ m = 13{,}25\ m^2$ und
$V = 13{,}25\ m^2 \cdot 155\ m = 2053{,}75\ m^3$
*Ergebnis:* Für den Lärmschutzwall werden ca. 2050 $m^3$ Erde benötigt.

**Abbildung 1.6** Lösungsbeispiel zur Berechnung von Längen in einem Trapez mithilfe des Satzes des Pythagoras (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2015, S. 123)

erfordern von den Lernenden das Wissen aktiv zu integrieren und auf neue Probleme anzuwenden, indem sie einzelne Lösungsschritte eigenständig ergänzen müssen. Eine Art von unvollständigen Beispielen sind die sogenannten „fading examples“ (Renkl et al. 2002), die im Wesentlichen aus einem ausgearbeiteten Lösungsbeispiel bestehen, bei dem Teile des Lösungsweges ausgeblendet werden, die von den Lernenden ergänzt werden müssen (vgl. Abbildung 1.7).

Obgleich beim Lernen mit Lösungsbeispiel der Aufbau von Schemata im Vordergrund steht, beschreibt Renkl (2017, S. 574 f.) zwei Modelle des Transfers: Ein direkter Weg zur Anwendung der erarbeiteten Prinzipien und Lösungsschemata ist, dass die Lernenden eine Transferaufgabe direkt auf Grundlage der zugrundeliegenden Prinzipien interpretieren können:

Die Familie Zweistein fliegt für 3 Wochen in Urlaub. Am Flughafen fällt Vater Zweistein ein, dass er vergessen hat im Keller das Licht auszuschalten. Das Leuchten der Glühbirne benötigt 1,5 A bei 220 V Spannung. Wie viel kostet die Vergesslichkeit von Vater Zweistein, wenn die Glühbirne den ganzen Urlaub über brennt und die Kilowattstunde 0,35 DM kostet?



1. Elektrische Leistung (*P*) =
   Spannung (*U*) · Stromstärke (*I*)
   P = 220 V (*U*) · 1,5 A (*I*)
   P = 330 W (= 0,33 kW)

2. Kosten pro Stunde: 0,33 kW · 0,35 DM
   Kosten pro Stunde: 0,12 DM

3. ______________________________

   ______________________________

Die Vergesslichkeit von Vater Zweistein kostet die Familie ____ DM.

**Abbildung 1.7** Unvollständiges Lösungsbeispiel zum Rechnen mit Größen bei dem der letzte Lösungsschritt ausgeblendet wurde (Renkl, Schworm & vom Hofe, 2001, S. 17)

> „In other words, they can ‘see through’ the surface features (e.g., numbers and objects in a mathematical word problem) and select the correct principles (e.g., a mathematical theorem) to interpret and solve transfer problems.“ (Renkl, 2017, S. 574)

Ein zweiter, indirekter Weg führt über das Bilden von Analogien. Da es vielen Lernenden nicht direkt gelingt die korrekten Prinzipien und Lösungsschemata zu aktivieren, wenn sie eine Transferaufgabe bearbeiten sollen, können sie an ein ähnliches Problem erinnert werden. Sofern dieses analoge Problem in Beziehung mit dem zugrundeliegenden Prinzip repräsentiert wurde, ermöglicht dieses den Lernenden dennoch einen direkten Zugang zu den benötigten Inhalten und Prinzipien (Renkl, 2017, S. 574).

Ein erfolgreiches Lernen mit Lösungsbeispielen ist unmittelbar von der Intensität der kognitiven Aktivität der Lernenden beim Studium von Lösungsbeispielen abhängig. Eine passive und oberflächliche Verarbeitung von Lösungsbeispielen (Renkl, 1997; Scheiter, Gerjets & Schuh, 2010), eine mangelnde Fokussierung auf die zentralen inhaltlichen Konzepte (Kalyuga, Ayres, Chandler & Sweller, 2003; Grosse, 2005), die isolierte Präsentation von Lösungsbeispielen (Sweller & Cooper, 1985; Renkl, 2005; Grosse, 2005) sowie der Einsatz mit fortgeschrittenen Lernenden („expertise-reversal effect" Kalyuga et al., 2003) können den Lernprozess bzw. den Schemaaufbau behindern.

Zur Vermeidung einer oberflächlichen Verarbeitung von Lösungsbeispielen und mangelnden Fokussierung auf die zentralen Inhaltselemente ist der Einsatz von fokussierenden Fragestellungen („self-explanation-prompts", R. K. Atkinson et al. 2003; Salle, 2015; Renkl, 2017) eine unterstützende Maßnahme:

> „Selbsterklärungsprompts sind Fragen bzw. Anregungen, die auf wichtige Begriffe, Voraussetzungen, Einschränkungen oder das Ziel einzelner Schritte bzw. der ganzen Aufgabenlösung fokussieren und so eine tiefe Verarbeitung der Inhalte anregen sollen." (Salle, 2015, S. 61)

Fokussierende Fragestellungen sollten während der Erarbeitung eines Lösungsbeispiels präsentiert werden, da sie auf diese Weise in die Verarbeitung des Lösungsbeispiels mit einbezogen werden können und so die kognitive Belastung der Lernenden weniger ausgereizt wird als es bei einer getrennten, vor- oder nachgelagerten Präsentation der Fall sei (Tillmann, Künsting, Wirth & Leutner, 2009, S. 113).

**Zusammenfassung:** Zusammenfassend zeigt die Befundlage zum Transfer durch die Bildung von Analogien (vor allem beim Problemlösen), dass die Bildung von Analogien sehr fehleranfällig ist und bei Gelingen nur selten zu einem spontanen positiven Transfer führt (vgl. Gick & Holyoak, 1983; Holyoak & Koh, 1987; Kubricht et al. 2017). Für eine erfolgreiche Analogiebildung und späteren analogen Transfer bedarf es zumeist direkter Hinweise und der direkten Anleitung durch den Einsatz vergleichender Instruktionsmethoden (vgl. Catrambone & Holyoak, 1989; Loewenstein et al., 2003; Rittle-Johnson & Star, 2011; Richey & Nokes-Malach, 2015). Zudem hängt der Transfererfolg sehr stark von den individuellen Vorkenntnissen der Lernenden ab (vgl. Novick & Holyoak, 1991; Holyoak & Thagard, 1997). Insbesondere in Fällen, in denen die Lernenden ihr Wissen noch nicht so organisiert haben, dass sie Gemeinsamkeiten zwischen dem Ausgangs- und Zielbereich einer

Analogie erkennen können, orientieren sich Lernende an den Oberflächenmerkmalen (vgl. Holyoak & Koh, 1987; Ross, 1987; Chi & VanLehn, 2012) und ziehen häufig die falschen Schlüsse, was sie dazu verleitet, ihr Vorwissen zu übergeneralisieren und Methoden und Prinzipien fälschlicher Weise zu übertragen (vgl. Ross, 1987; McNeil, 2008; Schwartz, Chase & Bransford, 2012).

Da die Ausbildung von mentalen Repräsentationen der Ausgangsanforderung für einen Analogietransfer von elementarer Bedeutung ist, zeigt sich der Einsatz der Instruktionsmethode des Lernens mit Lösungsbeispielen (Renkl, 2017; Salle, 2015) als besonders effizient und wird aus diesem Grund vielfach in experimentellen Studien eingesetzt.

Die meisten Studien zum Bilden von Analogien und dem Transfer durch Analogiebildung wurden in kontrollierten Laborsituationen mit Studierenden durchgeführt. Dies hat vor allem den Hintergrund, dass junge Lernende und Novizen nur selten über hinreichendes domänen-spezifisches Wissen verfügen und auf ausreichend abstrakte Wissensrepräsentationen zurückgreifen können und somit die weitreichenden Voraussetzungen für einen Analogietransfer nur selten gegeben sind (vgl. Gentner, 1989, S. 232). Studien, die in einem schulischen Rahmen durchgeführt wurden, beschränken sich zumeist auf schematische Inhalte, wie das Lösen von Gleichungen, Umstellen von Termen und Anwenden von Formeln in kombinatorischen Aufgabenstellungen. Dabei werden nur selten Prozessdaten erhoben, die einen Einblick und die Analyse der individuellen Auseinandersetzungen der Lernenden mit den Materialien erlauben.

### 1.2.3 Zusammenfassung

Kognitionspsychologische Theorien erklären Transfer vornehmlich über die Ausbildung und Anwendung von abstrakten Wissensrepräsentationen. Transfer wird allgemein als die *Anwendung von Wissen* aus einer Lernsituation in einer neuen und unbekannten Anwendungssituation konzeptualisiert. Die Anwendung von zuvor entwickelten Wissensstrukturen ist vornehmlich von zwei Aspekten abhängig, der Qualität der im Langzeitgedächtnis gespeicherten Wissensstrukturen und der Ähnlichkeit zwischen Lern- und Anwendungssituation.

**Qualität der aufgebauten Wissensstrukturen:** Die in diesem Kapitel dargestellten Theorien konzeptualisieren *Wissen als abstrakte Handlungsrepräsentationen*, die bereichsunabhängig angewendet werden können. Für eine Anwendung in neuen Anforderungssituationen bedarf es eines weitreichenden Abstraktionsprozesses, in dem die Handlungsschemata von ihren ursprünglichen Anwendungssituationen losgelöst und auf die neue Situation übertragen bzw. in der Transfersituation angewendet werden.

Bereits vor der Entwicklung von Modellen der menschlichen Informationsverarbeitung wurden empirische Beobachtungen zur Theoriebildung in Hinsicht auf die Beschreibung von Transfer herangezogen. Obgleich die hier dargestellten Perspektiven von Thorndike (1901a; 1901b; 1901c) und Judd (1908; 1939) einen augenscheinlichen Gegensatz zueinander formulieren, so sind ihre Grundgedanken sehr ähnlich, wobei sie unterschiedliche Aspekte von Wissensrepräsentationen hervorheben. Die Theorie der identischen Elemente betont die Bereichsspezifität von angeeigneten Fertigkeiten und formuliert, dass ein und dieselbe Fertigkeit ausschließlich auf partiell identische Anforderungssituationen übertragen werden kann. Diesen Befunden und theoretischen Annahmen fügt Judd hinzu, dass es für eine allgemeine Anwendbarkeit von Wissen und Fertigkeiten notwendig sei, die diesen zugrundeliegenden allgemeinen Prinzipien zu verstehen und abstrahieren.

Mit der Einführung von kognitiven Modellen wurden diese Grundannahmen weiter präzisiert. Singley und Anderson (1989) konzeptualisierten identische Elemente als Produktionsregeln, die als mentale Repräsentation einer Handlung verstanden werden können. Produktionsregeln werden durch die Überführung von deklarativem Wissen in prozedurales Wissen (Wissenskompilierung) gebildet und verknüpfen eine Handlung mit den erforderlichen Anwendungsbedingungen (Wenn-Dann-Regeln). Sie beschreiben die Ausbildung über einen mehrstufigen Prozess der Abstraktion und Generalisierung, in dem auf die Wissenskompilierung der Prozess der Feinabstimmung folgt, in dem die Anwendungsbedingungen weiter eingegrenzt werden und schließlich in einem Stärkungsprozess diese Wissensrepräsentationen auf ihre Anwendungsbedingungen hin konditionalisiert werden. Produktionsregeln werden in der Folge im Langzeitgedächtnis gespeichert und bei Auftreten der entsprechenden Anwendungsbedingungen aktiviert.

Auf ähnliche Weise wird Wissen im Rahmen von Analogiebildungen in Form von Handlungsschemata konzeptualisiert. Über den Vergleich von analogen Problem- oder Aufgabenstellungen abstrahieren Lernende die gemeinsame Struktur der enthaltenen Objekte, Handlungen und Relationen, sodass diese in einer analogen Aufgaben- oder Problemstellung auf diese übertragen werden können. Diese abstrakten Schemata entstehen einerseits durch erfolgreiche Analogiebildungen, indem eine Ausgangs- und Zielsituation in einem gemeinsamen Schema zusammengefasst werden, sodass das Schema eine Klasse von Problemen und Aufgaben repräsentiert. Andererseits wird argumentiert, dass durch die Anpassung vorhandener mentaler Repräsentationen, z. B. durch die Adaption eines Bearbeitungsschemas in einer Transfersituation, eine neue veränderte mentale Repräsentation konstruiert wird.

Die Aktivierung der im Langzeitgedächtnis abgelegten Handlungsrepräsentationen steht in unmittelbarer Abhängigkeit von der Ähnlichkeit zwischen der Lern- und der Anwendungssituation.

**Ähnlichkeit zwischen Lern- und Anwendungssituation:** Die Ähnlichkeit zwischen einer Lern- und Anwendungssituation wird auf zwei Arten beschrieben: Auf Ebene der physischen Oberflächenmerkmale, z. B. Einbindung in einen Sachkontext, vorkommenden Größen sowie auch die Art der Präsentation, und auf Ebene der enthaltenen relationalen Strukturen, der Tiefenstruktur. In frühen Transferuntersuchungen wurden vornehmlich die physischen Merkmale zwischen der Ausgangs- und Transferanforderung als bedingendes Kriterium für einen Transfer betrachtet. Es wurde im Wesentlichen der Transfer zwischen quasi identischen Tätigkeiten und Situationsbedingungen untersucht.

Seit der Einführung von Modellen der menschlichen Informationsverarbeitung und der Konzeptualisierung von Wissen in Form von mentalen Strukturen und Repräsentationen wird die Ähnlichkeit zwischen Anforderungen vor allem auf psychologischer Ebene beschrieben. Aus dieser Sichtweise kann es nur zu einem Transfer zwischen zwei Anforderungen kommen, wenn beide Anforderungen dieselben Wissensstrukturen erfordern oder eine Wissensstruktur an die Merkmale der Transfersituation angepasst werden kann.

In Singley und Andersons (1989) ACT*-Theorie wird vornehmlich der Transfer von Handlungen beschrieben. Die von ihnen beschriebenen Produktionsregeln verbinden eine spezifische Handlungsfolge mit spezifischen Anwendungsbedingungen. Damit eine Handlung in einer neuen Anforderungssituation angewendet werden kann, muss diese über dieselben Bedingungskonstellationen wie die Lernsituation verfügen. Erst mit zunehmender Übung und Generalisierung der Handlung und Verallgemeinerung ihrer Anwendungsbedingungen wird es möglich, die Handlung an leicht veränderte Situationsbedingungen anzupassen.

Im Zusammenhang mit der Bildung von Analogien sind insbesondere Ähnlichkeiten in der Tiefenstruktur von Problemen oder Anforderungen entscheidend. Diese umfasst neben einer Handlungsfolge auch die enthaltenen Objekte und deren Beziehungen zueinander. Für einen Transfer müssen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Anforderungen strukturiert werden, damit es zu einer Abbildung zwischen Ausgangs- und Transferanforderung kommen kann. Dieser Prozess ist im Wesentlichen abhängig von zuvor aufgebauten mentalen Repräsentationen.

Die Befundlage der zahlreichen experimentellen Laborstudien weist daraufhin, dass der Aufbau von transferfähigem Wissen und ein Transfer von aufgebauten Wissensstrukturen durch spezifische Instruktionsmethoden („analogical comparison“, siehe Abschnitt 1.2; „Lernen mit Lösungsbeispielen“, vgl. Renkl, 2017; Salle, 2015) und Hilfestellungen unterstützt werden kann.

Insgesamt können folgende Aspekte kognitionspsychologischer Transfertheorien festgehalten werden:

1. Transfer wird als die Anwendung einer abstrakten Wissensrepräsentation in einer neuen Anforderungssituation beschrieben.
2. Wissen ist zunächst bereichsspezifisch. Für eine Anwendung in nicht identischen Anforderungen bedarf es der Abstraktion und Verallgemeinerung von Anwendungsbedingungen.
3. Entscheidend für einen Transfer zwischen zwei Anforderungen sind die Ähnlichkeiten in den Oberflächenmerkmalen der Anforderungen sowie ihrer Tiefenstruktur auf Grundlage von Objekten, Handlungen und Relationen.
4. Wenn zwei Anforderungen einander nicht sehr ähnlich sind, werden entscheidende Strukturelemente von Lernenden nur selten spontan identifiziert, sodass ein Transfer durch anleitende Instruktionsmethoden und Hilfestellungen unterstützt werden muss.
5. Der Aufbau von robusten und transferfähigen Wissensstrukturen kann durch den Einsatz der Instruktionsmethoden des analogen Vergleichs und des Lernens mit Lösungsbeispielen unterstützt werden.
6. Studien mit mathematischem Untersuchungsgegenstand beschränken sich zumeist auf den Einsatz formaler, algorithmischer Inhalte und Kalküloperationen aus den Bereichen algebraischer Termumformungen, Geometrie, oder elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hierbei wird selten die begriffliche Entwicklung über einen längeren Lernzeitraum betrachtet.

## 1.3 Transfer aus Perspektive der Situierten Kognition

Die kognitionspsychologische Perspektive auf Transfer, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurde, wird von Vertretern der Situierten Kognition stark kritisiert. Im Zentrum der Kritik steht dabei, dass Wissen in der experimentellen Transferforschung zumeist als abstrakte Entität in den Köpfen von Individuen betrachtet wird. Das Problem des Transfers sei somit ein Problem der Anwendung dieser abstrakten Entitäten in Situationen, die nur wenig mit dem ursprünglichen Lernkontext gemeinsam haben (Gruber, Law, Mandl & Renkl, 1996, S. 169). Vertreter situierter Ansätze verstehen Wissen jedoch nicht als situationsunabhängige, abstrakte und symbolische Strukturen in den Köpfen von Personen, sondern argumentieren ganz im Gegenteil, dass Wissen immer untrennbar an einen situativen Kontext gebunden ist.

Lobato (2006, S. 434 f.) ordnet die Kritik von Vertretern der Situierten Kognition an der experimentalpsychologischen Transferforschung in fünf theoretische Probleme: Erstens erfordern die Experimentalstudien Expertenwissen und akzeptieren ausschließlich Anzeichen für Transfer, die im Vorhinein aus der Expertensicht der Forscher definiert wurden. In der Folge können diese Experimente, wie Lave (1988, S. 20) es beschreibt, zu unnatürlichen Laborspielen werden, in denen die Probanden die Aufgabe haben, die Erwartungen der Forscher zu erfüllen, anstatt, dass die tatsächlichen Prozesse untersucht werden, in denen die Probanden ihr Wissen einbringen um neue Probleme zu lösen (vgl. Lobato, 2006, S. 434). Zweitens werde ein funktionalistischer Wissensbegriff verwendet, indem Wissen von konkreten Erfahrungen getrennt werde und dekontextualisiertes Wissen als Grundlage für Generalisierungen betrachtet wird. Dies sei aus Perspektive der Situierten Kognition problematisch, da Wissen nicht von praktischen Anwendungen isoliert und ernsthaft untersucht werden könne (Lobato, 2006, S. 434; vgl. auch Brown, Collins & Duguid, 1989). Drittens werde der Kontext zumeist als die Testaufgabe interpretiert, die den Probanden vorgelegt wird. Diese würden unabhängig von den Absichten und der Sinnkonstruktion der Probanden analysiert (Lobato, 2006, S. 434; vgl. auch Carraher & Schliemann, 2002; Greeno, 1997). Viertens sei die Sicht auf Transfer stark dadurch eingeschränkt, dass ignoriert werde, inwiefern die Umgebung der Lernenden, genutzte Hilfsmittel sowie die Interaktion mit anderen Personen zur Organisation und Generalisierung im Lernprozess beitragen:

> „the „applying knowledge“ metaphor of transfer suggests that knowledge is theoretically separable from the situations in which it is developed or used, rather than a function of activity, social interactions, culture, history and context.“ (Lobato, 2006, S. 434)

Zuletzt werde in diesen Studien nicht einbezogen, auf welche Weise die Probanden Transfersituationen umformen, sodass sie ähnlich zu den Situationen werden, die sie bereits kennen (Lobato, 2006, S. 434 f.; vgl. auch Bransford & Schwartz, 1999).

Im Folgenden werden die Argumente drei „repräsentative[r]“ (Gruber et al., 1996, S. 170) Ansätze der Situierten Kognition kurz hinsichtlich ihrer zentralen Aussagen und Forderungen dargestellt und diskutiert: Laves (1988; 1991) Ansatz von „Cognition in Practice“ und „Communities of Practice“, Rogoffs (1990) Ansatz eines „Apprenticeship in Thinking“ und Greeno, Smith und Moores (1993) Sicht von „Transfer als Anpassung mentaler Handlungsmodelle“.

### 1.3.1 Lave – Cognition in Practice & Communities of Practice

In ihrem Buch mit dem Titel „Cognition in Practice" dokumentiert Lave (1988) die Ergebnisse des langjährigen AMP-Projekts (Adult Mathematics Project), in dem in verschiedenen Studien die arithmetischen Alltagspraktiken von 35 erwachsenen Amerikanern mithilfe von Interviews und Feldbeobachtungen beim Einkaufen, Kochen, Abnehmen und dem Handhaben von Geld untersucht wurden. Die drei leitenden Prinzipien dieser Studien sowie ihres Buches sind (i) eine epistemologische Kritik an kognitionspsychologischen Theorien und Experimentalstudien, (ii) die Beschreibung von empirischen Beobachtungen vor dem Hintergrund eines theoretischen Rahmens zur Charakterisierung mathematischer Aktivitäten sowie (iii) die Skizzierung einer sozial anthropologischen Theorie der menschlichen Kognition (vgl. auch Pea, 1990, S. 28).

Leitend für ihre Argumentation ist die Kritik an den „traditionellen" Theorien und Methoden der experimentellen Transferforschung:

> „Its central characteristics include the separation of cognition from the social world, the separation of form and content implied in the practice of investigating isomorphic problem solving, and a strictly cognitive explanation for continuity in activity across situations." (Lave, 1988, S. 43)

Sie lehnt die Verwendung des Begriffs Transfer ab, da dieser suggeriere, dass Wissen ein mechanisches Wiederanwenden träger Konzepte in unterschiedlichen Situationen sei (vgl. Gruber et al. 1996, S. 170). Sie argumentiert:

> „[T]ransfer is characterized as occurring across unrelated, or analogically related, or remotely related situations, but never across settings complexly interrelated in activity, personnel, time, space or their furnishings." (Lave, 1988, S. 40)

Als Folgerung sollte Lernen und Transfer nicht als Erwerb und Anwendung von kognitiven Strukturen und abstrakten Schemata, sondern im Rahmen einer sozialen Theorie betrachtet werden, in der die Beziehungen zwischen Personen, ihren Aktivitäten und Handlungen in situativen Kontexten im Vordergrund stehen und die Anwendung von erlernten Fähigkeiten maßgeblich bedingen (vgl. Lave & Wenger, 1991; Gruber et al. 1996).

Vor diesem Hintergrund sind auch die von Lave (1988) berichteten Studien aus dem AMP-Projekt zu lesen. In diesen Studien werden die Unterschiede zwischen dem Lösen arithmetischer Problemstellungen bzw. allgemein dem Rechnen in instruktionalen Kontexten und in alltäglichen Situationen beschrieben und herausgestellt. Die bekannteste Studie aus dem AMP-Projekt ist die Supermarkt-Studie von Murtaugh (1985a; 1985b; Lave, 1988; siehe auch Greiffenhagen und Sharrock 2008). In dieser Studie werden die Ergebnisse von 24 „just plain folks" (Lave, 1988, S. 4) in einem Rechentest (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von natürlichen Zahlen, Dezimalzahlen und Bruchzahlen) mit Beobachtungen beim Preisvergleich beim Einkaufen im Supermarkt verglichen. Während die Probanden im Rechentest im Durchschnitt lediglich 59 Prozent der Aufgaben korrekt lösen konnten, berichtet Lave von einer durchschnittlichen Lösungsrate beim Preisvergleich im Supermarkt von 98 Prozent (Lave, 1988, S. 56). Lave folgert:

> „The direction of the difference in problem-solving success between these settings contravenes the logic of learning transfer. Math is the central ongoing activity in the test situation and should command resources of attention and memory greater than those available in the supermarket where math competes for attention with a number of other concerns. School algorithms should be more powerful and accurate than quick, informal procedures (that's why they are taught in school). Finally, 98 % accuracy in the supermarket is practically error-free arithmetic, and belies the image of the hapless jpf [just plain folks] failing cognitive challenges in an everyday world." (Lave, 1988, S. 57 f.)

Diese polarisierenden Befunde wurden breit rezipiert (siehe Greiffenhagen & Sharrock, 2008, S. 9 f.) und als Argument für die Förderung einer Verschiebung des schulischen Lernens in reale Anwendungssituationen gedeutet. Bei einer näheren Analyse zeigt sich jedoch ein anderes Bild: Greiffenhagen und Sharrok (2008, S. 9 ff.) stellen anhand der publizierten Daten dieser Studie heraus, dass von den 803 beobachteten Fällen von vermeintlichen Preisvergleichen durch Rechnen, lediglich in 49 dieser Fälle tatsächlich eine arithmetische Rechenoperation der Probanden zugrunde lag, was sechs Prozent der beobachteten Fälle entspricht (Greiffenhagen & Sharrock, 2008, S. 10). Die Autoren argumentieren, dass der Vergleich von Preisen der gleichen Menge eines Produkts sowie der Vergleich zweier Inhaltsmengen gleichen Preises keiner Rechnung bedürfe:

> „Although these comparisons involve numbers, they do not involve 'calculation' (unless seeing that one number is bigger than another ist counted as a calculation)." (Greiffenhagen & Sharrock, 2008, S. 10)

Ferner seien die im Supermarkt durchgeführten Rechnungen als sehr einfach einzuschätzen: „The 98 % success rate thus reflects the fact that the shoppers can successfully employ the two and three times table and are able to add and subtract small numbers" (Greiffenhagen & Sharrock, 2008, S. 10). Da in dem schriftlichen Rechentest im Gegensatz dazu jedoch Aufgaben, wie z. B. 975 · 987 · 956 oder 437 · 305, (Lave, 1988. S. 74) abgefragt wurden, ist die Vergleichbarkeit der Rechenleistungen in diesen beiden situativen Rahmen in Frage zu stellen.

Ungeachtet der polarisierenden Rezeption der Ergebnisse aus dem AMP-Projekt formuliert Lave (1988) einflussreiche Forderungen für eine umfassendere theoretische Rahmung von empirischen Studien zum Lernen und zum Transfer. Im Kern ihres Ansatz steht der Begriff der „Dialektik" (Lave, 1988, S. 148). Sie fordert, dass die kognitiven Leistungen eines Individuums nicht ausschließlich im eng umgrenzten Rahmen der Testaufgabe betrachtet werden sollten, sondern im Spannungsfeld der Beziehungen zwischen handelnden Individuen, dem Kontext ihrer Handlung und der Handlung selbst: „cognition is constituted in dialectical relations among people acting, the context of their activity, and the activity itself" (Lave, 1988, S. 148). Sie argumentiert, dass Prozesse der Wissensanwendung bzw. des Transfers immer in einem sozial-kulturellen Rahmen betrachtet werden müssen, da dieser das Handeln von Personen maßgeblich beeinflusst. Dies gilt im Übrigen auch, wenn eine Person allein ist, da die „materielle Umwelt weitgehend sozial determiniert ist" (Renkl, 1996, S. 86) und somit auch Dinge, wie ein Taschenrechner oder Computer, mit denen eine Person interagiert, Produkte einer Kultur sind und somit soziales Wissen enthalten.

Ihre Folgerungen für das Lernen in instruktionalen Umgebungen wie der Schule folgen eben diesen Gedanken. Lernen sollte anhand realer Anwendungssituationen in Kooperation mit anderen Lernenden und Experten in „communities of practice" (Lave & Wenger, 1991) stattfinden:

> „We have insisted that exposure to resources for learning is not restricted to a teaching curriculum and that instructional assistance is not construed as a purely interpersonal phenomenon; rather we have argued that learning must be understood with respect to a practice as a whole, with its multiplicity of relations – both within the community and with the world at large. Dissociating learning from pedagogical intentions opens the possibility of mismatch or conflict among practitioners' viewpoints in situations where learning is going on. These differences often must become constitutive of the content of learning." (Lave & Wenger, 1991, S. 114)

Nur im Rahmen von alltäglichen praktischen Tätigkeiten können inhaltliche Beziehungen mit den Eigenschaften der Anwendungssituation verstanden werden. Insbesondere seien es eben jene realen Anwendungssituationen, die dazu führen, dass unterschiedliche Perspektiven der Handelnden zum Vorschein kämen, deren Aushandlung die Grundlage des Lernens bilden:

> „The activity of finding something problematic subsumes a good deal of knowledge about what would constitute a (re)solution, or a method for arriving at one. [...] The

> dialectical process in the particular context of everyday arithmetic is one of gap closing between the resolution characteristics and procedural possibilities.“ (Lave, 1988, S. 159)

Zusammenfassend kann der zentrale Beitrag von Laves Arbeit darin gesehen werden, dass sie neue Perspektiven auf die empirische und pädagogische Praxis einbringt, in denen insbesondere die sozial-kulturellen Aspekte des Lernens und Problemlösens in den Vordergrund gerückt werden und die Handlungen der Lernenden stets in ihrem situativen Rahmen betrachtet werden:

> „One of her central achievements is recasting problem solving from *problems* to solve to *dilemmas* to resolve – from a cognitive psychological perspective that tends to treat problems as givens, to a dialectical one that sees problem-solving activity in everyday situations as arising from conflict-generating dilemmas that require resolution.“ (Pea, 1990, 29, Hervorhebung im Original)

### 1.3.2 Rogoff – Apprenticeship in Thinking

Der Grundsatz in Rogoffs Theorie ist, dass die kognitive Entwicklung von Kindern untrennbar von der sozialen Umwelt ist, in der sie lernen. In ihrer Theorie beschreibt sie kognitive Entwicklung als einen Prozess der Partizipation an sozial-kulturellen Aktivitäten[9] (Rogoff, 1990; Rogoff, Baker-Sennett, Lacasa & Goldsmith, 1995; Rogoff, 1995). Durch die Teilnahme an sozial-kulturell geprägten Aktivitäten werden Kinder in diese kulturellen Praktiken eingebunden, wodurch sich ihre Partizipation verändert. Diese Veränderung der Partizipation des Kindes beschreibt Rogoff als Lernen: „[...] We move from seeing development as acquisition to viewing development as a process of transformation through participation in sociocultural activity“ (Rogoff et al. 1995, S. 56). Dementsprechend dürfen Handlungen des Lernens eines Individuums nicht in Isolation oder in einer fremden Umwelt untersucht werden, wie es in experimentalpsychologischen Experimenten die Regel sei, sondern müssen stets vor dem Hintergrund einer engen Verwobenheit zwischen individueller und sozialer Ebene betrachtet werden.

> „In our approach, individuals’ efforts and sociocultural institutions and practices are constituted by and constitute each other and cannot be defined independently of each other or studied in isolation.“ (Rogoff et al. 1995, S. 45)

[9] Rogoff selbst beschreibt ihre Arbeit als eine Auseinandersetzung und Weiterentwicklung von Vygotskys Konzept der Zone der proximalen Entwicklung (vgl. Rogoff, 1995, S. 148). Diese Weiterentwicklung betrachtet sie als notwendig, um auch außerschulische Diskurse, Praktiken und Konzepte zu analysieren.

Die Partizipation in einer kollaborativen Aktivität führt dazu, dass einerseits das teilhabende Individuum eine Entwicklung erfährt, andererseits aber auch die Aktivitäten der Gemeinschaft verändert werden (Rogoff et al. 1995, S. 45 f.). Mit dem Begriff Entwicklung grenzt Rogoff ihre Theorie von der Idee der Wissensaufnahme, in der neue Inhalte einem Wissensspeicher hinzugefügt werden, ab und beschreibt Entwicklung als Prozess einer Veränderung vorhandenen Wissens durch die Partizipation in sozial-kulturellen Aktivitäten. Rogoffs Grundidee von Transfer ist folglich nicht die Anwendung von Wissen in neuen Situationen, sondern es ist vielmehr ein Prozess der Veränderung, den Lernende durch Teilhabe an Aktivitäten durchlaufen:

> „Through engagement in an activity at one time, individuals change and handle a later situation in ways prepared by their own participation in the previous situation. Studying the *process* of children's participation and changing responsibility in an activity is both how researchers can understand development and how development occurs." (Rogoff et al. 1995, 46, Hervorhebung im Original)

Analysen dieser individuellen Entwicklungsprozesse erfordern Beobachtungen auf drei Ebenen: Der *personellen* Ebene, auf der beobachtet wird, wie das Individuum sich durch die Teilnahme an Aktivitäten verändert, der *interpersonellen* Ebene, auf der die Interaktion mit anderen Individuen oder Materialien hinsichtlich gemeinschaftlicher Aushandlungen beobachtet wird sowie auf der *gemeinschaftlichen* Ebene, auf der die Veränderungen der kulturell organisierten Aktivitäten beobachtet werden (Rogoff et al. 1995; Rogoff, 1995). Analysen auf diesen Ebenen sollten jedoch nicht in Isolation, sondern stets in Abhängigkeit voneinander vorgenommen werden, wobei eine Schwerpunktsetzung möglich ist: „Community, interpersonal, and personal planes of analysis can each become the focus of a particular analysis, but without being separated from each other" (Rogoff et al. 1995, S. 46; vgl. auch Rogoff, 1995, S. 139, f.).

Im Zusammenhang mit diesen drei Ebenen der Beobachtung stehen die drei Kernkonzepte ihrer Theorie: „Apprenticeship" (gemeinschaftliche Ebene), „guided participation" (interpersonelle Ebene) und „participatory appropriation" (personelle Ebene).

**Apprenticeship:** Mit der Metapher des „Apprenticeship" umschreibt Rogoff, wie neue Mitglieder in einer „community of practice" ihre Fertigkeiten und ihr Verständnis entwickeln, indem sie aktiv zusammen mit anderen Mitgliedern in kulturell organisierten Aktivitäten teilnehmen:

> „The metaphor focuses attention on the active role of newcomers and others in arranging activities and support for developing participation, as well as on the cultu-

> ral/institutional practices and goals of the activities to which they contribute.“ (Rogoff, 1995, S. 143)

Anders als in bisherigen Konzeptionen von „Apprenticeship“ fokussiert ihr Verständnis jedoch nicht nur Paare von Experten und Anfängern, sondern verbindet kleine Gruppen in einer Gemeinschaft mit spezifischen Rollen, die sich auf das Erreichen eines gemeinsamen Ziels orientieren. Zudem beschreibt Rogoff, dass ihr Verständnis von Apprenticeship vielmehr die interpersonellen Beziehungen und Arrangements einbezieht, die dazu führen, dass die Anfänger zunehmend mehr Verantwortung in der gemeinsamen Handlung mit einem gemeinsamen Ziel übernehmen:

> „[...] it encourages the recognition that endeavors involve purposes (defined in community or institutional terms), cultural constraints, resources, values relating to what means are appropriate for reaching goals (such as improvisation versus planning all moves before beginning to act), and cultural tools such as maps, pencils, and linguistic and mathematical systems.“ (vgl. Rogoff, 1995, S. 143)

**Guided Participation** Unter dem Begriff „Guided Participation“ versteht Rogoff (1990, S. 110 ff.; 1995, S. 146 ff.) die Unterstützung des Kindes durch die Lenkung eines kompetenteren Gegenübers. Eine gelenkte Partizipation gründet sich stets auf einem gemeinsamen Ziel des Kindes und des kompetenteren Gegenübers. Sie wird als ein Prozess beschrieben, der gemeinschaftlich vom Kind und Partner gestaltet wird.

Das Konzept dient nicht zur Definition bestimmter Situationen, sondern soll eine Perspektive für die Beobachtung der Auseinandersetzung zwischen Kind und Partner hinsichtlich ihrer Passung in sozial-kulturelle Prozesse bieten, die es ermöglicht, das Lernen und die Entwicklung besser zu verstehen (Rogoff, 1995, S. 147). In diesen Beobachtungen soll der Fokus nicht darin bestehen bestimmte Formen der Interaktion zu identifizieren, sondern ein System zu analysieren, das dem interpersonellen Diskurs von Kind und Partner zugrunde liegt:

> „[...] it is meant to focus attention on the system of interpersonal engagements and arrangements that are involved in participation in activities (by promoting some sorts of involvement and restricting others), which is managed collaboratively by individuals in face-to-face or other interaction, as well as the adjustment of arrangements for each others’ and their own activities.“ (Rogoff, 1995, S. 146 f.)

Diese Interpersonalität verdeutlichen Rogoff et al. (1995, S. 147) am Beispiel eines Kindes, dass einen Aufsatz verfasst: Sie beschreiben die Arbeit an einem Aufsatz als eine kulturelle Aktivität, die lenkende Interaktionen mit Lehrern, Klassenkameraden, Familienmitgliedern, Bibliothekaren, Autoren und der Bücherindustrie beinhaltet. Diese helfen dem Kind die Ziele für den Aufsatz abzustecken und bestimmen die Materialien und Zugänge für den Aufsatz.

In diesem Zusammenhang ist „guided participation“ ein interpersoneller Prozess, in dem Personen ihre eigenen Rollen und die Rollen von anderen arrangieren und Situationen strukturieren, in denen sie kulturelle Aktivitäten beobachten und an ihnen teilnehmen (Rogoff, 1995, S. 147 f.). So versuchen neue Mitglieder in einer Gemeinschaft zunächst aktiv die gemeinsamen Handlungen zu verstehen und versuchen sich schließlich selber in eine Position zu bringen, in der sie an gemeinsamen Handlungen teilnehmen.

Die Prozesse in einer gelenkten Teilhabe führen zu einer Veränderung auf der Ebene des teilhabenden Individuums, die unter dem Begriff „participatory appropriation“ diskutiert werden.

**Participatory Appropriation:** Unter dem Begriff der teilhabenden Aneignung beschreibt Rogoff (Rogoff, 1995, S. 150 ff.) Prozesse, in denen Personen ihr Verständnis von und ihre Verantwortung für Aktivitäten verändern, an denen sie teilnehmen:

> „The basic idea of appropriation is that, through participation, people change and in the process become prepared to engage in subsequent similar activities. By engaging in an activity, participating in its meaning, people necessarily make ongoing contributions (whether in concrete actions or in stretching to understand the actions and ideas of others). Hence, participation is itself a process of appropriation.“ (Rogoff, 1995, S. 150 f.)

Dabei nutzt sie den Begriff der Aneignung um diesen vom Begriff der Internalisierung, wie er in der psychologischen Lernforschung und dem Kontext der Informationsverarbeitung verwendet wird, abzugrenzen und zu beschreiben, wie Kinder durch die Teilhabe an sozial-kulturellen Aktivitäten profitieren. Sie argumentiert, dass Internalisierung stets einen statischen Charakter von Wissen zum Ausdruck bringt, wobei die Teilhabe an Aktivitäten doch ein aktiver und dynamischer Prozess sei (vgl. Rogoff, 1995, S. 151). Diese dynamische Sicht auf Wissen und Lernen stellt sie der Sichtweise der Informationsverarbeitung gegenüber (Abb. 1.8):

> „This dynamic approach of participatory appropriation does not define cognition as a collection of stored possessions (such as thoughts, representations, memories, plans),

but rather treats thinking, re-presenting, remembering, and planning as active processes that cannot be reduced to the possession of stored objects.“ (Rogoff, 1995, S. 151)

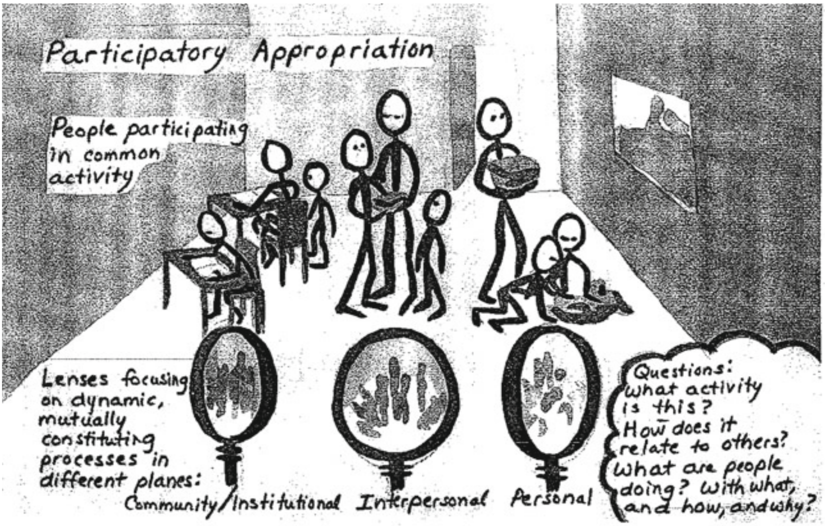



**Abbildung 1.8** Rogoffs übersichtsartige Darstellung ihres Konzepts der teilhabenden Aneignung (Rogoff, 1995, S. 158)

Entsprechend sollte nicht das Wissen bzw. der Wissenserwerb von Lernenden untersucht werden, sondern die aktiven Veränderungen einer Aktivität analysiert werden, in denen Lernende partizipieren. Dies sei insbesondere von besonderer Bedeutung, da die Teilhabe an einer Aktivität stets Teil der Aktivität selbst sei und von dieser nicht getrennt zu betrachten sei (Rogoff, 1995, S. 153).

Die Teilhabe an sozialen Aktivitäten erfordert es von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern stets verschiedene Verständnisse einer Situation zu verbinden und durch Kommunikation und gemeinsame Anstrengungen ein von allen Teilnehmern geteiltes Verständnis herzustellen. Hierbei müssen die individuellen Teilnehmerinnen und Teilnehmer ihre eigene Perspektive wechseln und ihr Situationsverständnis verändern. Diese Veränderung in den individuellen Perspektiven und der individuellen Verständnisse bezeichnet Rogoff (1995, S. 153) als Entwicklung („development“), die durch den Prozess der Partizipation angestoßen wird und die eine direkte Wirkung auf die Interpretation und das Verständnis zukünftiger Situationen hat. Eine neue Situation wird anders verstanden als diese ohne die Partizipation an vorhergehenden Situationen verstanden worden wäre. Mit dem Begriff der teilhabenden Aneignung bezeichnet Rogoff nicht die kollektive, sondern die individuelle Entwicklung eines Individuums: „I use the term „appropriation" to refer to the change resulting from a person's *own participation* in an activity, not to his or her internalization of some external event or technique" (Rogoff, 1995, 153, Hervorhebung im Original).

Zusammenfassend beschreibt Rogoff, dass ihre Rahmung von Entwicklung als teilhabende Aneignung eine neue Perspektive auf den Transfer von Wissen eröffnet:

> „How an individual approaches two situations has to do with how he or she construes the relations between their purposes or meanings. Hence, the process is inherently creative, with people actively seeking meaning and relating situations to each other." (Rogoff, 1995, S. 159)

Neben der aktiven Rolle der Lernenden, die in kollaborativen Situationen Bedeutungen entwickeln und Situationen miteinander in Verbindung setzen, kommt insbesondere den erfahreneren Personen eine bedeutsame Rolle zu. Im Sinne der angeleiteten Teilhabe begleiten erfahrene Personen die Lernenden bei der Anwendung von Informationen und Fertigkeiten in neuen Situationen. Dabei dient die erfahrenere Person als Vorbild für die Lernenden und bringt die benötigte Erfahrung in die Lernsituation ein, um Wissen mit Blick auf neue Probleme und Situationen zu generalisieren.

Es ist zu bedenken, dass Rogoff ihre Theorie nicht vor dem Hintergrund schulischen Lernens aufbaut, sondern vornehmlich auf das Lernen von jungen Kindern bezieht und somit unter „apprenticeship in thinking" und „guided participation" vor allem die Interaktion zwischen Kindern und Erwachsenen in den Blick nimmt. In ihren Arbeiten beschreibt sie vor allem das Lernen in alltäglichen Situationen, in denen Kinder durch die Begleitung von Erwachsenen zunehmend selber eine aktive Rolle einnehmen. Dementsprechend sind die Effekte der angeleiteten Teilhabe sehr abhängig vom Alter der beteiligten Personen, der Bereitschaft der erfahreneren Personen eine anleitende Rolle anzunehmen sowie von der Motivation aller Beteiligten (vgl. Rogoff, 1991; siehe auch Gruber, Law, Mandl & Renkl, 1996, S. 172).

### 1.3.3 Greeno – Transfer als Anpassen mentaler Handlungsmodelle

Während die zuvor beschriebenen Theorien von Lave (1988) und Rogoff (1990) die sozialen Aspekte des Lernens und der Wissensanwendung in den Vordergrund rücken und zum Teil harsche Kritik an den Ansätzen der Informationsverarbeitung und ihrer empirischen Umsetzung üben, formuliert Greeno (Greeno, Smith und Moore 1993), eine integrierende Theorie, die Prozesse der Informationsverarbeitung in einen situierten Rahmen einbettet (vgl. Greeno, 1997).

Wie auch Lave (1988) und Rogoff (1990) verstehen Greeno, Smith und Moore Wissen nicht als Substanz oder statische Entität in den Köpfen von Individuen, sondern dynamische Relationen zwischen einem Individuum und seiner physischen und sozialen Umwelt:

> „Knowledge – perhaps better called *knowing* – is not an invariant property of an individual, something that he or she has in any situation. Instead, knowing is a property that is relative to situations, an ability to interact with things and other people in various ways." (Greeno et al. 1993, 99, Hervorhebung im Original)

In diesem Zusammenhang kann Lernen als die Verbesserung der Fähigkeiten zur Interaktion in situierten Aktivitäten verstanden werden (vgl. auch Gruber et al. 1996, S. 173). Folglich geht es bei der Erforschung von Fragen des Transfers darum, zu verstehen, wie das Lernen in einer Situation teilzunehmen die Fähigkeiten zur Teilnahme an einer anderen Situation verbessert oder verschlechtert. Transfer ist somit die Anwendung einer oder mehrerer Fähigkeiten, die in einer Aktivität entwickelt wurden, in einer neuen Situation. Dies umfasst insbesondere auch die Anpassungen dieser Fähigkeiten an die Eigenschaften der neuen Situation. Da alle Aktivitäten in Situationen bzw. physischen und sozialen Kontexten stattfinden, stelle sich nicht die Frage, ob eine Aktivität situiert ist oder nicht, sondern wie sie situiert ist (vgl. Greeno, 1998, S. 14). Dementsprechend bedarf es für die Beantwortung von Fragen des Transfers vor allem der Analyse der Situation, da von dieser wesentlich abhängt, welche Eigenschaften Lernende in Hinsicht auf ihr individuelles Ziel in einer Situation wahrnehmen.

Im Sinne dieser Definition von Lernen hängt ein Transfer maßgeblich von den strukturellen Invarianten der Interaktionen zwischen den Handelnden bzw. den Lernenden und verschiedenen Situationen ab. Interaktionen werden in Form von Handlungsschemata repräsentiert, die sich jedoch nicht auf symbolische kognitive Repräsentationen oder die symbolische Repräsentation von Handlungen, wie in den Produktionssystemen von Anderson (1983), beschränken müssen (vgl. Renkl, 1996, S. 85 f.; Law, 1994, 34 ff.). Handlungsschemata sind nach Greeno (1993) vielmehr Organisationsprinzipien von Aktivitäten, die im Gegensatz zu Ansätzen der Informationsverarbeitung nicht die Form von Datenstrukturen annehmen, sondern als Prozesse bzw. Handlungswissen konzeptualisiert werden. Obgleich Greeno (1993) nicht explizit auf die Frage eingeht, inwieweit symbolische Repräsentationen die

Interaktion zwischen einer Person und einer Situation beeinflussen, lehnt er die Annahme ab, dass alle Handlungen über symbolische Repräsentationen mediiert werden.

> „Representations include symbolic expressions that represent actual or potential states of affairs. Representations also include physical constructions such as diagrams, graphs, pictures and models with properties that are interpreted as corresponding to properties of situations. Cognitive representations also include mental models that contain cognitive objects that correspond to objects, properties or relations in situation, and that simulate actions or other events in situations." (Greeno et al. 1993, S. 108)

Greeno, Smith und Moore (1993) erklären, dass alle Situationen situationsspezifische Handlungsangebote („affordances") und -einschränkungen („constraints", Greeno, 1998, S. 8) bereitstellen. Dabei definieren sie *affordances* als „the support for particular activities by relevant properties of the things and materials in the situation" (Greeno et al. 1993, S. 101 f.), also als Eigenschaften der Dinge und Materialien in einer Situation, die bestimmte Handlungen ermöglichen. Neben den Eigenschaften einer Situation bedarf es auch bestimmten Fähigkeiten der handelnden Person, die es ihr ermöglichen an einer Aktivität teilzunehmen:

> „Affordances and abilities are relative to each other: A situation can afford an activity for an agent who has appropriate abilities, and an agent can have an ability for an activity in a situation that has appropriate affordances." (Greeno et al. 1993, S. 102)

Die situativen Handlungsangebote (und Handlungseinschränkungen) müssen nicht symbolisch vermittelt werden, sondern werden im Sinne Gibsons (1986) wie funktionale Merkmale von Umweltgegenständen direkt wahrgenommen.

Transfer kann dann erfolgen, wenn die Handlungsangebote und -einschränkungen einer Lernsituation die gleichen sind wie die einer Transfersituation. Ist dies nicht unmittelbar der Fall, muss die Handlung an die veränderten situativen Bedingungen angepasst bzw. transformiert werden. Gelingt es der Person hingegen nicht die entsprechenden Handlungsschemata an die neue Situation anzupassen, so bleibt der Transfer aus, oder es kommt zu einem negativen Transfer.

Greeno, Smith und Moore (1993) beschreiben drei wesentliche Prozesse, die eine erfolgreiche Transformation von Handlungen unterstützen: Den ersten Prozess beschreiben sie als eine Abstimmung auf die veränderten situativen Handlungsbedingungen („attunement to affordances", Greeno et al. 1993, S. 105 f.): „Perception of affordances involves attunement to possibilities for activity in situations" (Greeno et al. 1993, S. 105). Die Wahrnehmung von Handlungsmöglichkeiten für die Handlung in einer Situation beinhaltet die Aufnahme von Informationen, die jene strukturellen Invarianten festlegen, die eine Handlungen ermöglichen oder unterstützen. Diese Handlungsmöglichkeiten sind Teil eines kognitiven Schemas. Auf diese Weise kann eine Person zum Beispiel auf die Handlungsmöglichkeiten des Eintretens durch eine Tür abgestimmt sein, wenn sie die relevanten Informationen über die Höhe und Breite der Tür wahrgenommen hat, die es der Person ermöglichen durch sie hindurch zu gehen. So hält die Situation, in der die Person durch eine Tür geht, dieselben Handlungsmöglichkeiten bereit, wie eine Situation, in der die Person die Möglichkeit wahrnimmt, durch eine Tür gehen zu können. Beim Durchschreiten einer Tür verändert sich die Position der Person in Beziehung zu einer Wand, wobei die Bedingungen, dass die Person noch immer aufrecht auf dem Boden steht, invariant bleiben (vgl. Greeno et al. 1993, S. 106).

Die Abstimmung und Wahrnehmung von Handlungsbedingungen werden immer durch die Motivation und die Ziele einer Person bedingt, eine bestimmte Handlung, wie das Durchschreiten einer Tür, durchzuführen. Dabei meinen Greeno, Smith und Moore (1993, S. 106) mit Motivation, dass die Durchführung einer Handlung stets einen funktionalen Wert für die Person haben muss. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Person die relevanten Informationen nur dann wahrnimmt, wenn sie unmittelbar handeln will. So können die situativen Handlungsmöglichkeiten einer Tür auch wahrgenommen werden, wenn die Person vor dem Betreten eine andere Person trifft und mit dieser eine Unterhaltung beginnt und somit die Situation verändert wird.

Den zweiten wesentlichen Prozess für die Transformation von Handlungen bezeichnen Greeno, Smith und Moore (Greeno, Smith und Moore 1993, S. 106 f.) als Antizipieren von möglichen Sachlagen („potential states of affairs"), die eine Situation zwar bereithält, die aber nicht eingetreten sind. Diese Antizipation ist durch analoge mentale Modelle möglich, die relevante Handlungsmöglichkeiten einer Situation in Betracht ziehen, wodurch *mentale Simulationen* von Handlungen durchgeführt werden können:

> „Such event schemata enable inference of potential states of affairs through a process of perceiving information that specifies the possibility of a transformation environment, as perception of an affordance involves perceiving information that specifies the possibility of an action. The schema might support this kind of prospective cognition through enactment of mental simulations of the transformations that could cause the potential state of affairs to hold." (Greeno et al. 1993, S. 107)

Handlungsmöglichkeiten („affordances") sind spezielle Fälle von potenziellen Sachlagen, in dem Sinne, dass eine Situation eine bestimmte Handlung ermöglichen oder unterstützen würde. Somit könnte eine Person die Möglichkeit durch eine Tür zu gehen erschließen, obgleich es ihr primäres Ziel ist, eine Unterhaltung zu beenden.

Zudem kann eine Person nicht nur die eigenen Handlungsmöglichkeiten wahrnehmen, sondern auch die von anderen Personen, zum Beispiel, wenn die Person eine andere Person sieht, die auf eine Tür zugeht. Der Schluss auf mögliche Sachlagen hängt von der Abstimmung auf die situativen Handlungsbedingungen ab, für die jeweils die Zustände vor und nach der Handlung vorhergesehen werden müssen. Auf diese Weise können mögliche Handlungen, oder auch Geschehnisse mental simuliert werden, auch wie sie nicht zwingend eintreten müssen, oder die Handlung nicht direkt wahrgenommen wurde. Wenn zum Beispiel eine Person einen Haufen von Büchern sieht, kann sie durch eine Analyse aus dieser Situation darauf schließen, dass die Bücher zuvor gestapelt waren und der Stapel umgefallen ist. Somit kann durch die Wahrnehmung und Analyse einer Sachlage auf die situative Transformation geschlossen werden, die sich zuvor vollzogen hat – der Bücherstapel ist umgefallen.

Den dritten Prozess beschreiben Greeno, Smith und Moore (1993, S. 107 ff.) als „Reasoning“. Mit Reasoning werden Aktivitäten bezeichnet, in denen Personen Informationen in Situationen einbeziehen. Diese Informationen in einer Situation beinhalten potenzielle Zustände, die von der Person zunächst registriert werden müssen, wodurch sie in Form von propositionalen symbolischen Ausdrücken repräsentiert werden. Registrierte Zustände werden häufig durch Sprache kommuniziert und auf diese Weise mit Situationsteilnehmern geteilt. Zudem beinhalten registrierte Zustände auch symbolische Repräsentationen. Eine Vielzahl von Ausdrücken von registrierten Zuständen spiegeln die von einer Person in einer Situation wahrgenommenen Informationen wieder. Darunter fallen neben Zuständen, die bereits in der Situation aktuell sind, auch potenzielle Zustände, die durch die Wahrnehmung von Handlungsmöglichkeiten antizipiert werden.

Die Autoren (Greeno et al. 1993, S. 108) merken an, dass ihre Unterscheidung zwischen Wahrnehmung und Reasoning nicht trennscharf ist. Dazu erläutern sie, dass Reasoning besonders dann stattfindet, wenn Folgerungen insbesondere Operationen beinhalten, die eine Repräsentation transformieren. Repräsentationen beinhalten neben sprachlichen Repräsentationen von aktuellen und potenziellen Zuständen einer Situation auch depiktionale Repräsentationen, wie Diagramme, Graphen, Bilder oder Modelle mit Eigenschaften, die den Eigenschaften der Situation entsprechen. Zudem sind auch mentale Modelle involviert, die den Eigenschaften und Relationen in der Situation entsprechen, und die es ermöglichen mentale Simulationen von Handlungen in der vorliegenden Situation durchzuführen. Mentale Simulationen bewirken in erster Linie die Transformation von mentalen Repräsentationen oder mentalen Modellen von Situationen. Diese Prozesse können ausschließlich mental ablaufen, auch wenn physische, symbolische oder depiktionale Repräsentationen beteiligt sind.

Als Beispiel führen Greeno, Smith und Moore (1993, S. 108 f.) einen Briefkasten an. Ein Briefkasten hält die Handlungsmöglichkeit bereit einen Brief zu versenden, obgleich diese Handlung nicht direkt durch die visuell wahrnehmbaren Informationen, die ein Briefkasten durch seine äußere Erscheinung bereitstellt, ersichtlich ist. Das Erkennen des Objekts als einen Briefkasten bedarf der Registrierung eines aktuellen Zustands, wodurch die symbolische Repräsentation aktiviert wird, die das Objekt als einen Briefkasten identifiziert. Beim Erkennen des Objekts als einen Briefkasten und der damit verbundenen Wahrnehmung der Handlungsmöglichkeiten sind zwar symbolische Repräsentationen erforderlich, jedoch müssen diese nicht transformiert werden, wodurch dieser Prozess nicht als Reasoning zu bezeichnen sei.
Reasoning sei demnach vielmehr eine Handlung, die eine Repräsentation verändert:

> „Reasoning is an activity that transforms a representation, and the representation affords that transformational activity. Abilities for reasoning activities include knowing the operations to perform on the notational objects in the representation and understanding the semantic significance of the objects and operations.“ (Greeno et al. 1993, S. 109)

Der Prozess des Reasonings spielt insbesondere im Hinblick auf konzeptuelle Transferprozesse eine bedeutsame Rolle. So erklären die Autoren (1993, S. 109 f.), dass wenn konzeptgebundene Repräsentationen in den Reasoning-Prozess einbezogen werden, es zu einem konzeptuellen Reasoning kommt. Ein Konzept kann entweder explizit als ein Objekt oder implizit als die Eigenschaften oder Relationen von einem Objekt repräsentiert sein. Wenn ein Objekt in einer Repräsentation mit den Eigenschaften oder Relationen dieser übereinstimmt, werden sie in der Repräsentation vergegenständlicht.

Eine bestimmte Menge von Konzepten zu kennen, wie beispielsweise Mengen und Zahlkonzepte, kann mit der Kenntnis verglichen werden, diese in der Umwelt zu finden und zu benutzen (Greeno, 1991). Diese Konzepte können in einer Repräsentation vergegenständlicht werden, in der sie durch Zahlen und Buchstaben repräsentiert werden. Die Fähigkeit mit diesen arithmetischen und algebraischen Repräsentationen Transformationen durchzuführen bedarf der Kenntnis von arithmetischen und algebraischen Operationen sowie das Wissen darüber, wie diese Repräsentationen genutzt und notiert werden. Für eine Person, die über dieses Wissen verfügt, sind arithmetische und algebraische Repräsentationen bedeutende Handlungsmöglichkeiten für das Reasoning.

Reasoning hat in diesem Sinne einen entscheidenden Nutzen für die mentale Simulation von Ereignissen, die zumeist in schriftlicher oder sprachlicher Form beschrieben werden. Die Handlungsmöglichkeiten und -einschränkungen werden dabei nicht explizit durch Symbole repräsentiert, sondern sind implizit in den Eigenschaften der simulierten Situation enthalten.

In ihren Untersuchungen zur Entwicklung mathematischen Verständnisses im Kindesalter wendet Stern (1998) Greenos Theorie der situativen Handlungseinschränkung und - möglichkeiten auf die Bearbeitung von Textaufgaben von Kindern im Grundschulalter an. Sie geht davon aus, dass

> „Aussagen über die Repräsentation von Wissen sich nur an der Bewältigung von Anforderungssituationen untersuchen lassen. Eine Person verfügt über die Kompetenz zur Bewältigung einer Anforderung, wenn sie über Wissen verfügt, das es ihr ermöglicht, von den irrelevanten Aspekten der Situation zu abstrahieren und Wissen über die funktionalen Prinzipien der relevanten Aspekte zu aktivieren." (Stern, 1998, S. 35)

Sie nutzt dabei den Begriff der „funktionalen Prinzipien" als Oberbegriff für „funktionale Möglichkeiten und funktionale Einschränkungen" (Stern, 1998, S. 33) im Sinne von Handlungsmöglichkeiten und -einschränkungen zur Beschreibung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden mathematischer Aufgabenstellungen, insbesondere arithmetischer Textaufgaben. Ein Aspekt ihrer Studien war hierbei aufzuzeigen, dass „sich mathematische Kompetenzen im Grundschulalter darin zeigen, welche funktionalen Möglichkeiten und Einschränkungen in Situationen berücksichtigt werden" (Stern, 1998, S. 38).

In ihren empirischen Untersuchungen zur Lösung unterschiedlicher Typen von Textaufgaben konnte Stern nachweisen, dass Aufgaben zum quantitativen Vergleich von Mengen schwerer zu lösen sind als Aufgaben zur Kombination, zum Austausch und zum Angleichen von Mengen. Sie führt ihre Befunde darauf zurück, dass die

> „Konstruktion eines mentalen Modells einer Vergleichssituation die Beachtung andere funktionaler Möglichkeiten und Einschränkungen erfordert als die Konstruktion mentaler Modelle von Situationen, in denen Mengen ausgetauscht, angeglichen oder zusammengefaßt werden." (Stern, 1998, S. 210 f.)

da die Mengen in Kombinations-, Austausch- und Angleichungssituationen durch Zählen bestimmt werden können, wohingegen in Vergleichssituationen zuerst eine Beziehung zwischen den zu vergleichenden Mengen hergestellt werden muss, bevor die Differenz gezählt werden kann. Sie resümiert:

> „Die Ergebnisse dieser Arbeit sprechen dafür, daß die Annahme funktionaler Möglichkeiten und Einschränkungen im Umgang mit Zahlen und mathematischen Operationen

> eine geeignete Grundlage zur Beschreibung und Erklärung mathematischer Kompetenzen darstellt.“ (Stern, 1998, S. 211)

Wie aus den vorhergehenden Beschreibungen hervorgeht, gilt der Aufbau von Handlungsmodellen in der anfänglichen Lernsituation als die zentrale Voraussetzung für erfolgreichen Transfer. Greeno nimmt an, dass erfolgreicher Transfer und somit eine erfolgreiche Handlungsanpassung an die neuen situativen Zustände wesentlich davon abhängt, welche Handlungsmöglichkeiten im anfänglichen Lernprozess enthalten waren und wie die Person dieses Schema in der Transfersituation anwendet. Damit es zu einem erfolgreichen Transfer kommt, muss die Person die Handlungsmöglichkeiten in einer Situation wahrnehmen, wodurch die Effekte des Transfer als Veränderung der Wahrscheinlichkeit, dass diese Handlungsmöglichkeiten wahrgenommen werden, interpretiert werden können (vgl. auch Law, 1994, S. 33 f.; Stern, 1998).

### 1.3.4 Zusammenfassung

Im Kern der dargestellten Transfertheorien aus der Perspektive der Situierten Kognition steht Laves (1988) fundamentale Kritik an den Annahmen und Methoden der experimentalpsychologischen Transferforschung. Sie formuliert die extreme Position, dass Wissen nicht als symbolische Repräsentationen in den Köpfen von Individuen existiere, sondern im Rahmen eines sozialen Kontexts ausgehandelt wird. Dementsprechend sollte Lernen immer in Hinsicht auf reale und alltägliche Anwendungssituationen geschehen und in diesen stattfinden. Es sollten keine abstrakten Probleme gelöst, sondern „Dilemmas“ in realen Anwendungssituationen ausgehandelt werden. Dies geschehe insbesondere dann, wenn die an einer Situation teilhabenden Personen („community of practice“) unterschiedliche Perspektiven in eine Situation einbringen und gemeinschaftlich ihre Differenzen überwinden und zu einer geteilten Lösung kommen. In diesem Zusammenhang sollte Lernen und Transfer immer im Rahmen einer sozialen Theorie betrachtet werden, in der Beziehungen zwischen Personen und ihren Handlungen in situativen Kontexten im Vordergrund stehen, da diese die Anwendung von erlernten Fähigkeiten maßgeblich beeinflussen.

In ihrer Theorie des kindlichen Lernens formuliert Rogoff (1990; 1995) ähnliche, wenn auch weniger drastische Positionen wie Lave. Sie argumentiert, dass das kindliche Lernen im Wesentlichen eine Eingliederung in eine „community of practice“ ist, in der neue Mitglieder ihre Fertigkeiten und ihr Verständnis entwickeln, indem sie zusammen mit erfahreneren Mitgliedern, insbesondere Erwachsenen, aktiv in kulturell organisierten Aktivitäten teilnehmen („Apprenticeship“). Hierbei erfahren sie die lenkende Unterstützung einer kompetenteren Person („guided participation") und eignen sich so in einem dynamischen Prozess Wissen an, indem sie ihr individuelles Situationsverständnis verändern und einem sozial geteilten Verständnis anpassen („participatory appropriation"), um eine zunehmend aktivere Rolle in der Aktivität einzunehmen. Dabei übernimmt die kompetentere Person die Rolle des Vorbilds für die Lernenden und bringt die benötigte Erfahrung in eine Lernsituation ein, um Wissen mit Blick auf neue und bisher unbekannte Situationen zu generalisieren. Transfer ist aus der Perspektive von Rogoff in den individuellen Veränderungen der Auffassungen von Situationen und der Handlungen in diesen zu analysieren.

Im Gegensatz zu den sozial-anthropologischen Beschreibungen von Lave und Rogoff formuliert der Kognitionspsychologe Greeno mit seinen Kollegen Smith und Moore (1993) eine integrierende Theorie, die kognitionspsychologische Modelle in einen situativen Kontext setzt. Greeno und Kollegen beschreiben die Ausbildung von situativen Handlungsmodellen als Äquivalent eines mentalen Schemas, die im Wesentlichen von den Handlungsangeboten und -einschränkungen einer Situation charakterisiert werden. Dieses Handlungswissen muss zur Anwendung in neuen und unbekannten Situationen verändert bzw. transformiert werden, indem es an die situativen Bedingungen der neuen Situation angepasst wird. Durch diese Anpassungen verändern sich jedoch nicht nur die ausgeführten Handlungen, sondern auch die mit ihnen verbundenen mentalen Repräsentationen dieser Handlungen. Ein Transfer ist aus ihrer Sicht eine erfolgreiche Anpassung einer Handlung an neue situative Zustände. Aus diesem Grund ist ein Transfer besonders abhängig davon, welche Handlungsmöglichkeiten in der Lernsituation enthalten waren.

Insgesamt können folgende Aspekte aus den dargestellten Theorien der Situierten Kognition festgehalten werden:

1. Wissen wird nicht als statische Entität in den Köpfen von Individuen, sondern als dynamische Relationen zwischen Lernenden und ihrer physischen und sozialen Umwelt konzeptualisiert. Wissensrepräsentationen sind in hohem Maße individuell, subjektiv und untrennbar an die Situation des Wissenserwerbs gebunden.
2. Transfer erfordert das Anpassen von Handlungsrepräsentationen und Aktivitäten an veränderte Situationsbedingungen. Auf Grundlage dieser Transformationen verbessert sich die Fähigkeit der Lernenden zur Interaktion und Teilhabe an Aktivitäten.
3. Die Analyse der funktionalen Prinzipien in Form von Handlungsmöglichkeiten und Handlungseinschränkungen kann als Kompetenzmodell zum Vergleich von Anforderungssituationen in mathematischen Aufgabenstellungen herangezogen werden.

## 1.4 Integrierende Theorien zum Transfer beim Mathematiklernen

Obgleich mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten Gegenstand unzähliger Untersuchungen zum Transfer sind und das Lernen von Mathematik auch immer mit dem Ziel geschieht, die erworbenen Fähigkeiten und erlernten Fertigkeiten über die Unterrichtssituation hinaus anwenden zu können, finden sich Theorien und Untersuchungen zum Transfer vor allem in der Psychologie. In der Mathematikdidaktik sind nur wenige ganzheitliche Erklärungen zum Transfer beim Mathematiklernen zu finden. Vielmehr wird Transfer phänomenologisch als Ergebnis erfolgreichen Lernens in Theorien und Modellen zur Entwicklung spezifischer mathematischer Fähigkeiten oder Kompetenzen, wie z. B. dem mathematischen Problemlösen oder Modellieren, integriert. In einem Beitrag zum Stand und zur Entwicklung der Forschung in der Mathematikdidaktik zur Jahrtausendwende beschreibt Niss (1999) einen zentralen Befund mathematikdidaktischer Forschung wie folgt:

> *„There is no automatic transfer from a solid knowledge of mathematical theory to the ability to solve non-routine mathematical problems, or the ability to apply mathematics and perform mathematical modelling in complex, extra-mathematical contexts. For this to happen both problem solving and modelling have to be made object of explicit teaching and learning, and there is ample evidence that it is possible to design teaching settings so as to foster and solidify these abilities"*. (Niss, 1999, 21, Hervorhebung im Original)

Während in der Psychologie zumeist mit einem weiteren Transferbegriff gearbeitet wird, liegt der Fokus mathematikdidaktischer Untersuchungen entsprechend auf dem Transfer spezifischer Fertigkeiten und den instruktionalen Maßnahmen, mit denen das Erlernen selbiger effizienter und nachhaltiger gestaltet werden kann, womit man sich eine Verbesserung der Übertragbarkeit dieser spezifischen Fertigkeiten verspricht. Aus diesem Grund wird in der Mathematikdidaktik und allgemein in Studien zum Mathematiklernen zumeist auf die theoretischen Modelle der Psychologie als Bezugswissenschaft zurückgegriffen.

In diesem Kapitel werden zwei Theorien diskutiert, in denen der Transfer von Wissen aus mathematikdidaktischer Perspektive beschrieben und erklärt wird: Bauersfelds (1983) Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche und Lobatos (1996; 2012) Actor-Oriented Transfer Perspective (AOT).

### 1.4.1 Bauersfeld – Subjektive Erfahrungsbereiche

Die Annahme, dass einmal gelernte Begriffe, Verfahren und allgemeine Strategien einer universellen Anwendbarkeit unterliegen, war lange Zeit auch in der deutschsprachigen Lehr-Lern-Forschung und Mathematikdidaktik ein leitendes Motiv. Ähnlich, wie im anglo-amerikanischen Raum durch Vertreter des Situierten Lernens, wie Lave, Rogoff und Greeno, geschehen, lenkte Bauersfeld (1983; 1985) die Aufmerksamkeit auf Probleme, die mit der Situations- bzw. „Bereichsspezifität" von Lernen und der Anwendung des Gelernten im Zusammenhang stehen. Auf Grundlage der psychologischen Arbeiten von Seiler (1973) und Lawler (1981) entwickelte Bauersfeld mit dem Modell der subjektiven Erfahrungsbereiche eine theoretische Perspektive, die diese Probleme und insbesondere auch Probleme der ausbleibenden und fehlerhaften Wissensanwendung von Lernenden begrifflich fasst:

> „Ein Begriff ist nur in bestimmten Formulierungen abrufbar oder nur in einem bestimmten Sachzusammenhang, eine Fertigkeit wird nur bei spezifischen Auslösern verfügbar, scheinbar einfache Zusammenhänge oder Querverbindungen werden nicht hergestellt usw. [...] Man spricht auch von mangelndem Transfer, von schwacher Abstraktionsfähigkeit oder von Fehlstrategien." (Bauersfeld, 1983, S. 1)

Einen Rahmen für sein Modell stellt die von Seiler (1973) postulierte Bereichsspezifität aller gedanklichen Strukturen:

> „Begriffliche Strukturen und Systeme implizieren nie eine unbeschränkte Generalität [...] Jedes individuelle kognitive System ist seinem Wesen nach beschränkt auf die Situationen, in denen es erarbeitet wurde." (Seiler, 1973, S. 266, zitiert nach Bauersfeld, 1983, S. 13)

Im Zuge der Veranschaulichung des Begriffs der Bereichsspezifität diskutiert Bauersfeld (1983, S. 3 ff.) Fallstudien von Phänomenen, die sich beim Lernen von Mathematik beobachten lassen. In einem seiner Beispiele gelingt es einer achtjährigen Schülerin nicht Divisionsaufgaben, wie $8 : 4 = ?$ halbschriftlich zu rechnen und zu lösen. Sie vermutet für diese Aufgabe lediglich, dass das Ergebnis 1 oder 0 sei. Als der gleichen Schülerin jedoch eine Aufgabe vorgelegt wurde, in der sie den Geldbetrag von acht Dollar gleichmäßig an vier Kinder verteilen soll, zeigt sie, dass sie derartige Aufgaben sehr wohl lösen kann. Zwar wiederholt sie die Aufgabenstellung falsch, sodass nicht acht, sondern fünf Dollar an vier Kinder verteilt werden sollen, jedoch löst sie diese Aufgabe richtig und antwortet, dass jedes Kind einen Dollar und fünfundzwanzig Cents erhalte (Bauersfeld, 1983, S. 3).

Diese Beschreibung erklärt Bauersfeld (1983, S. 3 ff.) als eine prototypische Beobachtung im Mathematikunterricht. Obgleich die Schülerin Schwierigkeiten beim Rechnen mit Zahlsymbolen auf Papier hat, löst sie viel schwierigere Aufgaben einwandfrei sobald diese in einen Kontext eingebettet und durch diesen an eine Vorstellungshilfe gebunden sind.

Eine Erklärung für derartige Phänomene sieht Bauersfeld in Anlehnung an die Arbeit von Lawler (1981) darin, dass die scheinbar gleichen Aufgaben für die Lernenden völlig verschiedenen „Mikrowelten“ (Bauersfeld, 1983, S. 16 ff.) entsprechen. So lassen sich im oben geschilderten Fallbeispiel zwei Mikrowelten identifizieren und voneinander unterscheiden: Die Zahlen-Welt, mit der Erfahrungen zum Rechnen mit Zahlsymbolen auf Papier verbunden sind, und die Geld-Welt, in der Erfahrungen mit Geldmünzen und ihrem rechnerischen Zusammenhang, etwa beim Spielen mit Münzen, beim Einkaufen im Supermarkt oder dem Verwalten von Taschengeld, repräsentiert sind. Während die Schülerin im Fallbeispiel deutlich ihre Schwierigkeiten in der Zahlen-Welt zu erkennen gibt, ist sie in der Lage wesentlich schwierigere Probleme in der Geld-Welt zu lösen. Diese Mikrowelten werden durch unterschiedliche Erfahrungen definiert und sind für Lernende, die noch keine Verbindungen zwischen diesen Welten und somit auch keine Analogien zwischen den formal gleichen Aufgaben erkannt haben, voneinander getrennte „Subjektive Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld, 1983)[10]. Die Erkenntnisse aus einer Mikrowelt sind an diese gebunden und können zunächst nicht ohne Weiteres in eine andere übertragen werden. Für Bauersfeld ist diese Bereichsspezifität des Wissens keine singuläre Beobachtung, sondern ein Grundphänomen allen Denkens und Lernens.
Bauersfeld (1983, S. 2) beschreibt sein Modell auf Grundlage einer

> „nicht-hierarchischen, kumulativen Speicherung der Erfahrung beim Individuum, und zwar entsprechend der situativen Bindung in deutlich getrennten „*Subjektiven Erfahrungs-Bereichen*“ (im weiteren kurz „SEB“). Die SEB'e umfassen stets die Gesamtheit des als subjektiv wichtig Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle, der Körpererfahrung usw., also nicht nur die kognitive Dimension. Die SEB'e haben Prozeßcharakter und daher eine je eigene Wandlungsgeschichte ihrer Zustände vom Entstehen bis zum möglichen Verfall (Vergessenwerden). Verstehen und Handeln erscheinen möglich allein auf der Basis von SEB'en. Die SEB'e werden konkurrierend aktiviert und ermöglichen mit der Entscheidung (unter gleichzeitiger Unterdrückung der Konkurrenten) die subjektive Wahrnehmung der gegebenen aktuellen Situation. Die fortschreitende Verknüpfung der SEB'e, die sich mit der Entstehung neuer SEB'e verbindet, kennzeichnet die Entwicklung zu „selbstreferentiellen Systemen“ (Luh-

[10] Im Weiteren wird der Begriff „Subjektive Erfahrungsbereiche“ mit Rücksicht auf die Lesbarkeit nach dem Vorbild von Bauersfeld (1983) mit „SEB“ abgekürzt und Wortendungen mit einem Apostroph kenntlich gemacht.

> mann 1982, S. 44 f.) beim Individuum und damit einer „society of mind“ (Minsky 1975, 1977 und 1980).“ (Bauersfeld, 1983, S. 2, Hervorhebung im Original)

In dieser Beschreibung des SEB-Modells zeichnet Bauersfeld eine Theorie, die Lernen als die dynamische Ausbildung und Entwicklung von SEB’en charakterisiert, in denen Wissen untrennbar auf kognitiver und emotionaler Ebene mit der Lernsituation verbunden ist. Eine Aktivierung dieser SEB’e geschieht in einem Entscheidungsprozess, in dem verschiedene SEB’e miteinander konkurrieren und ein SEB die Oberhand behält, der in der Folge die subjektive Wahrnehmung maßgeblich beeinflusst. Der dominante SEB entscheidet dann über die Interpretation einer Situation. Ferner beschreibt Bauersfeld, dass SEB’e zwar nicht hierarchisch geordnet sind, jedoch über die Entstehung eines neuen SEB’s in Verbindung gesetzt werden. Diese Verbindungen zwischen den SEB’e führen zur Entwicklung von „selbstreferientiellen Systemen“ im Sinne des soziologischen Begriffs von Luhmann: Zu einem lebendigen bzw. dynamischen System, das einen Bezug zu sich selbst in Abgrenzung zu seiner Umwelt herstellt (vgl. Luhmann, 1984). Diese Abgrenzbarkeit zur Umwelt, wie sie die Luhmannsche Terminologie impliziert, unterstreicht die Interpretationsgewalt der SEB’e und liefert eine Erklärung für die „partiellen Blindheiten“ (Bauersfeld, 1983, S. 1) der Lernenden, die laut Bauersfeld im Mathematikunterricht häufig zu beobachten sind.

Diese Sicht führt zu einer neuen Beschreibung von Lernen und insbesondere von Transfer, in der sich auch Elemente der Theorien der Situierten Kognition wiederfinden und einordnen lassen:

> „Die für jeden SEB spezifischen Elemente – Sinnzuschreibungen, Sprache, Handlungsmöglichkeiten, verfügbare Routinen, Bedeutung für das Ich usw. – erlauben es, Lernen (nicht nur im schulischen Kontext) als Erwerb neuer SEB zu beschreiben. Damit rücken auch Transfer-Probleme in ein anderes Licht, und gängige Begriffe wie Veranschaulichung im Mathematikunterricht und Abstrahieren und Konkretisieren lassen sich anders interpretieren, nämlich als Beziehungs- und Verknüpfungsprobleme zwischen verschiedenen SEB’en.“ (Bauersfeld, 1983, S. 2)

Ähnlich wie Greeno, Smith und Moore (1993), die Lernen aus psychologischer Sicht als den Aufbau mentaler Handlungsmodelle beschreiben, die neben den situativen Eigenschaften der Situation auch Informationen über die Handlungsmöglichkeiten und -Einschränkungen der Situation enthalten, umfassen auch die SEB’e spezifische Elemente. Während für Greeno, Smith und Moore (Greeno et al. 1993) jedoch funktionale Charakteristika im Vordergrund stehen, die eine Handlung in Abhängigkeit von Eigenschaften einer Situation beschreiben, umfassen SEB’e mehr. Sie beinhalten neben Handlungen und verfügbaren Routinen zudem Sinnzuschreibungen, Sprache, und Bedeutungen für das Ich. Der transferbedingende Anpassungsprozess von Handlungsmodellen an neue situative Eigenschaften wird im Rahmen des SEB-Modells als eine Verknüpfung von SEB'en beschrieben, aus der ein neuer übergeordneter SEB entsteht, der die Elemente der ursprünglichen SEB'e enthält und diese in Beziehung zu einem neuen spezifischen Sachverhalt setzt. Auch dieser neu entstehende SEB ist in der Folge bereichsspezifisch für die Situation der Entstehung und kann in der Folge weiter vernetzt werden.

Bauersfelds (1983) Ansatz der Theorieentwicklung ist ähnlich wie der von Greeno, Smith und Moore (1993) ein integrierender, der die Konvergenz von Begriffen unterschiedlicher Disziplinen wahrnimmt und in Hinsicht auf das Mathematiklernen zusammenführt. Er vereint Begriffe der kognitiven Psychologie, Soziologie und anderen Bezugswissenschaften in Hinsicht auf eine Möglichkeit Situationen des Lernens aus „didaktischer Sicht" (Bauersfeld, 1983, S. 12) analysieren zu können. Im Vordergrund steht nicht die Modellierung des Lernens, sondern die detaillierte Analyse des Lernens, aus der Hinweise für eine Unterstützung von Lernprozessen gewonnen werden können.

In seiner Beschreibung der genauen Eigenschaften von SEB'en orientiert sich Bauersfeld eng an dem Begriff der „Mikrowelten" von Lawler (1981). Im Zentrum von Lawlers Arbeiten steht die Beobachtung von besonderen Momenten in einem längerfristigen Lernprozess seiner Tochter vor Schuleintritt. Hierbei konnte er insbesondere Prozesse dokumentieren, die von großem Interesse für das Mathematiklernen sind, nämlich Prozesse, in denen die Lernende eine formale Gemeinsamkeit zweier bislang unverbundenen Mikrowelten erkennt und diese im Sinne eines „Aha-Ereignis[ses]" (Bauersfeld, 1983, S. 2) in einer neuen Mikrowelt zusammenführt.

Ein Beispiel einer solchen Zusammenführung zweier Mikrowelten beschreibt Bauersfeld anhand von Lawlers (1981) „Serien-Welt", in der Elemente der „Zähl-Welt" und der „Dekaden-Welt" verbunden werden" (Bauersfeld, 1983, S. 21 ff.). Die „Zähl-Welt" beinhaltet das Auszählen von Summen an Fingern. Einfache mündlich gestellte Aufgaben, wie $17 + 6$ werden an den Fingern abzählend gelöst: Achtzehn, neunzehn, zwanzig, einundzwanzig, zweiundzwanzig, dreiundzwanzig. Die Dekaden-Welt gründet sich in einem Computerspiel, in dem eine Schildkröte durch die Angabe von Winkelgrößen in Zehnerschritten in ein Ziel manövriert werden muss, wobei in jedem Schritt ein Vergleichen erforderlich ist, z. B. aus „100 rechts" – zuviel – „20 links" – trifft" (Bauersfeld, 1983, S. 19) geht hervor, dass „80 rechts" richtig gewesen wäre. Aus ihren Erfahrungen in diesem Spiel entwickelt die Tochter von Lawler Wissen zur Addition von Zehnern, wie z. B. $90 + 90 = 180$, obgleich sie zu diesem Zeitpunkt noch nicht über 100 hinaus zählen kann.

Nach einer Diskussion zwischen Lawler und seiner Tochter darüber, wie sie früher Aufgaben wie $7 + 2$ an ihren Fingern ausgezählt habe, stellt Lawler ihr die schwierigere Aufgabe $37 + 12$. Lawler berichtet, dass seine Tochter zunächst ein „schockiertes Gesicht“ zeige und dann die Summe „Das ist neunundvierzig“ nenne (Lawler, 1981, S. 17, zitiert nach Bauersfeld, 1983, S. 21). Lawlers Analyse dieser Betroffenheit seiner Tochter führt an, dass die Tochter die Aufgabe auf zwei unterschiedlichen Wegen gerechnet habe und ihr Erstaunen in der Gleichheit der beiden Ergebnisse gründet:

> „Die großen Zahlen zunächst legen die Lösung in der „Dekaden-Welt“ nahe. Mit der inzwischen erfolgten Verfeinerung der Perspektive – (die Drehkommandos für die Schildkröte werden nicht mehr nur in reinen Zehnerzahlen, sondern auch in gemischten Zehnerzahlen gegeben) – sieht das etwa so aus: „Dreißig plus zehn ist vierzig, und sieben plus zwei ist neun, das sind neunundvierzig.“ Andererseits verfügt Miriam [die Tochter] nun auch in der „Zähl-Welt“ über Zerlegungen wie $12 = 10 + 2$, freilich ohne daß damit schon ein allgemeiner Stellenwertbegriff verbunden wäre. Daher ist nun auch, wohl erstmals, eine einfache systematische Lösung in der „Zähl-Welt“ möglich: „Siebenunddreißig plus zehn ist siebenundvierzig, (und dann an den Fingern weiterzählend) achtundvierzig, neunundvierzig“.“ (Bauersfeld, 1983, S. 21)

Als Resultat der Einsicht, dass die Aufgabe in beiden Welten, der „Zähl-Welt“ und der „Dekaden-Welt“, zu demselben Ergebnis führt, kommt es zu einer Vereinigung dieser beiden Welten in der „Serien-Welt“, in der Aufgaben zur Addition zweier zweistelliger Zahlen nun seriell bzw. schrittweise berechnet werden können, indem zunächst die Zehner addiert werden und schließlich die Einer zu dem Zwischenergebnis mithilfe der Finger hinzugezählt werden (vgl. Bauersfeld, 1983, S. 22).

Bauersfeld führt im Weiteren Lawlers Unterscheidung von verschiedenen Typen von Mikrowelten an (vgl. Bauersfeld, 1983, S. 23 ff.): *Instrumentelle Welten* bezeichnen Welten, die zumeist nur wenige Vorgänger-Welten haben, z. B. die Zähl-Welt, die Geld-Welt oder die Dekaden-Welt. Das Wissen in diesen Welten wird „über Erfahrung konstruiert durch die Verfeinerung der Beschreibung der Elemente ihrer Perspektive“ (Bauersfeld, 1983, S. 24) und Lernen als Verfeinerung des Wissens über die Elemente innerhalb der Mikrowelt konzeptualisiert. Werden zwei instrumentelle Welten, wie die Zähl-Welt und die Dekaden-Welt im oben angeführten Beispiel zusammengeführt oder eine instrumentelle Welt in eine andere integriert, so entstehen *Kontroll-Welten*. In diesen wird Lernen als eine Steigerung der Kontrolle über die Anwendung von Fähigkeiten aus den vereinigten Welten beschrieben, die aus der Koordination der zuvor unabhängigen Mikrowelten folgt. *Konforme* bzw. *relationale Welten* werden dadurch charakterisiert, dass sie im Gegensatz zu Kontroll-Welten nicht aus anderen Mikrowelten hervorgehen, jedoch Mikrowelten miteinander verknüpfen. Entsprechend zeige sich Lernen in diesen Welten durch die „Verknüpfung von Perspektiven“ (Lawler, 1981, S. 24, zitiert nach Bauersfeld, 1983, S. 26).

Das SEB-Modell ist eine Erweiterung der Mikrowelten, da dieses sich ausschließlich auf die kognitiven Aspekte des Lernens beschränke. Bauersfeld wählt jedoch statt des Begriffs der Mikrowelten die Terminologie von Subjektiven Erfahrungsbereichen, denn diese

> „Bezeichnung enthält den Hinweis auf das „Subjekt“ als Träger. Sie thematisiert, daß es um „Erfahrung“ geht und nicht nur um Wissen [...] Und schließlich ist der „Bereich“ weniger universal als eine „Welt“.“ (Bauersfeld, 1983, S. 28)

Kurz zusammengefasst formuliert Bauersfeld (1983) drei Merkmale von SEB’en:

*„Die Komplettheit* Im Sinne der Totalität der Erfahrung muß Handlungsfähigkeit in der spezifischen Situation hergestellt werden können, d. h. Sinn (Identität), Bedeutungszuschreibungen (Perspektive) und Handlungsmöglichkeiten (Funktionen) müssen in der erforderlichen Komplexität aufweisbar sein.

*Die Kohärenz* Es muß ein einheitlicher Kontext (Situation, Thema usw.) erkennbar sein, d. h. es muß ein Zusammenhang zwischen den Elementen und ihren Funktionen von relativer Abgeschlossenheit hergestellt werden können.

*Die Spezifität* Die besondere Bedeutung der subjektiven Repräsentationen für diesen Bereich muß aufweisbar sein, d. h. insbesondere die Spezifität des Sprach- und Symbolgebrauchs in Abhebung gegen den Gebrauch in anderen Kontexten (SEB’en).“ (Bauersfeld, 1983, S. 49)

Die Grundthesen des SEB-Modells fasst Bauersfeld (1985) wie folgt zusammen:

1. „Jede subjektive Erfahrung ist bereichsspezifisch, d. h. die Erfahrungen eines Subjektes gliedern sich in Subjektive Erfahrungsbereiche.
2. Die Gesamtheit der subjektiven Erfahrung präsentiert sich in einer Anhäufung von nicht-hierarchisch geordneten Subjektiven Erfahrungs-Bereichen – die „society of mind“ (Minsky 1982) –, die um eine Aktivierung konkurrieren, und zwar umso wirksamer, je häufiger sie wiederaktiviert bzw. je intensiver sie gebildet worden sind.
3. Die entscheidende Grundlage für die Bildung eines SEB sind die Handlungen des Subjekts und der von ihm konstruierte Sinnzusammenhang, genauer: deren Ausformung in der sozialen Interaktion.

4. Es gibt keine allgemeinen Begriffe, Strategien oder Prozeduren. Man (das Subjekt) kann sie allgemein denken, aber sie sind nicht allgemein verfügbar, d. h. nicht bereichsunabhängig aktivierbar.“ (Bauersfeld, 1983, S. 11 ff.)

Mit dem Ziel der Formulierung einer „künftigen Interaktionstheorie des mathematischen Lehrens und Lernens“ (Bauersfeld, 1983, S. 49) erläutert Bauersfeld eine Reihe von Ergänzungen aus verschiedenen Disziplinen[11], wie der Soziologie, des Symbolischen Interaktionismus, der Erkenntnistheorie, der Kommunikationstheorie, der Identitätstheorie, der Psychoanalyse, der Intelligenztheorie, der Lehr-Lern-Forschung sowie der Wissenschaftstheorie.

In seiner Diskussion der Beziehungen des SEB-Modells im Zusammenhang zur Erkenntnistheorie sowie der Lehr-Lern-Forschung geht Bauersfeld explizit auf Transfer ein: Mit Bezug auf die Erkenntnistheorie diskutiert Bauersfeld (Bauersfeld, 1983, S. 34 ff.) das methodische Prinzip der Veranschaulichung als Hilfestellung zur Einführung von mathematischen Begriffen und Tätigkeiten in Hinsicht auf eine spätere Verallgemeinerung. Bauersfeld argumentiert dabei, dass diese didaktischen Hilfen zur Unterstützung unabdingbar seien, da

> „die Bereichsspezifität des subjektiven Sprachgebrauchs besagt, daß es keine *automatische* Verallgemeinerung von Begriffen gibt. Der Weg zu allgemeineren Begriffen führt nur über die aktive Bemühung um die Verknüpfung der Perspektiven von SEB'en, und das heißt über die Gründung eines neuen SEB, in dem die Beschreibung der Vergleichsaspekte die Perspektive bildet.“ (Bauersfeld, 1983, S. 34, Hervorhebung im Original)

Aus diesem Grund bedarf es im Unterricht Möglichkeiten der Veranschaulichung, in denen die zu erklärende mathematische Struktur über einen Morphismus auf die Gegenstandsstruktur eines oder mehrerer Erfahrungsbereiche abgebildet wird. Im Allgemeinen kann hierbei in der Unterrichtspraxis zwischen zwei Veranschaulichungsmodellen unterschieden werden:

- „Beim *Abstraktionsmodell* wird vom Schüler erwartet, daß er das Gemeinsame zwischen zwei oder mehr SEB'en auf dem Wege über Strukturvergleiche durch Weglassen des mathematisch Irrelevanten erkennt.
- Beim *Übertragungsmodell* hingegen soll der Schüler unmittelbar die in einem bestimmten SEB geläufigen Perspektiven und Funktionen (oder Teile davon) auf eine Darstellung der zu erklärenden mathematischen Struktur übertragen, indem

[11] Aufgrund der thematischen Orientierung dieser Arbeit werden hier nur ausgewählte Ergänzungen erwähnt, in denen der Transfer von Wissen und Fähigkeiten im Vordergrund steht.

> er mit der Darstellung so handelt, *als ob* es der bestimmte (vertraute) SEB sei.“ (Bauersfeld, 1983, S. 34, Hervorhebung im Original)

Die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Studien und Befunde zum Transfer durch Analogiebildung können dem Abstraktionsmodell zugeordnet werden. Die Lernenden erarbeiten zwei oder mehr Aufgaben oder Problemlösungen und sollen über einen systematischen Vergleich gemeinsame relationale Strukturen identifizieren und auf diese Weise die entscheidenden Strukturelemente aufeinander abbilden. Die zentralen Befunde hierbei waren, dass es nur in seltenen Fällen zu einem spontanen Transfer zwischen zwei Aufgaben kommt und ein Transfer durch direkte Hilfestellungen und Hinweise für die Lernenden angeleitet werden muss. Zudem kommt es häufig zu einer Fokussierung auf die Oberflächenmerkmale, die eine Identifikation und ein Abbilden der relationalen Gemeinsamkeiten erschweren. Aus der Sicht des SEB-Modells können diese Befunde damit erklärt werden, dass derartige Abbildungsprozesse oder

> „strukturelle Vergleiche nur gelingen können, wenn ein auf die Funktion des Vergleichens eingerichteter SEB verfügbar ist oder spontan gegründet werden kann. Gelingt die Gründung nicht, so stellt der Lernende unter gegebenem Reaktionszwang eine Ersatzkonstruktion *innerhalb* der aktivierten SEB her, die für ihn sinnvoll erscheint und (vielleicht) auch in Teilgebieten richtige Lösungen oder Schlüsse liefert. Damit wird zugleich ein Ursprung vieler Fehlstrategien von Schülern erklärt.“ (Bauersfeld, 1983, S. 35, Hervorhebung im Original)

Somit lassen sich die Befunde der Forschung zum Transfer durch Analogiebildung insbesondere dadurch erklären, dass es den Lernenden in vielen Fällen nicht spontan gelingt, die SEB’e der zu vergleichenden Aufgaben in einem neuen vergleichenden SEB zu organisieren. Aus diesem Grund kommt es zu einer Fokussierung auf die Oberflächenmerkmale der Aufgaben oder Problemstellungen. Aus den Oberflächenmerkmalen der Aufgaben stellen die Lernenden in der Folge „Ersatzkonstruktionen innerhalb der aktuellen SEB her, die für [sie] sinnvoll erschein[en]“ (Bauersfeld, 1983, S. 35). Da diese in der Regel innerhalb einer Aufgabe bzw. eines SEB’s richtige Ergebnisse liefern und damit sinnvoll wirken, kommt es somit zu fehlerhaften Schlüssen der Lernenden, ein Analogietransfer bleibt aus und es besteht die Möglichkeit der Entwicklung von fehlerhaften Strategien. In diesem Zusammenhang können die Hinweise zum angeleiteten Vergleichen von Aufgaben oder Problemen als Hilfestellungen zur Gründung eines vergleichenden SEB’es interpretiert und auch im Sinne einer konstruktiven Hilfestellung gesehen werden.

Unter Bauersfelds Beschreibung des Übertragungsmodells können vor allem „Einkleidungen“ (Bauersfeld, 1983, S. 36) von Aufgaben gesehen werden. Mathematische Handlungen und Strukturen werden auf Objekte der Anschauung oder des Alltags abgebildet und sollen auf diese Weise die Möglichkeit eröffnen, unbekannte mathematische Sachzusammenhänge im Rahmen eines vertrauten Erfahrungsbereichs zu interpretieren und die mathematische Struktur auf diese zu übertragen. Als Beispiel kann hier die Veranschaulichung der Bruchherstellung als Teilen einer Pizza angeführt werden. Zur gerechten Aufteilung einer Pizza auf $n$ Personen ist es notwendig $n$ gleich große Teile herzustellen, damit alle Personen den gleichen Anteil $\frac{1}{n}$ der Pizza erhalten. Somit soll die bisher nur wenig vertraute Handlung des Teilens eines Ganzen in gleich große Teile anhand einer alltäglichen Handlung veranschaulicht werden und somit eine „Eingewöhnung in das Handlungsrezept" (Bauersfeld, 1983, S. 38) erreicht werden. Ziel ist hierbei wie beim Abstraktionsmodell die Gründung eines vergleichenden Erfahrungsbereichs, der „eine aktive Konstruktion des Morphismus" (Bauersfeld, 1983, S. 38) ermöglicht und die beiden Handlungen parallelisiert. Eine solche Veranschaulichung birgt jedoch die Gefahr, dass ein solcher vergleichender Erfahrungsbereich nicht gegründet wird und somit zwar die Handlung eingeübt wird, jedoch eine Einsicht in die mathematische Struktur ausbleibt, „weil die Vergleichsperspektive fehlt" (Bauersfeld, 1983, S. 38). In der Folge ist es denkbar, dass die Lernenden zwar die Durchführung des Verfahrens erlernen und einüben, jedoch kein Verständnis für die inhaltlichen Zusammenhänge entwickeln und somit eine Erweiterung der Handlung erschwert und die Entwicklung von Fehlstrategien begünstigt wird.

Die Elemente des SEB-Modells erscheinen insgesamt hilfreich individuelle und situationsspezifische Aspekte von Lernprozessen zu erfassen und mit dem Ziel der Rekonstruktion von Aufgabenbearbeitungen deskriptiv zu beschreiben (vgl. auch vom Hofe, 1995, S. 112). Vom Hofe schlägt vor, die Ergebnisse dieser Analysen einer „*normativen stoffdidaktischen Analyse*" gegenüber zustellen, um „mögliche Divergenzen [...] zwischen *sachadäquaten Grundvorstellungen, die der Lehrer anzielt*, und *individuellen Vorstellungen bzw. Fehlvorstellungen*" von Lernenden zu identifizieren und diese „als Ausgangspunkt für Überlegungen zur *konstruktiven* Behebung der entsprechenden Mißverständnisse" (vom Hofe, 1995, S. 112, Hervorhebungen im Original) zu nutzen[12].

Aus der Perspektive der Situierten Kognition beinhaltet das SEB-Modell von Bauersfeld eine Vielzahl der Aspekte, die im Vordergrund der Arbeiten von Lave (1988), Rogoff (1990) und Greeno (1993) stehen. Es betont die *Bereichsspezifität* bzw. *Situationsspezifität* allen menschlichen Lernens, die Bedeutung *sozialer Strukturen* und der *interpersonellen Interaktion* in Lernarrangements sowie die *Individua-*

[12] Eine detaillierte Erläuterung von Grundvorstellungen und zur Anwendung in dieser Arbeit erfolgt in Kapitel 2.

*lität und Subjektivität* von Lernprozessen. Auf diese Weise eröffnet das SEB-Modell einen Raum zur Integration verschiedener theoretischer Ansätze und Disziplinen, in dem mathematische Lernprozesse detailliert analysiert werden können.

### 1.4.2 Lobato – Transfer aus Sicht der Lernenden

Lobato (1996; 2012) gründet ihre Perspektive des „Actor-Oriented Transfer" (AOT) auf den theoretischen Annahmen der Situierten Kognition und der fundamentalen Kritik an „traditionellen" (Lobato & Siebert, 2002, S. 89 ff.) Transfermodellen auf Grundlage der Informationsverarbeitung. Anders als radikale Vertreter der Situierten Kognition, wie Lave (1988), die kognitionspsychologischen Transfermodellen grundsätzlich widersprechen, verfolgt Lobato einen pragmatischen Ansatz und argumentiert, dass verschiedene Theorien von Transfer verschiedene Schwerpunkte haben und versuchen unterschiedliche Aspekte von Transfer zu erklären. In diesem Sinne formuliert sie in der AOT Perspektive einen Ansatz, der verschiedene Perspektiven in einem Modell integriert, um ein umfassenderes Verständnis von Transfer zu entwickeln als es jede Perspektive für sich genommen vermag:

> „Rather than conceiving of a particular perspective as being flawed and in need of replacement, points of compatibility and tension between models of transfer are explored, thus allowing for greater understanding of the contributions to educational research and practice by each perspective. [...]
>
> After all, there is no point in presenting an alternative approach if the dominant perspective can be used to satisfactorily explore the broad array of phenomena that interest transfer researchers." (Lobato, 2012, S. 233)

In ihren Sekundäranalysen von Transferstudien (Lobato, 1996; Lobato, 2006; Lobato, 2012) stellt Lobato heraus, dass die Perspektive der Informationsverarbeitung vor allem Möglichkeiten bietet, den Transfer von prozeduralen Wissensstrukturen in regelgeleiteten und syntaktischen Inhaltsbereichen zu beschreiben (Lobato, 2012, S. 234), jedoch weder die individuellen Unterschiede zwischen Lernenden erklärt, noch Einblicke in die mit einem Transfer verbundenen Verstehensprozesse in semantisch komplexen Inhaltsbereichen erlaubt:

> „[...] the research venues that can most benefit from the use of an AOT perspective are ones with semantically rich content that is open to a variety of often idiosyncratic ways of comprehending and interpreting." (Lobato, 2012, S. 234)

Aus diesem Grund stellt Lobato das lernende Individuum ins Zentrum ihrer Transferkonzeption und definiert Transfer aus der AOT Perspektive als individuelle Generalisierungen der Lernenden, die auch als Einfluss früherer Aktivitäten auf das Handeln der Lernenden in neuen und unbekannten Situationen verstanden werden können:

> „Transfer from the actor-oriented perspective is the influence of learners' prior activities in novel situations, which entails any of the ways in which learning generalizes." (Lobato, 2006, S. 437)
>
> „Actor-oriented transfer is defined as the personal construction of relations of similarity between activities, or how „actors" see situations as similar." (Lobato & Siebert, 2002, S. 89)

Im Gegensatz zu kognitionspsychologischen Transferkonzeptionen, die einen Transfer stets als *Anwendung* von Wissen bzw. einer klar definierten Tätigkeit in einer zur Lernsituation verschiedenen Aufgabe oder Situation (vgl. Nokes, 2009, S. 2) beschreiben, rückt die AOT Perspektive *individuelle Konstruktionen* von Beziehungen in den Vordergrund. Hierzu ist es notwendig korrekte Leistung von Transfer zu trennen (Lobato, 1996, S. 140) und die Perspektive des handelnden bzw. lernenden Individuums einzunehmen.

Lobato (2012, S. 234 ff.) erörtert die Unterschiede der AOT Perspektive zu traditionellen Transferkonzeptionen anhand von vier Dimensionen:

1. Der Konzeptualisierung von Wissen und mentaler Repräsentation von Wissen,
2. der Perspektive der Beobachtung,
3. dem Gegenstand des Transfers,
4. den Zielen und Methoden empirischer Untersuchungen.

**1. Konzeptualisierung von Wissen und mentaler Repräsentation:** Die AOT Perspektive teilt die kognitionspsychologische Konzeption von Wissen und Lernen auf Grundlage von Prozessen der Informationsverarbeitung und konzeptualisiert Transfer auf Grundlage von psychologischen Ähnlichkeiten anhand von kognitiven Schemata und mentalen Repräsentationen. Jedoch stellt Lobato (1996, S. 105; 2012, S. 234) fest, dass die Perspektive der Informationsverarbeitung die interpretativen Aspekte von Wissen nicht hinreichend einbezieht. Während in traditionellen Modellen insbesondere eine direkte Anwendung bestehenden Wissens im Vordergrund steht, betont die AOT Perspektive, dass Wissen und die Zuschreibung von Bedeutung ein interpretativer Prozess des lernenden Individuums ist:

> „[...] knowing and representing arise as a product of interpretative engagement with the experiential world, through an interaction of prior learning experiences, task and artifactual affordances, discursive interplay with others, and personal goals." (Lobato, 2012, S. 234)

Demzufolge sind mentale Repräsentationen keine isomorphen Abbildungen der Wirklichkeit, sondern individuelle Konstruktionen der Lernenden auf Grundlage ihres individuellen Vorwissens, vorhergehender Lernerfahrungen, der sozialen Interaktion und den persönlichen Zielen der Lernenden. Vor allem in anfänglichen Lernsituationen, in denen die Lernenden nur begrenzte Kenntnisse in einem spezifischen Inhaltsbereich haben, interpretieren Lernende neue Sachverhalte auf Grundlage ihrer vorhergehenden Erfahrungen, sodass ihre Interpretationen einer neuen Situation höchst individuell sind und es sehr wahrscheinlich ist, dass diese von den Erwartungen der Lehrenden abweichen.

Eine Studie zur Entwicklung des Steigungsbegriffs bei linearen Gleichungen (Lobato, Ellis & Muñoz, 2003) veranschaulicht dieses Phänomen in besonderer Weise. Im Rahmen des Core-Plus Mathematics Projects wurde unter anderem untersucht, wie Lernende der neunten Jahrgangsstufe ihr Verständnis von realen Situationen beim Erarbeiten neuer Situationen generalisieren und inwieweit die Arbeit im Klassenverbund diese Generalisierungsprozesse unterstützt (vgl. Lobato et al. 2003, S. 1). Im Rahmen dieser Studie wurden lineare Funktionen der Form $y = m \cdot x + b$ mit der Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ über die Erarbeitung verschiedener „real world situations" eingeführt, in denen die Lernenden anhand von selbsterhobenen Messwerten aus Experimenten die Veränderung der Daten analysierten (Lobato et al. 2003, S. 8 ff.). In ihren Interviewanalysen stellten Lobato, Ellis und Muñoz fest, dass alle Lernenden ein Verständnis von linearen Funktionen entwickelt haben und insbesondere den Steigungsfaktor $m$ als Skalierung der $x$-Achse, als Veränderung der $y$-Werte oder als Veränderung der $x$-Werte interpretierten und entsprechend den Steigungsfaktor $m$ somit nicht – wie erwartet – als Verhältnis der Veränderungen, sondern als Differenz konzeptualisiert haben:

> „[...] we were surprised when qualitative analysis revealed that the interview participants interpreted the slope of linear function, not as a *ratio* of the changes in the dependent variable for each 1-unit change in the corresponding independent variable, but incorrectly as a *difference* (in $y$-values, $x$-values, or in the scale of the $x$-axis)." (Lobato, 2012, S. 234, Hervorhebungen im Original)

Auf Grundlage weiterführender Analysen stellten sie für ihre Beobachtungen vor allem vier Gründe („focusing phenomena") heraus, die die Aufmerksamkeit der

Lernenden und ihre Generalisierungen beeinflusst haben: Die sprachliche Formulierung „es steigt um" („the goes up by language"), die Benutzung sortierter Tabellen, die Weise der Benutzung grafikfähiger Taschenrechner sowie die Hervorhebung von ungeordneten Sequenzen und Differenzen im Lernmaterial (Lobato et al. 2003, S. 15 ff.). Die Autoren interpretieren ihre Befunde damit, dass diese Einflüsse dazu geführt haben, dass die Lernenden ihre instruktionalen Erfahrungen über die Eigenschaften der initialen Lernsituationen hinaus erweitert und generalisiert haben (Lobato, 2012, S. 235), ohne dass dies bei der Konzeption der Instruktionsphase auf normativer Ebene intendiert wurde.

Die Befunde dieser qualitativen Studie veranschaulichen zudem den Einfluss der individuellen Interpretation beim Aufbau von Schemata und mentaler Repräsentationen beim Lernen. Diese werden neben vorhergehenden Lernerfahrungen von Einflüssen des Lernumfelds sowie individuell verschiedenen Interpretationen des Lernmaterials sowie der Lernsituationen im Allgemeinen beeinflusst.

**2. Perspektive der Beobachtung:** Erfolgreicher Transfer wird für gewöhnlich daran gemessen, inwieweit eine bestimmte Strategie, ein Prinzip oder eine Heuristik in einer Transferanforderung beobachtet bzw. zur erfolgreichen Bearbeitung einer Transferaufgabe angewendet werden kann. Eine korrekte Leistung bzw. ein erfolgreicher Transfer wird in diesem Zusammenhang von Experten auf normativer Ebene definiert, indem ein bestimmtes Verhalten bzw. die sichtbare Anwendung bestimmter Wissensstrukturen als Erfordernis und wesentliches Kriterium für einen Transfer festgelegt wird. Lobato (Lobato & Siebert, 2002, S. 89; Lobato, 2012, S. 235) bezeichnet diese Sichtweise in Anlehnung an MacKay (1969) als Perspektive des Beobachters („observer's point of view"):

> „Researchers operating within the traditional transfer paradigm adopt an observer's perspective when they pre-determine what counts as transfer using models of expert or normative performance." (Lobato & Siebert, 2002, S. 89)

Eine solche Sichtweise kommt insbesondere dann zum Tragen, wenn Transfer an die korrekte Leistung in Anforderungssituationen geknüpft wird, die Beobachter bzw. Experten als strukturell ähnlich zu anfänglichen Lernsituationen beurteilen. Somit wird erwartet, dass die Lernenden dieselben strukturellen Ähnlichkeiten erkennen wie Experten.

Lobato argumentiert dagegen, dass insbesondere Lernende, die bisher nur wenig Erfahrung in einem Inhaltsbereich gesammelt haben, nicht über ein derartiges Expertenwissen verfügen und entsprechend nicht dieselben Ähnlichkeiten zwischen

Anforderungen identifizieren wie Experten. Um zu analysieren, welche Zusammenhänge die Lernenden tatsächlich erkennen, ist es daher notwendig die Perspektive der Lernenden einzunehmen:

> „When taking an actor's point of view, the researcher does not measure transfer against a particular cognitive or behavioral target but rather investigates instances in which the students' prior experiences shaped their activity in the transfer situation, even if the result is non-normative or incorrect performance." (Lobato, 2012, S. 235)

Entsprechend ist es nicht das Ziel, die Bearbeitungen von Lernenden an erwarteten Ergebnissen auf der Basis von Expertenwissen zu beurteilen, sondern die Prozesse zu verstehen, durch die Lernende individuell Gemeinsamkeiten zwischen Transferanforderungen und ihren bisherigen Erfahrungen generieren (Lobato & Siebert, 2002, S. 89).

Dieser Wechsel in der Perspektive der Beobachtung kann anhand eines weiteren Fallbeispiels aus dem CPMP-Projekt (siehe oben) veranschaulicht werden (Lobato, 1996, S. 99; Lobato, 2012, S. 236):

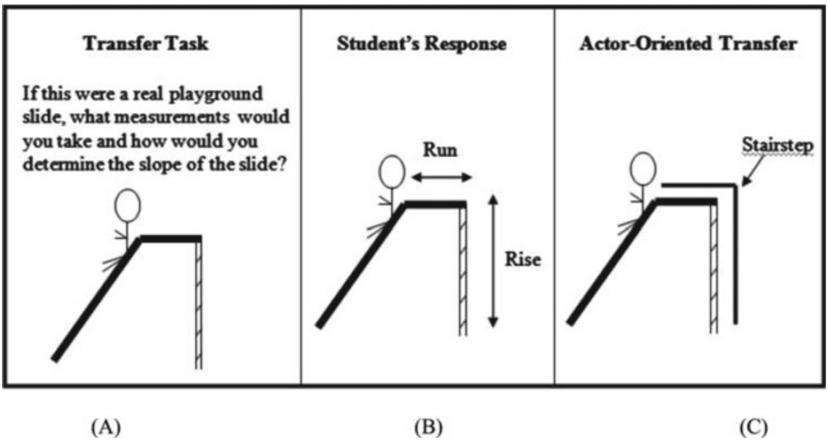



**Abb. 1.9** Fallbeispiel aus Lobatos Studie (Lobato, 1996, S. 99 ff.; Abb. aus Lobato, 2012, S. 237): (A) Die Transferaufgabe, (B) die Antwort eines Schülers, der die Steigung der Rutsche anhand der Länge der Leiter und der Länge der Plattform bestimmt, (C) die Rekonstruktion der vermeintlichen Situationsinterpretation des Schülers auf Grundlage vorhergehender Lernerfahrungen

In dieser Studie erarbeiteten die Lernenden den Steigungsbegriff und den Differenzenquotienten zur Berechnung der Steigung von Geraden im Kontext der Bestimmung der Steigungen von Treppen und abstrakten Linien. In einer Transferaufgabe sollten die Lernenden die Steigung einer Rutsche und eines Hausdaches bestimmen. In beiden Fällen konnte die Steigung über das Messen der vertikalen und horizontalen Veränderung und der Bildung des Verhältnisses dieser beiden Maße berechnet werden, wie es zuvor im Unterricht anhand von Treppenstufen erarbeitet wurde (siehe Abb. 1.9 (A)). Auf Grundlage theoretischer Analysen anhand des ACT-Modells erwartete die Autorin (Lobato, 1996, S. 84 ff.) eine hohe Transferrate, da die Produktionsregeln und Lösungsmethoden dieser Transferaufgaben und der Aufgaben in der Lernphase identisch waren (vgl. Abb. 1.10).

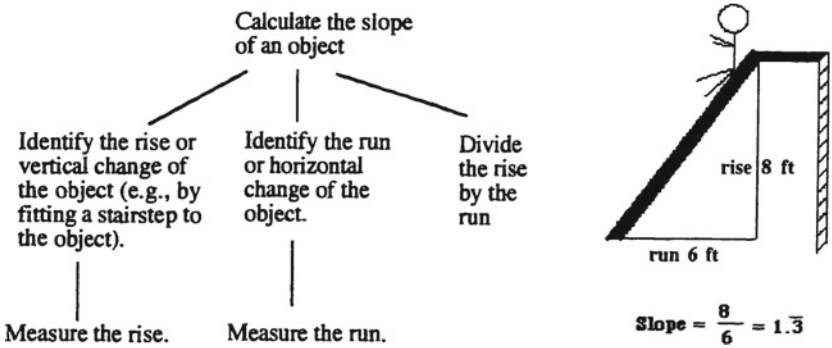



**Abb. 1.10** Links: Produktionsregeln zur Bestimmung der Steigung eins Objekts (Lobato, 1996, S. 85); Rechts: Musterlösung der Transferaufgabe (Lobato, 1996, S. 86)

Im Gegensatz zu den normativen Erwartungen wurde die Aufgabe jedoch nur von 33 Prozent der Lernenden korrekt gelöst (Lobato, 1996, S. 91 f.). Die quantitativen Lösungsraten dieser und anderer Aufgaben zeichneten jedoch ein anderes Bild als die qualitativen Analysen von Follow-up Interviews zu denselben Aufgaben. In diesen zeigte sich, dass, anders als es die Lösungsraten dieser Aufgabe annehmen ließen, nahezu alle Lernenden Anzeichen für vorgenommene Generalisierungen zeigten. Alle Lernenden erinnerten sich an die korrekte Formel zur Berechnung der Steigung und erkannten die Relevanz des Differenzenquotienten für diese Aufgabe. Die Interviewanalysen zeigten auf, dass die zentrale Schwierigkeit dieser Aufgabe nicht das Erinnern und Anwenden der Formel bzw. des Differenzenquotienten war, sondern die Identifizierung und Auswahl der entsprechenden Größen zur Berechnung der Steigung. Zum Beispiel maß ein Schüler nicht die vertikale und die horizontale Veränderung der Rampe (vgl. Abb. 1.10 rechts), sondern rechnete mit den Längen der Leiter und des Plateaus der Rutsche (siehe Abb. 1.9 (B)). Die Antwort dieses Schülers interpretierte die Autorin (Lobato, 1996, S. 99 ff.) so, dass dieser die Steigung einer Geraden unabhängig von der Geraden selbst betrachte. Sie folgert aus dieser Beobachtung, dass der Schüler die Transferaufgabe auf Grundlage seiner eigenen Erfahrungen in der Lernphase interpretiert und entsprechend nach einer Stufe für die Berechnung der Steigung sucht. Somit konstruiert er die gesuchte Stufe anhand der Leiter und des Plateaus der Rutsche (siehe Abb. 1.9 (C)) und wendet in der Folge die Steigungsformel zur Berechnung des Verhältnisses der beiden Längen korrekt an. Die eigentliche Rutschfläche bzw. die Gerade, deren Steigung bestimmt werden sollte, spielt in seinen Überlegungen keine Rolle. Vergleichbare Beobachtungen konnten auch in den übrigen Interviewanalysen gemacht werden (siehe Abb. 1.11).

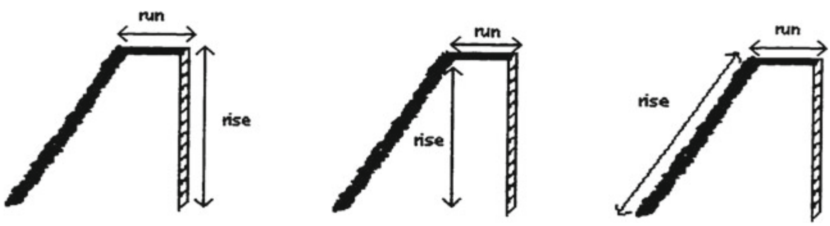



**Abb. 1.11** Beispiele der Lösungsvarianten (Lobato, 1996, S. 103)

Dieses Beispiel veranschaulicht, wie ein Wechsel von der Perspektive des Beobachters und ein Hineinversetzen in die Perspektive der Lernenden zu unterschiedlichen Bewertungen des Transfererfolgs führen: „[...] Transfer is indeed in the eye of the beholder“ (Lobato, 1996, S. 126). Während die quantitativen Lösungsraten in dieser Studie lediglich in einem Drittel der Fälle auf einen erfolgreichen Transfer hinweisen, zeigen die detaillierten Fallanalysen, dass alle Lernenden einen Transfer erbracht haben, der jedoch in vielen Fällen von den normativen Erwartungen abweicht:

> „[...] the actor’s point of view allows an investigation of the particular ways in which students interpret the meaning of slope, staircases, steepness, and so on.“ (Lobato, 2012, S. 236)

In diesem Zusammenhang ermöglicht die Einnahme der AOT Perspektive das Offenlegen von unerwarteten Interpretationen von Transferaufgaben und Verknüpfungen zu vorhergehenden Lernerfahrungen. Es ist somit möglich Elemente mathematischen Verstehens zu identifizieren, die aus der Perspektive von Expertenmodellen häufig implizit und verborgen bleiben (Lobato, 2012, S. 236).

**3. Gegenstand eines Transfers:** Dadurch, dass in der AOT Perspektive die individuellen Begriffs- und Situationsinterpretationen in den Vordergrund gestellt werden und diese in vielen Fällen von den normativen Zielsetzungen der Lehrenden oder Forschenden abweichen, wird eine neue Frage nach dem Gegenstand eines Transfers aufgeworfen. Während dieser aus Perspektive der Kognitionspsychologie normativ als Anwenden bestimmter Verfahren definiert ist, muss der Gegenstand des Transfers („what transfers?“; Lobato, 2012, S. 237) im AOT Modell zunächst in den Bearbeitungen der Lernenden identifiziert werden. Dadurch wird die Rekonstruktion und das Verstehen der Interpretationen und Verknüpfungen durch die Lernenden zum zentralen Erkenntnisinteresse.

> „[...] there is one important distinction between the nature of knowledge studied in mainstream cognitive accounts (particularly the common elements approach) and AOT, namely, the transfer of well-defined actions and strategies versus a more holistic conceptualization.“ (Lobato, 2012, S. 237)

Aufbauend auf ihrem ganzheitlichen Konzept von Transfer bezeichnet Lobato (2012, S. 238) den Transfer des Schülers im zuvor geschilderten Fallbeispiel zur Bestimmung der Steigung einer Rutsche als „vollständig“. Obwohl argumentiert werden könne, dass es sich in diesem Beispiel lediglich um einen partiell erfolgreichen Transfer im Sinne einer unvollständigen Abbildung der symbolischen Repräsentation des Differenzenquotienten auf die diagrammatische Abbildung der Rutsche handelt. Der Schüler bestimmt die vertikale Änderung korrekt und macht lediglich einen Fehler bei der Ermittlung der horizontalen Änderung. Zudem erinnert sich der Schüler an die Steigungsformel kann diese auch korrekt zur Berechnung des Verhältnisses der zuvor gemessenen Werte benutzen. Lobato (2012, S. 238) argumentiert, dass der Schüler die Steigung einer Geraden im Kontext einer Treppe interpretiert und daher auf die Vorstellung einer Treppenstufe zurückgreift. Da der Schüler entsprechend dieser individuellen Konzeption von Steigung handelt, sei der Transfer vollständig, ungeachtet dessen, dass das hier rekonstruierte Konzept von Steigung für sich genommen problematisch sei: Der Schüler konzeptualisiert die Steigung als Kombination zweier Zahlen, der vertikalen und der horizontalen Änderung. Er stellt jedoch keinen multiplikativen Zusammenhang zwischen den beiden Größen her und deutet diese Änderungen nicht als Verhältnis, sondern im Sinne einer Differenz. Das hat zur Folge, dass er zwar die Steigungsformel korrekt erinnert und anwendet, jedoch die falschen Werte zur Berechnung benutzt. Die Auswahl der Werte für die Länge der Leiter und die Länge des Plateaus lässt darauf schließen, dass er die Steigung nicht mit einer Geraden verbindet, sondern mit der Gesamtkonstruktion einer Rutsche in der Aufgabe. Somit trennt der Schüler auf konzeptueller Ebene die Steigung von der Geraden, wodurch das Objekt, um das es eigentlich in dieser Aufgabe geht, in seiner Berechnung nicht vorkommt (vgl. Lobato, 1996, S. 99 ff.).

Dieses Fallbeispiel verdeutlicht, dass im Rahmen der AOT Perspektive nicht die Anwendung einer klar definierten Wissensstruktur im Vordergrund steht, sondern Transfer als ein dynamischer Prozess der Konstruktion von Zusammenhängen und Gemeinsamkeiten konzeptualisiert wird. Aus diesem Grund reicht es nicht aus festzustellen, welche Verfahren und Fertigkeiten die Lernenden in einer Transfersituation benutzen und anwenden, sondern es muss jeweils im Einzelfall betrachtet werden, welche Zusammenhänge und Gemeinsamkeiten Lernende tatsächlich konstruieren.

> „[...] in actor-oriented transfer, the metaphor of *construction* replaces that of *application*. Relations of similarity are constructed or produced, not simply perceived or encoded. As a result, transfer situations are no longer viewed as static and unchanging but rather are dynamic sites for invention and reorganization." (Lobato & Siebert, 2002, S. 90, Hervorhebungen im Original)

Lockwood (2011) untersuchte in einer Studie die Verbindungen, die Lernende zwischen verschiedenen kombinatorischen Zählproblemen herstellen. Als Ergebnis ihrer qualitativen Analysen von Aufgabenbearbeitungen in Paaren charakterisiert sie verschiedene Typen von Verbindungen, die aus der Expertenperspektive beobachtet werden können. Sie unterscheidet (2011, S. 311) zunächst zwischen explizierten Verbindungen („elaborated connections") und beiläufigen Verbindungen („unelaborated connections"). Explizierte Verbindungen charakterisiert sie dadurch, dass die Lernenden in ihrer Kommunikation darlegen, welche Verbindungen sie zu vorhergehenden Anforderungs- oder Lernsituationen herstellen und warum sie diese Verbindungen herstellen. Verbindungen, die erkennbar von Lernenden hergestellt, jedoch nicht weiter erläutert werden, bezeichnet Lockwood als beiläufige Verbindungen: „[...] such utterances provide only limited insight into student thinking" (Lockwood, 2011, S. 311).

Für eine weitere Charakterisierung von hergestellten Verbindungen unterscheidet Lockwood (2011, S. 311 f.) zwischen konventionellen („conventional") und unkonventionellen Verbindungen („unconventional connections"). Konventionelle Verbindungen sind auf strukturelle Ähnlichkeiten der Anforderungen zurückzuführen, die aus der Perspektive des beobachtenden Experten nachvollziehbar sind. Im Gegensatz dazu beschreibt Lockwood Verbindungen, die nicht auf strukturelle Ähnlichkeiten zurückgeführt werden können: „Instances of *unconventional* AOT occur when students relate situations that an expert or observer might not find mathematically isomorphic" (Lockwood, 2011, S. 312, Hervorhebung im Original).

Zuletzt kann zwischen Typen von Referenzen unterschieden werden, auf die sich die Lernenden beziehen: Lernende können sich auf einzelne Aufgaben („particular problems"), Aufgabentypen („problem types") oder Techniken bzw. Strategien („techniques/strategies") beziehen (Lockwood, 2011, S. 312 f.). Lockwood vermutet, dass die Typen der Referenz einer Hierarchie unterliegen und sich Lernende zu Beginn vor allem an einzelne Aufgaben erinnern und sich auf diese beziehen. Mit zunehmender Erfahrung nehmen die Lernenden Verallgemeinerungen vor, in denen sie einzelne Aufgaben in Aufgabenkategorien zusammenfassen, die im weiteren Lernverlauf die Form von allgemeinen Strategien und Techniken annehmen.

Lockwood (2011, S. 321) merkt an, dass die Unterscheidungen von unterschiedlichen Typen sich sehr stark auf ihre Beobachtungen im Inhaltsbereich der Kombinatorik beziehen, jedoch Anknüpfungspunkte für die Klassifizierung von Verbindungen bieten, die Lernende in anderen Inhaltsbereichen herstellen.

**4. Ziele und Methoden empirischer Untersuchungen:** Im Gegensatz zur „traditionellen" Transferforschung, in der die Dokumentation von erfolgreichem und ausbleibendem Transfer, die Bewertung der Transferfähigkeit von unterschiedlichen Wissensstrukturen sowie die Evaluation von Instruktionsmethoden und Lernkonditionen hinsichtlich einer Förderung von Transfer im Vordergrund stehen (Lobato, 2012, S. 239), ist eine zentrale Grundannahme des AOT Modells, dass Menschen ihre Lernerfahrungen *immer* generalisieren und folglich per Definition *immer* Transfer stattfindet. Die Befunde ausbleibenden Transfers, wie sie in vielen kognitionspsychologischen Transferstudien festgestellt werden, erklärt die AOT Perspektive insbesondere damit, dass unerfahrene Lernende nur selten dieselben Verbindungen wie Experten herstellen und folglich ihre Transfererfolge vor den normativen Setzungen und quantitativen Verfahren verborgen bleiben. Das primäre Ziel der AOT Perspektive sei daher nicht, festzustellen, ob Transfer stattgefunden habe oder nicht, sondern die individuellen Verknüpfungen und Generalisierungen zu verstehen, die Lernende in Lern- und Transfersituationen konstruieren:

> „Therefore, the goal of AOT studies is not to obtain transfer (as it is already assumed to occur) but rather understand the interpretative nature of the connections that people

> construct between learning and transfer situations, as well as the socially situated processes that give rise to those connections.“ (Lobato, 2012, S. 239)

Das bedeutet, dass ein Transfer nicht an der Richtigkeit von Aufgabenbearbeitungen festgemacht wird, sondern auch falsche Bearbeitungen einen Transfer im Sinne von individuellen Generalisierungen beinhalten, die jedoch rekonstruiert und verstanden werden müssen. Lobato weist darauf hin, dass die AOT Perspektive, genau wie alle anderen Zugänge zum Transfer, auf die Richtigkeit von Aufgabenbearbeitungen und die Entwicklung von Expertise bei den Lernenden abzielt, diese jedoch nicht als Voraussetzung für das Auftreten von Transfer betrachtet (vgl. Lobato, 2012, S. 239).

Die Erfassung und Rekonstruktion der individuellen und daher in vielen Fällen unerwarteten Gedankengänge und Generalisierungen der Lernenden erfolgt über den Einsatz qualitativer Methoden. Typische AOT Forschungsdesigns beruhen auf ausgedehnten und konzeptionell-orientierten Instruktionsphasen im Klassenverbund, gefolgt von der Bearbeitung von Transferaufgaben in klinischen Interviewsituationen (Lobato, 2012, S. 238; vgl. auch Lobato & Siebert, 2002). Alternative Forschungsdesigns sind auch Serien von klinischen Interviews (vgl. Wagner, 2006) oder die Analyse von Unterrichtssituationen in Kleingruppen bei der Bearbeitung von Transferaufgaben (vgl. z. B. Ellis, 2007). Zur Isolierung der Erfahrungen, die die Generalisierungen der Lernenden beeinflussen, ist es hilfreich mit Lernenden zu arbeiten, die über nur wenig Wissen über die Studieninhalte verfügen und in jedem Fall das Vorwissen der Lernenden zu erheben (Lobato, 2012, S. 238). Die Interviewprotokolle werden qualitativ analysiert, z. B. mittels einer offenen Kodierung im Rahmen der Grounded Theory (vgl. Corbin & Strauss, 1990), und die Bearbeitungen der Lernenden hinsichtlich ihrer Lösungsstrategien, angenommenen Verständnisse und Sinnzuschreibungen bezogen auf die Transferaufgaben kategorisiert. Schließlich werden die Analysen der Schülerbearbeitungen mit den Lernmaterialien und, sofern vorhanden, Daten aus den Instruktionsphasen abgeglichen, um mögliche Einflüsse auf die individuellen Konstruktionen der Lernenden zu identifizieren (vgl. „focusing phenomena“, siehe oben).

Insgesamt formuliert Lobato in ihrem AOT Modell eine integrative Theorie von Transfer, in der sie Elemente kognitionspsychologischer Modelle und Ansätze der Situierten Kognition vereint. Im Kern stehen dabei die folgenden Aspekte:

1. Es findet immer ein Transfer zwischen Lern- und Transferanforderungen statt.
2. Ein Transfer besteht nicht in der Übertragung und/oder Anwendung einer abstrakten Wissensstruktur in einer unbekannten Anforderungssituation, sondern wird als individuelle Konstruktion von Ähnlichkeit zwischen Anforde-

rungssituationen konzeptualisiert, denen individuelle Generalisierungen der Lernenden zugrunde liegen.
3. Transfer bzw. die Konstruktion von Ähnlichkeit und die Generalisierung von Lernerfahrungen sind dynamische und interpretative Prozesse der Lernenden.
4. Das Ziel ist es, die individuellen Generalisierungen der Lernenden zu rekonstruieren und die aus ihnen resultierenden Interpretationen in Hinsicht auf die konstruktive Entwicklung im Unterricht zu verstehen.
5. Zur Rekonstruktion der individuellen Konstruktionen der Lernenden bedarf es der Einnahme der Perspektive der Lernenden.

Lobato argumentiert, dass Transfer keine Abbildung statischer mentaler Repräsentationen ist, sondern ein dynamischer Prozess, in dem die Lernenden auf Grundlage ihrer vorhergehenden Erfahrungen neue und unbekannte Situationen erschließen, ihnen Bedeutungen geben und allgemein Ähnlichkeiten zwischen dem Bekannten und dem Unbekannten herstellen. Damit sieht sie Transfer nicht als Folge bzw. Ergebnis erfolgreichen Lernens, sondern verortet Transfer als konstitutives Element im Prozess des Lernens, in dem vorhandene Erfahrungen genutzt werden, um neue Zusammenhänge und Bedeutungen zu erschließen und das vorhandene Wissen zu erweitern.

Die Konstruktion von Ähnlichkeit zwischen Anforderungssituationen steht auch im Kern kognitionspsychologischer Transfermodelle, wie zum Beispiel dem Transfer durch Analogiebildung. Dabei werden jedoch sehr unterschiedliche Ziele verfolgt. Im Rahmen kognitionspsychologischer Ansätze auf Grundlage der Informationsverarbeitung wird Ähnlichkeit vorwiegend auf der Basis von abstrakten Wissensrepräsentationen beschrieben. Ziel ist es, strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen Anforderungen zu erkennen, aus dem Kontext zu lösen und in dekontextualisierter bzw. abstrakter Form zu speichern, womit die Annahme verbunden ist, dass abstraktes, schematisches Wissen besser auf neue analoge Situationen übertragen werden kann als kontext-gebundenes Wissen (vgl. Kaminski, Sloutsky & Heckler, 2008, S. 454). Das AOT Modell kontrastiert diesen Ansatz, ähnlich wie Bauersfelds SEB-Modell, mit Bezug auf die Bereichs- bzw. Situationsspezifität von Wissen. Lobato argumentiert dabei, dass insbesondere das Wissen von Lernenden in frühen Lernstadien sehr stark an Kontexte gebunden ist. Kontext wird hier nicht als Hindernis für Transfer betrachtet, sondern produktiv als Mittler für Transfer in Form von Generalisierungs- und Verallgemeinerungsprozessen:

> „One way in which a concept may become more robust and general is due to the abstractness of mental representations, which background contextual details.“ (Lobato, 2012, S. 243)

Dem Prozess der Abstraktion als Herauslösen einer Struktur aus dem Kontext stellt Lobato (vgl. 2012, S. 243) den Prozess des Strukturierens im Sinne einer „reflektiven Abstraktion" (Piaget, 1977; vgl. Dubinsky & Lewin, 1986) gegenüber. Im Gegensatz zur Abstraktion einer Struktur aus einer Situation bezeichnet reflektive Abstraktion einen konstruktiven Prozess, in dem Lernende ihre eigenen Gedanken reflektieren und somit auf Grundlage ihrer individuellen Erfahrungen Gemeinsamkeiten erkennen und diese strukturieren:

> „Reflective abstraction includes the act of reflecting on one's cognitive actions and coming to perceive a collection of thoughts as a structured whole. As a result, the subject can now encapsulate the structure, and see it as an alignment for other structures." (Dubinsky & Lewin, 1986, S. 63)

In diesem Zusammenhang wird die Generalität einer mentalen Struktur durch die zunehmende Komplexität des repräsentierten Konzepts und die Verknüpfung mit vielfältigen Anwendungsbezügen unterstützt (vgl. Wagner, 2006). Das bedeutet, dass die Generalität einer Wissensstruktur durch das Wiedererkennen selbiger in verschiedenen Kontexten und Anwendungssituationen gefördert wird. Entscheidend dabei sind jedoch nicht allein die Vielfalt der erarbeiteten Anwendungsbezüge, sondern die Verbindungen, die Lernende selbst zwischen diesen konstruieren: „Relations of similarity are constructed or created, not simply perceived or encoded" (Lobato & Siebert, 2002, S. 111).

Ein Verständnis dieser individuellen Konstruktionen von Ähnlichkeit und Allgemeinheit bei der Bearbeitung von Transferaufgaben liefert wertvolle Anhaltspunkte hinsichtlich der Entwicklung mentaler Repräsentationen von mathematischen Inhalten und Zusammenhängen. Die Detailanalysen der individuellen Konstruktionen sollen insbesondere Hinweise geben, wie Lernende ohne umfassendes Expertenwissen in ihrem Lernprozess unterstützt werden können.

### 1.4.3 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel dargestellten Theorien von Transfer integrieren die Grundlagen der menschlichen Informationsverarbeitung und formulieren ausgehend vom Aufbau mentaler Wissensrepräsentationen eine für das Mathematiklernen spezifische Erklärung von Transfer.

Bauersfeld (1983) formuliert mit seinem SEB Modell einen Ansatz zu einer „Interaktionstheorie mathematischen Lehrens und Lernens" (Bauersfeld, 1983, S. 49), in dem er Elemente der Kognitionspsychologie im Rahmen einer integrierenden

Theorie mit individuellen und sozialen Aspekten des Mathematiklernens verbindet. In seinem Modell beschreibt er Lernen als den Aufbau mentaler Wissensrepräsentationen in Form von SEB'en, die im Gegensatz zum Schemabegriff in der Kognitionspsychologie nicht nur Informationen über die Durchführung einer Handlung beinhalten, sondern zudem auch die individuell und subjektiv wahrgenommenen Situationsbedingungen abbilden. Diese Wissensrepräsentationen sind untrennbar von den Situationen ihres Aufbaus und somit in höchstem Maße bereichsspezifisch. Begriffe, Strategien und Prozeduren können zwar allgemein gedacht werden, sind jedoch nicht allgemein verfüg- und anwendbar. Für einen Transfer ist es somit notwendig Beziehungen zwischen voneinander getrennten SEB'en herzustellen und diese in einem neu gegründeten SEB zusammen zu führen. Das Modell der SEB'e betont die Subjektivität und Individualität der aufgebauten Wissensstrukturen und bietet speziell für das Lernen von Mathematik eine Theorie von Transfer und Erklärungsansätze hinsichtlich dem Ausbleiben und der Fehleranfälligkeit der Wissensanwendung von Lernenden.

Lobatos (1996; 2012) AOT Modell wurde im Gegensatz zu Bauersfelds SEB Modell nicht mit dem Anspruch einer ganzheitlichen Theorie des Mathematiklernens entwickelt, sondern als Erweiterung kognitionspsychologischer Modelle von Transfer. Ungeachtet dieser epistemologischen und auch der zeitlichen Distanz der beiden Modelle finden sich deutliche Parallelen in ihren Argumentationen. Im Kern des AOT Modells steht die Bereichsspezifität und Individualität menschlicher Wissensstrukturen. Mentale Wissensrepräsentationen sind keine direkte Abbildung des Lerninhalts, sondern enthalten auch die subjektiv wahrgenommenen Eigenschaften der Lernsituation. In einem dynamischen Prozess konstruieren Lernende in Transfersituationen Ähnlichkeiten zwischen bereits vertrauten Sachzusammenhängen und der neuen und unbekannten Situation, indem sie die neue und unbekannte Situation auf Grundlage ihrer vorhergehenden Erfahrungen interpretieren und ihr eine Bedeutung geben. Durch die Interpretation einer neuen Situation auf Grundlage vorhergehender Erfahrungen kommt es zu Generalisierungen durch die Lernenden, in denen Ähnlichkeiten zwischen Lern- und Transfersituation konstruiert werden. Durch diese Generalisierungen wird es möglich die Transfersituation als Ausprägung vorhergehender Erfahrungen zu betrachten, was in der AOT Perspektive einen Transfer definiert:

> „[...] transfer occurs when an individual construes that she can treat a different situation as an instance of something about which she has already thought." (Johnson, McClintock & Hornbein, 2017, S. 852)

Die Generalisierungsprozesse der Lernenden, die im AOT Modell einen Transfer bestimmen, können im Rahmen des SEB Modells als Gründung eines neuen vergleichenden und wiederum bereichsspezifischen SEB's interpretiert werden, in dem die Elemente von verschiedenen SEB'en bzw. Situationen in Hinsicht auf einen neuen Sachzusammenhang in Beziehung gesetzt werden. Die Verknüpfung von SEB'en sowie auch die individuellen Generalisierungen der Lernenden beruhen auf den subjektiven Sinnzusammenhängen, die Lernende konstruieren. In beiden Modellen werden diese Prozesse als in höchstem Maße individuell beschrieben. Bleiben diese Generalisierungen bzw. die Gründung eines vergleichenden SEB's aus, kann es zu Ersatzkonstruktionen und fehlerhaften Schlüssen durch die Lernenden kommen, wie es im Fallbeispiel zur Steigung einer Rutsche dargestellt wurde, die eine neue Situation allein auf Grundlage eines vertrauten SEB's bzw. einer vertrauten Situation interpretieren.

Die in beiden Modellen hervorgehobene Individualität und Subjektivität der Konstruktionen von Ähnlichkeit bzw. der Verknüpfung von SEB'en hat zur Folge, dass der Gegenstand eines Transfers, also das, was die Lernenden transferieren, sehr individuell ist und nicht mit dem übereinstimmen muss, was auf normativer Ebene erwartet wird. Aus diesem Grund wird argumentiert, dass für eine Analyse von Transfer die Perspektive der Lernenden eingenommen werden muss, um die Zusammenhänge, die Lernende zwischen Situationen herstellen, verstehen zu können.

Zuletzt definieren beide Modelle Transfer nicht als statische Abbildungen von Wissen, sondern als dynamische Prozesse, die in einen Lernprozess eingebunden sind. Bauersfeld beschreibt SEB'e als mentale Repräsentationen, die einen „Prozeßcharakter" und eine „Wandlungsgeschichte" (Bauersfeld, 1983, S. 2) haben. In ähnlicher Weise beschreibt Lobato Transfer als einen dynamischen Prozess, in dem die Lernenden auf Grundlage ihrer vorhergehenden Erfahrungen neue und unbekannte Situationen erschließen und ihnen eine Bedeutung geben. In beiden Modellen führt ein Transfer zur Bedeutungszuschreibung von Situationen, Objekten und Handlungen und in diesem Zusammenhang zu der Entwicklung von konzeptionellem Wissen.

## 1.5 Fazit und Forschungsdesiderata

Die Darstellung und Diskussion der aufgeführten Transfertheorien und -Modelle zeigt auf, dass die Theorien einander nicht widersprechen, sondern verschiedene Aspekte desselben Phänomens aus unterschiedlichen Perspektiven beschreiben.

Kognitionspsychologische Theorien erklären Transfer auf Grundlage von Modellen der menschlichen Informationsverarbeitung. Die Übertragung von Wissen wird im Allgemeinen als Abruf und Anwendung von Wissensstrukturen konzeptualisiert, die als mentale Repräsentationen in Form abstrakter Schemata im Langzeitgedächtnis abgespeichert sind. Eine zentrale Grundannahme ist hierbei, dass der Grad der Abstraktion und der Loslösung vom Lernkontext einen wesentlichen Einfluss auf die Möglichkeit der Anwendung einer Wissensstruktur in neuen und unbekannten Situationen hat. Es wird beschrieben, dass Wissen zunächst bereichsspezifisch ist und insofern zunächst nur in Form eines nahen Transfers auf Anforderungen übertragen werden kann, die der Lernsituation sehr ähnlich sind. Mit zunehmender Verallgemeinerung und Dekontextualisierung der Anwendungsbedingungen und grundlegender Beziehungsstrukturen einer Wissensstruktur wird erwartet, dass diese flexibel im Rahmen von weiten Transferanforderungen angewendet werden kann. Ein wichtiger Transfermechanismus im kognitionspsychologischen Paradigma ist die Bildung von Analogien. Das Herausarbeiten von gemeinsamen Strukturen verschiedener Situationen soll einerseits die Abstraktion einer Wissensstruktur unterstützen und gleichzeitig die Möglichkeit bieten vorhandenes Wissen auf unbekannte Anforderungssituationen zu übertragen.

Die zentralen empirischen Befunde weisen jedoch darauf hin, dass Lernende nur selten spontan die entscheidenden Strukturelemente für die Bildung von Analogien identifizieren und ein Transfer häufig ausbleibt, insbesondere dann, wenn die Ausgangs- und Zielsituation sich in ihren Oberflächenmerkmalen und Tiefenstrukturen, d. h. den beinhalteten Objekten, Handlungen und Relationen, deutlich unterscheiden. In vielfältigen experimentellen Untersuchungen wurde die Wirkung verschiedener Instruktionsmethoden evaluiert, die einerseits den Aufbau abstrakter und damit flexibel anwendbarer Wissensstrukturen unterstützen und somit die Wahrscheinlichkeit eines Transfers durch die Lernenden erhöhen. Hervorzuheben sind hierbei das „analoge Vergleichen" sowie das Lernen mit Lösungsbeispielen. Beim analogen Vergleich erhalten die Lernenden differenzierte Anweisungen zum Vergleich von analogen Problemstellungen, die das Herausarbeiten von gemeinsamen Strukturen und Unterschieden zwischen zwei Anforderungen anregen und somit unmittelbar auf das Herausarbeiten einer abstrakten Struktur und das Loslösen aus dem Kontext abzielen. Das Lernen mit Lösungsbeispielen ist im Gegensatz dazu eher eine Methode zur Aneignung von Wissen für Lernende mit geringen Vorkenntnissen. Im Rahmen von ausführlich kommentierten Aufgabenlösungen werden Lernende auf die zentralen Elemente einer Aufgabenlösung hingewiesen und z. B. durch den Einsatz fokussierender Fragestellungen dazu angehalten, entscheidende Aspekte und Lösungsschritte selbst zu erläutern, wodurch insbesondere der Aufbau von adäquaten Wissensstrukturen unterstützt wird, die Grundlage für eine Anwendung in neuen und unbekannten Anforderungen sind.

Die Möglichkeit der Ausbildung abstrakter Wissensrepräsentationen und der Loslösung einer Wissensstruktur von ihrem Kontext wird von Vertretern der Situierten Kognition angezweifelt. Sie setzen der Annahme der Existenz von bereichsunabhängigem Wissen entgegen, dass Lernen stets in der Interaktion von Lernenden mit ihrer Umwelt geschieht und das entstehende Wissen somit immer untrennbar an die Gegebenheiten der Lernsituation gebunden ist[13]. Anstelle der abstrakten Repräsentation von Wissen als Entität in den Köpfen von Individuen, stellen sie die dynamische mentale Repräsentation von Handlungen in den Vordergrund. Handlungen sind stets in einen Kontext eingebunden, der den Rahmen für die Möglichkeiten und Einschränkungen für das Handeln einer Person gibt. Für die Übertragung auf eine neue Situation muss eine Handlung verändert und an die Eigenschaften, d. h. Möglichkeiten und Einschränkungen, der neuen Situation angepasst werden. Durch diese Transformation verändert sich nicht nur die Handlung selbst, sondern auch die zugrundeliegenden Handlungsrepräsentationen der Lernenden. Somit beschreiben Vertreter der Situierten Kognition Transfer vor allem als Anpassung einer Handlung und ihrer mentalen Repräsentation an die situativen Zustände einer neuen Anforderungssituation. Dadurch entwickeln sie ihr Verständnis von verschiedenen Situationen, was zu einer Veränderung der individuellen Wahrnehmung von Situationen und Handlungen führt und ihnen eine zunehmende Teilhabe an sozial geteilten Aktivitäten ermöglicht.

Die dargestellten Perspektiven der Kognitionspsychologie und Situierten Kognition erklären und beschreiben Transfer auf einer inhaltsübergreifenden Ebene. Wesentliche Elemente dieser Theorien finden sich in den Darstellungen integrierender Theorien zum Transfer beim Mathematiklernen wieder. Der Ausgangspunkt für die Übertragung von mathematischem Wissen ist die Ausbildung von mentalen Wissensrepräsentationen mathematischer Inhalte. Diese werden entgegen des kognitionspsychologischen Schemabegriffs nicht als symbolisch und abstrakt, sondern als bereichs- und situationsspezifisch in Form individueller Erfahrungsbereiche oder Vorstellungen konzeptualisiert. Diese gründen sich als Handlungserfahrungen

[13] Eine aufschlussreiche Diskussion der Entwicklung kontextunabhängiger abstrakter Wissensrepräsentationen findet sich in Diskussionsbeiträgen zu einer Studie von Kaminski, Sloutsky und Heckler (2008), die Vorteile des Lernens mit abstrakten symbolischen Repräsentationen gegenüber einem Lernen mit unterschiedlichen konkret-gegenständlichen Beispielen berichten. In den Kritiken (vgl. z. B. Jones, 2009b; Jones, 2009a) und einer berichteten Replikationsstudie (DeBock, Deprez, Van Dooren, Roelens & Verschaffel, 2011) wird dargestellt, dass das Lernen auf rein abstrakter Ebene lediglich den Transfer auf ähnlich abstrakte Situationen begünstigt, wohingegen das Lernen mit konkret-gegenständlichen Beispielen den Transfer auf ähnlich kontextualisierte Anwendungssituationen fördert. Da die wesentlichen Argumente in dieser Diskussion bereits an verschiedenen Stellen in dieser Arbeit diskutiert werden, soll auf diese Diskussion lediglich hingewiesen werden.

in bestimmten Situationen und bilden zu Beginn meist keine abstrakte inhaltliche Struktur ab, sondern subjektiv wahrgenommene Eigenschaften der Situation. Über die Aktivierung in verschiedenen Anwendungssituationen werden individuelle Vorstellungen und Erfahrungsbereiche miteinander koordiniert und verknüpft, wodurch sie ein dynamisches Netzwerk bilden, das einer ständigen Entwicklung unterliegt. Vor diesem Hintergrund kann Transfer als Koordination von Erfahrungsbereichen beschrieben werden, wodurch bestehende Wissensstrukturen aktiviert und weiterentwickelt werden.

Während experimentelle Studien in der Kognitions- und Instruktionspsychologie Transfer zumeist anhand von Lösungsraten von Aufgaben im Sinne einer abgeschlossenen Transferleistung konzeptualisieren, vermitteln die Perspektiven der Situierten Kognition und integrierende Modelle zum Mathematiklernen eine dynamische Sicht auf Transfer im Sinne von Prozessen, die einer Entwicklung unterliegen und individuell unterschiedlich verlaufen. Hinsichtlich der empirischen Erfassung und Beschreibung von Transfer und den damit einhergehenden Entwicklungen und Prozessen erscheint es hilfreich entgegen einer statischen Definition von Transfer als Anwendung und Übertragung von Wissen auf neue Anforderungssituationen eine dynamische Definition von Transfer als Transferprozess zu formulieren: Ein *Transferprozess* ist der Prozess der Übertragung einer vorhandenen Wissensstruktur auf ein neues Anwendungsgebiet. Dabei kann die Art der Wissensstruktur sowie der Ursprung und das Ziel eindeutig identifiziert werden.

**Forschungsdesiderata**

Aus den Darstellungen in diesem Kapitel lassen sich im Hinblick auf die in der Einleitung aufgeführten Fragestellungen folgende Forschungsdesiderata herausstellen:

*Transferprozesse in einer langfristigen Konzept- und Begriffsentwicklung:* Die meisten Transferstudien mit mathematischem Untersuchungsgegenstand bilden formal-schematische und algorithmische Inhalte ab, die sich allein auf Kalküloperationen beschränken, ohne die zugrundeliegenden begrifflichen und konzeptuellen Zusammenhängen zu berücksichtigen. Inhaltlich finden sich zahlreiche Interventionsstudien zu algebraischen Termumformungen (vgl. z. B. Cooper & Sweller, 1987) und elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. z. B. Chow & Van Haneghan, 2016; VanderStoep & Seifert, 1993). Die Lernerfolge der Interventionen bzw. der verglichenen Instruktionsmethoden werden über den Vergleich der Leistungen in Vortests und Nachtests mit Transferaufgaben gemessen. Dabei bleibt weitgehend offen, inwieweit die Probanden ein Verständnis für die vermittelten Verfahren und Inhalte entwickelt haben oder ob sie lediglich gelernt haben, die Bedingungen zur Anwendung von Algorithmen oder Formeln zu erkennen und diese fehlerfrei zu reproduzieren (vgl. z. B. VanderStoep & Seifert, 1993). Zudem wird häufig nur ein geringer Bruchteil des inhaltlichen Bereichs abgebildet. Transferprozesse im Rahmen der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses mathematischer Inhalte finden sich nur vereinzelt in (Einzel-)Fallstudien zum empirischen Gesetz der großen Zahlen (Wagner, 2006), der Anwendung kombinatorischer Zählstrategien (Lockwood, 2011) und zum Steigungsbegriff bei linearen Funktionen (Lobato, 1996; Lobato & Siebert, 2002; vgl. auch Hohensee, 2014). Diese Fallstudien operieren vor allem auf deskriptiver Ebene, indem sie individuelle Generalisierungen der Lernenden in einem eng umgrenzten Inhaltsbereich beschreiben. Mit Ausnahme der Untersuchungen von Lobato und Kollegen (1996; 2002) finden sich nur sehr wenige Befunde zu begriffsbildenen Lernprozessen, in denen über längeren Zeitraum ein beziehungsreiches Verständnis eines mathematischen Konzepts oder Inhalts aufgebaut und entwickelt wird. Auch die Arbeiten von Lobato und Kollegen zum Steigungsbegriff beschränken sich auf den Umgang mit linearen Funktionen, in denen lediglich Anwendungen auf neue Sachkontexte thematisiert werden. Ein Transfer auf andere Funktionstypen und Repräsentationen (z. B. tabellarische Darstellungen) wird nicht untersucht. Entsprechend finden sich auch keine empirischen Untersuchungen über die Erweiterung eines Zahlbereichs, insbesondere der positiven rationalen Zahlen, in denen neue Zahlen eingeführt und in bestehende Zahlkonzepte integriert werden.

*Einfluss individueller Erklärungsmodelle auf Transferprozesse:* In den meisten Untersuchungen zum Transfer von mathematischen Inhalten werden die Effekte verschiedener Instruktionsmethoden miteinander verglichen und Einflüsse verschiedener Präsentationsformen von Inhalten und Materialien über die Leistungsmessung mit Transferaufgaben evaluiert. Negativer Transfer sowie das Ausbleiben von Transfer werden dabei zumeist auf Defizite in der Lernphase zurückgeführt und durch positive und negative Einflüsse der Lernmaterialien und Lern- und Instruktionsmethoden erklärt. Die individuellen Erklärungsmodelle der Lernenden werden nur in wenigen Fällen (siehe Studien zur AOT-Perspektive) erhoben und rekonstruiert. Hierbei wird zudem selten einbezogen, inwieweit bereits vorhandene (Vor-)Wissensstrukturen und darauf aufbauende individuelle Erklärungsmodelle neue Lern- und Transferprozesse beeinflussen. Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen gilt als besonders schwieriger Prozess, weil bereits bestehende Zahl- und Operationskonzepte erweitert und neu strukturiert werden müssen. In diesem Prozess nehmen individuelle Erklärungsmodelle einen bedeutenden Einfluss auf die Begriffsentwicklung der Lernenden und führen zu schwerwiegenden Problemen durch ausbleibenden oder negativen Transfer, bei dem es zu fehlerhaften

Strukturübertragungen durch die Lernenden kommt (vgl. Wartha, 2007). Die Entwicklung individueller Denkmuster und Wissensstrukturen im Allgemeinen wird in Transferstudien mit mathematischem Untersuchungsgegenstand zumeist nicht untersucht. Vielmehr wird über die Ergebnisse in Leistungstests mit Transferaufgaben indirekt auf den Erfolg oder Misserfolg dieser Entwicklungsprozesse zurück geschlossen.

*Untersuchungsfokus:* Viele Studien zum Transfer mit mathematischem Untersuchungsgegenstand stellen lediglich die Frage, ob ein Transfer erfolgt ist oder nicht. Nur in wenigen Ausnahmen (siehe Studien zur AOT-Perspektive) werden Prozesse des Transfers untersucht. Diese Untersuchungen arbeiten jedoch ausschließlich auf deskriptiver Ebene und beschreiben individuelle Lernentwicklungen unabhängig von normativen Zielsetzungen, wie sie in einem schulischen Kontext getroffen werden. Inwieweit sich Transferprozesse, die auf Grundlage von normativen, didaktischen und insbesondere stoffdidaktischen Überlegungen im Lernprozess angezielt werden, in den individuellen Lernprozessen der Lernenden abbilden, ist bisher nur wenig untersucht worden.

*Probanden, Untersuchungsfeld & Untersuchungsmethoden:* Bis auf wenige Ausnahmen werden Studien mit Studierenden unter Laborbedingungen mit größtenteils quantitativen Methoden durchgeführt. Die wenigen qualitativen Untersuchungen von individuellen Lernprozessen werden ebenfalls fast ausschließlich mit Studierenden in Laborversuchen durchgeführt und Daten werden nahezu ausschließlich mit der Methode des „Lauten Denkens“ erhoben (Ericsson & Simon, 1993). Auf welche Weise sich Transferprozesse in authentischen schulischen Unterrichtssituationen über einen längeren Zeitraum darstellen und erheben lassen, ist bisher nur wenig untersucht.

*Transfer in kooperativen Lernkontexten:* In den wenigen qualitativen Untersuchungen zum Transfer beim Mathematiklernen werden die Daten von Lernenden in Einzelarbeit oder in Interviewsituationen erhoben. Es ließen sich keine Studien von Transferprozessen in kooperativen Lernformaten finden, die beschreiben, wie sich Transferprozesse in der Arbeit in Kleingruppen oder in Paaren darstellen.

# Didaktische Analysen zum Bruchzahlbegriff 2

In diesem Kapitel wird die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs als mathematischer Untersuchungsgegenstand der empirischen Studie beschrieben. Diese Beschreibung erfolgt auf der Grundlage des Grundvorstellungskonzepts (vom Hofe, 1995), das zunächst eingehend erörtert und vor dem Hintergrund der zuvor dargestellten theoretischen Transferperspektiven diskutiert wird. Im Anschluss werden Grundvorstellungen und Zahlaspekte von Bruchzahlen auf normativer Ebene beschrieben und unter Berücksichtigung zentraler empirischer Befunde Transferprozesse in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs abgeleitet, die als inhaltliche Strukturierung für die Unterrichtseinheit als Rahmen der empirischen Studie dienen.

Die didaktischen Analysen in diesem Kapitel verfolgen das Ziel, die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs als Beispiel für Transfer beim Mathematiklernen zu beschreiben. Vor dem Hintergrund des im vorhergehenden Kapitel entwickelten prozessualen Verständnis von Transfer eröffnet das Grundvorstellungskonzept einen Raum für normative Analysen zur Beschreibung der didaktisch intendierten Lernprozesse in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs und für deskriptive Analysen zur Rekonstruktion der individuellen Lernprozesse aus den Bearbeitungen der Lernenden.

## 2.1 Mathematiklernen als Ausbilden von Grundvorstellungen

> „Gelingt es einem Schüler nicht, zu wichtigen Begriffen adäquate Grundvorstellungen aufzubauen, so bleibt ihm kaum etwas anderes übrig, als sich an oberflächlichen Merkmalen, Schreibweisen oder Regeln zu orientieren. An die Stelle von Sinnkonstituierung und verständnisvoller Anwendung tritt dann ein schematisches Manipulieren; statt mit Begriffen, deren Kern er aus der Perspektive seiner Handlungs- und Vorstellungswelt mit Sinn erfüllen kann, hantiert er mit unverstandenen „Begriffshülsen".“ (vom Hofe, 1992, S. 361)



S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs,* Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_2

Damit die Anwendung mathematischer Begriffe und Operationen nicht zu einem „unverstandenen" Hantieren mit „Begriffshülsen" wird, müssen Lernende mathematische Inhalte mit Sinn füllen, ihnen eine Bedeutung geben oder kurz: Eine Vorstellung zu ihnen aufbauen. Was vom Hofe (1992) in diesem Eingangszitat zum Ausdruck bringt, ist ein Gedanke, der in der deutschen Rechenmethodik der Volksschule als Vorläufer der heutigen Mathematikdidaktik eine lange Tradition hat[1]: Verstehen von Mathematik wurzelt in anschaulichen Vorstellungen.

**Grundvorstellungen als normative Kategorien:** In seiner Konzeption von Grundvorstellungen als „stoffdidaktische Kategorie" (vom Hofe & Blum, 2016) vereint vom Hofe (1995) das Anschauungs- und Vorstellungskonzept verschiedener didaktischer und psychologischer Theorien vor dem Hintergrund der Beschreibung von „Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung" (vom Hofe, 1996, S. 6), die Begriffe durch Alltagsphänomene oder Handlungszusammenhänge mit Sinn erfüllen, im Gedächtnis repräsentieren und die Anwendung eines Begriffs ermöglichen (vom Hofe, 1996, S. 6). Es sind besonders diese drei Aspekte, die er in seiner „Grundvorstellungsidee" (vom Hofe, 1995, S. 97 f.) hervorhebt:

- „Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfen an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen", die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur."

Vom Hofe beschreibt Grundvorstellungen als „Elemente der Vermittlung bzw. Objekte des Übergangs zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffswelt des Lernenden" (vom Hofe, 1995, S. 98). Sie vermitteln zwischen den Ebenen der Begriffe und der Gegenstände, wobei sie keinen „statisch-abbildhafte[n]", sondern einen „*dynamischen Charakter*" haben, denn: „Grundvorstellungen wachsen, entwickeln sich, ergänzen sich gegenseitig" (vom Hofe, 1995, 98, Hervorhebung im Original). Ein mathematischer Begriff lässt sich in der Regel nicht mit einer isolierten Grundvorstellung erfassen, sondern nur als gegenseitige Vernetzung mehrerer Grundvorstellungen (vgl. Oehl, 1970; vom Hofe, 2003, S. 6). So kann zum Beispiel die Addition der natürlichen (ganzen) Zahlen nach Kirsch

[1] Eine ausführliche historische Einordnung und Darstellung der begrifflichen Genese von „Grundvorstellungen" findet sich bei vom Hofe (1995).

(1987, S. 64) wie folgt gedeutet werden (vgl. auch vom Hofe, 1995, S. 117; vom Hofe, 2003, S. 6):

- Zusammenfassen zweier Zustände zu einem neuen Zustand (Z–Z–Z), z. B.: Dirk hat 7 Spielfiguren, Mike hat 5 Spielfiguren. Wie viele haben beide zusammen? (*Vereinigungs-Vorstellung*)
- Änderung eines Zustands in einen neuen Zustand (Z–Ä–Z), z. B.: Dirk hat 7 Spielfiguren, er bekommt 5 dazu. Wie viele hat er insgesamt? (*Hinzufüge-Vorstellung*)
- Hintereinanderausführen zweier Änderungen mit dem Ergebnis einer Gesamtänderung (Ä–Ä–Ä), z. B.: Dirk bekommt zu seinen Spielfiguren zunächst 7, dann noch 5 weitere hinzu. Wie viele hat er insgesamt hinzubekommen? (*Veränderungs-Vorstellung*)

Als weiteres Beispiel beschreibt Vollrath (1989; 2014) drei Grundvorstellungen zum Begriff einer Funktion (vgl. auch Greefrath et al. 2016):

- Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu (*Zuordnungs-Vorstellung*).
- Mit Funktionen wird die Wirkung einer Änderung einer Größe auf eine zweite Größe beschrieben (*Kovariations-Vorstellung*).
- Eine Funktion ist ein Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt (*Objekt-Vorstellung*).

Wie in den aufgeführten Beispielen dargestellt, sind Grundvorstellungen aus stoffdidaktischer[2] Sicht *normative didaktische Kategorien*, „die den Kern eines mathematischen Inhalts gemäß einer didaktischen Absicht beschreiben“ (vom Hofe, 1992, S. 350). Dahinter steht die folgende Grundannahme:

> „Die individuelle Begriffsbildung kann durch didaktische Maßnahmen so unterstützt werden, daß das individuelle Begriffsverständnis den Kern des entsprechenden mathematischen Inhalts – in einem den jeweiligen Bedingungen entsprechenden Maße beinhaltet und in diesem Sinne intersubjektiv ist.“ (vom Hofe, 1992, S. 348)

Somit sind Grundvorstellungen auf normativer Ebene Leitlinien bzw.

[2] Zum Begriff der „Stoffdidaktik“ sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von Griesel (1968), Kirsch (1969) und Blum (1979) verwiesen.

> „*eine didaktische Kategorie des Lehrers*, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreibt." (vom Hofe, 1995, S. 123, Hervorhebung im Original)

Das Ziel ist es, auf Grundlage von inhaltlichen Analysen eines mathematischen Inhalts die Lernenden im Aufbau tragfähiger mentaler Repräsentationen des mathematischen Kerns zu unterstützen, die diesem eine Bedeutung geben, das Operieren auf mentaler Ebene und die Anwendung in Sachzusammenhängen ermöglichen. Diese bilden die Grundlage für die inhaltliche und methodische Planung von Lernprozessen, die es den Lernenden ermöglichen, ihre individuellen Erfahrungsbereiche zu aktivieren, um den Kern eines mathematischen Inhalts auf Grundlage der eigenen Erfahrung zu erfassen, langfristig entsprechende Grundvorstellungen aufzubauen und sie „in das System [ihrer] Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten zu integrieren" (vom Hofe, 1995, S. 125).

**Grundvorstellungen als deskriptive Kategorien:** Der normativen Perspektive von Grundvorstellungen stellt vom Hofe (1995) eine deskriptive Ebene der feststellbaren individuellen Vorstellungen der Lernenden gegenüber:

> „Die *Schülervorstellungen* geben dabei Aufschluß über die *individuellen Erklärungsmodelle des Schülers*, die in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar sind." (vom Hofe, 1995, S. 123, Hervorhebungen im Original)

Auf deskriptiver Ebene kann durch die Beobachtungen von Lernenden beim Arbeiten oder durch interpretierende Analysen von mündlichen oder schriftlichen Äußerungen der Lernenden eine Beschreibung ihrer individuellen Deutungen, Vorstellungen und Erklärungsmodelle vorgenommen werden und somit der Frage nachgegangen werden, was sich Lernende tatsächlich unter einem mathematischen Begriff vorstellen.

In seiner Beschreibung des deskriptiven Aspekts von Grundvorstellungen bezieht sich vom Hofe (1995) insbesondere auf Bauersfelds (1983) Modell der Subjektiven Erfahrungsbereiche (siehe Abschnitt 1.4.1) und Fischbeins (1983; 1989; 1990) Konzeption intuitiven Wissens. Ähnlich wie Bauersfeld die Subjektivität, Individualität und Bereichsspezifität von Erfahrungsbereichen beschreibt, beschreibt Fischbein eine Divergenz zwischen formalen und intuitiven Charakteristika mentaler Repräsentationen:

> „It is certainly true that, in mathematics, symbols have forcibly fixed meanings. But, when considering actual reasoning processes, one has to take into account that the subject tends to confer on the symbols his or her own interpretations. These interpretations may depend on the subject's experience, on the repertoire of accessible analogies and paradigms, and it may vary with the context." (Fischbein, 1990, S. 44)

Obgleich mathematische Inhalte auf formaler Ebene stets eine eng umgrenzte Bedeutung haben, bedeutet dies nicht, dass die mentalen Repräsentationen der Lernenden eben jene mathematischen Definitionen abbilden. Vielmehr sind diese geprägt von individuellen und intuitiven Annahmen[3] der Lernenden, die als „tacit models" (vgl. Fischbein, Tirosch, Stavy & Oster, 1990) die mentale Aktivität der Lernenden unbewusst beeinflussen und zu systematischen Fehlern führen können:

> „Such errors are not slips, are not the result of a temporary lack of attention, or the result of random behavior caused by ignorance. They are generated by rules invented by the student which are different from those prescribed by mathematicians." (Fischbein, 1990, S. 44)

Lernende erfinden diese intuitiven Regeln nicht willkürlich. Stattdessen folgen sie der Logik der mentalen Zwangsläufigkeit ihrer intuitiven Annahmen und vermeintlichen Bestätigungen in praktischen Situationen: „[...] these various, apparently unconnected rules are, in fact, generated by intuitive, primitive models inspired in turn by corresponding practical situations" (Fischbein, 1990, S. 45).

Aus diesem Grund bedarf es für eine Behebung bzw. eine Korrektur von Fehlern und ihren ursächlichen fehlerhaften mentalen Repräsentationen der Identifikation der intuitiven mentalen Modelle der Lernenden, um die Diskrepanzen zwischen formalen und intuitiven Modellen herauszustellen. Dies ist insbesondere von Bedeutung, da die intuitiven Regeln und Modelle der Lernenden ihre Handlungen leiten und aufgrund ihrer subjektiven Kohärenz sehr stabil sind:

> „But a model already established is a powerful device. It may be very robust because it is coherent, it is self-consistent, and it is, usually, the first to be produced and used (the primacy effect)." (Fischbein, 1990, S. 46)

Fischbeins Modell der unbewusst wirksamen „tacit models" zeigt große Ähnlichkeiten zu Bauersfelds (1983) Konzeption von subjektiven Erfahrungsbereichen. Beide

[3] Fischbein (1983; 1989; 1990) beschreibt intuitives Wissen als spezifische Form unmittelbar verfügbaren Wissens, das keiner Begründung bedarf, sondern offensichtlich, zwangsläufig und sicher ist.

Begriffe bringen zum Ausdruck, dass mentale Modelle auf Grundlage von Erfahrungen und subjektiven Wahrnehmungen gebildet werden. Eine weitere, und für die Konzeption von Grundvorstellungen entscheidende, Gemeinsamkeit der Konzeptionen von Fischbein und Bauersfeld ist, dass es sich sowohl bei intuitiven Modellen als auch bei subjektiven Erfahrungsbereichen um deskriptive Kategorien handelt. Intuitive Modelle und subjektive Erfahrungsbereiche sind keine festen Entitäten, die in den Köpfen von Individuen vorliegen und in diesem Sinne intersubjektiv sind, sondern es sind Kategorien, mit denen das Handeln von Lernenden auf Grundlage von Beobachtungen und analytischen Betrachtungen beschrieben werden kann. Durch die Analyse von schriftlichen und mündlichen Äußerungen der Lernenden kann auf ihre *individuellen Erklärungsmodelle* geschlossen werden und somit beschrieben werden, was sie sich unter einem Begriff, einer Operation oder allgemein mathematischen Objekten und Gegenständen vorstellen. Als Hintergrund des Grundvorstellungskonzepts bilden diese beiden Konzepte eine Grundlage für deskriptive Analysen, die einer normativen Betrachtung gegenüber gestellt werden können.

Zur Trennung des normativen und deskriptiven Aspekts von Grundvorstellungen stellt vom Hofe (1995, S. 126 f., Hervorhebungen im Original) im Vergleich mit subjektiven Erfahrungsbereichen heraus:

- „*Individuelle Schülervorstellungen* können (aus psychologischer Sicht) als Perspektiven des SEB-Systems oder vielleicht besser: als *Perspektive eines koordinierenden SEB* aufgefaßt werden. *Grundvorstellungen als didaktische Kategorien* können als inhaltliche Leit- bzw. Orientierungslinien für das „Aushandeln“ der individuellen Deutungsmöglichkeiten dienen.
- Die „*Bereichsspezifität*“ kann (innerhalb der stoffdidaktischen Analyse) entscheidende *Hinweise* auf die dem Schüler zur Verfügung stehenden *Erklärungsmodelle* bzw. auf die an der Lösungsstrategie beteiligten *individuellen Vorstellungen* geben [...].“

Durch die Gegenüberstellung der Ergebnisse von deskriptiven und normativen Analysen ist es möglich Divergenzen zwischen „sachadäquaten Grundvorstellungen, die der Lehrer anzielt“ (vom Hofe, 1995, S. 112) und „individuellen Vorstellungen bzw. Fehlvorstellungen“ (vom Hofe, 1995, S. 112) der Lernenden zu identifizieren. Diese dienen als Ausgangspunkt für Überlegungen zur „konstruktiven Behebung“ (vom Hofe, 1995, S. 112) möglicher Missverständnisse.

**Ausbilden von Grundvorstellungen als didaktisches Modell:** In der Verbindung der normativen und deskriptiven Aspekte von Grundvorstellungen[4] beschreibt vom Hofe (vom Hofe, 1995, S. 123 ff.; vom Hofe & Blum, 2016, S. 231 ff.) das Ausbilden von Grundvorstellungen als didaktisches Modell (siehe Abb. 2.1).

In diesem didaktischen Modell stellt vom Hofe (1995, S. 124) die didaktischen Entscheidungen der Lehrenden den kognitiven Aktivitäten der Lernenden gegenüber. Der Ausgangspunkt für die didaktischen Entscheidungen ist die inhaltliche Bestimmung von adäquaten normativen Grundvorstellungen. Diese inhaltliche Bestimmung gründet sich einerseits auf Reflexionen des mathematischen Kerns, jedoch nicht allein in Form von „eindeutigen Ableitungen" (vom Hofe, 1995, S. 123), sondern anderseits stets unter Einbezug „der Anwendungsdimensionen des mathematischen Inhalts und [des] Erfahrungshorizont[s]" (vom Hofe, 1995, S. 123) der Lernenden. In der didaktischen Umsetzung werden entsprechende Sachzusammenhänge identifiziert bzw. konstruiert, die den strukturellen Kern des mathematischen Inhalts „in einer dem Schüler gemäßen Art repräsentieren" (vom Hofe, 1995, S. 124).

> „Die inhaltlichen Elemente und die methodische Struktur des Sachzusammenhangs bilden Ausgangspunkte für entsprechende Lern- bzw. Interaktionsprozesse und sollten dazu geeignet sein, beim Schüler *Erfahrungsbereiche* zu *aktivieren*, die es diesem ermöglichen, den *Kern des Sachzusammenhangs* aus der Perspektive seiner Vorstellungs- und Handlungsmöglichkeiten zu *erfassen*." (vom Hofe, 1995, S. 125)

Ziel dieses Vorgehens ist es, dass die Lernenden langfristig Vorstellungen aufbauen und entwickeln, die den normativen Kategorien, d. h. den Grundvorstellungen, möglichst entsprechen und diese in „das System ihrer Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten integrieren" und somit am Kern des mathematischen Inhalts „teilhaben, d. h. diesen „*verstehen*" (vom Hofe, 1995, S. 125).

In diesem Zusammenhang haben Grundvorstellungen als didaktische Kategorie eine vermittelnde Funktion, indem sie „*Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität*" (vom Hofe, 1992, S. 347) beschreiben. Das Modell verdeutlicht, dass Grundvorstellungen nicht unmittelbar von mathematischen Inhalten abgeleitet werden, sondern von Lehrenden als Orientierungsrahmen anhand inhaltlicher Refle-

---

[4] An dieser Stelle sei angemerkt, dass mit dem Begriff „Grundvorstellungen" eine normative Kategorie als Ergebnis didaktisch orientierter Sachanalysen bezeichnet wird. Da die Vorstellungen der Lernenden im Gegensatz zu Grundvorstellungen das Ergebnis ihrer individuellen Lernprozesse sind, werden diese als (individuelle) Vorstellungen oder Individualvorstellungen und nicht als Grundvorstellungen bezeichnet. Eine ähnliche Differenzierung findet sich u. a. auch bei Greefrath et al. (2016, S. 18 f.)

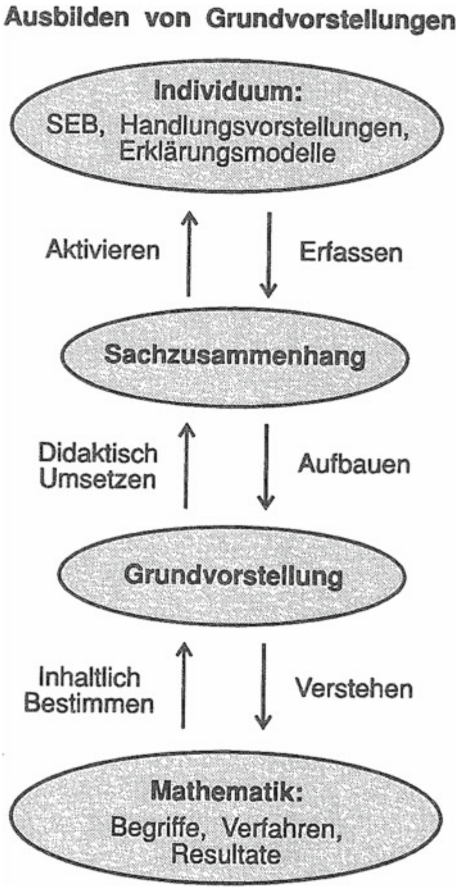



**Abbildung 2.1** Modellhafte Skizze zum Ausbilden von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, S. 124) als Gegenüberstellung didaktischer Entscheidungen des Lehrenden (links) und kognitiver Aktivitäten der Lernenden (rechts)

xionen bzw. stoffdidaktischer Analysen und vor dem Hintergrund der Erfahrungswelt der Lernenden mit dem Blick auf ein didaktisches Ziel formuliert werden. Das Ziel ist es, mathematische Inhalte für Lernende erfassbar zu machen. Da mathematische Inhalte nur selten in ihrer formalen und abstrakten Form Anknüpfungspunkte in der individuellen Erfahrungswelt der Lernenden bieten, ermöglichen Grundvorstellungen einen anschaulichen Zugang zu diesen Inhalten. Über die didaktische Umsetzung in Sachzusammenhängen soll es Lernenden möglich sein, diese auf Grundlage ihrer individuellen Erfahrungswelt zu erfassen und auf anschaulicher Ebene mental zu repräsentieren. Über die Koordination bzw. Verknüpfung verschiedener mentaler Repräsentationen und Modelle werden Vorstellungen aufgebaut, die einen anschaulichen Zugang zu den repräsentierten mathematischen Inhalten ermöglichen.

Das Ausbilden von Grundvorstellungen ist eine dynamischer Prozess. Sowohl im normativen wie im deskriptiven Sinne sind Grundvorstellungen keine Ansammlungen von statischen, „stabilen und ein für allemal gültigen gedanklichen Werkzeugen“ (vom Hofe, 2003, S. 6). Vielmehr handelt es sich beim Ausbilden von Grundvorstellungen um

> „die Ausbildung eines Netzwerks, das sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren *System mentaler mathematischer Modelle entwickelt*.“ (vom Hofe, 2003, S. 6, Hervorhebungen im Original)

**Primäre und Sekundäre Grundvorstellungen:** Ein bedeutendes didaktisches Ziel des Ausbildens von Grundvorstellungen ist die Möglichkeit ein abstraktes mathematisches Konzept auf einer anschaulichen Ebene zu repräsentieren und auf diesem Wege für Lernende zugänglich zu machen, damit sie ein Verständnis für das repräsentierte mathematische Konzept entwickeln können. Mit zunehmendem Grad der Abstraktion von mathematischen Konzepten sowie der zunehmenden Komplexität mathematischer Zusammenhänge bedarf es jedoch Änderungen auf Ebene der Repräsentation dieser Konzepte. Während zum Beispiel grundlegende arithmetische Operationen mit natürlichen Zahlen, wie das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren oder Dividieren, als Handlungen mit Realisanten, d. h. mit konkret-gegenständlichen Objekten, realisiert werden können, ist dies etwa bei der Bestimmung der Steigung eines Funktionsgraphen in einem bestimmten Punkt nicht möglich.

Bereits vor Eintritt in den Mathematikunterricht entwickeln Kinder Vorstellungen von natürlichen Zahlen und elementaren Operationsprinzipien durch unmittelbare Handlungserfahrungen mit realen Gegenständen. Diese Handlungserfahrungen werden in der Grundschule aufgegriffen und systematisiert, zunächst mit Repräsentanten für Mengen konkreter Gegenstände, wie z. B. einem Rechenrahmen oder Mehrsystemblöcken (vgl. Wartha & Schulz, 2012), und später mit abstrakten Repräsentationen, wie z. B. einer Zahlengeraden, anhand derer schließlich abstrakte Operationen, wie das Rechnen mit negativen Zahlen (vgl. Hattermann & vom Hofe, 2014; vom Hofe & Fast 2015), veranschaulicht werden können.

Vor diesem Hintergrund wird zwischen Primären und Sekundären Grundvorstellungen unterschieden (vgl. vom Hofe & Blum, 2016, S. 233 f.; vom Hofe, 2003, S. 6):

*Primäre Grundvorstellungen* basieren auf gegenständlichen Handlungserfahrungen mit realen Gegenständen und haben den Charakter von konkreten Handlungsvorstellungen. Mathematische Konzepte werden somit quasi isomorph durch Handlungen mit realen Gegenständen repräsentiert. Aus diesem Grund haben primäre Grundvorstellungen einen gegenständlichen Charakter.

*Sekundäre Grundvorstellungen* basieren auf mathematischen Operationen mit symbolischen Objekten. Mathematische Konzepte werden nicht anhand von realen Handlungen, sondern auf Grundlage (mentaler) Operationen mit mathematischen Objekten, wie z. B. einer Zahlengeraden, Termen oder Funktionsgraphen, repräsentiert. Sekundäre Grundvorstellungen haben daher einen symbolischen Charakter.

Die Unterscheidung zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen steht in einer engen Beziehung zu Fischbeins (1987, S. 57 ff.) Unterscheidung zwischen primären und sekundären Intuitionen: Primäre Intuitionen entwickeln sich spontan und gehen auf persönliche Erfahrungen und das Vorwissen der Lernenden zurück. Sekundäre Intuitionen werden hingegen nicht durch natürliche Erfahrungen, sondern durch Unterricht erworben. Fischbein betont, dass Wissen, das zuerst erworben wurde, die primären Intuitionen formt. Unter dem Begriff des „primacy effects“ beschreibt er das Phänomen, dass das, was zuerst gelernt wurde selten vergessen wird und somit dazu führt, dass primäre Intuitionen sehr beständig sind. Aus diesem Grund existieren primäre Intuitionen zumeist neben sekundären Intuitionen und sind deshalb nicht nur ein bedeutender Einfluss für die Entwicklung von Missverständnissen, sondern auch von fehlerhaften Konzeptualisierungen (vgl. Tirosh & Tsamir, 2014, S. 326).

Ein wesentlicher Unterschied in der Verwendung von Grundvorstellungen und Intuitionen ist, dass Grundvorstellungen vor allem als normative Kategorien der Planung von Lernprozessen verwendet werden, während Intuitionen ausschließlich als deskriptive Kategorien zur Beschreibung von individuellen Erklärungsmodellen verwendet werden. Dennoch ist das beschriebene Ziel in beiden Fällen sehr ähnlich: Primäre Grundvorstellungen bzw. primäre Intuitionen sollen im Unterricht durch sekundäre Grundvorstellungen bzw. sekundäre Intuitionen relativiert werden und somit einerseits Vorstellungen mathematischer Inhalte von der konkret-gegenständlichen Handlungsebene auf die formale und symbolische Ebene des Operierens mit mathematischen Objekten überführt werden, ohne dabei die anschauliche

Vorstellungsgrundlage aufzugeben. Anderseits sollen mögliche fehlerhafte Annahmen, die auf primären Intuitionen beruhen und im fortschreitenden Lernverlauf zu Missverständnissen und Fehlschlüssen führen können oder im fortschreitenden Lernverlauf keine Anknüpfungspunkte bieten, durch formal korrekte und tragfähige sekundäre Intuitionen und Vorstellungen ersetzt werden.

**Transfer aus der Perspektive von Grundvorstellungen**

Grundvorstellungen sind in erster Linie als normative didaktische Kategorien zu verstehen, die prototypisch für die Vorstellungen stehen, die bei Lernenden aufgebaut werden sollen. In seinen Ausführungen zur Nutzung von Grundvorstellungen auf einer deskriptiven Ebene hinsichtlich einer Analyse der individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle der Schüler stellt vom Hofe (1995, S. 107 ff.) die Nähe zum Modell der Subjektiven Erfahrungsbereiche von Bauersfeld (1983; 1985) heraus. Auf psychologischer Ebene wird dabei die Entwicklung individueller Vorstellungen von mathematischen Inhalten im Rahmen der Entwicklung Subjektiver Erfahrungsbereiche erläutert.

Vor diesem Hintergrund beschreibt das Ausbilden von Grundvorstellungen Mathematiklernen nicht als einen kumulativen Prozess, in dem neue Vorstellungen zu bestehenden Vorstellungen hinzugefügt werden, sondern als einen dynamischen Prozess, in dem sukzessive neue Vorstellungen aufgebaut werden, Vorstellungen miteinander verknüpft, bestehende Vorstellungen erweitert und weiterentwickelt und in ein Netzwerk mentaler Repräsentationen mathematischer Inhalte integriert werden.

Die engen Kongruenzen zwischen dem Modell der Subjektiven Erfahrungsbereiche und dem Ausbilden von Grundvorstellungen erlauben auf psychologischer Ebene eine Integration hinsichtlich der Formulierung eines Erklärungsmodells für Transfer: Für einen Transfer auf neue Anforderungssituationen ist es notwendig, dass Lernende in diesen Situationen bestehende Erfahrungsbereiche bzw. Vorstellungen aktivieren, die in einem neuen koordinierenden Erfahrungsbereich miteinander verknüpft werden. Dieser neu entstandene koordinierende Erfahrungsbereich ermöglicht es den Lernenden eine neue Situation zu erfassen und mit Bedeutung zu füllen und schließlich entsprechende Handlungen durchzuführen bzw. Wissen zu übertragen und anzuwenden. Diese Prozesse sind in vom Hofes didaktischem Modell (vgl. Abb. 2.1) in den Schritten der Erfassung von Sachzusammenhängen und dem Aufbau von Grundvorstellungen einzuordnen, die letztendlich das Verstehen von mathematischen Begriffen, Verfahren und Zusammenhängen unterstützen sollen. Gleichzeitig greifen Lernende für die Erfassung (neuer) Sachzusammenhänge auf ihr individuelles Netzwerk an bestehenden Erfahrungsbereichen und Vorstellungen zurück, sodass in diesem Zusammenhang eine gegenseitige Bedingung zwischen der Ausbildung von Grundvorstellungen und Transfer angenommen werden kann.

In einer Diskussion zur Bedeutsamkeit von Grundvorstellungen für die allgemeine mathematische Kompetenzentwicklung am Beispiel der Modellierungskompetenz resümieren vom Hofe und Blum (2016):

> „These relationships demonstrate the important role of GVs [Grundvorstellungen] for the development of mathematical competencies. Ideally, this development will be accompanied by the formation of both primary GVs and, with progressive learning, increasingly also secondary GVs, into a growing and networked system. In particular, *the ability to apply mathematical skills* is based, according to this view, on the quality of development and the degree of cross-linking of GVs, as well as on the ability to activate and coordinate GVs." (vom Hofe & Blum, 2016, S. 235 f., Hervorhebung des Autors)

In diesem Beitrag beschreiben vom Hofe und Blum (2016) die Notwendigkeit von Grundvorstellungen im Rahmen der Anwendung in Sachkontexten – bzw. Transfer in einem klassischen Begriffsverständnis – und mathematischen Modellierungssituationen insbesondere in folgenden Bereichen (vgl. vom Hofe & Blum, 2016, S. 234 ff.):

- Dem Übersetzen zwischen Mathematik und Realität als Interpretation von realen Situationen mit mathematischen Konzepten und umgekehrt,
- dem Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen (z. B. geometrischen und algebraischen Darstellungen) und
- dem Begründen bzw. prä-formalen Beweisen mathematischer Zusammenhänge.

In diesen exemplarischen Anwendungsbereichen von Grundvorstellungen lassen sich die Prozesse des *Verknüpfens* sowie des *Ausbildens* und *Erweiterns* von Vorstellungen bzw. Erfahrungsbereichen der Lernenden nachzeichnen.

In verschiedenen empirischen Untersuchungen (vgl. z. B. Pekrun et al., 2006; Wartha, 2007; Hafner, 2012) konnte nachgewiesen werden, dass wesentliche Schwierigkeiten in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen und Fähigkeiten auf Defizite in der Entwicklung von adäquaten Grundvorstellungen zurückzuführen sind. Im Speziellen zeigt die Studie zur Leistungsentwicklung in der Bruchrechnung von Wartha (2007) auf, dass der Aufbau von Grundvorstellungen insbesondere im fortschreitenden Verlauf der Begriffs- und Kompetenzentwicklung nicht ausreicht. In seinen Fallstudien zeigte Wartha auf, dass die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen gravierende Veränderungen von aus der Grundschule vertrauten Grundvorstellungen erfordert. Sowohl hinsichtlich der

Entwicklung des Bruchzahlbegriffs sowie zu den Grundrechenarten müssen neue Aspekte in das bestehende Vorstellungsgefüge integriert und bisherige, im Bereich der natürlichen Zahlen gültige Aspekte verändert, erweitert und zum Teil verworfen werden (vgl. Wartha & vom Hofe, 2005, S. 10). Diese sogenannten *Grundvorstellungsumbrüche* und die Entwicklung von *Fehlvorstellungen* können im Wesentlichen durch ausbleibenden oder negativen Transfer, z. B. der Übertragung der Ordnungsstruktur der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen, interpretiert werden. Zudem ist die ausbleibende *Anpassung* von Vorstellungen durch die Stabilität von Vorwissensstrukturen erklärbar (siehe oben).

Hinsichtlich der Nutzung des Grundvorstellungskonzepts zur „konstruktiven Analyse" (vom Hofe, 1995 , S. 113) von Lern- und Bearbeitungsprozessen erläutert vom Hofe (vom Hofe, 1995, 116 f., Hervorhebungen im Original):

> „Eine umfassende Erklärung der Schülerstrategie und der Mißverständnisse, die sich angesichts des vom Lehrer erwarteten bzw. vom Schüler eingeschlagenen Lösungsversuchs ergeben, bringt eine Analyse der *normativ verwendeten Grundvorstellungen* und der *deskriptiv feststellbaren Individualvorstellungen*, etwa unter den Leitfragen:
>
> - *Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus Sicht des Lehrenden adäquat? (Normativer Aspekt)*
> - *Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schüler erkennen? (Deskriptiver Aspekt)*
> - *Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben? (Konstruktiver Aspekt)*"

Aus einer didaktischen Perspektive erscheint dieser Ansatz auch geeignet, die Bearbeitungen von Transferaufgaben zu untersuchen. Auf normativer Ebene lassen sich vor dem Hintergrund des vorhergehenden Unterrichts sowie den vermuteten Erfahrungen der Lernenden Grundvorstellungen zum mathematischen Kern eines Transfers ableiten. Hierbei wird angenommen, dass diese Vorstellungen eine Übertragung der entsprechenden mathematischen Inhalte auf neue Anforderungssituationen ermöglichen und unterstützen. Gleichzeitig ist jedoch denkbar, dass nicht adäquate, nicht hinreichend entwickelte oder auch fehlerhafte Vorstellungen den Transfer erschweren und möglicherweise verhindern können. Deskriptive Analysen individueller Erklärungsmodelle der Lernenden geben Aufschluss über mögliche Ursachen für einen fehlerhaften oder ausbleibenden Transfer und stellen somit eine Grundlage für die Planung konstruktiver Unterstützungsmaßnahmen dar.

Die differenzierte Analyse der individuellen Erklärungsmodelle der Lernenden steht auch im Mittelpunkt der im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Perspektive des Actor-Oriented Transfer. In der AOT Perspektive wird argumentiert, dass Lernende auf Grundlage ihrer subjektiven Wahrnehmung und individuellen Erfahrung Generalisierungen vornehmen, die ihr Handeln in Transfersituationen leiten und sich in ihren individuellen Erklärungsmodellen niederschlagen. Im Rahmen dieser Perspektive können Grundvorstellungen als Perspektive des Beobachters bzw. des Experten interpretiert werden. Sie beschreiben von der formalen mathematischen Ebene ausgehend Vorstellungen und mentale Modelle, die aus Sicht von Experten bzw. der Lehrenden zu einem mathematischen Inhalt ausgebildet werden sollten. Die in der AOT Perspektive beschriebenen individuellen Generalisierungen der Lernenden können aus Perspektive des Grundvorstellungskonzepts als Erfahrungsbereiche oder individuelle Vorstellungen interpretiert werden, die in der individuellen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten entstehen.

Insgesamt kann das Grundvorstellungskonzept als „ganzheitliche Sichtweise mathematischen Denkens und Handelns" (vom Hofe, 1995, S. 131) bezeichnet werden. Durch die Zusammenführung von sachlogischen und psychologischen Aspekten des Mathematiklernens eröffnet es einen Rahmen zur Integration anderer Konzepte. Obgleich der Transfer mathematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten in der Literatur zu Grundvorstellungen lediglich im Zusammenhang mit der Anwendung von Mathematik in Modellierungssituationen diskutiert wurde, ist ein immanentes Ziel der Ausbildung von Grundvorstellungen darin zu erkennen, dass Lernende mathematische Begriffe, Handlungen und Strukturen anwenden und somit auch auf neue Sachzusammenhänge übertragen können.

Als ein didaktisches Modell ist das Grundvorstellungskonzept primär zum Einsatz in der Unterrichtspraxis ausgerichtet: Stoffdidaktische Analysen mathematischer Inhalte ermöglichen die Konstruktion von Zugängen für Lernende, die einerseits vom mathematischen Kern abgeleitet werden und gleichzeitig die Erfahrungswelt der Lernenden und damit ihre individuellen Voraussetzungen einbeziehen.

Als ein empirisches Modell zur deskriptiven Analyse von individuellen Vorstellungen der Lernenden liefert es Ansatzpunkte für die Untersuchung spezifischer Fragestellungen in einem unterrichtsnahen Kontext. Die Offenheit gegenüber anderen didaktischen und psychologischen Erklärungsmodellen eröffnet einen Rahmen für die empirische Untersuchung spezifischer mathematikdidaktischer Fragestellungen.

Im Fazit der Darstellung und Diskussion der verschiedenen theoretischen Perspektiven zum Transfer wurde festgestellt, dass Transfer als dynamischer Prozess der Übertragung einer Wissensstruktur auf ein neues Anwendungsgebiet beschrieben werden kann, bei dem sowohl die Art der übertragenen Wissensstruktur sowie der Ursprung und das Ziel der Übertragung eindeutig definiert werden können. Vor dem Hintergrund des Grundvorstellungsmodells kann diese Definition von Transferprozessen in Hinsicht auf das Mathematiklernen weiter präzisiert werden:

*Ein Transferprozess ist der Prozess der Anwendung oder Übertragung mathematischer Begriffe, Verfahren und Strukturen auf eine neue Anforderungssituation*

- *zum Transfer zwischen Sach- und Anwendungskontexten,*
- *zum Transfer zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen sowie*
- *zum Herstellen und Begründen von mathematischen Zusammenhängen.*

Die Anwendung oder Übertragung mathematischer Begriffe, Handlungen (Verfahren) und Strukturen erfordert die Aktivierung von Grundvorstellungen und trägt dadurch wechselseitig zum Aufbau, zur Entwicklung und zur Verknüpfung von Grundvorstellungen bei.

Durch die Bezugnahme auf die Ausbildung von Grundvorstellungen ist es möglich auf normativer Ebene Transferprozesse auf der Basis sachanalytischer Überlegungen in Hinsicht auf ein didaktisches Ziel zu beschreiben und auf deskriptiver Ebene in den Bearbeitungen der Lernenden zu analysieren. In diesem Zusammenhang können die Leitfragen zur Analyse der normativen Verwendung von Grundvorstellungen und der deskriptiv feststellbaren Individualvorstellungen der Lernenden neu formuliert werden:

- *Welche Transferprozesse sind zur Lösung einer neuen Anforderung erforderlich und welche Grundvorstellungen werden dafür benötigt? (Normativer Aspekt)*
- *Welche individuellen Transferprozesse lassen sich in den Bearbeitungen der Lernenden erkennen und welche individuellen Vorstellungen liegen diesen zugrunde? (Deskriptiver Aspekt)*
- *Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen und wie lassen sich diese beheben? (Konstruktiver Aspekt)*

Im folgenden Abschnitt werden Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zum Operieren mit Bruchzahlen auf Grundlage sachanalytischer Überlegungen dargestellt und hinsichtlich empirischer Befunde, insbesondere zu Problembereichen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs, diskutiert.

## 2.2 Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff

Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen ist einer der zeitintensivsten und zugleich herausforderndsten Bereiche im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, denn

> „wegen des erstmals höheren Abstraktionsgrades passiert es hier durchaus nicht selten, dass bei Lernenden erstmals das mathematische Verständnis weitgehend auf der Strecke bleibt und an seine Stelle das blinde Auswendiglernen unverstandener und darum leicht zu verwechselnder Regeln tritt.“ (Padberg & Wartha, 2017, S. V).

Dies ist insbesondere problematisch, da ein verständiger Umgang mit Bruchzahlen eine wesentliche Voraussetzung für weiterführendes Lernen in nahezu allen mathematischen Inhaltsbereichen ist[5] (vgl. z. B. Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Siegler et al., 2012; Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015). Bruchzahlen sind als positive rationale Zahlen definiert. Die Einführung im Mathematikunterricht erfolgt in der Regel vor der Erweiterung der ganzen Zahlen. Lediglich wenn diese vor der Zahlbereichserweiterung auf die Bruchzahlen erfolgt ist, werden in der ersten systematischen Einführung von Brüchen auch negative rationale Zahlen behandelt (vgl. Wartha, 2007, S. 41 f.; Griesel, 1970).

Mit der Einführung von Bruchzahlen werden im Allgemeinen die Ziele verfolgt, dass Schülerinnen und Schüler

- „Probleme aus Umweltsituationen, in denen die Begriffe der Bruchrechnung zur Anwendung kommen, versteh[en], sie beschreiben und lösen [können],
- Einsicht in die Rechenregeln und Gesetze der Bruchrechnung gewinn[en] und damit die Regeln und Gesetze nicht nur rezeptartig anwende[n].“ (Postel, 1981, S. 16)

Dies setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler tragfähige und sachadäquate Vorstellungen von den Begriffen der Bruchrechnung aufbauen. Im Folgenden werden die zentralen Grundvorstellungen und Zahlaspekte von Bruchzahlen genauer beschrieben und erörtert[6].

---

[5] Eine Übersicht über Anwendungen der Bruchrechnung in anderen mathematischen Inhaltsbereichen findet sich u. a. bei Padberg und Wartha (2017, S. 8 ff.). Auf empirischer Ebene berichten kognitionspsychologische Studien zudem eine signifikante Vorhersagekraft von Kompetenzen im Bereich der Bruchrechnung auf den späteren Lernerfolg in Mathematik

[6] Vor dem Hintergrund des Forschungsinteresses beschränkt sich die folgende Darstellung auf für die Studie relevante Zahlaspekte und Grundvorstellungen. Ausführungen zum Rechnen mit Bruchzahlen finden sich u. a. bei Wartha (2007), Malle (2004) und Postel (1981). Es sei zudem auf die Sachanalysen des mathematischen Inhalts von Griesel (1970) und Kirsch (1970, 1987) verwiesen.

### 2.2.1 Aspekte des Bruchzahlbegriffs

Entgegen einer abstrakten Konstruktion der rationalen Zahlen, die wissenschaftlich über die Bildung von Äquivalenzklassen von Zahlenpaaren natürlicher oder ganzer Zahlen erfolgt, orientiert sich die Behandlung von Bruchzahlen in der Schule an Anwendungsaspekten und anschaulichen Alltagsphänomenen. Hinsichtlich der verschiedenen Anwendungsaspekte kann zwischen acht Zahlaspekten von Bruchzahlen unterschieden werden (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 17 ff.; Postel, 1981, S. 17 f.; Malle, 2004), die Teilbereiche des Bruchzahlbegriffs beschreiben und diesen fachlich charakterisieren.

**Bruch als Anteil:** Die Interpretation eines Bruchs als *Anteil* ist ein fundamentaler Bruchzahlaspekt. Demnach bedeutet $\frac{3}{4}$, dass eine Bezugsgröße restlos in vier gleichgroße Teile aufgeteilt und drei dieser Teile ausgewählt werden. In Abhängigkeit von der Bezugsgröße wird zwischen einem Bruch als *Teil eines Ganzen* und einem Bruch als *Teil mehrerer Ganzer* unterschieden. Die Bezugsgröße bzw. das Ganze kann ein Objekt (z. B. eine Pizza, ein Kuchen, etc.), eine kontinuierliche Größe (z. B. eine Strecke, eine Fläche, etc.) oder eine diskrete Größe (z. B. eine Menge von 30 Personen, ein Geldbetrag von 200 €, etc.) sein. Anteile können an unterschiedlichen Repräsentanten ikonisch und enaktiv dargestellt werden und weisen vielfältige Alltagsbezüge auf (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 19 f.; Hefendehl-Hebeker, 1996, Malle, 2004, S. 4).

Einige Autoren (z. B. Malle, 2004, S. 4; Schink, 2013, S. 25 ff.) unterscheiden zwischen einem *relativen* und einem *absoluten* Anteil. So wird argumentiert, dass etwa der Anteil $\frac{2}{3}$ von 900 € den Anteil an einer Gesamtbezugsgröße (900 €) angibt, auf den sich der Anteil bezieht. Demgegenüber beschreibt ein absoluter Anteil eine Relation zwischen zwei Größen, die keine Informationen über die Bezugsgröße bzw. Gesamtanzahl geben. Diese Angabe wird häufig zur Beschreibung relativer Häufigkeiten verwendet, bei denen die Gesamtbezugsgröße (3 Teile) und die Anteilsbezugsgröße (2 Teile) in Relation gesetzt werden. In dieser Arbeit werden die Ausdrücke relativer und absoluter Anteil jedoch mit einer anderen Bedeutung verwendet. Der Begriff relativer Anteil wird für Bruchoperatoren und der Begriff absoluter Anteil für den mit einem Bruchoperator bestimmten Bruchteil verwendet. Im Beispiel $\frac{2}{3}$ von 900 € = 600 € wird mit $\frac{2}{3}$ der relative Anteil und das Ergebnis 600 € als absoluter Anteil von 900 € bezeichnet.

**Bruch als Maßzahl:** Bestimmt ein Bruch einen *Anteil an einer normierten Maßeinheit in einem Größenbereich* (z. B. Längen, Gewichte, Volumina, Flächeninhalte, Zeiteinheiten, etc.) so wird der Bruch als *Maßzahl* interpretiert und zum Teil auch als „konkreter Bruch“ bezeichnet. Maßzahlen treten zumeist in Sachsituationen auf und bezeichnen in Kombination mit einer Maßeinheit eine Größe (z. B. $\frac{1}{2}\,km$, $\frac{3}{4}\,kg$, $\frac{1}{4}\,h$). Durch ihre Einbettung in Sachkontexte ergeben sich Bezüge zum Alltag der Lernenden. Repräsentanten für Größen sind dabei häufig Strecken, Flächen, geometrische Körper, physikalische Körper oder Ereignisse (vgl. Griesel, 1970, S. 6; Postel, 1981, S. 17; Wartha, 2007, S. 49; Padberg & Wartha, 2017, S. 20).

**Bruch als Operator:** Bei der Interpretation von einem Bruch als Operator, repräsentiert der *Bruch eine Funktion*, die multiplikativ auf eine Zahl oder Größe wirkt. Ein *Bruchoperator* ist die Zusammenfassung zweier Teiloperatoren, dem Zähler- und dem Nenneroperator (Griesel, 1981c). Der Zähleroperator (Faktor im Zähler) bewirkt eine Vervielfachung (Streckung) der Eingabe, während der Nenneroperator (Divisor im Nenner) eine Verkleinerung (Stauchung) der Eingabe bewirkt. Aus diesem Grund kann das Ergebnis als eine Verkettung der beiden Teiloperatoren kleiner oder größer als die Ausgangsgröße sein. Die Verkettung der beiden Teiloperatoren entspricht der Multiplikation mit der Bruchzahl.

In diesem Sinne werden durch die Deutung eines Bruchs als Operator auf symbolischer Ebene auf Größen anzuwendende Rechenanweisungen bzw. auf ikonischer und enaktiver Ebene (Repräsentantenebene) entsprechende Handlungsanweisungen beschrieben. Somit kann mit diesem Aspekt u. a. der „Bruchherstellungsakt“ (Postel, 1981, S. 23) bzw. der dynamische Prozess der Bruchherstellung beschrieben werden. Sollen zum Beispiel $\frac{3}{4}$ von 1 $cm^2$ bestimmt werden, wird der Bruchoperator „$\frac{3}{4}$ von“ als Rechen- bzw. Handlungsanweisung „teile durch 4“ und „vervielfache mit 3“ interpretiert. Bei der Hintereinanderausführung der beiden Teiloperatoren hat die Reihenfolge, in der die Teiloperatoren angewendet werden, keinen Einfluss auf das Ergebnis (vgl. Postel, 1981, S. 23; Griesel, 1981c; Wartha, 2007, S. 54 ff.).

Bei der Interpretation eines Bruchs als *Vergleichsoperator* wird unter dem *Relationsaspekt* ein Bezug zwischen zwei Größen hergestellt und als Bruchzahl interpretiert (vgl. Postel, 1981, S. 17; Malle, 2004, S. 4 f.). Dabei können zwei Fälle unterschieden werden:

(1) Eine Größe wird auf eine andere Größe derselben Art bezogen, z. B. „Fleisch besteht zu $\frac{2}{3}$ aus Wasser“ (Postel, 1981, S. 17). Hierbei gibt die Bruchzahl den Anteil des Wassers im Fleisch an und stellt somit eine Relation zwischen den Gewichten des Wassers und des Fleisches her. In diesem Fall ist die Bruchzahl kleiner als Eins.
(2) Eine Größe wird auf dieselbe Größe bezogen, z. B. „Die Ernteerträge betrugen in diesem Jahr das $1\frac{1}{2}$-fache des Vorjahres“ (Postel, 1981, S. 17). In diesem Fall kann die Bruchzahl größer als Eins sein.

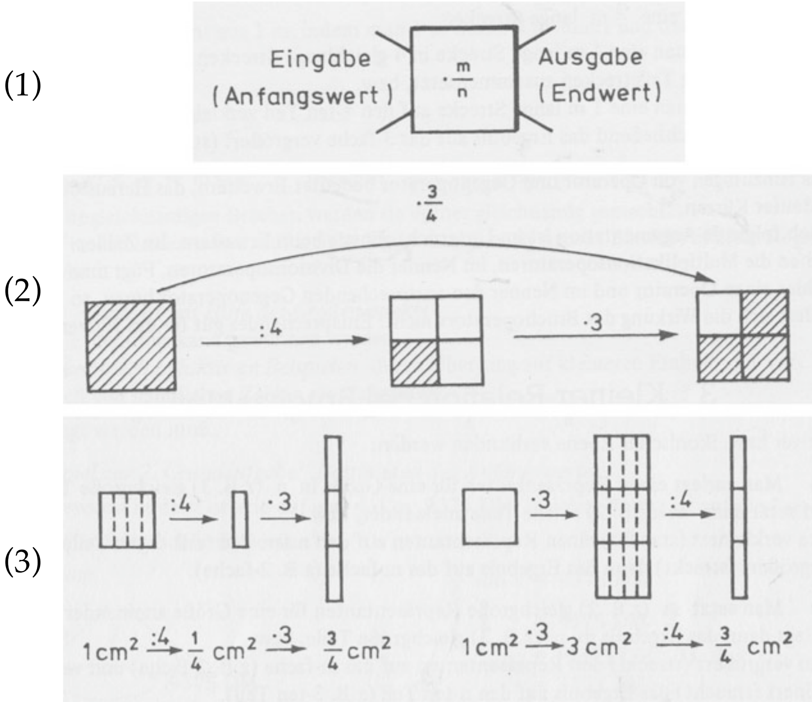



**Abbildung 2.2** (1) Bruchoperator als Maschine, (2) Bruchherstellungsakt als Hintereinanderausführung zweier Teiloperatoren, (3) Vertauschen der Teiloperatoren in der Bruchherstellung ändert den Anteil nicht (Postel, 1981, S. 24, 23, 29)

**Bruch als Quasikardinalzahl und Quasiordinalzahl:** Beim quasikardinalen Zahlaspekt von Brüchen wird der Nenner eines Bruchs $\frac{m}{n}$ als Einheit aufgefasst, sodass der Bruch als Größe mit der Maßzahl $m$ und der Größeneinheit $\frac{1}{n}$ interpretiert wird. Schreibt man zum Beispiel den Bruch $\frac{3}{4}$ in der Form 3 Viertel, so wird 3 als Kardinalzahl analog zum exemplarischen Ausdruck 3 Bäume behandelt: Die Größeneinheiten sind jeweils „Viertel" und „Bäume". Der Quasikardinalzahlaspekt führt Bruchzahlen somit direkt auf natürliche Zahlen zurück. Durch die Deutung des Nenners als Maßeinheit ist der Quasikardinalzahlaspekt eng mit dem Maßzahlaspekt verbunden und „es gehört damit zwingend zum Begriff des Halben, des Drittels oder des Viertels, dass alle Hälften (Drittel, Viertel) jeweils gleich groß sind" (Griesel, 1981b, S. 92). Die Prozesse der anschaulichen Herstellung eines Bruchs als Anteil und einer Quasikardinalzahl sind somit dieselben (vgl. Griesel, 1981b; Malle, 2004; Wartha, 2007, S. 49 f.; Padberg & Wartha, 2017, S. 21).

Analog kann im Spezialfall der Stammbruchherstellung der Bruch $\frac{1}{n}$ als *Quasiordinalzahl* interpretiert werden. So kann zum Beispiel die Aussage „Jedes fünfte Auto ist schwarz“ bedeuten, dass im strikten Sinne, jedes fünfte Auto, dass vorbeifährt schwarz ist oder im statistischen Sinne, dass ein Fünftel aller vorbeifahrenden Autos schwarz sind (vgl. Freudenthal, 1983; Malle, 2004, S. 5; Wartha, 2007, S. 50 f.).

**Bruch als Quotient:** Ein Bruch $\frac{m}{n}$ kann als Quotient $m : n$ und somit als *Resultat einer Division* aufgefasst werden. Zum Beispiel kann in Verbindung mit der Interpretation eines Bruchs als Teil mehrerer Ganzer das Aufteilen von drei Pizzen auf vier Personen als Division $3 : 4$ gedeutet werden und somit unmittelbar bestimmt werden, dass jede Person den Anteil $\frac{3}{4}$ einer Pizza erhält (Malle, 2004, S. 5). In engem Zusammenhang dem Quotientenaspekt steht die Interpretation eines Bruchs als *Lösung einer linearen Gleichung*. So kann der Bruch $\frac{2}{3}$ als Lösung der linearen Gleichung $3 \cdot x = 2$ aufgefasst werden, die durch die Division $2 : 3$ erhalten wird (Padberg & Wartha, 2017, S. 21).

**Bruch als Verhältnis:** Die Interpretation eines *Bruchs als Verhältnis* stellt eine Verbindung zum Konzept der Proportionalität her. Die Angabe eines Verhältnisses bezeichnet in der Regel ein inneres Teilverhältnis. In selteneren Fällen werden äußere Teilverhältnisse beschrieben, z. B. „von je drei aufeinanderfolgenden Perlen ist eine schwarz, jeweils zwei von drei aufeinanderfolgenden Perlen sind weiß“ (Wartha, 2007, S. 59). Ein inneres Teilverhältnis $2 : 3$ kann in inhaltlich gleichwertige Bruchangaben umgewandelt werden, sodass $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$ die Anteile beschreiben. Das Arbeiten mit Verhältnissen beschränkt sich zumeist auf den Vergleich mehrerer Verhältnisse oder die Zusammenführung zweier Verhältnisse, z. B.: Zwei Saftschorlen mit unterschiedlichen Mischungsverhältnissen werden gemischt. Wie ist das neue Mischungsverhältnis? (vgl. Wartha, 2007, S. 59 f.; Malle, 2004, S. 5).

**Bruch als Skalenwert** Werden Bruchzahlen zur Bezeichnung von Stellen auf einer Skala (z. B. einer Tankskala) oder von Punkten auf einer Halbgeraden (Zahlenstrahl) und somit als Koordinaten einer markierten Stelle verwendet, spricht man von einem *Bruch als Skalenwert*. Auf symbolischer Ebene wird mit einem Bruch als Skalenwert ein konkreter Anteil beschrieben: Der Nenner beschreibt die Einteilung der Skala und der Zähler die Anzahl der betrachteten Segmente. Dieser Bruchzahlaspekt steht in einem engen Zusammenhang mit dem Maßzahlaspekt (vgl. Postel, 1981, S. 18; Wartha, 2007, S. 51; Padberg & Wartha, 2017, S. 21).

**Vernetzungen der Bruchzahlaspekte:** Wie in den Beschreibungen der verschiedenen Zahlaspekte von Brüchen bereits angemerkt wurde, sind diese nicht in Abgrenzung voneinander zu betrachten, sondern zeichnen sich durch inhaltliche Überschneidungen und Verbindungen aus (Wartha, 2007, S. 65). Bereits eine Veränderung der Betrachtungsweise einer Bruchzahl kann zu einer Veränderung des dominierenden Zahlaspekts führen (vgl. Hefendehl-Hebeker, 1996, S. 20). Padberg und Wartha (2017, S. 19) bezeichnen die unterschiedlichen Zahlaspekte aus diesem Grund als „unterschiedliche Verwendungssituationen“ von Brüchen und lösen sie somit aus dem strengen fachlichen Kontext. Im amerikanischen Raum werden Bruchzahlaspekte vor allem als „subconstructs“ rationaler Zahlen bezeichnet (vgl. Kieren, 1993, S. 57; Steffe & Olive, 2010; Hackenberg & Lee, 2016; Reinhold, 2019).

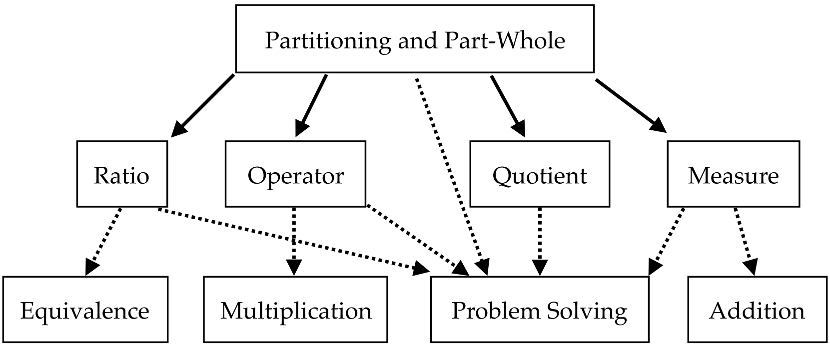



**Abbildung 2.3** Beziehungen zwischen Bruchzahlaspekten nach Behr et al. (1983, S. 99).

Behr et al. (1983, S. 99 ff.) beschreiben in einem Modell die Zusammenhänge unterschiedlicher Bruchzahlaspekte, in das sie auch die Operationen mit Bruchzahlen miteinbeziehen. Darin beschreiben sie den Anteilaspekt als grundlegenden Bruchzahlaspekt, aus dem die Teilaspekte Verhältnis, Operator, Quotient und Maßzahl abgeleitet werden. Nach diesem Modell ist der Verhältnisaspekt der Ausgangspunkt für Erkennen von und Arbeiten mit äquivalenten Brüchen (in Abb. 2.3 durch gestrichelte Pfeile gekennzeichnet), der Operatoraspekt motiviert und erklärt die Multiplikation und der Maßzahlaspekt ist eine natürliche Grundlage für die Addition von Brüchen. Alle Aspekte sind gleichsam für das Problemlösen mit Bruchzahlen relevant. Dieses Modell soll an dieser Stelle lediglich illustrativ als Beispiel für die beschriebenen Zusammenhänge zwischen Bruchzahlaspekten dienen. Vielmehr wurde in diesem Abschnitt herausgestellt, dass Bruchzahlen „vielfältige Erscheinungsformen“ (Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015, S. 101) haben, die einerseits aus fachlichen Charakterisierungen abgeleitet werden können und in verschiedenen Anwendungszusammenhängen verschiedene Interpretationsmöglichkeiten von Bruchzahlen darstellen. In Hinsicht auf die Entwicklung eines Verständnisses von Bruchzahlen ist es von besonderer Bedeutung, verschiedene Zahlaspekte miteinander in Beziehung zu setzen, „da sich das Verständnis eines mathematischen Begriffs nicht aus der Summe der Einzelaspekte ergibt“ (Wartha, 2007, S. 49).

Im Zusammenhang mit dem Ausbilden von Grundvorstellungen als didaktische Kategorien können Bruchzahlaspekte zudem als Teilaspekte von Grundvorstellungen gesehen werden, wie es im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

## 2.2.2 Grundvorstellungen von Bruchzahlen

Es lassen sich drei zentrale Grundvorstellungen[7] zum Bruchzahlbegriff unterscheiden, die den verschiedenen Bruchzahlaspekten zugrunde liegen und zu ihrem Verständnis beitragen (Wartha, 2007, S. 48; vgl. auch Padberg & Wartha, 2017, S. 21 ff.):

*Bruch als Anteil:* $\frac{m}{n}$ als $m$ von $n$ Teilen
*Bruch als Operator:* Eine Menge wird auf das $\frac{m}{n}$-fache der Menge abgebildet
*Bruch als Verhältnis:* $m : n$ als Relation zwischen $m$ Teilen und $n$ Teilen

Ähnlich wie in der Beschreibung der verschiedenen Bruchzahlaspekte sind auch diese drei Grundvorstellungen nicht überschneidungsfrei voneinander zu trennen. In ihrem Kern beschreiben sie dennoch drei unterschiedliche mentale Modelle von Bruchzahlen. Im Folgenden werden die Anteil- und die Operatorvorstellung näher beschrieben. Auf eine eingehende Darstellung der Verhältnisvorstellung wird an dieser Stelle verzichtet, da diese „als Bindeglied zum Inhaltsbereich der Proportionalität“ (Wartha, 2007, S. 59) zu sehen ist und für die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs keine tragende Rolle einnimmt.

**Grundvorstellung Bruch als Anteil:** Im Alltag treten Brüche zumeist als Anteile auf und bieten daher zahlreiche Anknüpfungspunkte an die Erfahrungswelt der

[7] In der Literatur finden sich unterschiedliche Modelle zu Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (z. B. Malle, 2004). Die Darstellung in dieser Arbeit bezieht sich auf die Differenzierung von Wartha (2007), die zwischen Zahlaspekten als fachliche Kategorien und Grundvorstellungen als didaktische Kategorien unterscheidet.

Schülerinnen und Schüler. Unter der Anteilvorstellung lassen sich verschiedene Bruchzahlaspekte vereinen (vgl. Wartha, 2007, S. 49 ff.):

1 Bruch als Teil eines Ganzen,
2 Bruch als Teil mehrerer Ganzer,
3 Bruch als Maßzahl,
4 Bruch als Quasikardinalzahl,
5 Bruch als Quasiordinalzahl und
6 Bruch als Skalenwert.

Eine konstituierende Rolle nehmen die Zahlaspekte Bruch als Teil eines Ganzen und Bruch als Teil mehrerer Ganzer ein. Brüche als Anteile können an unterschiedlichen Objekten veranschaulicht werden: Das Ganze kann dabei ein konkreter Gegenstand, z. B. eine Pizza oder ein Kuchen, eine kontinuierliche (zusammenhängende) Größe, z. B. eine Fläche oder eine Länge, oder eine diskrete (getrennte) Größe, wie. z. B. eine Menge von Puzzleteilen, sein. In jedem Fall stellt die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil eine Relation zwischen Teil und Ganzem her (Wartha & Güse, 2009, S. 263; vgl. auch Schink, 2013, S. 25 ff.): $\frac{3}{4}$ Kuchen bedeutet, dass ein Kuchen in vier gleich große Teile geteilt wird, von denen drei betrachtet werden. In diesem Beispiel ist der Anteil $\frac{3}{4}$ eine Zahl, die den Zusammenhang zwischen einem Teil des Kuchens und einem ganzen Kuchen beschreibt: $\frac{3}{4}$ Kuchen ist das dreifache des vierten Teils des ganzen Kuchen (vgl. „Relation“ bei Postel, 1981, S. 19).

Aus der Perspektive der Anteilvorstellung beschreibt ein Bruch einen *Zustand* als Resultat einer Handlung (vgl. Wartha & Güse, 2009, S. 263; Wartha, 2007, S. 64). Die Handlung, aus der der Zustand „$\frac{3}{4}$ Kuchen“ als Ergebnis hervorgeht, kann auf (mindestens) zwei Weisen beschrieben werden:

(1) Ein Kuchen wird in vier gleichgroße Teile geteilt, drei dieser Teile werden betrachtet (Bruch als Teil eines Ganzen).
(2) Ein Kuchen wird verdreifacht und jeweils jeder vierte Teil jedes Kuchens genommen (Bruch als Teil mehrerer Ganzer).

Diese beiden möglichen Herstellungshandlungen sind äquivalent und führen zum gleichen Zustand „$\frac{3}{4}$ Kuchen“. Für einen tragfähigen Aufbau der Anteilvorstellung ist es jedoch wichtig, die Gleichwertigkeit dieser beiden Herstellungshandlungen als Verknüpfung der Bruchzahlaspekte Bruch als Teil eines Ganzen und Bruch als Teil mehrerer Ganzer herauszustellen (Padberg & Wartha, 2017, S. 30; Postel, 1981, S. 29; vgl. auch Hefendehl-Hebeker, 1996).

Der statisch-abbildhafte Charakter der Anteilvorstellung kann auch anhand der weiteren oben aufgeführten Zahlaspekte verdeutlicht werden:

(3) $\frac{1}{4}$ *km* ist der vierte Teil eines Kilometers, $\frac{3}{4}$ *km* ist das dreifache des vierten Teils eines Kilometers (Bruch als Maßzahl).
(4) $\frac{3}{4}$ *h* sind drei Viertelstunden (Bruch als Quasikardinalzahl).
(5) Jedes vierte Kaninchen ist schwarz und drei von vier Kaninchen sind weiß (Bruch als Quasiordinalzahl).
(6) Die Tankanzeige zeigt an, dass der Tank noch zu einem Viertel gefüllt ist (Bruch als Skalenwert).

Behr et al. (1983) beschreiben den Anteilaspekt als grundlegend für das Verständnis von weiteren Bruchzahlaspekten: „Partitioning and the part-whole subconstruct of rational numbers are basic to learning other subconstructs of rational numbers" (Behr et al. 1983, S. 99). Aus diesem Grund wird in der Einführung von Bruchzahlen zumeist mit dem Ablesen und dem Einzeichnen von Anteilen in ikonischen Darstellungen gearbeitet (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 24 ff.). Die Darstellung eines Bruchs als Anteil ermöglicht einen direkten und anschaulichen Zugang zur Deutung und mentalen Repräsentation von Brüchen, die wesentliche Eigenschaften und Beziehungen eines Bruchs als Zustand enthält. Zum Erkennen des Anteils $\frac{3}{4}$ in einer ikonischen Abbildung (Abb. 2.4) müssen Lernende folgende Fragen verstehen und beantworten können (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 28):

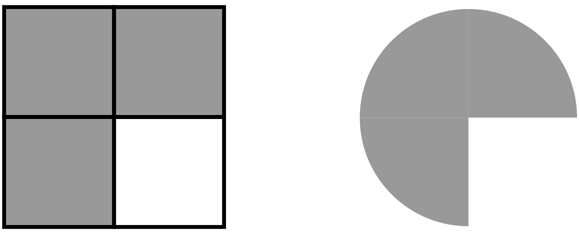


**Abbildung 2.4** Ikonische Abbildung des Bruchs $\frac{3}{4}$ in einem Rechteck und einem Kreis

1. Was ist das Ganze?
2. In wie viele Teile ist das Ganze geteilt?
3. Sind die Teile jeweils gleich groß?
4. Wie groß ist jeder Teil bezogen auf das Ganze?
5. Wie viele Teile sind hier durch eine Färbung kenntlich gemacht worden?

Für einen verständigen Umgang mit Bruchzahlen ist es wichtig, dass die Lernenden geeignete Vorstellungen zum „Bruchherstellungsakt" (Postel, 1981, S. 22) bzw.

zur Herstellungshandlung von Brüchen aufbauen, die es ihnen ermöglichen entsprechende Repräsentanten zu erkennen und mit dem Prozess ihrer Herstellung zu verbinden, sodass sie stets zwischen der ikonischen und enaktiven Ebene wechseln können. In diesem Zusammenhang bedarf es neben tragfähigen Vorstellungen von Brüchen als Anteil insbesondere einer *dynamischen* Sichtweise. Diese kommt vor allem in der Operatorvorstellung zum Tragen.

**Grundvorstellung Bruch als Operator:** Unter der Operatorvorstellung wird ein Bruch als eine Funktion aufgefasst, die ähnlich einer Skalarmultiplikation auf eine Größe wirkt (Vergnaud, 1988; Salle, 2015, S. 131). Ein Bruchoperator ist als die Zusammenfassung zweier Teiloperatoren zu verstehen: Dem Zähleroperator, der als Multiplikator eine Größe (die Eingabe) vergrößert (streckt), und dem Nenneroperator, der als Divisor eine Eingabe verkleinert (staucht). Die Verkettung bzw. Hintereinanderausführung der beiden Teiloperatoren führt dazu, dass das Ergebnis (die Ausgabe) größer oder kleiner als die Eingabe sein kann (Oehl, 1970, S. 130 f.; Postel, 1981, S. 22 ff.; Griesel, 1981c, S. 82). Die Anwendung eines Bruchoperators $\cdot \frac{m}{n}$ kann als Rechenanweisung interpretiert werden:

- „Dividiere durch $n$, multipliziere dann das Ergebnis mit $m$, bzw.
- multipliziere mit $m$, dividiere dann das Ergebnis durch $n$.“ (Postel, 1981, S. 24)

Die Hintereinanderausführung des Zähler- und Nenneroperators entspricht der Multiplikation mit einem Bruch. Diese multiplikative Beziehung wird sprachlich zumeist durch das Wort „von“ zum Ausdruck gebracht: $\frac{3}{4}$ von $12\,m = 9\,m$ (Wartha, 2007, S. 54; Padberg & Wartha, 2017, S. 22). Der Bruchoperator $\frac{3}{4}$ wird auf die Größe $12\,m$ angewendet und bildet $12\,m$ auf $9\,m$ ab.

Anschaulich beschreibt die Operatorvorstellung *dynamisch* das Verfahren der Bruchherstellung (vgl. auch Abb. 2.2):

(1) „Man erhält eine $\frac{3}{4}\,m$ lange Strecke,

- indem man eine $1\,m$ lange Strecke in 4 gleichlange Strecken zerlegt und dann 3 solcher Teilstrecken zusammensetzt, bzw.
- indem man eine $1\,m$ lange Strecke auf den 4-ten Teil verkleinert (staucht) und anschließend das Ergebnis auf das 3-fache vergrößert (streckt).

(2) Man erhält eine $\frac{3}{4}$ *m* lange Strecke,

- indem man drei 1 *m* lange Strecken aneinander legt und dann das Ergebnis in 4 gleichlange Strecken zerlegt, bzw.
- indem man eine 1 *m* lange Strecke auf das 3-fache vergrößert (streckt) und anschließend das Ergebnis auf den 4-ten Teil verkleinert (staucht).“ (Postel, 1981, S. 23)

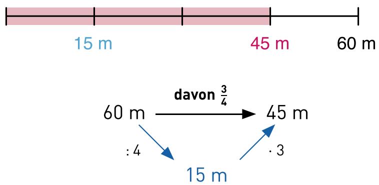
Die beiden Beschreibungen des Bruchherstellungsverfahrens unterscheiden sich durch das Vertauschen der Zähler- und Nenneroperatoren, führen jedoch zu derselben Ausgabe bzw. demselben Ergebnis.

In Schulbüchern findet man die Operatorschreibweise vor allem in Form von Pfeildiagrammen (vgl. Abb. 2.5).

Man kann mit Brüchen auch *Rechenanweisungen* angeben.

Die Rechenanweisung **davon** $\frac{3}{4}$ bedeutet:
Zerlege das Ganze in vier gleich große Teile und nimm 3 davon.
oder
Dividiere eine Größe durch 4. Multipliziere dann das Zwischenergebnis mit 3.

*Beispiel:* Ein Zaun ist 60 m lang, $\frac{3}{4}$ davon ist bereits gestrichen. Wie viel m sind das?




*Lösung:* 45 m des Zauns sind bereits gestrichen.

**Abbildung 2.5** Schulbuchbeispiel zur Operatorschreibweise im Pfeildiagramm (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 184)

Als *Vergleichsoperatoren* (vgl. Malle, 2004, S. 4) werden Brüche bzw. Bruchoperatoren häufig zum Vergleich zweier Mengen oder Größen verwendet. Vergnaud (1988) unterscheidet hierbei zwischen Fällen, in denen Bruchoperatoren relative Unterschiede zwischen zwei Mengen oder Größen beschreiben:

*Inklusive Beziehungen* beschreiben Teilungssituationen, in denen eine Größe mit einer Bezugsgröße derselben Art in Beziehung gesetzt werden, z. B. Ulf isst $\frac{3}{4}$ seiner Süßigkeiten.

*Exklusive Beziehungen* beschreiben Vergleiche zwischen zwei Größen, z. B. Ulf hat $\frac{3}{4}$ so viele Süßigkeiten gehortet wie Bernd.

Freudenthal (1983) bezeichnet inklusive Beziehungen als direkten Vergleich und exklusive Beziehungen als indirekten Vergleich, bei dem zwei getrennte Objekte (Ulfs und Bernds Menge an Süßigkeiten) über ein drittes Objekt (Süßigkeiten als Maßeinheit) in Beziehung gesetzt werden. Die Unterscheidungen von Vergnaud (1988) und Freudenthal (1983) decken sich mit den Unterscheidungen, die Postel (1981, S. 17) unter dem *Relationsaspekt* von Bruchzahlen (siehe oben) beschreibt (vgl. auch Wartha, 2007, S. 55 f.).

Die Interpretation von Bruchzahlen als Vergleichsoperatoren kommt insbesondere dann zum Tragen, wenn (relative) Anteile von Größen betrachtet werden, z. B. $\frac{3}{4}$ von 10000 €, und ist damit von besonderer Bedeutung für das Operieren mit Bruchzahlen.

Die Grundvorstellungen von Brüchen als Anteile und Operatoren stehen in engem Zusammenhang: Die Anteilvorstellung betont stärker die *statische* Komponente von Brüchen als *Zustand*, der das Ergebnis einer Handlung ist. Im Gegensatz dazu wird in der Operatorvorstellung stärker die *dynamische* Komponente in Hinsicht auf die *(Herstellungs-) Handlung* von Brüchen und Anteilen bzw. als Vorschrift zur *Änderung* von Größen herausgestellt. Für einen verständigen Umgang mit Bruchzahlen und das rechnerische Operieren mit ihnen sind beide Grundvorstellungen grundsätzlich.

**Drei Grundaufgaben:** In Hinsicht auf die Anwendung in Sachkontexten werden durch Brüche vor allem Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem beschrieben. Hierbei können drei „Grundaufgaben“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 34 ff.; Postel, 1981, S. 26 ff.) bzw. „Konstellationen“ (Schink, 2013, S. 54 ff.) unterschieden werden[8]:

(1) *Bestimmen eines Teils einer Größe:* Das Ganze und der Anteil (Operator) sind gegeben, der *Teil* soll bestimmt werden, z. B.: Jans Familie besitzt einen Bauernhof mit einer 96 *ha* große landwirtschaftlichen Nutzfläche. Auf $\frac{5}{8}$ dieser Fläche wird Getreide angebaut. Wie viel *ha* Land sind das?“
(2) *Bestimmen des Ganzen:* Der Anteil (Operator) und der Teil sind gegeben, das *Ganze* soll bestimmt werden, z. B.: Patrick will sich ein Fahrrad kaufen. Er hat 240 € gespart. Patrick sagt: „Ich habe schon $\frac{2}{3}$ des Kaufpreises zusammen.“ Wie teuer ist das Fahrrad?

[8] Eine ähnliche Klassifizierung wird üblicherweise in der Prozent- und Zinsrechnung eingeführt (vgl. Hafner, 2012).

(3) *Bestimmen von Anteilen:* Das Ganze und der Teil sind gegeben, der *Anteil* (Operator) soll bestimmt werden, z. B.: Sarah bekommt monatlich 15 € Taschengeld. Davon spart sie 4 €. Welchen Anteil des Taschengeldes spart sie?

Obgleich diese drei Grundaufgaben in Schulbüchern (vgl. z. B. vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel 2012b, S. 49 ff.) häufig als eigenständiger Unterrichtsinhalt mit dazugehörigen Lösungsverfahren behandelt wird, so zeigen sich in der Empirie (vgl. Schink, 2013; Tunc-Pekkan, 2015) deutliche Schwierigkeiten von Lernenden bei der Bearbeitung von Aufgaben, in denen der Anteil bestimmt oder von einem Teil auf das Ganze geschlossen werden soll. Schink (2013) weist darauf hin, dass Lernende in Hinsicht auf einen flexiblen Umgang mit Brüchen die Beziehungen zwischen den drei Grundaufgaben bzw. die Beziehungen zwischen Teil, Anteil und Ganzem erschließen und durchdringen müssen: „Wer flexibel mit Brüchen umgehen will, der muss auch Einsichten in Strukturen gewinnen und diese flexibel nutzen" (Schink, 2013, S. 62) (Abb. 2.6).

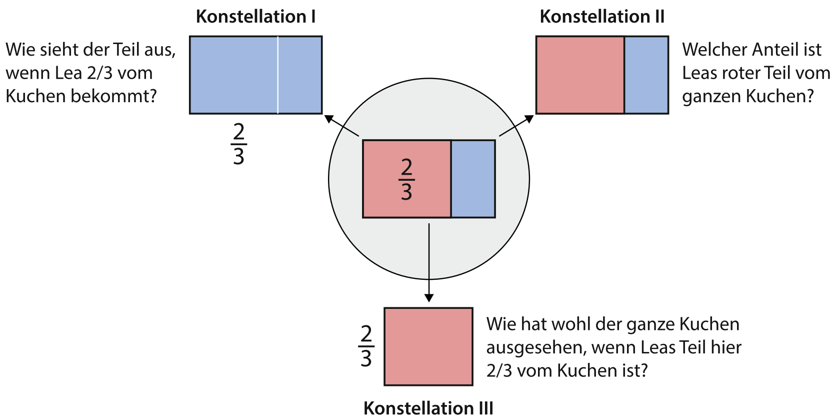



**Abbildung 2.6** Drei Grundaufgaben (bzw. Konstellationen) zum Bruch als Teil eines Ganzen (Schink, 2013, S. 56)

Insbesondere die Inversion des Bruchherstellungsverfahrens zum Schluss von einem Teil auf das zugrundeliegende Ganze („Reversibilität" bei Ramful, 2014) stellt Lernende vor Schwierigkeiten. Während dieser Schluss speziell bei Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ lediglich eines $n$-fachen Vervielfachens des Teils entspricht, muss bei echten Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $m > 1$ der Teil zunächst in $m$ gleich große Teilstücke zerlegt werden, bevor diese durch eine $n$-fache Vervielfachung das Ganze ergeben.

### 2.2.3 Grundvorstellungen zum Operieren mit Bruchzahlen

Neben den dargestellten Bruchzahlaspekten und der Ausbildung entsprechender Grundvorstellungen zu Bruchzahlen selbst, erfordert auch das verständige Operieren mit Bruchzahlen einer Vorstellungsgrundlage. In Bezug auf den inhaltlichen Schwerpunkt dieser Arbeit werden im Folgenden Vorstellungsgrundlagen für das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen, das Erweitern und Kürzen sowie den Größenvergleichen von Brüchen und Bruchzahlen dargestellt.

**Übersetzen zwischen Bruchdarstellungen:** Der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von Brüchen dient im Wesentlichen der Vernetzung von Bruchzahlvorstellungen und verschiedenen Bruchzahlaspekten, sodass die Herausbildung von „isolierten Inselvorstellungen" vermieden wird (vgl. Behr, Post, Harel & Lesh, 1993; Kieren, 1993). Brüche sollen in unterschiedlichen Anwendungssituationen erkannt und benutzt werden können. Hierbei muss vor allem auf Grundvorstellungen vom Bruch als Anteil und als Operator zurückgegriffen werden und eine Verbindung zum jeweiligen Bruchzahlaspekt in der Darstellung hergestellt werden.

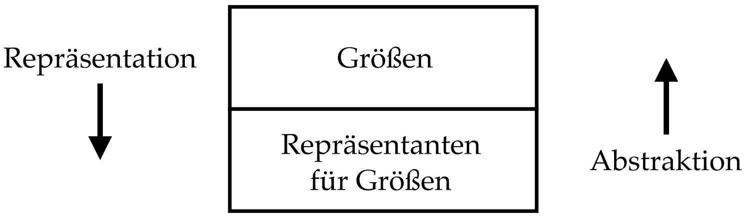



**Abbildung 2.7** Beziehungen zwischen Größen und Repräsentanten (Abb. nach Griesel, 1973, S. 14)

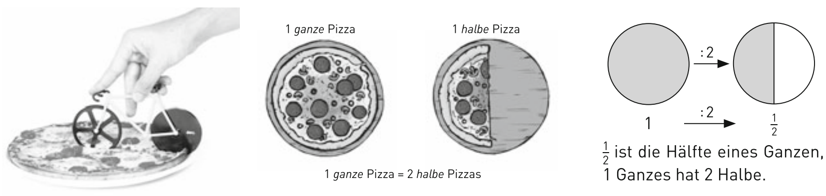



**Abbildung 2.8** Übertragung der ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{1}{2}$ von der Realisantenebene (links) auf die Repräsentantenebene (rechts). (Abb. aus vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 170 f.)

Bildliche Darstellungen dienen neben der Illustration von Bruchsituationen vor allem als Grundlage für den Aufbau mentaler Repräsentationen. Zumeist werden Brüche anhand von Auf- und Verteilungskontexten in Bezug auf Objekte der alltäglichen Erfahrungswelt, wie. z. B. dem gerechten Aufteilen einer Pizza, eingeführt. Das Ziel ist es hierbei, den Prozess der Herstellung von Brüchen an erfahrbare Handlungen zu knüpfen, die im weiteren Lernverlauf kontinuierlich abstrahiert werden. Die konkret-gegenständlichen Repräsentanten einer Größe werden aus ihrem gegenständlichen Kontext gelöst und auf die Ebene der Repräsentanten von Größen, z. B. Kreise und Rechtecke, übertragen, wie es in den Abb. 2.8 und 2.7 illustriert ist. Mehr oder weniger abstrakte Repräsentationen ersetzen konkrete Repräsentanten und bilden die Grundlage für mentale Repräsentationen von Bruchzahlen $\frac{m}{n}$ und ihrer Herstellung. Die verwendeten Repräsentanten sollen dabei so gewählt werden, dass sie nicht lediglich eine „illustrierende Funktion" (Padberg & Wartha, 2017, S. 32) haben, sondern eine möglichst tragfähige und sachadäquate Abbildung einer Situation ermöglichen:

> „Eine Größe, wie z. B. $\frac{3}{4}$ $m$ läßt sich als solche nicht vorstellen, wohl aber ihre Repräsentanten, in unserem Fall Strecken der Länge $\frac{3}{4}$ $m$. Insbesondere für ein inhaltliches Denken und eine intuitive Begründung von mathematischen Zusammenhängen sind solche Vorstellungen unerläßlich". (Griesel, 1981a, S. 9)

Für das Übersetzen zwischen Bruchdarstellungen muss zwischen einem (1) Wechsel der Repräsentationsebene und einem (2) Wechsel innerhalb einer Repräsentationsebene unterschieden werden:

(1) Wechsel zwischen Repräsentationsebenen betreffen zumeist das Übersetzen zwischen ikonischen und symbolischen Bruchdarstellungen. Beim Ablesen von Brüchen aus ikonischen Repräsentationen kommt vor allem die Anteilvorstellung zum Tragen, während beim bildlichen Darstellen eines symbolisch vorgegebenen Bruchs vor allem die Operatorvorstellung mit Bezug auf Herstellungshandlung als Teilen des Ganzen in gleich große Teile und Markieren des entsprechenden Anteils zum Tragen kommt. Das Ziel von Repräsentationswechseln zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen entspricht dem Wechsel zwischen verschiedenen Deutungen bzw. der Überführung auf die anschauliche Bild-/Handlungsebene oder die abstrakte symbolische Zahlenebene.
(2) Der Wechsel innerhalb einer Repräsentationsebene betrifft einerseits Umwandlungen von unechten Brüchen in gemischte oder natürliche Zahlen, z. B. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, auf symbolischer Ebene und andererseits der Repräsentation einer

Bruchsituation in verschiedenen ikonischen Darstellungen. Der Wechsel zwischen verschiedenen ikonischen Darstellungen (vgl. Abb. 2.9) soll es den Lernenden ermöglichen unterschiedliche Begriffsaspekte miteinander zu verknüpfen und allgemein flexiblere Anschauungsgrundlagen von Brüchen aufzubauen.

Der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen kann als Koordination von Wissen beschrieben werden, bei der Wissen über die Sachstruktur, d. h. über das mathematische Objekt mit seinen Eigenschaften und Relationen, und das Wissen über die Eigenschaften eines Repräsentationssystems und dessen Verbindungen zum mathematischen Inhalt miteinander koordiniert werden. Dies erfordert einerseits das Herauslösen des mathematischen Objekts aus der initialen Repräsentation (vgl. „Dissociation" bei Duval, 2006, S. 124) und der Einbettung in eine andere Repräsentation, was eine Reorganisation des Wissens über die Repräsentation erfordert (vgl. Superfine, Canty & Marshall, 2009; Novick, Hurley & Francis, 1999). In diesem Prozess kommt der Anteil- und Operatorvorstellung eine tragende Rolle zu.

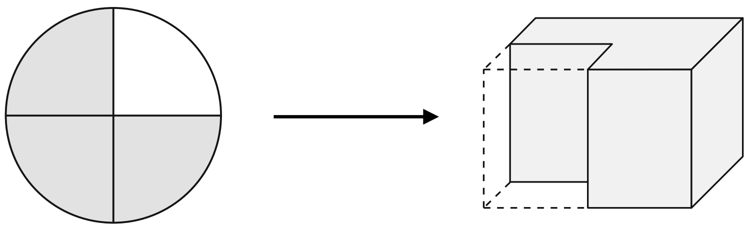


**Abbildung 2.9** Ikonische Darstellung des Bruchs $\frac{3}{4}$ in Kreisrepräsentation und dreidimensionalen Quaderrepräsentation (Abb. aus vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 173 f.)

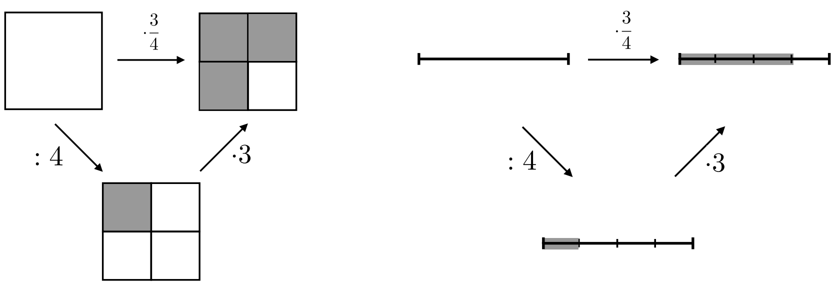



**Abbildung 2.10** Übertragung der ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{3}{4}$ in einem Quadrat (links) auf die ikonische Darstellung an einer Strecke (rechts)

Zum Übertragen der ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{3}{4}$ in Abb. 2.10 müssen die Struktureigenschaften der Darstellung des Bruchs in einer quadratischen Fläche zunächst von dieser gelöst werden, um sie auf die Darstellung in einer Strecke zu übertragen. Die Struktureigenschaften der Darstellung des Bruchs in einer quadratischen Fläche werden durch die Herstellungshandlung beschrieben. Die ganze Fläche wird zunächst in vier kongruente Teilflächen geteilt, von denen eine Teilfläche bzw. $\frac{1}{4}$ der ganzen Fläche gefärbt ist. Dieser vierte Teil wird in einem weiteren Schritt verdreifacht, sodass insgesamt drei der vier Teilflächen gefärbt sind. Zur Darstellung des Bruchs in einer Strecke ist die Herstellungshandlung bzw. die Darstellungshandlung isomorph zur Darstellung in einer quadratischen Fläche: Die ganze Strecke wird zunächst in vier gleich große Teilstücke zerlegt, von denen ein Teilstück $\frac{1}{4}$ der Strecke ist. Dieser Teil wird in der Folge verdreifacht und somit werden insgesamt drei der vier Teilstücke eingefärbt. Die graue Färbung der Strecke repräsentiert die neue Länge der Strecke.

Für dieses Beispiel muss entsprechend die Herstellungs- bzw. Darstellungshandlung des Bruchs aus der Darstellung in einer quadratischen Fläche dissoziiert, d. h. herausgelöst werden. Zur Übertragung auf die Darstellung an einer Strecke muss diese jedoch an die Repräsentationseigenschaften der Strecke angepasst werden. Eine Strecke wird im Gegensatz zu einer Fläche nicht in kongruente Teilflächen, sondern in gleich lange Teilstrecken zerlegt. Die zugrundeliegende Größe ist somit kein Flächeninhalt, sondern eine Länge. Obgleich die Zeichenhandlungen strukturell isomorph sind, sind sie nicht identisch, sondern spezifisch für die einer neuen Darstellung zugrundeliegenden Eigenschaften.

Da eine Darstellung zumeist nur vereinzelte Aspekte von Brüchen repräsentiert, ist es in Hinsicht auf den Aufbau vernetzter und flexibler Bruchzahlvorstellungen von Bedeutung verschiedene Darstellungen zu verwenden und miteinander in Beziehung zu setzen. Damit Lernende von einer Vielfalt von Darstellungen profitieren können ist es jedoch notwendig, dass sie einzelne Darstellungen adäquat interpretieren können und verschiedene Darstellungen miteinander in Beziehung setzen. Geschieht dies nicht, so kann der Einsatz unterschiedlicher Darstellungen eine Hürde für den Lernprozess darstellen, da Lernende anhand von unbekannten Darstellungen nur schwer etwas über unbekannte konzeptuelle Inhalte und Zusammenhänge lernen können (Rau & Matthews, 2017, S. 542).

**Erweitern und Kürzen von Brüchen:** Das Erweitern und Kürzen ist ein erster anschaulicher Zugang zur Äquivalenz von Brüchen. Durch das Kürzen oder Erweitern werden Repräsentanten einer Bruchzahl auf symbolischer Ebene ineinander überführt. Grundlegend für das Verständnis ist hierbei, dass der Ausgangsbruch äquivalent zum gekürzten oder erweiterten Bruch ist: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Eine Bruchzahl kann auf diese Weise durch (unendlich) viele Brüche beschrieben werden. Dieses Wissen ist eine grundlegende Komponente von Grundvorstellungen bzw. kognitiven Repräsentationen des Bruchzahlbegriffs (vgl. Ni, 2001, S. 412). Zudem steht die Einsicht in die Äquivalenz quotientengleicher Paare in enger Beziehung zum proportionalen Denken und ist nicht nur für die Ausbildung adäquater und tragfähiger Vorstellungen von Bruchzahlen und Bruchoperationen wichtig, sondern wird im Allgemeinen als eine zentrale Idee mathematischen Denkens beschrieben (vgl. Wartha, 2007, S. 67; Hunting, 1984, S. 32).

In Bezug auf den Aufbau vernetzter und tragfähiger Bruchzahlvorstellungen können Lernende durch das Erweitern und Kürzen von Brüchen im Zusammenhang mit verschiedenen Bruchzahlaspekten erste Erfahrungen mit äquivalenten Brüchen sammeln:

> „Verschiedene Brüche (z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$)
>
> - bezeichnen bei derselben Maßeinheit (z. B. $cm^2$) dieselbe Größe, z. B. $\frac{3}{4}\ cm^2 = \frac{6}{8}\ cm^2$ (Maßzahlaspekt),
> - geben denselben Bruchteil an (Relationsaspekt),
> - bewirken bei Bruchoperatoren dasselbe, wie z. B. $\cdot\frac{3}{4} = \cdot\frac{6}{8}$ (Operatoraspekt),
> - geben denselben Punkt auf dem Zahlenstrahl an (Skalenwertaspekt)". (Postel, 1981, S. 28)

Hinsichtlich einer systematischen Erarbeitung des Erweiterns und Kürzens stellt die Interpretation des Verfeinerns und Vergröberns einer Einteilung eine zentrale Grundvorstellung dar. Beim Verfeinern wird die Einteilung einer ikonischen Bruchzahldarstellung so verändert, dass jeder Teil der ursprünglichen Einteilung in weitere gleich große Teile unterteilt wird. Wird zum Beispiel jeder Teil einer ursprünglichen Einteilung in zwei gleich große Teile geteilt, hat die neue Einteilung insgesamt doppelt so viele Teile. Dies entspricht dem Erweitern des Bruches mit dem Faktor 2 zu $\frac{6}{8}$. Werden alle Teile der neuen Einteilung ein weiteres Mal in zwei gleich große Teile geteilt, hat die neue Einteilung im Vergleich zur ursprünglichen Einteilung viermal so viele Teile und die ikonische Darstellung repräsentiert den Bruch $\frac{12}{16}$ (vgl. Abb. 2.11). Auf symbolischer Ebene entspricht das Verfeinern einer Einteilung eines Bruchs $\frac{m}{n}$ der Multiplikation von Zähler und Nenner mit einem gemeinsamen Faktor $k$: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Das Vergröbern einer Einteilung kann als Umkehrung des Verfeinerns interpretiert werden. Statt jeden Teil der Ursprungseinteilung in weitere gleich große Teile zu teilen, werden Teile der ursprünglichen Einteilung zusammengefügt, sodass sie

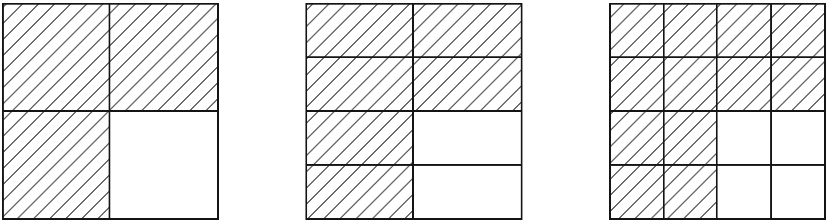


**Abbildung 2.11** Verfeinern der Einteilung der ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{3}{4}$ (Abb. aus Padberg & Wartha, 2017, S. 44)

einen neuen, größeren Teil ergeben. Beim Vergröbern der Einteilung des Bruchs $\frac{8}{12}$ entsteht durch Zusammenfügen von je zwei Teilen zu einem neuen Teil eine neue Einteilung mit insgesamt sechs Teilen, sodass die neue Darstellung den Bruch $\frac{4}{6}$ repräsentiert. Eine weitere Vergröberung der Einteilung, bei der wiederum zwei Teile zu einem neuen größeren Teil zusammengefügt werden, ergibt die Einteilung des Bruchs $\frac{2}{3}$ (vgl. Abb. 2.12). Auf symbolischer Ebene entspricht das Vergröbern einer Einteilung eines Bruchs $\frac{m}{n}$ der Division von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl $k$: $\frac{m}{n} = \frac{m:k}{n:k}$ für alle gemeinsamen Teiler $k$ von $m, n \in \mathbb{N}$.

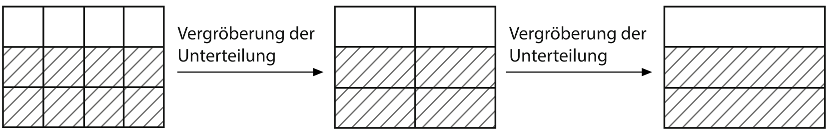



**Abbildung 2.12** Vergröbern der Einteilung der ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{8}{12}$ (Abb. aus Padberg & Wartha, 2017, S. 49)

Während dem Verfeinern der Einteilung von Brüchen keine Grenzen gesetzt sind und eine Einteilung in beliebig viele kleinere Teile geteilt werden kann, ist das Vergröbern einer Einteilung auf gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner beschränkt. Sofern der Zähler und Nenner eines Bruchs teilerfremd sind, ist kein weiteres Kürzen bzw. Vergröbern der Einteilung möglich.

Malle (2004) bemerkt, dass in einer ersten Phase der Einführung von Bruchzahlen auf die Begriffe „Erweitern und Kürzen“ verzichtet werden solle, da diese eine „regelhafte Technik“ bezeichnen:

„Wichtiger ist zunächst, dass der Prozess des Umwandelns einer Bruchdarstellung in eine andere mit der Vorstellung des Verfeinerns bzw. Vergröberns verbunden wird und dabei eingesehen wird, dass man eine Bruchzahl auf unendlich viele Arten durch Brüche darstellen kann.“ (Malle, 2004, S. 6)

Aus diesem Grund kommt dem Vernetzen von Handlungen auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene eine wichtige Rolle zu. Das Ziel ist,

„daß Schüler durch die Arbeit mit konkreten Modellen anschauliche Vorstellungen über das Erweitern und Kürzen erwerben müssen, daß dann die konkrete Arbeit mit Modellen und die Ziffernmanipulationen in Beziehung gesetzt werden müssen und daß schließlich die Fähigkeit entwickelt werden muß, die entsprechenden Algorithmen konsistent und korrekt auf Grundlage einer gut entwickelten, modellunabhängigen Idee anzuwenden.“ (Payne, 1986, S. 56)

Die Grundvorstellung von Verfeinern und Vergröbern einer Einteilung baut vornehmlich auf dem Anteil- und Maßzahlaspekt von Brüchen auf (Postel, 1981, S. 28 ff.; Wartha, 2007, S. 67 f.). Ein weiteres Erklärungsmodell beschreibt Postel (1981) über die Grundvorstellung vom Bruch als Operator. Die Grundidee ist hierbei nachzuweisen, dass die Anwendung äquivalenter Bruchoperatoren dieselbe Wirkung auf eine Größe haben. So kann auf symbolischer Ebene über den Vergleich von Operatortabellen beispielgebunden begründet werden, dass die Operatoren $\cdot\frac{3}{4}$ und $\cdot\frac{6}{8}$ auf dieselbe Eingabe (Größe) angewendet dieselbe Ausgabe haben (vgl. Abb. 2.13).

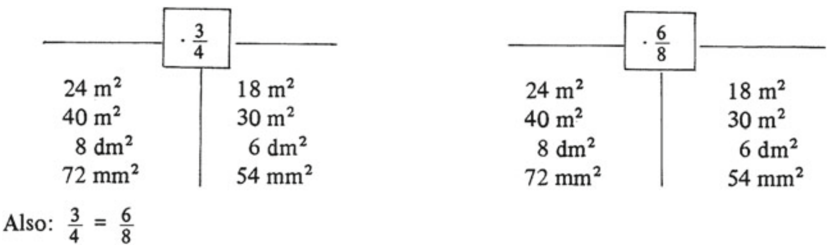



**Abbildung 2.13** Vergleich der Wirkung der Operatoren $\cdot\frac{3}{4}$ und $\cdot\frac{6}{8}$ von Operatortabellen (Abb. aus Postel, 1981, S. 28)

Auf ikonischer Ebene kann die Äquivalenz der beiden Operatoren über eine Verknüpfung der Herstellungshandlungen herausgestellt werden. Hierbei wird deutlich, dass der Operator $\cdot\frac{3}{4}$ durch die Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem Faktor 2 in den Operator $\cdot\frac{6}{8}$ überführt werden kann. Die Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem Faktor 2 bewirkt, dass das Ganze in doppelt so viele Teile eingeteilt wird und schließlich die doppelte Anzahl von Teilen markiert werden, wodurch der entstehende Anteil gleich ist (vgl. Abb. 2.14).

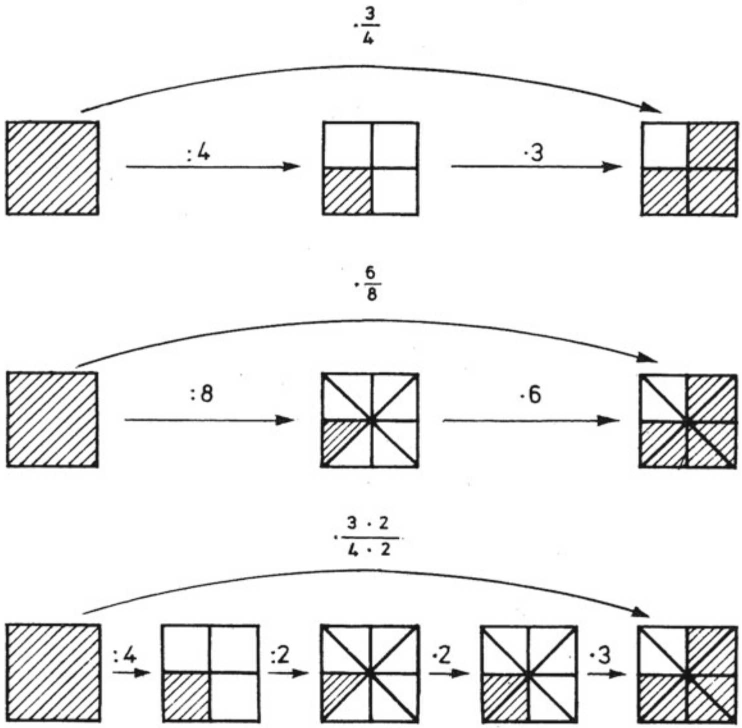



**Abbildung 2.14** Vergleich der Wirkung der Operatoren $\cdot\frac{3}{4}$ und $\cdot\frac{6}{8}$ auf ikonischer Ebene (Abb. aus Postel, 1981, S. 29)

Die Einsicht, dass ein Bruch $\frac{m}{n}$ durch Erweitern und Kürzen in unendlich viele äquivalente Bruchdarstellungen umgewandelt werden kann und somit unendlich viele Repräsentanten hat, ist ein grundlegender Schritt in der Loslösung der Sicht von Brüchen als Anteile von konkreten Repräsentationsobjekten und der Auffassung von Brüchen als Zahlen, die auf der Zahlengerade angeordnet werden und mit denen gerechnet werden kann. Ein inhaltliches Verständnis der Äquivalenz von Brüchen ist somit grundlegend für die Einführung von Ordnungsrelationen und eine wichtige Voraussetzung für das spätere Addieren und Subtrahieren von Bruchzahlen.

**Größenvergleich von Brüchen und Bruchzahlen:** Das Größenvergleich von Brüchen ist ein wesentlicher Schritt in der Entwicklung von Grundvorstellungen von Brüchen als anschauliche Größen zu einem Verständnis von Bruchzahlen als Punkte auf der Zahlengerade.

Postel (1981, S. 30 f.) beschreibt drei Vorstellungen, die Lernende mit dem Größenvergleich von Brüchen verbinden sollen:

(1) „*Größenaspekt:* Zur kleineren Bruchzahl gehört eine kleinere Größe.
Beispiel: In einem Becher befinden sich $\frac{3}{4}$ $l$ Sahne, in einem anderen Becher $\frac{5}{8}$ $l$ Sahne. In welchem Becher ist weniger Sahne?

(2) *Relations- bzw. Operatoraspekt:* Der zur kleineren Bruchzahl gehörende Operator bewirkt weniger als der zur größeren Bruchzahl gehörende Operator bzw. zur kleineren Bruchzahl gehört der kleinere Bruchteil.
Beispiel: Zwei Kopiergeräte stellen unterschiedliche Kopien her: Bei Gerät A beträgt die Länge eines Gegenstandes im Bild $\frac{5}{8}$ der ursprünglichen Länge. Bei Gerät B beträgt sie $\frac{7}{8}$ der ursprünglichen Länge. Welches Gerät stellt die kleineren Bilder her? [...]

(3) *Skalenwertaspekt:* Die kleinere Bruchzahl liegt links von der größeren Bruchzahl auf dem Zahlenstrahl.
Beispiel: Der Wasserstand betrug morgens $1\frac{3}{5}$ $m$, abends $1\frac{1}{2}$ $m$. Wann wurde der niedrigere Wasserstand angezeigt?“ (Postel, 1981, S. 30 f.).

In diesen drei Beispielen ist zu erkennen, dass der Größenvergleich von Brüchen und Bruchzahlen auf Grundlage der Grundvorstellungen Bruch als Anteil und Bruch als Operator vorgenommen werden können, die im weiteren Verlauf als Erklärungsmuster (vgl. Wartha, 2007, S. 30 ff.) erläutert werden. Zudem ist in Postels Beschreibung des Größenvergleichs unter dem Skalenwertaspekt die Übertragung zur Anordnung von Brüchen auf der Zahlengerade angedeutet.

Mit Bezug auf die Grundvorstellung *Bruch als Anteil* können Brüche als Anteile von Größen anschaulich direkt miteinander verglichen werden (vgl. Abb. 2.15). Anhand der Darstellung in einer ikonischen Repräsentation wie z. B. in einem Quadrat kann unmittelbar erkannt werden, dass der Bruch $\frac{5}{8}$ kleiner ist als der Bruch $\frac{7}{8}$, da in der Darstellung des Bruchs $\frac{7}{8}$ eine größere Fläche gefärbt ist als in der Darstellung des Bruchs $\frac{5}{8}$. Entsprechend ist zu erkennen, dass zum kleineren Bruch eine kleinere Größe gehört. Dies setzt voraus, dass die Ausgangsflächen (die Quadrate) jeweils gleich groß sind und in acht gleich große Teile geteilt wurden. Der Vergleich von gleichnamigen Brüchen über ihre ikonische Darstellungen ist ohne Schwierigkeiten generalisierbar, da dieses Verfahren sich auf andere Größen und Darstellungen übertragen lässt.

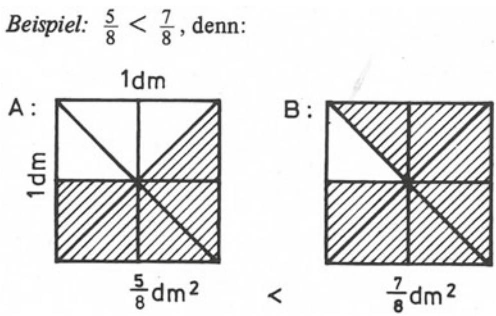



**Abbildung 2.15** Größenvergleich zweier Brüche mit gleichem Nenner auf ikonischer Ebene (Abb. aus Postel, 1981, S. 31)

Auf Grundlage der Grundvorstellung *Bruch als Operator* kann auf zwei Wegen ein Größenvergleich zwischen zwei Brüchen vorgenommen werden: Über den Vergleich von Operatortabellen oder durch die ikonische Darstellung der Bruchherstellung:

| Anfangsgröße | $\cdot \frac{5}{8}$ | Endgröße |
|---|---|---|
| 56 m | | 35 m |
| 88 cm | | 55 cm |
| 32 km | | 20 km |
| 160 mm | | 100 mm |

| Anfangsgröße | $\cdot \frac{7}{8}$ | Endgröße |
|---|---|---|
| 56 m | | 49 m |
| 88 cm | | 77 cm |
| 32 km | | 28 km |
| 160 mm | | 140 mm |

**Abbildung 2.16** Größenvergleich zweier Brüche mit Operatortabellen (Abb. aus Postel, 1981, S. 32)

Wenn Brüche als Operatoren interpretiert werden, bewirkt der kleinere Bruchoperator eine geringere Änderung als der größere Bruchoperator (vgl. Abb. 2.16). Bei gleicher Ausgangsgröße ist zu erkennen, dass der Operator $\frac{5}{8}$ jeweils eine kleinere Endgröße ausgibt als der Operator $\frac{7}{8}$, demnach ist der Bruch $\frac{5}{8}$ kleiner als der Bruch $\frac{7}{8}$.

Analoge Einsichten ermöglicht der Vergleich der Bruchherstellungsverfahren der zu vergleichenden Brüche (vgl. Abb. 2.17). In beiden Fällen wird die gleiche Ausgangsgröße in acht gleich große Teile zerlegt. Beim Bruch $\frac{5}{8}$ werden im zweiten Schritt weniger Teile zusammengefügt als beim Bruch $\frac{7}{8}$. Diese Vergleichsmethode kann auch auf das Verkleinern und Vergrößern von Repräsentanten übertragen werden. Die Argumentation lautet dann: „In beiden Fällen wird im gleichen Maße verkleinert, nämlich auf den 8-ten Teil. Bei $\cdot\frac{5}{8}$ wird anschließend weniger stark vergrößert als bei $\cdot\frac{7}{8}$" (Postel, 1981, S. 33).

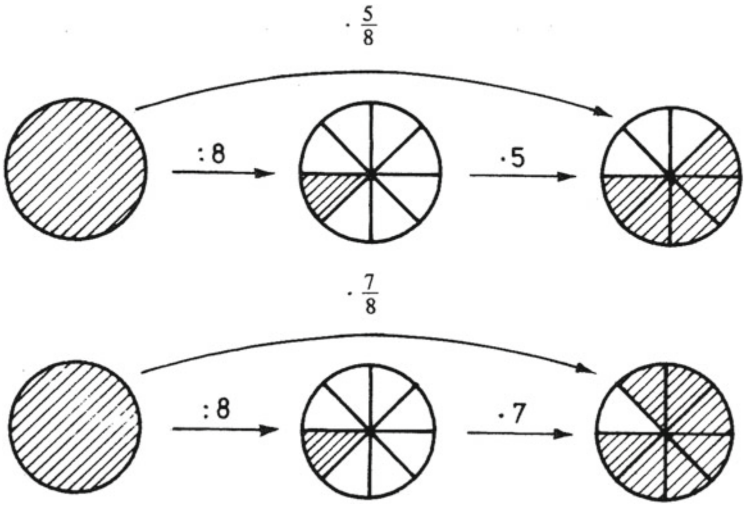



**Abbildung 2.17** Größenvergleich zweier Brüche über ihre Herstellung (Abb. aus Postel, 1981, S. 32)

Im Kern des Größenvergleichs von Brüchen auf ikonischer Ebene steht die gleiche Einteilung der zu vergleichenden Größen und Repräsentanten. Das bedeutet, dass die jeweiligen Ausgangsgrößen gleich groß sind und auch die Teile der Einteilung die gleiche Größe haben. Nur in diesem Fall kann die Ordnungsbeziehung aus den natürlichen Zahlen auf den Vergleich von Brüchen übertragen und argumentiert werden: $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$, weil 5 kleiner ist als 7. Entsprechend können nur gleichnamige Brüche auf diesen Wegen direkt miteinander verglichen werden. Sofern diese Voraussetzung nicht gegeben ist, ist es notwendig die Einteilung zunächst zu vereinheitlichen.

Ein Vereinheitlichen der Einteilung als anschauliche Vorstellung für das Erweitern und Kürzen der zu vergleichenden Brüche auf einen gemeinsamen Hauptnenner kann über das „Übereinanderlegen" von Einteilungen dargestellt werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 60): Zum Beispiel können die Brüche $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$ der Größe nach verglichen werden, indem beide Brüche zunächst in einem gleich großen Rechteck eingetragen werden. Dabei wird das Rechteck für den Bruch $\frac{5}{8}$ horizontal und für den Bruch $\frac{2}{3}$ vertikal unterteilt. Durch übereinanderlegen der beiden Rechtecke erhält man eine gemeinsame Einteilung in $3 \cdot 8 = 24$ gleiche Teile. Nun können die Anzahlen der markierten Teile verglichen werden und festgestellt werden, dass 15 Teile weniger als 16 Teile sind und folglich $\frac{5}{8}$ kleiner als $\frac{2}{3}$ ist (vgl. Abb. 2.18).

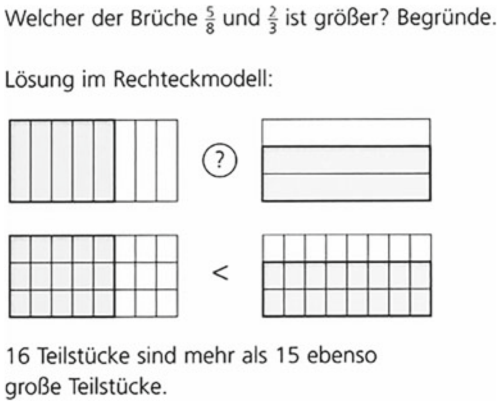



**Abbildung 2.18** Größenvergleich durch Übereinanderlegen von Einteilungen (Abb. aus Padberg & Wartha, 2017, S. 60)

Auf symbolischer Ebene beschreiben Behr et al. (1984) neben dem Vergleich von Brüchen über gleichnamige Nenner drei weitere Strategien (vgl. auch Clarke & Roche, 2009):

*Vergleich über gleichnamige Zähler:* Beim Vergleich von Brüchen mit gleichem Zähler kann der Größenvergleich durch Vergleich von Stammbrüchen vorgenommen werden. Für den Größenvergleich der Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{3}$ bedeutet der gleiche Zähler, dass die gleiche Anzahl von Teilen betrachtet wird. Entsprechend muss die Größe der Teile verglichen werden. Wird beispielsweise eine Strecke der Länge 1 *m* in fünf gleiche Teile eingeteilt, so sind diese Teile kleiner als wenn die Strecke in drei gleiche Teile eingeteilt wird. Demzufolge ist $\frac{1}{5}$ kleiner als $\frac{1}{3}$, was bei gleicher Anzahl der Teile bedeutet, dass $\frac{2}{5}$ kleiner als $\frac{2}{3}$ ist.

*Vergleich über einen Zwischenwert:* Brüche können über den Vergleich eines Zwischenwertes als Bezugsgröße miteinander verglichen werden. Zum Beispiel ist $\frac{2}{5}$ kleiner als $\frac{2}{3}$, da $\frac{2}{5}$ kleiner ist als der Zwischenwert $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ größer ist als $\frac{1}{2}$. Somit ist $\frac{2}{5}$ kleiner als $\frac{2}{3}$.

*Vergleich über den Abstand zu einem gemeinsamen Referenzwert:* Brüche können über den Vergleich ihres Abstands zu einem gemeinsamen Bezugswert, wie zum Beispiel 1 miteinander verglichen werden: Beim Vergleich der Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ kann so etwa festgestellt werden, dass jeweils noch ein Teil bis zu einem Ganzen bzw. zu 1 fehlt. Ähnlich wie beim Vergleich von Brüchen mit einem gemeinsamen Zähler reicht es nun aus, die Stammbrüche $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$ miteinander zu vergleichen. Da $\frac{1}{5}$ kleiner als $\frac{1}{3}$ ist fehlt beim Bruch $\frac{4}{5}$ entsprechend weniger zu einem Ganzen bzw. zu 1 als beim Bruch $\frac{2}{3}$ und folglich ist $\frac{2}{3}$ kleiner als $\frac{4}{5}$.

Padberg und Wartha (2017, S. 61 f.) sowie auch Clarke und Roche (2009) weisen darauf hin, dass die Entwicklung anschauungsbezogener und flexibler Strategien zum Größenvergleich von Brüchen reichhaltige Möglichkeiten zur Vertiefung von Bruchzahlkonzepten bietet. Aus diesem Grund sollte in der unterrichtlichen Einführung des systematischen Größenvergleichs der Schwerpunkt nicht auf dem schematischen Verfahren der Hauptnennerbestimmung mit anschließendem Vergleich der Zähler, sondern auf dem Auffinden kreativer und individueller Zugänge und Strategien liegen. Clarke und Roche (2009, S. 135 f.) fordern entsprechend mit Bezug auf Moss und Case (1999, S. 142):

> „A greater emphasis on the meaning or semantics of rational numbers than on procedures for manipulating them; [... and] a greater emphasis on children's natural ways of viewing problems and their spontaneous solution strategies".

Insgesamt ist festzuhalten, dass der Größenvergleich und das Ordnen von Brüchen eine tragfähige und flexible Vorstellungsgrundlage von Brüchen und Bruchzahlen erfordert. In Anlehnung an Postel et al. (1985, S. 19) können folgende Anforderungen an das Denken der Lernenden zusammengefasst werden:

(1) Gedankliche Flexibilität beim Übersetzen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen von Brüchen, d. h. zwischen symbolischen Zahldarstellungen und ikonischen Veranschaulichungen,

(2) gedankliche Flexibilität bei Umwandlungen innerhalb einer Darstellung (z. B. Erweitern von Brüchen auf symbolischer Ebene und Verfeinern der Einteilung einer ikonischen Bruchdarstellung) und
(3) zunehmende Loslösung von Anschauungsobjekten.

Die Komplexität der Anforderungen, die das Ordnen und Vergleichen von Brüchen und Bruchzahlen für die Lernenden darstellt, ist ein wesentlicher Grund dafür, dass die Fähigkeiten der Lernenden in diesem Bereich in einer Vielzahl empirischer Untersuchungen als Indikator für die Ausprägung der Entwicklung von Bruchzahlkonzepten und einem verständigem Umgang mit Brüchen genutzt werden (vgl. Obersteiner & Tumpek, 2016; Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015; Clarke & Roche, 2009; Cramer, Post & delMas, 2002).

### 2.2.4 Schwierigkeiten in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs

Die Einführung von Brüchen bzw. die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^+$ ist ein schwieriger Prozess, der konzeptuelle Erweiterungen von elementaren Zahl- und Operationsvorstellungen erfordert. Es müssen sukzessive neue Grundvorstellungen aufgebaut werden, die im Verlauf der fortschreitenden Begriffsbildung erweitert, miteinander vernetzt, neu strukturiert und zum Teil korrigiert werden müssen. Aus diesem Grund ist die Bruchrechnung wohl eines der meist untersuchten Inhaltsgebiete in der Mathematikdidaktik und viele Fehlermuster und Fehlkonzepte sind bekannt. Im Folgenden werden die wesentlichen Problembereiche und Schwierigkeiten in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs vor dem Hintergrund des Aufbaus von Grundvorstellungen erörtert.

**Grundvorstellungsanpassungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^+$**
Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den positiven rationalen Zahlen ist geprägt von den Unterschieden zwischen diesen Zahlbereichen. In Hinsicht auf eine erfolgreiche Begriffsentwicklung und den flexiblen Umgang mit Brüchen ist es wichtig diese zu identifizieren und zu thematisieren (Prediger, 2004). Auf der Ebene von Grundvorstellungen bzw. „Grundüberzeugungen" (Winter, 1999) ist es notwendig die strukturellen Änderungen der Zahlen und Rechenoperationen auf die Ebene der mentalen Strukturen zu überführen und bestehende Grundvorstellungen an den neuen Zahlbereich anzupassen und zu verändern. Wartha (2007, S. 237) spricht in diesem Zusammenhang von „Grundvorstellungsumbrüchen". Das Ausbleiben notwendiger Grundvorstellungsanpassungen kann die Entwicklung von

stabilen Fehlvorstellungen zur Folge haben, die den Umgang und das Operieren mit Bruchzahlen „bewusst und unbewusst beeinflussen“ (Wartha & Güse, 2009, S. 265).

Die zentralen Unterschiede zwischen natürlichen Zahlen und Bruchzahlen betreffen vor allem folgende Eigenschaften (vgl. Winter, 1999; Stafyladou & Vosniadou, 2004; Prediger, 2004; Wartha, 2007; Prediger, 2008; Wartha & Güse, 2009)[9]:

*Notation:* In den natürlichen Zahlen ist die Schreibweise für eine Zahl eindeutig. Jede Zahl hat genau ein Zahlzeichen, das sich eindeutig aus einer Folge von Stellenwertangaben ergibt, z. B. $72 = 70 + 2$. Bruchzahlen hingegen lassen sich durch unendlich viele Repräsentanten darstellen, z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1 \cdot m}{2 \cdot m}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Zudem erhalten auch natürliche Zahlen durch die Bruchschreibweise eine unendliche Anzahl neuer Bezeichnungen.

*Zahlaspekte:* Natürliche Zahlen beantworten in der Regel die Frage „Wie viele?“ (Kardinalzahlaspekt) oder „Der wie vielte?“ (Ordinalzahlaspekt). Im Gegensatz dazu können Brüche unter verschiedenen Zahlaspekten betrachtet werden, z. B. Anteil, Operator, Verhältnis, etc. (siehe oben).

*Ordnung und Dichte:* Jede natürliche Zahl (außer 1) hat einen eindeutig bestimmten Vorgänger und Nachfolger. Hingegen lassen sich zwischen zwei beliebigen Bruchzahlen unendlich viele Bruchzahlen finden, die zwischen den beiden liegen. Daher kann kein direkter Vorgänger und Nachfolger bestimmt werden. Aus diesem Grund ist der Größenvergleich von natürlichen Zahlen über kardinale und ordinale Überlegungen direkt möglich, während er bei Bruchzahlen nur indirekt über gemeinsame Nenner (bzw. Unterteilungen) oder dem Vergleich mit Bezugszahlen (oder Zwischenzahlen) möglich ist.

Die unreflektierte Übertragung von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen ist ein wesentlicher Auslöser für die Entwicklung von Fehlvorstellungen und deren Verfestigung (Wartha, 2007, S. 237). In experimentellen Studien wird die Übertragung von Strukturelementen von den natürlichen auf die rationalen Zahlen auch als „natural number bias“ bezeichnet (z. B. Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015; Van Hoof, Vanderwalle, Verschaffel & Van Dooren, 2015; Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof & Verschaffel, 2013; Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012).

[9] Die hier aufgeführten Unterschiede beziehen sich vornehmlich auf die Eigenschaften von Zahlen. In Hinsicht auf das Operieren mit Zahlen lassen sich weitere grundlegende Unterschiede beschreiben, die jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

**Fehlvorstellungen und typische Fehlerstrategien**
Zahlreiche empirische Arbeiten beschreiben fehlerhafte Denkmuster beim Verständnis und Fehlerstrategien bei der Anwendung des Bruchzahlbegriffs[10]. In vielen Fällen liegt die Ursache für diese Fehler in Fehlvorstellungen, die während der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs und der Ausbildung von Grundvorstellungen durch das Ausbleiben von Grundvorstellungsanpassungen entstehen und sich im weiteren Lern- und Übungsverlauf verfestigen (Wartha, 2007, S. 237). Im Folgenden werden ausgewählte Fehlvorstellungen und Fehlerstrategien zu Bruchzahlen und zum Umgang mit ihnen dargestellt.

**Darstellen und Ablesen von Brüchen:** Bei der sogenannten *Teil-zu-Teil-Strategie* wird die Anzahl der markierten Teile in das Verhältnis zu den nicht-markierten Teilen einer Darstellung gesetzt (Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 40 f.). Entsprechend wird der Bruch $\frac{2}{5}$ nicht als Anteil, sondern als Verhältnis (2 : 3) interpretiert: „$\frac{2}{3}$ bedeutet 2 gefärbte und 3 ungefärbte Stücke“ (Wartha, 2007, S. 52). Die Fehlvorstellung steht in engem Bezug zu der Fehlvorstellung *$\frac{1}{n}$ bezeichnet eine Menge von n Objekten* (Wartha, 2007, S. 53; vgl. auch Hasemann, 1997, S. 13; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 40 f.). Hierbei wird zum Beispiel der Stammbruch $\frac{1}{4}$ als vier Teile übersetzt. Eine weitere Ausprägung dieser Fehlvorstellung ist, dass in Darstellungen von echten Brüchen die Anzahl der markierten Teile ohne Bezug zur Gesamtzahl der Teile angegeben wird. Sind zum Beispiel von sieben Teilen vier Teile markiert, wird diese Darstellung nicht als Bruch $\frac{4}{7}$, sondern als 4 übersetzt (Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 40 f.). Die Ursache für diese beiden Fehlvorstellungen wird in einem Bezug auf die Abzählbarkeit der natürlichen Zahlen beschrieben:

> „Diese Strategie ist bei schwächeren Schülerinnen und Schülern weit verbreitet und darauf zurückzuführen, dass sie in Ermangelung eines adäquaten Bruchzahlbegriffs der Bruchrechnung durch Rückgriff auf abzählbare Mengen, also auf ihre Kenntnisse über natürliche Zahlen auszuweichen versuchen.“ (Hasemann, 1997, S. 13)

Besonders zu Beginn der Begriffsbildung und dem Aufbau der Anteilvorstellung anhand von ikonischen Flächenrepräsentationen ist zu beobachten, dass Lernende lediglich die *Anzahl der Teilflächen betrachten, ohne die Aufteilung der Fläche zu berücksichtigen* (Herden & Pallack, 2000, S. 265; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 41). Die Nichtberücksichtigung der gleichmäßigen Einteilung des Ganzen ist auf die unzureichende Ausprägung der Anteilvorstellung zurückzuführen

[10] Eine ausführliche Übersicht findet sich bei Eichelmann et al. (2012).

und deutet darauf hin, dass die Lernenden noch nicht erfasst haben, dass die Größe der Teile von Bedeutung für die Angabe eines Anteils vom Ganzen ist.

Die Fehlvorstellung $\frac{m}{n}$ *bedeutet m Ganze, die in n Teile geteilt sind* ist auf die fehlerhafte Interpretation der Bedeutungen von Zähler und Nenner zurückzuführen (Wartha, 2007, S. 53; vgl. auch Mack, 1995):

> „Der Zähler des Bruchs wird hierbei nicht als Anzahl der betrachteten Stücke interpretiert, sondern als Beschreibung der Anzahl der Grundmenge. Demnach ist $\frac{1}{3}$ eine Schreibweise für „eine Pizza, die in drei Stücke geteilt ist“ oder $\frac{3}{8}$ „drei Kürbisse, die in acht Stücke geschnitten sind“.“ (Wartha, 2007, S. 53)

**Operatorvorstellung:** Die größte Schwierigkeit bei der operativen Anteilbildung sieht Wartha (2007, S. 57 f.) in der *Wahl der falschen Rechenoperation*: „Es ist nicht selbstverständlich, dass das „Anwenden eines Operators“ und „Multiplizieren“ einen synonymen Zusammenhang suggeriert, da auch andere Operationen von Zahlen auf Größen denkbar sind“ (Wartha, 2007, S. 57 mit Verweis auf Seyfferth, 1975). Da die Anwendung von Bruchoperatoren in vielen Fällen anhand von Brüchen zwischen 0 und 1 eingeführt wird, die eine Verkleinerung der Ausgangsgröße bewirken, werden mit der Anteilbildung vor allem die Division und die Subtraktion verbunden: „Zur Anteilbestimmung werden Rechenoperationen ausgewählt, die bei natürlichen Zahlen verkleinernd wirken“ (Wartha, 2007, S. 232). Die Ursache dafür wird „in der Verhaftung der Grundvorstellung der Multiplikation als wiederholtes Reproduzieren von Gegenständen“ (Wartha, 2007, S. 57) beschrieben, die auf das Operieren mit natürlichen Zahlen zurückgeführt werden kann und eine Vermehrung der Ausgangsgröße bewirkt. Demgegenüber erfordert die Interpretation eines Bruchs als Operator die Vorstellung von der Multiplikation als „kontinuierliche Veränderung“ im Sinne einer Streckung und Stauchung (vom Hofe, 1995, S. 120 ff.; vgl. auch Griesel, 1973). Diese Vorstellung birgt jedoch Schwierigkeiten bei der Anwendung auf diskrete Größen: So bedeutet $\frac{3}{4}$ von 12 Stücken Kuchen nicht, dass 12 Kuchenstücke auf 12 Kuchenstücke abgebildet werden, deren Größe $\frac{3}{4}$ der Ausgangsgröße ist, sondern, dass 12 Kuchenstücke auf 9 Kuchenstücke derselben Größe abgebildet werden (vgl. Wartha, 2007, S. 58 f.).

Eine weitere Schwierigkeit bei der operativen Anteilbildung beschreiben Behr et al. (1993) in der *komponentenweisen Betrachtung von Brüchen als Kombination von zwei Zahlen*:

> „We suspect that one of the difficulties students have in understanding rational number is due to the fact that the symbolic representation of a rational number involves two numbers. Yet a rational number represents a single quantity, or in the case of rational

> number as operator, a single function. It has been hypothesized that many errors that children make with rational number operations and relations is due to the fact that they perceive a rational number as two entities.“ (Behr, Post, Harel & Lesh, 1993, S. 46)

Die komponentenweise Betrachtung von Brüchen als Kombination zweier (natürlicher) Zahlen bedeutet, dass der Zähler und der Nenner eines Bruchs nicht als Teiloperatoren betrachtet werden, die verkettet auf eine Größe wirken. Dies führt in vielen Fällen zur Übertragung von Struktureigenschaften aus den natürlichen Zahlen, die wiederum zur Wahl der falschen Rechenoperation führen (siehe oben).

**Erweitern und Kürzen:** In vielen Fällen gelingt es Lernenden nicht, inhaltliche Vorstellungen für das Erweitern und Kürzen von Brüchen als Verfeinern und Vergröbern einer Einteilung auszubilden. Im Gegensatz dazu bereitet ihnen die Durchführung des technischen Verfahrens auf symbolischer Ebene zumeist keine Schwierigkeiten. Padberg (2009, S. 56) berichtet Lösungsquoten von über 90 % in Aufgaben, in denen das Erweitern und Kürzen von Brüchen auf symbolischer Ebene isoliert abgefragt wird. Die technische Beherrschung des Verfahrens erlaubt dabei jedoch keinen Rückschluss auf inhaltliche Vorstellungen, die mit dem Erweitern und Kürzen von Brüchen auf Zahlenebene verbunden werden, sowie auf das inhaltliche Verständnis von äquivalenten Brüchen (vgl. Wartha, 2007, S. 71; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 44).

Bezogen auf das inhaltliche Verständnis für das Erweitern und Kürzen von Brüchen beschreibt Wartha (2007, S. 69 f.) die zentrale Fehlvorstellung *durch Erweitern und Kürzen verändert sich der Wert des Bruchs*. Wartha (2007, S. 69) bezieht sich in seiner Beschreibung dieser Fehlvorstellung auf eine repräsentative Untersuchung von Payne (1986, S. 53), in der über 70 % der untersuchten 13-Jährigen und über die Hälfte der untersuchten 17-Jährigen Schülerinnen und Schüler angaben, dass das Verdoppeln von $a$ und $b$ im Bruch $\frac{a}{b}$ dazu führe, dass sich auch der Wert des Bruchs verdoppele. Padberg und Wartha (2017) weisen darauf hin, dass diese Fehlvorstellung womöglich darauf zurückzuführen ist, dass die Begriffe „Erweitern“ und „Kürzen“ im alltäglichen Sprachgebrauch stets mit einer Wertänderung verbunden werden. Wenn zum Beispiel ein Grundstück erweitert wird, so vergrößert sich die Grundstücksfläche und analog bekommt ein Arbeitnehmer weniger Gehalt, wenn dieses zuvor gekürzt wurde (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 52; Wartha, 2007, S. 69 f.).

In einer Interviewstudie berichtet Hart (1987, S. 6) zudem, dass bereits drei Monate, nachdem die Lernenden das Erweitern von Brüchen durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor erarbeitet hatten, keiner der untersuchten Lernenden diese Methode zur Angabe von zu $\frac{1}{3}$ äquivalenten Brüchen angewendet hat. Stattdessen zeigten die Lernenden additive Strategien zum Erweitern von Brüchen sowie individuell entwickelte und oftmals fehlerhafte Verfahren (Hart, 1987, S. 6; vgl. auch Eichelmann et al., 2012, S. 45).

Bezogen auf das inhaltliche Verständnis für die Wertgleichheit bzw. Äquivalenz von Brüchen führt Wartha (2007, S. 70) die Fehlvorstellung *Zwei Brüche sind äquivalent, wenn die Differenzen von Zähler und Nenner gleich sind* an. Aus ihren Interviewstudien berichtet Hart (1987, S. 6) unter anderem, dass die Brüche $\frac{6}{16}$ und $\frac{9}{19}$ als äquivalent bewertet wurden, da die Differenzen der Zähler und Nenner jeweils 10 betragen und somit gleich seien. Insgesamt bezeichneten in dieser Studie nur fünf von zwölf Lernenden drei Monate nach der unterrichtlichen Behandlung des Erweiterns und Kürzens von Brüchen den Bruch den $\frac{10}{14}$ als äquivalent zum Bruch $\frac{5}{7}$, während drei Lernende angaben, dass $\frac{10}{14}$ sowohl äquivalent als auch das Doppelte von $\frac{5}{7}$ sein könne. Auch diese Fehlvorstellung kann auf die Anwendung von Additions- und Zählstrategien zurückgeführt werden. Die Brüche werden als Kombinationen natürlicher Zahlen und nicht als eigene Zahlen wahrgenommen und Zusammenhänge zwischen den natürlichen Zahlen in Zähler und Nenner gesucht. Payne (1986) weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass eine Ursache in der Notation von Folgen äquivalenter Brüche liegen könnte (wie z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$). Diese würden eher einen additiven als einen multiplikativen Zusammenhang suggerieren.

Weitere häufig festgestellte Fehlertypen beim Erweitern und Kürzen von Brüchen können auf Assoziationsfehler (Schaffrath, 1961, S. 16 ff.) zurückgeführt werden:

> „Jede Vorstellungsreproduktion stützt sich auf die konservierende Fähigkeit des Bewußtseins, die man als Gedächtnis bezeichnet. Das Gedächtnis wiederum hängt stark von den Verbindungen seiner Inhalte untereinander ab, den sogenannten Assoziationen. Solche falschen Assoziationen können zustande kommen, wenn von einem Zahlwort mehrere verschiedenartige Tendenzen zur Reproduktion ausgehen, indem sie sich gegenseitig stören [...].“ (Schaffrath, 1961, S. 16)

Assoziationsfehler äußern sich u. a. im Erweitern zur Identität, wie im Beispiel $\frac{4}{7} + \frac{1}{4} = \frac{16+28}{28} = \frac{44}{28}$ (Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 45), in dem der Bruch $\frac{1}{4}$ nicht zu $\frac{7}{28}$, sondern zur Identität $\frac{28}{28}$ erweitert wird. Weitere Beispiele finden sich bei Padberg und Wartha (2017, S. 53), die von einer Untersuchung berichten, in der rund ein Fünftel aller Lernenden den Bruch $\frac{9}{18}$ fehlerhaft zu $\frac{1}{9}$ oder $\frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$ kürzten. Im Ersten Fall ist die Zahl 9 beim Kürzen so dominant, dass die Lernenden lediglich den Zähler richtig kürzen und den Faktor 9 in den Nenner schreiben. Im zweiten Fall ist Kürzungsfaktor 3 so dominant, dass der Bruch $\frac{3}{6}$ nicht zu $\frac{1}{2}$, sondern zu $\frac{1}{3}$ gekürzt wird (Padberg & Wartha, 2017, S. 70; weitere Beispiele beschreiben Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 45 f.).

Die hier beschriebenen Fehlvorstellungen zum Kürzen und Erweitern treten in empirischen Untersuchungen selten in Isolation auf, sondern sind zumeist in Aufgaben zur Addition und Subtraktion sowie insbesondere beim Größenvergleich von Brüchen zu beobachten.

**Vergleichen und Ordnen:** Brüche werden zumeist über die Bildung eines Hauptnenners miteinander verglichen. Dieses Verfahren ist jedoch sehr abhängig von auswendig gelernten Regeln, deren Anwendung zumeist kein Verständnis von Brüchen erfordert, da sich die notwendigen Operationen auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen beschränken (vgl. Wartha, 2007, S. 75). Die Hauptursache für Fehler und Fehlerstrategien liegen in vielen Fällen in der Übertragung von Struktureigenschaften der natürlich Zahlen („natural number bias“, siehe oben):

> „[...] learners are found to make systematic mistakes specifically in rational number tasks where reasoning purely in terms of natural numbers results in an incorrect solution. At the same time, much higher accuracy levels are found in rational number tasks where reasoning merely in terms of natural numbers results in a correct solution.“ (Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015, S. 40)

Die Befunde zur Übertragung von Eigenschaften der natürlichen Zahlen auf Bruchzahlen, insbesondere beim Größenvergleich und Ordnen von Brüchen, weisen in vielen Fällen auf eine getrennte Betrachtung von Zähler und Nenner als voneinander unabhängige Zahlen hin. Vor diesem Hintergrund beschreibt Wartha (2007, S. 76 f.) vier häufig vorkommende Fehlvorstellungen (vgl. auch Padberg & Wartha, 2017, S. 65 f.; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 42 ff.):

*Je kleiner der Nenner, desto größer der Bruch:* Bei dieser Fehlvorstellung werden Größenvergleiche allein auf Grundlage des Nenners als Maß für die Größe der Teile und ohne Berücksichtigung des Zählers als Anzahl der betrachteten Teile vorgenommen. Obgleich diese Vorstellung beim Vergleich von Brüchen mit gleichen Zählern, wie zum Beispiel $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$, zielführend ist, so kann sie nicht auf den Vergleich von Brüchen mit unterschiedlichen Zählern und Nennern, wie z. B: $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{5}$ verallgemeinert werden. Diese Fehlvorstellung kann zum einen als Übergeneralisierung des Größenvergleichs von Stammbrüchen aufgefasst werden. Zum anderen kann eine Ursache für die alleinige Orientierung am Nenner, respektive der Größe der Teile, auf anschauliche Überlegungen zurückgehen, bei denen nur die Größe und nicht die Anzahl der betrachteten Teile eines Ganzen oder einer Größe verglichen werden. Diese Fehlvorstellung gilt als häufigste Fehlerstrategie beim Vergleich von Brüchen. Repräsentativ für diese Beobachtung ist ein Item aus der PALMA-Studie, bei dem die Lernenden die größte unter den Zahlen $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{10}$ ankreuzen sollten. Nur ein Drittel der ca. 2400 Schülerinnen und Schüler der siebten Jahrgangsstufe konnte diese Aufgabe richtig lösen und die häufigste Antwort über alle Schulformen hinweg war $\frac{3}{4}$, da dieser Bruch den kleinsten Nenner in der vorgegebenen Menge von Zahlen hat (Wartha, 2007, S. 173 ff.).

*Je größer der Nenner, desto größer der Bruch:* Diese Fehlvorstellung kann durch die fehlerhafte Übertragung der Ordnung der natürlichen Zahlen auf Bruchzahlen erklärt werden: $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, weil 2 der Vorgänger von 3 ist. Analog zur zuvor geschilderten Fehlvorstellung wird insbesondere beim Vergleich von Brüchen, die keine Stammbrüche sind, der Zähler nicht in den Größenvergleich einbezogen. Hartnett und Gelman (1998, S. 370) berichten zudem von einer Dominanz von Zählstrategien, die zur Folge haben, dass z. B. aufgrund einer irrtümlich angenommenen Vorgänger-Nachfolger-Beziehung angegeben wird, dass $\frac{2}{2} < \frac{3}{4}$ ist, da 2 und 2 weniger sind als 3 und 4.

*Je größer der Zähler, desto größer der Bruch:* Bei dieser Fehlerstrategie wird der Nenner beim Vergleich von Brüchen nicht berücksichtigt und ein Größenvergleich allein durch Vergleich der Zähler nach den Ordnungsrelationen der natürlichen Zahlen vorgenommen. Entsprechend wird der Blick einseitig auf die Anzahl der Teile gerichtet, ohne die Größe der Teile einzubeziehen. Vor diesem Hintergrund wird zum Beispiel angenommen, dass „$\frac{3}{5} < \frac{6}{10}$“ ist, da 6 Teile mehr als 3 Teile sind (Post et al., 1985, S. 33), oder dass „$\frac{3}{12} = \frac{3}{4}$“ ist, da in beiden Brüchen die gleiche Anzahl von Teilen betrachtet wird (Post et al., 1985, S. 29).

*Größere Zahlen in Zähler und Nenner bedeuten einen größeren Bruch:* Auch bei dieser Fehlerstrategie werden die Zähler und Nenner der zu vergleichenden Brüche getrennt voneinander betrachtet: „Bei gleich lautender Ordnung im Zähler und Nenner wird diese Ordnung auf die Brüche übertragen (Beispiel $\frac{3}{5} < \frac{5}{12}$, da $3 < 5$ und $5 < 12$ gilt)“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 65). In einem Item der PALMA-Studie, in der die Lernenden aus der Menge $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{10}$ den größten Bruch ankreuzen sollten, wählten im Durchschnitt 11,5 % den Bruch $\frac{7}{10}$ als größten Bruch, da dieser sowohl im Zähler wie auch im Nenner die größten Zahlenwerte aufweist (Wartha, 2007, S. 175). Ähnliche Ergebnisse berichtet auch Payne (1986). In einer ähnlichen Testaufgabe, in der die Lernenden die größte Bruchzahl aus der Auswahl $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{8}$ angeben sollten, war der Hauptfehler in den Antworten der 9-Jährigen die Angabe des Bruchs $\frac{5}{8}$. Die Autoren berichten zudem, dass die Häufigkeit dieses Fehlertyps nach der systematischen Behandlung der Bruchrechnung im Unterricht deutlich abgenommen hat.

Neben den hier beschriebenen Fehlvorstellungen sind in der Literatur zum Größenvergleich und Ordnen von Brüchen noch weitere Fehlermuster dokumentiert. Ein Fehler, der auf die im Zusammenhang mit der Äquivalenz von Brüchen aufgeführten Fehlvorstellung „Zwei Brüche sind äquivalent, wenn die Differenzen von Zähler und Nenner gleich sind“ im Zusammenhang steht, wird von Padberg und Wartha (2017, S. 66) als *Ergänzung zum Ganzen* beschrieben. Mit Bezug auf eine Studie von Mack (1993) führen sie ein Beispiel an, in dem die Schülerinnen und Schüler die Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ als wertgleich betrachten, da beiden Brüchen jeweils ein Teil zum Ganzen fehlt. Hierbei werden lediglich die Anzahlen der zum Ganzen fehlenden Teile betrachtet, ohne Bezug zur Größe der jeweiligen Teile zu nehmen. Eine andere Begründung führen Padberg und Krüger (1997) an, die in ihrer Untersuchung zu denselben Brüchen die Begründung dokumentiert haben, dass die Brüche gleich groß sind, da der Unterschied zwischen Zähler und Nenner jeweils gleich groß sei, nämlich 1.

Der häufigste Fehler in der oben geschilderten PALMA-Aufgabe zu Auswahl des größten Bruchs aus der Menge $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{10}$ war die Angabe des Bruchs $\frac{3}{4}$, den im Durchschnitt 47,2 % der befragten Schülerinnen und Schüler wählten. Wartha (2007, S. 176) führt als Begründung für diesen Fehler die *Orientierung an Brüchen aus dem Alltag* an. Er vermutet,

> „dass [...] viele Schüler über ein eingeschränktes Repertoire an Brüchen verfügen ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, eventuell noch $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$), die für sie mit Bedeutung gefüllt sind und [für die] auch eine Größenvorstellung vorliegt. Andere Brüche werden nur als zusammenhangslos kombinierte Symbole wahrgenommen und sind nicht mit Grundvorstellungen verbunden.“ (Wartha, 2007, S. 176)

Aus diesem Grund nimmt Wartha an, dass der Bruch $\frac{3}{4}$ die größte Bruchzahl in der Auswahl war, die von den Lernenden inhaltlich interpretiert werden konnte, und deshalb als größte der vorgegebenen Bruchzahlen gewählt wurde.

Eine wesentliche Verständnishürde für die Erfassung der Ordnung von Bruchzahlen ist die veränderte Dichte von Zahlen bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen. Während sich die natürlichen Zahlen durch die Eigenschaft auszeichnen, dass jede Zahl mit Ausnahme der Null einen eindeutig bestimmten Vorgänger und Nachfolger hat, gilt diese Vorgänger-Nachfolger-Beziehung für Bruchzahlen nicht mehr, sondern zwischen zwei Bruchzahlen gibt es unendlich viele Bruchzahlen. Als Folge einer ausbleibenden Grundvorstellungsanpassung bezüglich der Dichte von Bruchzahlen beschreibt Wartha (2007, S. 80 f.) die Fehlvorstellung *zwischen Brüchen wie* $\frac{1}{3}$ *und* $\frac{1}{2}$ *oder* $\frac{3}{5}$ *und* $\frac{4}{5}$ *kann kein Bruch angegeben werden – Diese Brüche werden als Nachbarzahlen verstanden*. Auch diese Fehlvorstellung kann mit einer getrennten bzw. isolierten Betrachtung der Zählers und des Nenners erklärt werden. Diese werden nicht in Bezug zueinander gesetzt, sondern als unabhängige natürliche Zahlen betrachtet, weshalb die Vorgänger-Nachfolger-Beziehung der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen übertragen wird:

> „Die Mehrzahl der Schüler verharrt in den Vorstellungen zu natürlichen Zahlen, die grundlegende Revision des Vorwissens (jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger und Nachfolger) für die Bruchzahlen (zwischen zwei Brüchen ist immer ein weiterer Bruch) fand nicht statt." (Wartha, 2007, S. 81)

Insgesamt wird deutlich, dass die empirisch festgestellten und beschriebenen Hauptschwierigkeiten beim Größenvergleich und Ordnen von Brüchen in einer getrennten Betrachtung von Zähler und Nenner als natürliche Zahlen bestehen. Brüche werden nicht als eigene Zahlen behandelt, sondern als Kombinationen von natürlichen Zahlen interpretiert. Dies führt zu der fehlerhaften Übertragung von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen. Notwendige Grundvorstellungsanpassungen bleiben aus.

### 2.2.5 Zusammenfassung

Die sachanalytischen Überlegungen und die Diskussion der empirischen Befunde zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs im vorhergehenden Abschnitt lässt sich in der Ableitung von drei Folgerungen für die Erarbeitung des Bruchzahlbegriffs zusammenfassen:

- Der Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen erfordert die Ausbildung und Stärkung von Bezügen zu Anwendungskontexten und der Erfahrungswelt der Lernenden (Sinnstiftung).
- Durch die Verknüpfung von verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen werden mentale Handlungsmodelle zu Bruchzahlen und zentralen Operationen mit Brüchen aufgebaut (Mentale Repräsentation).
- Um der Entwicklung von Fehlvorstellungen vorzubeugen müssen bestehende Vorstellungen erweitert und neue Vorstellungen in das bestehende Netz von Vorstellungen integriert werden (Antizipation von Schwierigkeiten).

Der Aufbau von Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff kann in vielen Fällen durch das Anknüpfen an reale Handlungen und Handlungsfolgen beschrieben werden, die Bruchzahlen und -Operationen eine Bedeutung geben. Brüche werden als Anteile eines oder mehrerer Ganzer, als Maßzahlen, Skalenwerte oder Anteile von beliebigen Größen in Anwendungszusammenhängen konzeptualisiert, denen eine gemeinsame Handlung zugrunde liegt: Dem Aufteilen des Ganzen in gleich große Teile und dem Vervielfachen eines Teils bzw. dem Auswählen einer bestimmten Anzahl von Teilen. Dabei dienen Sachsituationen einerseits als Bindeglied zur Erfahrungswelt der Lernenden. Andererseits trägt die Variation unterschiedlicher Sachkontexte zur Erweiterung der Anwendungsbezüge und auf Ebene der mentalen Strukturen der Lernenden zur Ausbildung eines allgemeinen Denkmusters bzw. zur Abstraktion und damit zur Verallgemeinerung des Herstellungsverfahrens bei.

Ziel ist es, durch die Integration von verschiedenen Sachsituationen, ikonischen und symbolischen Darstellungen mentale Repräsentationen und Handlungsmodelle aufzubauen, die es Lernenden ermöglichen auch in komplexen Situationen mental mit Bruchzahlen zu operieren und ihnen eine Bedeutung zu geben. Wesentlich hierfür ist das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen. Dieses erlaubt es Lernenden unbekannte Situationen auf einen vertrauten Erfahrungsbereich zurückzuführen und sie durch ikonische Repräsentationen zu strukturieren und zu visualisieren. In Hinsicht auf eine fortschreitende Begriffsentwicklung dient das Übersetzen zwischen Darstellungen und Repräsentationsebenen der zunehmenden Abstraktion und Verallgemeinerung gemeinsamer Strukturen und soll auf diese Weise zum Aufbau mentaler Repräsentationen beitragen.

Es wurde dargestellt, dass eine Vielzahl verbreiteter Fehlermuster und Fehlvorstellungen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs neben einer unzureichenden Entwicklung mentaler Modelle auf fehlerhafte Übertragungen von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen erklärt werden können. Notwendige Grundvorstellungsanpassungen bleiben aus und neue Zusammenhänge werden auf Grundlage von vertrauten Handlungsmodellen interpretiert, die im Bereich der Bruchzahlen nicht mehr tragen. Aus diesem Grund wird empfohlen, Grundvorstellungsanpassungen und bekannte Fehlvorstellungen explizit zu thematisieren, um der Entwicklung von Fehlkonzepten vorzubeugen und die Bewältigung von erwarteten Hürden in der Begriffsbildung zu unterstützen.

## 2.3 Analyse von Transferprozessen auf normativer Ebene

Zu Beginn dieses Kapitels wurde das Konzept der Grundvorstellungen als ganzheitliches didaktisches Modell des Mathematiklernens dargestellt und ein Bezug zu den verschiedenen theoretischen Perspektiven zu Transfer hergestellt. Auf der Basis des Grundvorstellungsmodells wurden *Transferprozesse* definiert als

*Prozesse der Anwendung oder Übertragung mathematischer Begriffe, Verfahren und Strukturen auf neue Anforderungssituationen zum Transfer zwischen Sach- und Anwendungskontexten, zum Transfer zwischen Darstellungen und Repräsentationsebenen sowie zum Herstellen und Begründen von mathematischen Zusammenhängen.*

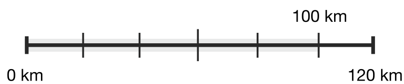
In diesem Zusammenhang wurde argumentiert, dass die Anwendung und Übertragung mathematischer Begriffe, Verfahren und Strukturen die Aktivierung von Grundvorstellungen erfordern und dadurch wechselseitig zum Aufbau, zur Entwicklung und zur Verknüpfung von Grundvorstellungen beitragen. Die didaktischen Analysen und empirischen Befunde zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs verdeutlichen diesen Zusammenhang und stellen heraus, dass die zentralen Elemente in der Zahlbegriffsentwicklung im Übersetzen zwischen Sachkontexten und Anwendungszusammenhängen sowie im Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen zum Aufbau mentaler Handlungsmodelle und deren Erweiterung und Vernetzung konzeptualisiert werden können.

Operative Anteilbildung:

**A1:**
Julia hat 6 Achtel von ihrer Pizza gegessen. Erkläre wie viel das ist. Du kannst auch zeichnen.

**A2:**
Jakob hilft seinem Vater beim Kuchenbacken. Für den Kuchen benötigen sie zwei Drittel von einem Paket Butter. Zeichne ein, wie groß das benötigte Stück Butter ist.


**A3:**
Svenja fährt mit ihrer Mutter im Zug von Bielefeld nach Hannover. Nach 50 min haben sie bereits fünf Sechstel der 120 km langen Strecke zurückgelegt. Wie viele km müssen sie noch fahren.




**A4:**
Jan und Lisa haben 10 Stunden in einem Jugendtreff gearbeitet. Jan hat vier Stunden gearbeitet und Lisa sechs Stunden. Zusammen erhalten sie 50 € als Lohn für ihre Arbeit. Sie wollen den Lohn gerecht nach der Anzahl der Stunden aufteilen, die sie jeweils gearbeitet haben. Wie viel € bekommt jeder?

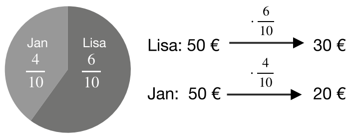



**Abbildung 2.19** Aufgabenserie zur operativen Anteilbildung

Der *Sachkontext* einer Aufgabe beinhaltet die situativen Eigenschaften einer Anforderung. Eine Anforderung kann einerseits innermathematisch oder als realer Sachverhalt formuliert sein. Wesentlich für den Transfer zwischen verschiedenen Sachkontexten sind die enthaltenen Größen, Darstellungen und weiteren bedeutungstragenden Elemente. Die Aufgabenbeispiele in Abbildung 2.19 sind jeweils mit Bezug zu einem alltagsbezogenen Sachkontext dargestellt, die an unterschiedliche *situative Handlungskonzepte* gebunden sind. In den Aufgaben 1 und 2 wird mit den Ausgangsgrößen (dem Ganzen) ein Bezug zu realen Gegenständen hergestellt: Zu einer Pizza, die als Kreisfläche repräsentiert werden kann und zu einem Stück Butter, das als Quader repräsentiert werden kann. Die Bildung eines Anteils ist in beiden Fällen mit der gegenständlichen Handlung des Schneidens in Teile verbunden. Demgegenüber sind die Ausgangsgrößen in den Aufgaben 3 und 4 keine gegenständlichen Repräsentationsobjekte, sondern kontinuierliche Größen: Eine Strecke mit 120 *km* Länge und ein Geldbetrag von 50 €. Das zentrale Handlungskonzept zum Umgang mit einer Strecke ist in den meisten Fällen das Messen einer Länge und in diesem Zusammenhang das Unterteilen (Segmentieren) in Teilstücke. Zum Aufteilen eines Geldbetrags hingegen muss kein realer Handlungsprozess zugrunde liegen. Das Aufteilen in unterschiedliche Stückelungen würde den Aufteilungsprozess sogar verkomplizieren. Insofern erfordert die Darstellung und Herstellung von Anteilen in den Aufgaben 3 und 4 die Nutzung abstrakter und symbolischer Repräsentationen.

Allen Aufgaben gemein ist die zugrundeliegende Herstellungshandlung, die unabhängig davon, ob der Anteil einer Pizza oder eines Geldbetrags berechnet werden soll, dem gleichen Prinzip folgt: Ein Ganzes wird in gleiche Teile geteilt und ein Teil vervielfacht. Die Übertragung dieses Verfahrens auf die Bestimmung von Anteilen verschiedener Größen trägt zur Erweiterung der Anwendungsbezüge und auf Ebene der mentalen Strukturen zur Ausbildung eines allgemeinen Denkmusters bzw. zur Abstraktion und damit zur Verallgemeinerung des Verfahrens bei. Die Unterschiede in den Anforderungen werden durch die situativen Handlungskonzepte der betrachteten Größe als Element des Sachzusammenhangs bestimmt.

Die Aufgabenserie in Abbildung 2.19 veranschaulicht zudem, dass das Übersetzen zwischen gegenständlichen, bildlichen und symbolischen Repräsentationen mit Transferprozessen verbunden ist. Der Transfer besteht hierbei im Wesentlichen in der Loslösung des mathematischen Objekts oder eines Verfahrens aus der ursprünglichen Darstellung und der Übertragung auf eine neue Darstellung. Dies erfordert in den meisten Fällen, das Übertragene an die Eigenschaften der neuen Darstellung anzupassen.

Respektive einer zunehmenden Verallgemeinerung besteht ein weitaus schwierigerer Transferprozess im Übergang von gegenständlichen zu abstrakten und symbo-

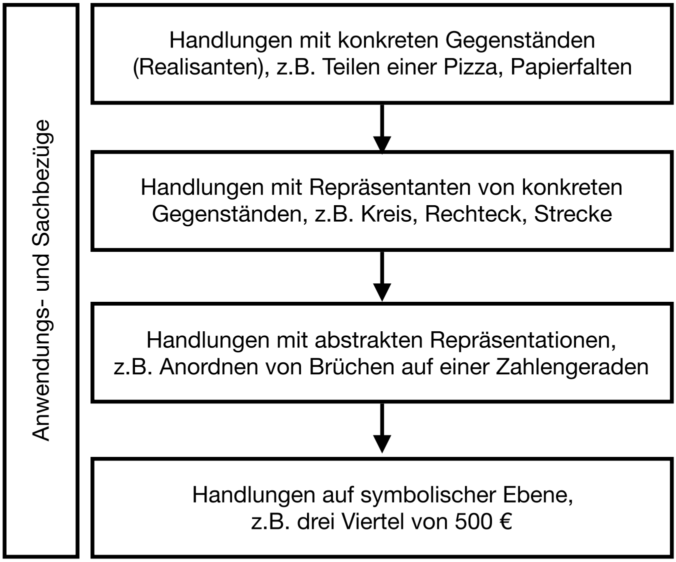



**Abbildung 2.20** Allgemeine Transferschritte zur Abstraktion und zunehmenden Verallgemeinerung eines Verfahrens

lischen Repräsentationen, zum Beispiel von dem Bruchteil einer Pizza zum Anteil einer beliebigen Größe.

Vor dem Hintergrund des Aufbaus von primären Grundvorstellungen, die an gegenständlichen Handlungserfahrungen der Lernenden anknüpfen, und der Überführung in sekundäre Grundvorstellungen, die auf mathematischen Operationen mit symbolischen Objekten beruhen, ohne dabei die anschauliche Vorstellungsgrundlage aufzugeben, werden Repräsentationswechsel in der fortschreitenden Begriffsbildung zumeist über sukzessive Abstraktionen konzeptualisiert (vgl. Abb. 2.20 und Abb. 2.21).

Die Aufgabenbeispiele zur Grundvorstellung des Erweitern als Verfeinern einer Einteilung in Abbildung 2.21 veranschaulichen diese Transferschritte. Ungeachtet der ikonischen Repräsentationsform als Rechteck wird in Aufgabe 1 durch das Papierfalten ein Bezug zu einer Handlung mit realen Gegenständen hergestellt. Durch das Falten eines Blatts Papier wird die Einteilung des Papiers zunehmend verfeinert, ohne dass der gefärbte Anteil verändert wird. Das repräsentierte Verfahren des Verfeinerns der Einteilung kann durch eine Handlung mit realen Gegenständen durchgeführt oder mental simuliert werden. Im Gegensatz dazu soll in Aufgabe

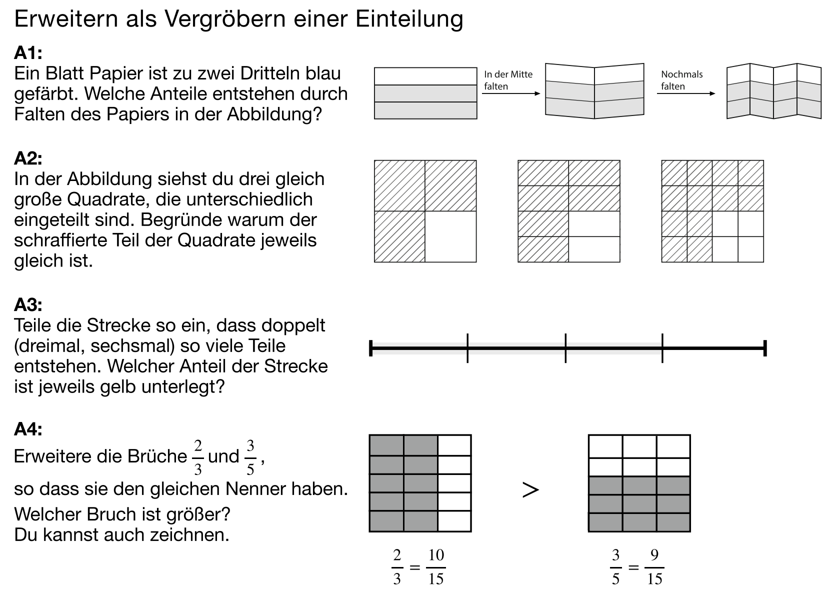



**Abbildung 2.21** Aufgabenserie zum Erweitern von Brüchen als Verfeinern der Einteilung

2 auf Grundlage von ikonischen Darstellungen argumentiert werden, warum die schraffierten Flächen jeweils gleich sind. Durch die Notation der jeweils schraffierten Anteile kann hier bereits eine Übersetzung in die symbolische Ebene erfolgen. Aufgabe 3 stellt einen Repräsentationswechsel dar, in dem die Handlung des Verfeinerns der Einteilung eines Rechtecks auf die die ikonische Darstellung einer Strecke thematisiert wird. Während das Vorgehen im Vergleich zum Falten eines Papiers oder Einteilen eines Rechtecks im Grunde die gleiche ist, so stellt eine Strecke ein unterschiedliches Handlungskonzept dar, da die Größe keine Fläche ist, sondern die Länge einer Strecke.

In Aufgabe 4 wird das Verfahren auf die symbolische Ebene übertragen. Die Brüche sollen so erweitert werden, dass sie einen gemeinsamen Nenner haben, um festzustellen, welches die größere der beiden Bruchzahlen ist. Dieser Vergleich auf symbolischer Ebene kann durch das Übersetzen auf die ikonische Repräsentationsebene veranschaulicht werden und das Erweitern der Bruchzahlen auf einen Hauptnenner als Herstellen einer gemeinsamen Einteilung vergegenwärtigt werden. Ein wesentlicher Transferprozess hierbei besteht in der *Verknüpfung der Handlung auf*

*Darstellungsebene mit dem symbolischen Verfahren der Multiplikation von Zähler und Nenner mit demselben Faktor*.

Die Beispiele zeigen auf, dass Transferprozesse auf normativer Ebene im Rahmen von sachanalytischen Überlegungen beschrieben werden können. Ziel dieser Überlegungen ist es, möglichst genau zu beschreiben,

- worin der *konzeptuelle Kern* als Gegenstand eines Transfers besteht, d. h. welche *Begriffsaspekte, Verfahren oder Strukturen* übertragen werden sollen,
- welche Übersetzungen auf Ebene des *Sachkontexts* respektive der mit ihnen verbundenen *situativen Handlungskonzepte* sowie zwischen *Darstellungen und Repräsentationsebenen* erforderlich sind und
- welche möglichen Schwierigkeiten, Übergeneralisierungen und fehlerhafte Übertragungen zu erwarten sind.

## 2.4 Fazit und Forschungsdesiderata

Das Konzept der Grundvorstellungen als mathematikdidaktisches Modell mit langer Tradition ermöglicht die Integration verschiedener psychologischer und didaktischer Modelle und Perspektiven in eine ganzheitliche Sichtweise vom Mathematiklernen. Während das Modell der Subjektiven Erfahrungsbereiche und die AOT Perspektive ausschließlich auf einer deskriptiven Ebene arbeiten, um das Handeln der Lernenden zu erklären, steht im Grundvorstellungskonzept der mathematische Inhalt als Kern didaktischen Handelns im Vordergrund. Ziel ist es, vom mathematischen Inhalt ausgehend Grundvorstellungen als normative Kategorien zu entwickeln, die der Erfahrungswelt der Lernenden entsprechen und gleichzeitig den mathematischen Kern sachadäquat repräsentieren. Grundvorstellungen sind somit prototypische mentale Modelle, die es Lernenden ermöglichen sollen mathematische Begriffe, Verfahren und Strukturen zu verstehen und diese in Sachzusammenhängen anzuwenden. Der stoffdidaktischen Analyse des mathematischen Kerns wird eine deskriptive Ebene der individuellen Vorstellungen der Lernenden gegenübergestellt. Durch die Analyse von Bearbeitungsprozessen der Lernenden sollen mit inhaltsanalytischen und interpretativen Methoden die tatsächlichen Vorstellungen und Erklärungsmodelle der Lernenden rekonstruiert werden, um Divergenzen zwischen den normativ angezielten Grundvorstellungen zu identifizieren und Maßnahmen zur konstruktiven Unterstützung von Lernprozessen und auch dem Transfer auf neue Anwendungszusammenhänge abzuleiten.

In diesem Zusammenhang spannt das Grundvorstellungskonzept einen Rahmen auf zur Analyse der Handlungen von Lernenden in Hinsicht auf das didaktische Ziel der Ausbildung von sachadäquaten Grundvorstellungen als prototypische mentale Repräsentationen mathematischer Inhalte, die es ermöglichen sollen entsprechende Strukturen in Sachzusammenhängen zu erfassen und mathematische Begriffe, Verfahren und Beziehungen anzuwenden.

Die didaktischen Analysen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs machen deutlich, dass die Ausbildung eines tragfähigen und flexiblen Verständnisses von Bruchzahlen verschiedene Transferprozesse erfordert. Diese Transferprozesse können auf normativer Ebene, d. h. auf Grundlage sachanalytischer und stoffdidaktischer Überlegungen in der Übertragung von spezifischen Begriffsaspekten, Verfahren und Struktureigenschaften auf Aufgabenebene beschrieben werden und charakterisieren wichtige Schritte im Rahmen einer langfristigen und sukzessiven Entwicklung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. Der Prozess des Transfers von Begriffsaspekten, Verfahren und Strukturen beruht dabei im Wesentlichen auf den individuellen Erklärungsmodellen der Lernenden, die durch Transferprozesse ausgeschärft, erweitert und miteinander vernetzt werden sollen.

Der umfassende Korpus an empirischen Untersuchungen beschreibt ausführlich verschiedene Hürden, Schwierigkeiten und Problembereiche in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs, die in vielen Fällen auf fehlerhafte Übertragungen von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen (negativen Transfer), das Ausbleiben von Transfer sowie fehlerhafte Anpassungen von Struktur- und Operationskonzepten beschrieben werden, so dass notwendige Grundvorstellungserweiterungen und Grundvorstellungsanpassungen ausbleiben und Fehlvorstellungen und fehlerhafte Strategien entwickelt werden.

**Forschungsdesiderata**

Vor dem Hintergrund des Grundvorstellungskonzepts ist es möglich auf normativer Ebene Transferprozesse auf der Basis sachanalytischer Überlegungen in Hinsicht auf ein didaktisches Ziel zu beschreiben. Mit Blick auf die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs als Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen auf die positiven rationalen lassen sich folgende Forschungsdesiderata herausstellen:

*Transferprozesse in der Ausbildung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen:* Die Vielzahl der vorliegenden quantitativen Studien zum Bruchzahlbegriff beschreiben und vergleichen Kompetenzen und Leistungsstände der Lernenden zu einem bestimmten Zeitpunkt. In qualitativen Untersuchungen werden zudem individuelle Erklärungsmodelle und Vorstellungen der Lernenden analysiert und auf Grundlage der beobachteten Bearbeitungsstrategien und Argumentationsstrukturen vornehmlich der zum Zeitpunkt der Erhebung aktuelle Stand der Konzeptentwicklung festgestellt. Es finden sich nur wenige empirische Studien, die die längerfristige Entwicklung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen auf individueller Ebene untersuchen. Vor diesem Hintergrund finden sich bisher keine spezifischen Untersuchungen von Transferprozessen in der Entwicklung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. Die Analyse von Transferprozessen verspricht eine hochauflösende Sicht auf die Begriffsentwicklung der Lernenden zu ermöglichen, auf deren Grundlage individuelle Entwicklungsverläufe im Aufbau tragfähiger und flexibler Vorstellungen beschrieben und Unterstützungsmaßnahmen abgeleitet werden können.

*Entwicklung von Fehlvorstellungen und Fehlerstrategien durch ausbleibende und negative Transferprozesse:* Der empirische Korpus zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs beschreibt eine Vielzahl von fehlerhaften Denkmustern bzw. Fehlvorstellungen und Fehlerstrategien, die Lernende entwickeln. In vielen Fällen werden die Probleme der Lernenden auf fehlerhafte Übertragungen von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen erklärt und auf die unzureichende Ausbildung von Grundvorstellungen zurückgeführt. Die Entwicklung von Fehlvorstellungen und Fehlerstrategien wird dabei zumeist als Ergebnis ausbleibenden oder negativen Transfers im Anschluss an eine Unterrichtseinheit oder mit zeitlichem Abstand zu einer Unterrichtseinheit festgestellt. Somit ermöglichen nur wenige Studien einen Einblick in die tatsächlichen Entstehungsgeschichte. Es finden sich zum Beispiel nur wenige Erkenntnisse darüber, ob die Schwierigkeiten bereits zu Beginn der Einführung von Bruchzahlen entstehen oder ob sie durch Übergeneralisierungen über den Verlauf des Unterrichts entwickelt werden.

# 3 Konzeption und Anlage der Studie

In diesem Kapitel werden die Konzeption und die Anlage der empirischen Studie dargestellt. Dazu erfolgt zunächst eine Konkretisierung der Fragestellung. Darauf aufbauend werden im nachfolgenden Abschnitt die Anlage und der Ablauf der Studie beschrieben, bevor die Erhebungsinstrumente, die eingesetzten Materialien sowie die Methoden zur Datenauswertung eingehend erläutert werden.

## 3.1 Konkretisierung der Fragestellung

Die dargestellten theoretischen Perspektiven zeigen auf, dass die Fähigkeit bestehendes Wissen in neuen Situationen zu aktivieren und anzuwenden, im Wesentlichen von der Qualität der vorhandenen Wissensstrukturen abhängt. Sie müssen tragfähig, hinreichend vernetzt und flexibel sein, um auf neue Anforderungssituationen übertragen werden zu können. Insbesondere im Hinblick auf ein fortgesetztes Mathematiklernen erfordert dies eine stetige Weiterentwicklung, Reorganisation und Anpassung vorhandener mentaler Wissensrepräsentationen. Aus mathematikdidaktischer Perspektive kann der Aufbau tragfähiger mentaler Modelle als Ausbilden von Grundvorstellungen beschrieben werden. In diesem Zusammenhang wurde herausgestellt, dass es hilfreich erscheint, Transfer nicht als ein Produkt von Lernen im Sinne einer abgeschlossenen Transferleistung zu betrachten, sondern als einen Prozess der Übertragung und des Anknüpfens an vorhandene Wissensstrukturen zu konzeptualisieren:

---

**Elektronisches Zusatzmaterial** Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, das berechtigten Benutzern zur Verfügung steht https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_3.



S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs,* Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_3

> Ein Transferprozess ist der Prozess der Anwendung oder Übertragung mathematischer Begriffe, Verfahren und Strukturen auf eine neue Anforderungssituation. Diese Prozesse können umfassen:
>
> - Den Transfer zwischen Sach- und Anwendungskontexten,
> - den Transfer zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen sowie
> - das Herstellen und Begründen von mathematischen Zusammenhängen.

Ausgehend von dieser Definition lassen sich die Forschungsfragen der empirischen Studie auf normativer und deskriptiver Ebene formulieren. Die erste Frage betrifft die normative Beschreibung von Transferprozessen im Rahmen von sachanalytischen Überlegungen:

***Frage 1:*** Welche Transferprozesse sind zur Lösung einer neuen Anforderung aus normativer Sicht erforderlich und welche Grundvorstellungen werden dafür benötigt?

- Worin besteht der *konzeptuelle Kern* als Gegenstand eines Transfers, d. h. welche *Begriffsaspekte, Verfahren oder Strukturen* sollen übertragen werden?
- Welche Transferprozesse sind auf Ebene des *Sachkontexts* respektive der mit ihnen verbundenen *situativen Handlungskonzepte* sowie zwischen *Darstellungen und Repräsentationsebenen* erforderlich?
- Welche möglichen Schwierigkeiten, Übergeneralisierungen und fehlerhafte Übertragungen sind zu erwarten?

Die Diskussion verschiedener Theorien und Erklärungsmodelle von Transfer führt zu der Annahme, dass zum Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff verschiedene Transferprozesse zur Erweiterung und Vernetzung von Begriffsaspekten erforderlich sind. Zudem kann angenommen werden, dass diese Transferprozesse sich sehr individuell, d. h. in Abhängigkeit von individuellen Erklärungsmodellen und über einen längeren Zeitraum entwickeln und sich in den Interaktionen von Lernenden dokumentieren und analysieren lassen.

Hinsichtlich der deskriptiven Untersuchung im Rahmen von interaktiven Bearbeitungsprozessen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht kann das zentrale Forschungsinteresse der Studie in den folgenden Forschungsfragen konkretisiert werden. Diese betreffen die Rekonstruktion von Transferprozessen und der zugrundeliegenden individuellen Deutungs- und Erklärungsmodelle der Lernenden (Frage 2), den Vergleich der auf normativer Ebene intendierten Transferprozesse mit den auf deskriptiver Ebene rekonstruierten Transferprozessen der Lernenden (Frage 3) sowie den Zusammenhang zwischen Transferprozessen und der Entwicklung von Grundvorstellungen von Brüchen und dem Umgang mit ihnen (Frage 4).

***Frage 2:*** Welche Transferprozesse können in den individuellen Bearbeitungsprozessen der Lernenden dokumentiert werden?

- Welche transferrelevanten individuellen Erklärungsmodelle und Deutungen von Brüchen und dem Umgang mit Brüchen können in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden rekonstruiert werden?

***Frage 3:*** Inwieweit entsprechen die individuellen Transferprozesse der Lernenden den intendierten Transferprozessen?

- Welche Zusammenhänge können zwischen den Transferprozessen und den individuellen Deutungs- und Erklärungsmodellen der Lernenden hergestellt werden?

***Frage 4:*** Worauf sind etwaige Divergenzen zwischen den intendierten Transferprozessen und den in den Bearbeitungen der Lernenden dokumentierten Transferprozessen zurückzuführen?

- Inwieweit kann eine Beziehung zwischen ausbleibenden, negativen und nicht intendierten Transferprozessen und fehlerhaften Deutungs- und Erklärungsmodellen der Lernenden hergestellt werden?

## 3.2 Konzeption und Anlage der empirischen Studie

Vor dem Hintergrund des dargestellten Forschungsinteresses und der herausgearbeiteten Forschungsdesiderata wird die Studie in einem authentischen Unterrichtszusammenhang mit Schülerinnen und Schülern einer fünften Klasse eines städtischen Gymnasiums durchgeführt. Mithilfe von Bild- und Tonaufzeichnungen werden die Partnerarbeiten der Schülerinnen und Schüler erfasst, die zusammen mit den schriftlichen Arbeitsprodukten die Datengrundlage für qualitative Analysen der Bearbeitungsprozesse darstellen. Es wird ein qualitatives Untersuchungsdesign gewählt, da das Kerninteresse der Untersuchung in der detaillierten Analyse der Bearbeitungen und Lösungsprozesse liegt. Durch die Analyse der Prozessdaten der Lernenden sollen Transferprozesse identifiziert und weiterführenden Analysen zugänglich gemacht werden.

**Studiendesign:** Grundlage für die Studie ist eine Unterrichtseinheit zur Einführung des Bruchzahlbegriffs, die in den regulären Mathematikunterricht einer fünften Klasse eingebunden ist [1]. Die Unterrichtseinheit wird vom regulären Fachlehrer der Klasse durchgeführt und es werden keine außerplanmäßigen oder zusätzlichen Unterrichtsstunden in Anspruch genommen. Zur Kontrolle der im Unterricht eingesetzten Materialien und Aufgaben wurden die Inhalte, Themen und der Verlauf der Unterrichtseinheit mit dem Mathematiklehrer besprochen und in Form eines Arbeitsbuches festgehalten, das das reguläre Lehrwerk für die Unterrichtseinheit ersetzt. Zu Beginn der Unterrichtseinheit wird mit einem Vortest das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu elementaren Grundkenntnissen und Vorstellungen zu Bruchzahlen erhoben. Zur Dokumentation der individuellen Lernfortschritte wird die Unterrichtseinheit mit einem parallelisierten Nachtest abgeschlossen.

Im Rahmen des Unterrichts werden zu drei Zeitpunkten Datenerhebungen durchgeführt. Die Datenerhebungen sind mit der Einführung bestimmter Inhaltsaspekte koordiniert und finden im Rahmen von Doppelstunden mit einem Zeitumfang von 90 Minuten statt. In diesen Doppelstunden arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Paaren, die über alle drei Erhebungszeitpunkte möglichst beibehalten werden. Die Zusammenstellung der Paare wird auf Grundlage der persönlichen Präferenzen der Schülerinnen und Schüler vorgenommen um möglichst harmonische und hemmungsarme Paarkonstellationen zu erhalten. Dadurch sollen soziale Aspekte des Lernprozesses hervorgehoben werden, die eine regelmäßige Interaktion und somit die Gewinnung authentischer Daten gewährleisten sollen.

Die Erhebungssitzungen sind in eine Lern- und eine Anwendungsphase geteilt. In der Lernphase erarbeiten die Schülerinnen und Schüler einen zentralen konzeptionellen Inhalt anhand von interaktiven animierten Lösungsbeispielen, deren Verarbeitung von fokussierenden Fragestellungen unterstützt wird. Der Übergang in die Anwendungsphase wird durch die Bearbeitung von unvollständigen Lösungsbeispielen („fading examples") gestaltet, die analog zu den Lösungsbeispielen der Einführung sind und in denen Teile des Lösungsweges ausgeblendet sind, die von den Schülerinnen und Schülern ergänzt werden sollen. In der Anwendungsphase bearbeiten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Übungs- und Transferaufgaben, in denen die Inhalte der Lernphase auf neue Anforderungssituationen über-

[1] Da das schulinterne Curriculum die Inhalte der durchgeführten Unterrichtseinheit auf die Jahrgangsstufen 5 und 6 aufteilt, wurde in Kooperation mit dem Fachlehrer, der Schulleitung und den Eltern der Schülerinnen und Schülern eine Ausnahmeregelung getroffen.

tragen werden sollen. Die Transferaufgaben gehen dabei über die Reproduktion der Inhalte der Lernphase hinaus und erfordern Transferprozesse auf Ebene des Sachkontexts und der Darstellung.

**Untersuchungsgruppe:** Die Untersuchungsgruppe stellen 17 Schülerinnen und 13 Schüler einer fünften Klasse eines städtischen Gymnasiums. Abgesehen von der Behandlung von Alltagsbrüchen haben die Schülerinnen und Schüler keinen systematischen Unterricht zum Bruchzahlbegriff erhalten.

Die Schülerinnen und Schüler der Klasse werden durch den Klassenlehrer als eine sehr heterogene Gruppe beschrieben, in der das Leistungsspektrum im Fach Mathematik von sehr starken bis zu sehr schwachen Leistungen abgedeckt wird. Eine Grundvoraussetzung für die Auswahl der Untersuchungsgruppe ist eine hohe Bereitschaft zur Interaktion miteinander sowie gute kommunikative Fähigkeiten.

**Entwicklung der Unterrichts- und Studienmaterialien:** Die Unterrichts- und Studienmaterialien wurden hinsichtlich eines sukzessiven Aufbaus von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen erstellt. Auf Grundlage eines Schulbuchs (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a) wurde ein Arbeitsbuch zusammengestellt, das die Grundlage für den Klassenunterricht stellt. Neben dem Arbeitsbuch und den Studienmaterialien werden keine weiteren Arbeitsmittel eingesetzt. Auf diese Weise wird die Sequenz der Unterrichtsinhalte festgelegt und die Einheitlichkeit der genutzten Repräsentationen und Darstellungen sichergestellt. Die Materialien der Lern- und Anwendungsphasen in den Datenerhebungen sind ebenfalls im Arbeitsbuch enthalten. Die digitalen animierten Lösungsbeispiele für die Lernphasen der Erhebungssitzungen sind als Begleitmaterial für das Schulbuch entwickelt worden, das dem Arbeitsbuch zugrunde liegt. Lediglich die unvollständigen Beispiele sind nicht Inhalt des Arbeitsbuchs, diese wurden auf Grundlage der Lösungsbeispiele konzipiert.

Die Aufgaben im Vor- und Nachtest stammen zu einem großen Teil aus pilotierten Aufgabensammlungen (Pekrun et al., 2006; Pallack, vom Hofe & Salle, 2013; Salle, 2015) und wurden durch wenige weitere Items ergänzt.

**Datenerhebung:** Die Vor- und Nachtests werden mit einem Zeitumfang von 45 min im Klassenunterricht bearbeitet. Die Erhebungssitzungen werden in zwei Computerarbeitsräumen durchgeführt, in denen die Schülerpaare vor jeweils einem Computer arbeiten, an dem die Schülerinnen und Schüler über die gesamte Zeit Zugriff auf das digitale animierte Lösungsbeispiel der Lernphase haben und eigenständig mit diesem arbeiten und im weiteren Sitzungsverlauf auf diese zurückgreifen können. Die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele sowie der weiterführenden Transferaufgaben erfolgt in einem Arbeitsheft in Papierform, sodass die schriftlichen Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler erfasst werden können. Während der gesamten Erhebungssitzung werden durch eine Webcam und Mikrofone die Interaktionen der Partnerarbeiten in Bild und Ton aufgezeichnet, wodurch sie gemeinsam mit den schriftlichen Schülerprodukten die Datengrundlage für qualitative Analysen zur Rekonstruktion der Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler darstellen. Zur Förderung der Interaktion zwischen den Schülerinnen und Schülern werden sie während der Erhebungssitzungen regelmäßig daran erinnert, dass sie die Aufgaben nicht allein bearbeiten sollen, sondern sich mit ihren Partnerinnen und Partnern über die Lösungswege und Ergebnisse austauschen und diese einander erklären sollen.

In den Phasen der Datenerhebung ist eine zweite Lehrkraft anwesend, sodass in allen Räumen, in denen die Schülerinnen und Schüler arbeiten eine Ansprechperson anwesend ist, die bei technischen Problemen oder organisatorischen Fragen helfen kann und die Arbeitsphase überwacht. Die anwesenden Lehrkräfte geben, anders als im Regelunterricht, keine Hinweise und Tipps für die Lösung von Aufgaben. Sie dürfen einzig darauf hinweisen, dass die Schülerinnen und Schüler sich noch einmal das Lösungsbeispiel anschauen können.

**Einbettung in den Klassenunterricht:** Durch die Einbindung der Studie in den Klassenunterricht soll die Authentizität der erhobenen Daten sicher gestellt werden. Der Unterricht wird durch den regulären Mathematiklehrer der Klasse durchgeführt. Die Schüler arbeiten, wie sie es gewohnt sind, in unterschiedlichen Arbeitsformaten, d. h. Einzel-, Partner- und Gruppeneinheit sowie im Plenum. In Partner- und Gruppenarbeiten während des regulären Unterrichts wird nicht darauf geachtet, dass die Schülerinnen und Schüler stets in denselben Paarzusammensetzungen arbeiten, dies ist lediglich für die Phasen der Datenerhebungen vorgesehen.

Durch die kooperative Arbeit in den Erhebungssitzungen sollen authentische Interaktionen der Lernenden gefördert werden, die eine Möglichkeit bieten sollen Einsichten in komplexe Unterrichtssituationen und Daten zu individuellen Bearbeitungs- und Argumentationsprozessen zu gewinnen, die deskriptive Analysen individuellen Lernprozesse ermöglichen.

### 3.2.1 Anlage der empirischen Studie

In diesem Abschnitt werden die Durchführung der empirischen Studie und die Datenerhebung beschrieben. Dazu werden zunächst der Ablauf der Studie und die inhaltliche Strukturierung der Unterrichtseinheit dargestellt. Es schließen Beschreibungen der Erhebungsinstrumente und Methoden zur Datenerhebung an.

### 3.2.2 Ablauf der Studie und inhaltliche Strukturierung der Unterrichtseinheit

Im Folgenden werden die einzelnen Phasen der Studie in chronologischer Reihenfolge (Abb. 3.1) dargestellt und die konkreten Unterrichtsinhalte näher beschrieben.

**1. Erhebung des Vorwissens:** Zu Beginn der Unterrichtseinheit wird das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu Brüchen in einem schriftlichen Test erhoben. Dieser dient einerseits zur Charakterisierung des Leistungsstands der Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Unterrichtseinheit. Zum Anderen soll die Erhebung des Vorwissensstandes die Einordnung der in der erhobenen Prozessdaten ermöglichen. Die Konstruktion des Tests wird in Abschnitt 3.3.1 näher erläutert. Den Lernenden stehen 45 Minuten für die Bearbeitung des Vortests zur Verfügung.

**2. Arbeit im Klassenunterricht:** Im Anschluss an die Erhebung des Vorwissens wird im Klassenunterricht anhand des Arbeitsbuches im Rahmen von zwei Unterrichtsstunden die *Herstellung von Stammbrüchen* erarbeitet. Die Bildung des Anteils wird an Kreis-, Rechtecks- sowie weiteren zweidimensionalen und dreidimensionalen Repräsentationen veranschaulicht. Es wird zudem das Ergänzen von Stammbrüchen zu einem Ganzen thematisiert.

**3. Erste Datenerhebung im Rahmen der Einführung von echten Brüchen:** Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten in Paaren anhand eines interaktiven animierten Lösungsbeispiels die Herstellung von echten Brüchen. Dabei wird der Begriff des Stammbruchs erweitert und die Bruchherstellung um den zweiten Operator zum Vervielfachen eines Teils ergänzt. Es werden die zuvor verwendeten Repräsentationen aufgegriffen und um die Darstellung der Bruchherstellung Pfeildiagrammen erweitert, die die Herstellungshandlungen als einen aus zwei Teiloperatoren zusammengesetzten Prozess veranschaulichen. In den Übungs- und Transferaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Brüche und ihre Herstellung ikonisch darstellen, Brüche aus ikonischen Darstellungen ablesen und ihrer Herstellung erläutern, zwischen verschiedenen ikonischen Bruchdarstellungen übersetzen und echte Brüche zu einem Ganzen ergänzen. Die Schülerpaare arbeiten 90 Minuten lang in einem Arbeitsheft und mit einem Computer, auf dem sie jederzeit Zugriff auf das interaktive animierte Lösungsbeispiel haben.

| | |
|---|---|
| **Vortest** | 45 min |
| **Klassenunterricht:**<br>Bruch als Teil eines Ganzen – Stammbrüche | 90 min |
| **1. Datenerhebung:**<br>Bruch als Teil eines Ganzen – Echte Brüche | 90 min |
| **Klassenunterricht:**<br>Bruch als Teil eines Ganzen – Echte Brüche<br>Bruch als Teil eines Ganzen – Unechte Brüche und gemischte Schreibweise<br>Bruch als Teil eines Ganzen – Brüche als Maßzahlen in Größenangaben<br>Bruch als Teil mehrerer Ganzer | 360 min |
| **2. Datenerhebung:**<br>Bruch als Operator – Anteile von beliebigen Größen | 90 min |
| **Klassenunterricht:**<br>Bruch als Operator – Anteile von beliebigen Größen<br>Äquivalente Bruchzahldarstellungen<br>Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung | 135 min |
| **3. Datenerhebung:**<br>Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung | 90 min |
| **Klassenunterricht:**<br>Erweitern und Kürzen als Verfeinern und Vergröbern einer Einteilung<br>Größenvergleich und Ordnen von Brüchen | 180 min |
| **Nachtest** | 45 min |

**Abbildung 3.1** Chronologische Übersicht des Studienablaufs

**4. Arbeit im Klassenunterricht:** Anhand des Arbeitsbuchs werden im Rahmen acht Unterrichtsstunden unechte Brüche, Brüche als Maßzahlen in Größenangaben und Brüche als Teile mehrerer Ganzer erarbeitet. Dabei werden unter dem inhaltlichen Aspekt *unechte Brüche und gemischte Schreibweise* verschiedene Arten der Angabe unechter Brüche erarbeitet. Hierbei wird insbesondere die Verknüpfung der ikonischen und symbolischen Repräsentationsebenen sowie die Umwandlung der unterschiedlichen symbolischen Schreibweisen thematisiert. Zudem wird auch die Ergänzung von unechten Brüchen zum nächsten Ganzen behandelt.

Unter dem Aspekt *Brüche als Maßzahlen in Größenangaben* werden Brüche als Anteile bekannter Größen eingeführt. Dabei wird das Ganze als Maßeinheit angegeben und Umwandlungen in kleinere Einheiten behandelt. Zur Veranschaulichung werden ikonische Rechtecks- und Streckenrepräsentationen eingesetzt, anhand derer auch Ergänzungen zu einem Ganzen thematisiert werden.

Auf verschiedenen Sachkontexten aufbauend werden im Anschluss anhand von Aufteilungssituationen *Brüche als Teile mehrerer Ganzer* eingeführt. Die Anteilherstellung wird anhand von ikonischen Repräsentanten konkreter Objekte eingeführt und im weiteren Verlauf auf Maßzahlen erweitert. Zudem wird der Zusammenhang zwischen Brüchen und Divisionsaufgaben hergestellt.

**5. Zweite Datenerhebung im Rahmen der Einführung von Brüchen als Teile beliebiger Größen:** Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten in Paaren anhand eines interaktiven animierten Lösungsbeispiels die Bestimmung von *Brüchen als Teile beliebiger Größen*. Hierbei steht die Grundvorstellung vom Bruch als Operator im Zentrum und das zuvor eingeführte Pfeildiagramm wird aufgegriffen und zur Veranschaulichung und Lösungshilfe zur Bestimmung von Anteilen beliebiger Größen eingesetzt. Es sollen Anteile verschiedener Größen und mehrerer Ganzer bestimmt werden sowie von einem Anteil auf das Ganze geschlossen werden. Auch hier arbeiten die Lernendenpaare 90 Minuten lang in einem Arbeitsheft und mit einem Computer, auf dem sie jederzeit Zugriff auf das interaktive animierte Lösungsbeispiel haben.

**6. Arbeit im Klassenunterricht:** Anhand des Arbeitsbuches wird in drei Unterrichtsstunden das *Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung* eingeführt. Dazu werden zunächst äquivalente Brüche thematisiert und anhand ikonischer Bruchdarstellungen erarbeitet, dass Anteile durch beliebige Brüche angegeben werden können. Im Zentrum steht weiterhin das ikonische Verfeinern einer Einteilung, dass abschließend in Beziehung zum symbolischen Erweitern von Brüchen als Multiplikation von Zähler und Nenner mit demselben Faktor gesetzt wird.

**7. Dritte Datenerhebung im Rahmen der Einführung des Kürzens von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung:** In der dritten Doppelstunde zur Datenerhebung erarbeiten die Schülerinnen und Schüler zunächst anhand eines interaktiven animierten Lösungsbeispiels das Verfahren zum Vergröbern einer Einteilung einer ikonischen Bruchdarstellung in einem Rechteck und setzen es mit dem Kürzen von Brüchen auf symbolischer Ebene in Beziehung. Die Einführung des Kürzens bzw. Vergröberns einer Einteilung erfolgt analog zur Einführung des Erweiterns als Verfeinern einer Einteilung. Die nachfolgenden Transferaufgaben thematisieren die Übertragung des Verfahrens auf die ikonische Darstellung in einem Kreis und an einer Strecke, die Übertragung des Erweiterns und Kürzens zur Bestimmung eines Zwischenbruchs im Sachkontext und zum Größenvergleich und Ordnen von Brüchen, das bis zu diesem Zeitpunkt nicht im Unterricht behandelt wurde.

**8. Arbeit im Klassenunterricht:** In vier weiteren Unterrichtsstunden im Klassenunterricht vertiefen die Schülerinnen und Schüler anhand des Arbeitsbuches die Verfahren zum Erweitern und Kürzen und erarbeiten verschiedene Strategien zum Größenvergleich von Brüchen als letzten inhaltlichen Teil der Unterrichtseinheit. Dazu stellen sie Brüche als Punkte auf einem Zahlenstrahl dar, vergleichen ikonische Bruchdarstellungen, bestimmen Brüche, die kleiner oder größer als vorgegebene andere Brüche sind, und vergleichen Brüche auf symbolischer Ebene.

**9. Nachtest:** Für den Nachtest steht den Lernenden eine Unterrichtsstunde mit 45 Minuten zur Verfügung. Neben parallelen Items zum Vortest enthält der Nachtest weitere Items, in denen die Schülerinnen und Schüler bestimmte Sachverhalte begründen sollen.

### 3.2.3 Arbeitsbuch für die Unterrichtseinheit

Die gesamte Unterrichtseinheit wird unter Verwendung eines Arbeitsbuches durchgeführt, das das reguläre Mathematikbuch für diesen Zeitraum ersetzt. Das Arbeitsbuch wurde in Absprache mit der unterrichtenden Lehrkraft entsprechend der vorgesehenen inhaltlichen Strukturierung auf Grundlage der Lehrbücher MATHEMATIK HEUTE 5 (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a) und MATHEMATIK HEUTE 6 (vom Hofe et al., 2012b) zusammengestellt. Das Arbeitsbuch umfasst folgende Inhalte:

1. Teile von Ganzen: Zerlegen eines Ganzen in Halbe, Drittel, Viertel, ... (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 170 ff.)

2. Teile von Ganzen: Vielfache von Halben, Dritteln, Vierteln, ... Zähler kleiner als Nenner (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 173 ff.)
3. Brüche als Maßzahlen in Größenangaben (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 179 f.)
4. Brüche als Teile mehrerer Ganzer (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 181 f.)
5. Bestimmen eines Teils einer beliebigen Größe (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 183 ff.)
6. Derselbe Anteil – verschiedene Brüche: Gleichheit von Anteilen – Brüche mit gleichem Wert (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 186)
7. Erweitern eines Bruchs (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 187 f.)
8. Kürzen eines Bruchs (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 189 f.)
9. Darstellen von Bruchzahlen am Zahlenstrahl (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel 2012b, S. 63 f.)
10. Vergleichen und Ordnen von gewöhnlichen Brüchen (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel 2012b, S. 65 ff.)
11. Addieren und Subtrahieren von Brüchen mit gleichem Nenner (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 191 f.)
12. Vermischte und komplexe Übungen (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 193)
13. Was du gelernt hast (mit Ergänzungen zu vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 194)
14. Bist du fit? (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a, S. 195)

Das Arbeitsbuch dient dem Lehrer als Grundlage für den Unterricht und enthält alle in der Studie verwendeten Lösungsbeispiele als statische Abbildungen sowie alle in den Arbeitsheften zur Datenerhebung verwendeten Aufgabenstellungen. In Ergänzung zu dem verwendeten Arbeitsbuch stehen der Lehrkraft zusätzlich die interaktiven animierten Lösungsbeispiele zu den im Arbeitsbuch enthaltenen statischen Lösungsbeispielen zu Präsentationszwecken zur Verfügung. In der Unterrichtseinheit werden keine zusätzlichen (Arbeits-) Materialien eingesetzt.

## 3.3 Erhebungsinstrumente

In diesem Abschnitt werden die Instrumente dargestellt, mit denen in der Studie Daten erhoben werden. Diese umfassen den Vor- und Nachtest zur Ermittlung des Vorwissens und der Leistungsentwicklung der Lernenden, die Arbeitshefte, in denen die Lernenden in den Sitzungen der Datenerhebung arbeiten, sowie das technische Vorgehen zur Videographie der Partnerarbeiten.

### 3.3.1 Vor- und Nachtest

Um zum einen die Vorkenntnisse der Lernenden zu Brüchen im Vorfeld der Unterricht zu beschreiben und den Kenntnisstand der Lernenden zum Abschluss der Unterrichtseinheit zu charakterisieren, wird die Unterrichtseinheit von zwei schriftlichen Tests gerahmt. Zum anderen sollen die Daten der schriftlichen Tests die Einordnung der erhobenen Prozessdaten unterstützen.

Die Konstruktion der Tests erfolgte auf Grundlage von erprobten Testitems aus der Längsschnittstudie PALMA (u. a. Pekrun et al., 2006; Wartha, 2007) und der Studie von Salle (2015). Zur Identifikation weiterer inhaltlicher Kompetenzen wurden unter Berücksichtigung fachdidaktischer Ergebnisse zusätzliche Testitems konzipiert, die jedoch nicht für den Vergleich der Leistungen in Vor- und Nachtest herangezogen werden.

Zum Herstellen der Vergleichbarkeit von Vor- und Nachtest wurden zu den zentralen inhaltlichen Kompetenzen parallele Items bzw. Itemgruppen eingesetzt, deren Lösungshäufigkeiten und Itemschwierigkeiten annähernd gleich sind. Die parallelen Items unterscheiden sich lediglich in den verwendeten Daten und Zahlen. Die parallelisierten Itemgruppen beziehen sich auf die folgenden inhaltlichen Bereiche:

- *Ablesen von Bruchteilen* echter Brüche aus unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen (6 Items)
- *Einzeichnen und Einfärben von Bruchteilen* in unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen (6 Items)
- *Ein- und mehrschrittige Sachaufgaben* mit Kontexten aus den Bereichen Geldwerte und Längen (3 Items)
- *Begründungsaufgaben zum Größenvergleich* von Stammbrüchen, echten Brüchen mit gleichem Zähler und anderen Brüchen (3 Items)
- *Ergänzen von Multiplikations- und Divisionsoperatoren* in Pfeildarstellungen (2 Items)

Neben den parallelisierten Items und Itemgruppen sind im Vortest zusätzliche Items zum Rechnen (4 Items) mit und Ordnen (2 Items) von natürlichen Zahlen enthalten. Der Nachtest enthält zudem zusätzliche Items zu inhaltlichen Bereichen der Unterrichtseinheit. Diese umfassen

- das Ablesen und unechten Brüchen aus ikonischen Repräsentationen und die Notation in gemischter Schreibweise (3 Items),
- das Einteilen und Einfärben von Anteilen in unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen (4 Items),
- das Bestimmen eines Teils mehrerer Ganzer (1 Item),
- Aufgaben zum Erweitern und Kürzen von Brüchen (je 2 Items),
- Begründungsaufgaben zur Äquivalenz von Brüchen (1 Item), zum Größenvergleich von Stammbrüchen (1 Item) und zum Bestimmen einer Zwischenzahl (1 Item).

### 3.3.2 Arbeitshefte

In den Sitzungen der Datenerhebung arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Arbeitsheften[2], die am Ende der Sitzung digitalisiert und in der Folgestunde zurückgegeben werden. Die schriftlichen Bearbeitungen ermöglichen es zusätzliche Erkenntnisse und Einsichten in die konkreten Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler zu gewinnen und ergänzen die Videoaufzeichnungen der Kommunikation in den Paararbeiten.

Die Arbeitshefte sind zu allen drei Erhebungssitzungen gleich aufgebaut. Die inhaltliche Sequenz besteht aus einem oder mehreren statischen Lösungsbeispielen mit je einer fokussierenden Fragestellung, zwei unvollständigen Lösungsbeispielen und mehreren Transfer- und Übungsaufgaben (Abb. 3.2).


**Abbildung 3.2** Aufbau einer Sequenz des Arbeitsheftes

Auf den ersten Seiten des Arbeitsheftes sind die Lösungsbeispiele statisch abgebildet, die die Schülerinnen und Schüler in interaktiver und animierter Form am Bildschirm erarbeiten. Die Lösungsbeispiele bilden begriffliche und operative Kerninhalte für die Unterrichtssitzung ab. Ein zentraler Aspekt dieser Lösungsbeispiele ist die Darstellung und Verknüpfung verschiedener Repräsentationen. In Ergänzung zu den digitalen Lösungsbeispielen finden sich in den Arbeitsheften zudem fokus-

[2] Die Arbeitshefte für alle Sitzungen zur Datenerhebung sind im Anhang abgebildet.

sierende Fragestellungen zur Unterstützung der Verarbeitung der Lösungsbeispiele mitsamt einer Fläche, in der eine Antwort notiert werden soll.

Auf die statische Abbildung des Lösungsbeispiels mit fokussierenden Fragestellungen folgen zwei unvollständige Lösungsbeispiele, in denen die Schülerinnen und Schüler die fehlenden Lösungsschritte ergänzen sollen. Die unvollständigen Lösungsbeispiele sind analog zum Vorgehen im Lösungsbeispiel nach dem Prinzip der „‘fading examples“ (siehe Abschnitt 1.2.2 und 3.4.2) gestaltet, sodass im zweiten unvollständigen Beispiel mehr Lösungsschritte ergänzt werden müssen als im ersten.

Das Lösungsbeispiel und die unvollständigen Beispiele stellen die inhaltliche Grundlage für die nachfolgenden Aufgaben zum Üben und Vertiefen (Transferaufgaben).

In den Sitzungen zur Datenerhebung erfolgen alle Aufgabenbearbeitungen, Notizen und ähnliches im Arbeitsheft, sodass dieses alle Aufzeichnungen der Doppelstunde vollständig enthält und somit als Referenz für die Rekonstruktion der Bearbeitungsprozesse herangezogen werden kann.

### 3.3.3 Videographie

Für die Studie sind die konkreten Lern- und Bearbeitungsprozesse der Lernenden von primärem Interesse. Zum Zweck einer möglichst umfassenden Erhebung werden mit der Software MORAE© Videoaufzeichnungen angefertigt. Die Computerarbeitsplätze der Schüler(-innen)-Paare sind mit Webcams und Mikrofonen ausgestattet. Mit der Software MORAE© werden simultan die Bildschirme und Bildschirmaktivitäten sowie das Bild der Webcams und der Ton der Mikrofone aufgezeichnet. Die gesammelten Video- und Audiodaten werden synchronisiert in einer Videodatei zusammengeführt.

## 3.4 Darstellung der Materialien

In diesem Abschnitt werden die in der Studie genutzten Materialien erläutert und exemplarisch dargestellt. Die eingesetzten Tests und Arbeitshefte sind im Anhang abgebildet.

### 3.4.1 Interaktive animierte Lösungsbeispiele

Die interaktiven animierten Lösungsbeispiele basieren auf statischen Lösungsbeispielen, die in den Mathematik-Lehrbüchern MATHEMATIK HEUTE 5 (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel, 2012a) und MATHEMATIK HEUTE 6 (vom Hofe, Humpert, Griesel & Postel 2012b) enthalten sind. Die Arbeit mit interaktiven animierten Lösungsbeispielen entspricht nicht dem gewöhnlichen Unterrichtsgeschehen. Dennoch sind (statische) Lösungsbeispiele ein wesentlicher Inhalt der meisten aktuellen Lehrwerke und werden in vielen Fällen dafür eingesetzt, „anhand einer prototypischen Aufgabenlösung ein Konzept bzw. einen Begriff auf operative Weise einzuführen oder Lösungsprozeduren oder Prinzipien zu illustrieren“ (Salle, 2015, S. 30). Die Arbeit von Rezat (2009) zeigt, dass Schülerinnen und Schüler Lösungsbeispiele häufig und besonders vielfältig nutzen, z. B. als Hilfe zum Bearbeiten von Aufgaben sowie zum Festigen, Vertiefen und Aneignen von Wissen (Rezat, 2009, S. 252). Die vielfältige Nutzung von Lösungsbeispielen, insbesondere im Vergleich zu anderen Elementen von Schulbüchern, kann dahingehend interpretiert werden, dass die Arbeit mit Lösungsbeispielen bei Schülerinnen und Schülern sehr beliebt ist (vgl. Salle, 2015, S. 32). Für den Einsatz von Lösungsbeispielen in dieser Studie kann angenommen werden, dass die Schülerinnen und Schüler der Untersuchungsgruppe zumindest in Ansätzen mit Lösungsbeispielen und der selbstständigen Arbeit mit ihnen vertraut sind.

Im Hinblick auf die vorliegende Studie werden die interaktiven animierten Lösungsbeispiele vor allem mit dem Ziel der Anregung des kommunikativen Austauschs in den Lernendenpaaren eingesetzt. Die Arbeit von Salle (2015) dokumentiert sehr umfassend, dass der Einsatz digitaler animierter Lösungsbeispiele in Partnerarbeiten die Lernenden zu reichhaltigen Argumentationsprozessen anregen kann. Von den Kommunikationsprozessen, die auf diese Weise angeregt werden, ist zu erwarten, dass sie authentischer sind als Kommunikationsprozesse, die in Interviewsituationen oder mit der Methode des „Lauten Denkens“ (vgl. Chi, Bassok, Lewis, Reimann & Glaser, 1989) gewonnen werden können. Vor diesem Hintergrund werden sie in dieser Untersuchung vor allem zur Einleitung der Lernphase und zur Initiierung eines authentischen interaktiven Austauschs in den Lernendenpaaren eingesetzt.

Die Grundlagen der Konzeption, Konstruktion und Gestaltung der verwendeten digitalen animierten Lösungsbeispiele werden von Salle (2015) sehr detailliert beschrieben und sollen an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden.

Im Folgenden ist der Endzustand eines digitalen animierten Lösungsbeispiels abgebildet (Abb. 3.3). Über eine Navigationsleiste werden die einzelnen Animationen des Lösungsbeispiels gesteuert.

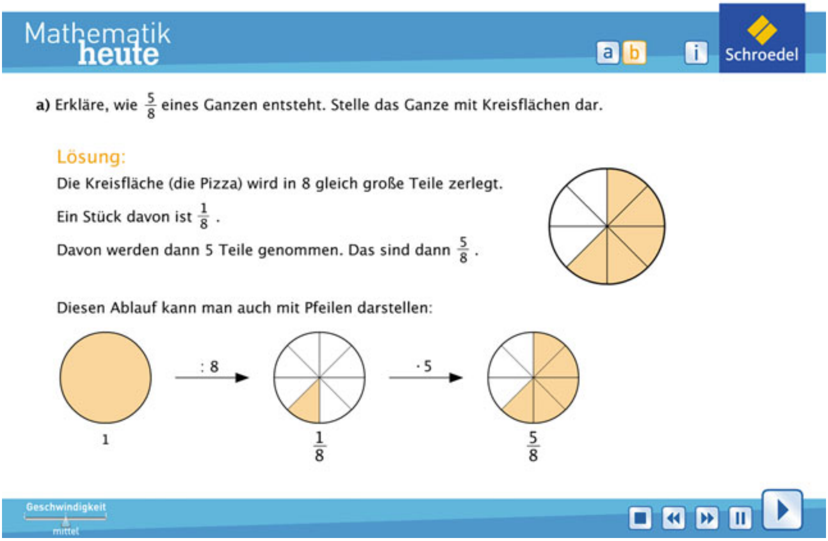



**Abbildung 3.3** Endzustand des animierten Lösungsbeispiels 1a zur anschaulichen Herstellung des Bruchs $\frac{5}{8}$

Die animierten Lösungsbeispiele werden im Aufgabenheft der Lernenden mit jeweils einer fokussierenden Fragestellung begleitet, die sich auf das Kernkonzept des Lösungsbeispiels bezieht. Die fokussierenden Fragestellungen haben einen offenen Charakter um möglichst große Freiheiten für die Beantwortung einzuräumen und sollen ebenfalls dazu dienen, die Kommunikation in den Partnerarbeiten anzuregen.

Die fokussierende Frage zu diesem Lösungsbeispiel zielt zum Beispiel auf das Auslösen einer Diskussion der Bedeutung von Zähler und Nenner einer Bruchzahl ab. Hierbei soll erörtert werden, dass der Nenner eines Bruchs den Grad der Einteilung des Ganzen und der Zähler die Anzahl der markierten Teile repräsentiert. Die fokussierende Frage zum zweiten Teil des Lösungsbeispiels, in dem die anschauliche Herstellung des Bruchs $\frac{3}{8}$ animiert wird, zielt auf eine eigene Formulierung bzw. Beschreibung des gesamten Herstellungsprozesses durch die Lernenden ab. Die Beantwortung der fokussierenden Fragestellungen erfolgt schriftlich im Arbeitsheft.

*Prompt zu Lösungsbeispiel 1a:* Warum erhält man $\frac{5}{8}$ und nicht $\frac{8}{5}$? Begründe.

*Prompt zu Lösungsbeispiel 1b:* Beschreibe mit eigenen Worten, wie man aus einem Ganzen $\frac{3}{8}$ erhält.

### 3.4.2 Unvollständige Lösungsbeispiele

Die unvollständigen Beispiele wurden analog zu den jeweiligen Lösungsbeispielen des entsprechenden Inhalts nach dem Prinzip der „fading examples“ (siehe Abschnitt 1.2.2) gestaltet. Das bedeutet, dass die unvollständigen Beispiele genau wie das Lösungsbeispiel aufgebaut sind, jedoch einzelne Lösungsschritte ausgeblendet wurden, sodass sie von den Lernenden ergänzt werden müssen. Im Vergleich zu den korrespondierenden Lösungsbeispielen werden geringe Änderungen bezüglich des Kontexts und der ikonischen Repräsentation vorgenommen. Die Änderungen beschränken sich in den meisten Fällen jedoch auf Zahlenwerte und die verwendeten ikonischen Repräsentationen, sodass der Transfer zwischen Lösungsbeispiel und unvollständigen Beispielen als (sehr) naher Transfer beschrieben werden kann. Im Folgenden werden die auf das zuvor dargestellte interaktive animierte Lösungsbeispiel folgenden unvollständigen Beispiele exemplarisch beschrieben (Abb. 3.4).

Im ersten unvollständigen Beispiel (Aufgabe 1) sollen die Lernenden analog zu den Brüchen $\frac{5}{8}$ (Kreis) und $\frac{3}{8}$ (Rechteck) im Lösungsbeispiel erklären, wie die Brüche $\frac{6}{8}$ (Kreis) und $\frac{4}{5}$ (Rechteck) entstehen. Dazu sind die ikonischen Repräsentationen der einzelnen Herstellungsschritte bereits vorgegeben, d. h. die Lernenden sollen lediglich zu den ikonischen Repräsentationen gehörenden symbolischen Rechenoperatoren und Brüche ergänzen. Im Falle von Unklarheiten der Lernenden in Hinsicht auf die Aufgabe, enthält eine auf eine auszufüllende Lücke weisende Sprechblase den Hinweis „Trage in die Kästen ein, was man rechnen muss, um zum nächsten Schritt zu kommen“.

Das zweite unvollständige Beispiel (Aufgabe 2) ist analog zum Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel gestaltet (Abb. 3.5). Anders als im ersten unvollständigen Beispiel sind hier jedoch keine Lösungsschritte mehr vorgegeben, sodass die Lernenden alle Schritte der Bruchherstellung eigenständig darstellen müssen. Zur Strukturierung der Aufgabenlösung wurde hierfür die Aufgabenstellung angepasst, sodass die Lernenden in je zwei Teilaufgaben dazu aufgefordert werden, zu erklären die $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{3}{8}$ eines Ganzen entsteht, wozu sie ein Pfeilbild zeichnen können, und den gesuchten Bruchteil in der vorgegebenen ikonischen Repräsentation einzuzeichnen. Durch den Hinweis in der Aufgabenstellung „Du kannst auch ein Pfeilbild zeichnen“ wird auf das Vorgehen im vorhergehenden Lösungsbeispiel verwiesen, das auf diese Aufgabe übertragen werden soll.

Eine Pizza wird in 4 gleich große Stücke aufgeschnitten. Sarah nimmt sich 3 solcher Stücke. Das sind 3 Viertel der ganzen Pizza. Statt 3 Viertel schreibt man auch $\frac{3}{4}$ .

**a)** Erkläre, wie $\frac{6}{8}$ eines Ganzen entsteht. Stelle das Ganze durch eine Kreisfläche dar.

**Lösung:**

Die Kreisfläche (z.B. ein Kuchen) wird in 8 gleich große Teile zerlegt, davon werden dann 6 genommen.


Als Pfeilbild mit Zahlen geschrieben:


**b)** Erkläre, wie $\frac{4}{5}$ eines Ganzen entsteht. Stelle das Ganze durch ein Rechteck dar.

**Lösung:**

Das Rechteck (z.B. ein Blatt Papier) wird in 5 gleich große Teile zerlegt, davon werden dann 4 genommen.


Als Pfeilbild mit Zahlen geschrieben:


**Abbildung 3.4** Erstes unvollständiges Beispiel zur Herstellung der Brüche $\frac{6}{8}$ und $\frac{4}{5}$

Ein Kuchen wird in 12 gleich große Stücke aufgeschnitten. Nils nimmt sich 3 solcher Stücke. Das sind 3 Zwölftel des ganzen Kuchens, statt 3 Zwölftel schreibt man auch $\frac{3}{12}$.

**a)** Das Ganze ist hier durch einen Kreis dargestellt.

1) Erkläre, wie $\frac{2}{3}$ eines Ganzen entsteht. Du kannst auch ein Pfeilbild zeichnen.

2) Zeichne den Bruchteil ein.

**Lösung:**

1)

2)

**b)** Jetzt ist das Ganze ein Rechteck.

1) Erkläre, wie $\frac{3}{8}$ des Ganzen entsteht. Du kannst auch ein Pfeilbild zeichnen.

2) Zeichne den Bruchteil ein.

**Lösung:**

1)

2)

**Abbildung 3.5** Zweites unvollständiges Beispiel zur Herstellung der Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{8}$

Im Hinblick auf die Ausbildung von Grundvorstellungen in den unvollständigen Beispielen stehen drei Transferprozesse im Vordergrund:

1. Die Übertragung des Bruchherstellungsverfahrens von den Lösungsbeispielen in eine eigenständige Durchführung (Anwendung des Verfahrens),
2. die Übertragung des Bruchherstellungsverfahrens auf neue Brüche und ikonische Figuren sowie
3. die Übersetzung der Herstellungshandlung in die ikonische und symbolische Repräsentationsebene.

Die zentrale Grundvorstellung in diesen Aufgaben ist die Grundvorstellung Bruch als Operator. Mit der Ausbildung der Operatorvorstellung sind folgende Annahmen verbunden, die in die Konzeption Materialien einbezogen wurden:

- Die Einübung des Bruchherstellungsverfahrens : $n \cdot m$ als mentales Muster führt zum Aufbau einer Grundvorstellung.
- Dieses mentale Muster kann durch eine Generalisierung unabhängig von Zahlen und Repräsentationen angewendet werden.
- Die Darstellung als Pfeilschema in ikonischer und symbolischer Form dient als Hilfe zum Anknüpfen an das Vorwissen der Lernenden.

### 3.4.3 Transferaufgaben

Auf die unvollständigen Beispiele folgen mehrere Transfer- und Übungsaufgaben, die die Kernkompetenzen zu den jeweils eingeführten Begriffsaspekten und Verfahren abdecken. Die Aufgaben unterscheiden sich zum Teil deutlich von den Lösungsbeispielen und unvollständigen Beispielen. Neben dem Arbeitsheft zur Datenerhebung sind die Aufgaben auch im Arbeitsbuch der Schülerinnen und Schüler abgebildet und stammen allesamt aus vom Hofe et al. (2012a; 2012b). Die Aufgaben werden direkt im Arbeitsheft bearbeitet.

Im Folgenden werden zur Veranschaulichung die auf das oben geschilderte Lösungsbeispiel und die unvollständigen Beispiele anknüpfenden Aufgaben kurz erläutert. Eine ausführliche Darstellung der für die Analyse ausgewählten Aufgaben erfolgt an den entsprechenden Stellen der deskriptiven Analysen der Bearbeitungsprozesse im Ergebnisteil.

**Aufgaben 1 und 2 – Unvollständige Beispiele:** Wie im vorhergehenden Abschnitt geschildert, soll mit den unvollständigen Beispielen in Aufgaben 1 und 2 die eigenständige Anwendung des Verfahrens zur Herstellung von Brüchen unterstützt werden. Die Lernenden sollen angeleitet erklären, wie bestimmte Brüche hergestellt werden. Dabei wird besonders die Verknüpfung der Handlung auf enaktiv-ikonischer Ebene mit den entsprechenden Rechenoperationen auf symbolischer Ebene akzentuiert. Die zentralen Transferprozesse sind hier, wie im vorhergehenden Abschnitt geschildert.

**Aufgabe 3 – Darstellen von Brüchen:** In Aufgabe 3 sollen die Lernenden die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{10}$ ikonisch in einem Kreis oder Rechteck darstellen. Die didaktische Intention dieser Aufgabe ist vor allem die Übung der Bruchdarstellung. Die Lernenden können sich eigenständig für die Darstellung in einem Kreis oder einem Rechteck entscheiden. Die darzustellenden Brüche wurden so gewählt, dass einerseits weitgehend vertraute Darstellungen der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ angefertigt werden sollen, aber auch Bruchdarstellungen von weniger vertrauten Brüchen, $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{10}$, angefertigt werden sollen. Die zentralen Transferprozesse in dieser Aufgabe sind:

- Die Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens zur Anfertigung ikonischer Bruchdarstellungen in einer Kreis- oder Rechtecksrepräsentation und
- Die Übertragung des Verfahrens zur Bruchdarstellung auf weniger vertraute und womöglich bisher unbekannte Brüche.

**Aufgabe 4 – Darstellung von Brüchen in einer Strecke:** Während die ikonische Darstellung von Brüchen bis zu diesem Zeitpunkt ausschließlich anhand von Kreis- und Rechtecksrepräsentationen vorgenommen wurde, sollen die Lernenden in dieser Transferaufgabe ihr Vorgehen auf die lineare Darstellung einer Strecke übertragen. Für jede Teilaufgabe ist eine Strecke mit der Länge von zwölf Kästchen abgebildet, an denen die Lernenden die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{5}{12}$ darstellen sollen. Es ist somit ein Transfer auf Repräsentationsebene erforderlich, der in zwei Transferschritten beschrieben werden kann:

- Die Übertragung des Teiloperators $:n$ zur Einteilung der Strecke in $n$ gleich große Teile bzw. Abschnitte und
- die Übertragung des Teiloperators $\cdot m$ zum Färben von $m$ Streckenabschnitten.

**Aufgabe 5 – Ablesen von Brüchen aus ikonischen Rechtecksdarstellungen und Erläuterung des jeweiligen Herstellungsverfahrens:** In Aufgabe 5 sind vier Brüche in Rechtecksrepräsentationen dargestellt. Die Lernenden sollen dazu jeweils angeben, welche Brüche dargestellt sind und erklären, welches Vorgehen den Darstellungen zugrunde liegt. Dazu wird der Hinweis gegeben, dass sie Herstellungshandlung auch in einem Pfeildiagramm erläutern können. Die didaktische Intention dieser Aufgabe ist die Verknüpfung der Anteil- und der Operatorvorstellung. Die Lernenden sollen die abgelesenen Brüche mit ihrer Herstellungshandlung verbinden. Diese Aufgabe dient vornehmlich Übungszwecken. Wohingegen die Lernenden in den vorhergehenden Aufgaben vor allem selber ikonische Darstellungen von Brüchen anfertigen sollten, sollen sie hier Brüche aus Darstellungen ablesen und ihre Herstellung erklären.

**Aufgabe 6 – Ablesen von Brüchen aus dreidimensionalen Quaderrepräsentationen:** Auch in Aufgabe 6 sollen die Lernenden Brüche aus ikonischen Repräsentationen ablesen. Anders als zuvor beinhaltet diese Aufgabe jedoch einen Transfer auf Repräsentationsebene, indem die Lernenden die Brüche nicht aus zweidimensionalen Flächenrepräsentationen, sondern aus dreidimensionalen Quaderrepräsentationen ablesen sollten. Diese Darstellungsform ist den Lernenden nicht gänzlich unvertraut, da im Arbeitsbuch im Abschnitt zu Stammbrüchen eine ähnliche Aufgabe enthalten ist, in der die Lernenden Stammbrüche aus dreidimensionalen Quaderdarstellungen ablesen sollten.

**Aufgabe 7 – Ergänzen eines Bruchteils zu einem Ganzen:** In der abschließenden Aufgabe dieses Arbeitsheftes sollen die Lernenden die in symbolischer Form vorgegebenen Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{7}{25}$ zu einem Ganzen ergänzen. Die Aufgabenstellung lautet: „Wie viel fehlt zu einem Ganzen? Du kannst auch zeichnen“.

Die Bestimmung des zu einem Ganzen fehlenden Anteils erfordert im Wesentlichen drei Transferprozesse:

- Bei Stammbrüchen: Die Umdeutung / Interpretation von einem Ganzen als eine aus $n$ Teilen zusammengesetzte Einheit, wobei das n-fache Vielfache einer dieser Teile $\frac{1}{n}$ das Ganze ergibt (vgl. *equipartitioning* bei Steffe & Olive, 2010).
- Bei echten Brüchen: Die Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens zur Interpretation von echten Brüchen $\frac{m}{n}$ als $m$ Teile eines in $n$ gleiche Teile geteilten Ganzen.
- Die Verknüpfung einer Teil-Ganzen- mit einer Teil-Teil-Ganzen-Relation: Es bedarf einer Verknüpfung zwischen Stammbrüchen und der Einheit 1 um dann eine Verknüpfung zwischen der Anzahl der Teile von echten Brüchen und der Anzahl der Teile des Ganzen herzustellen.

Diese Transferschritte sind im Lernmaterial nicht direkt abgebildet und die Lernenden sind gefordert diese Schritte selbstständig herzuleiten. Zentral ist hierfür die individuelle Vorstellungsgrundlage im Bezug auf die Grundvorstellungen Bruch als Anteil und Bruch als Operator.

## 3.5 Auswertungsmethoden

Vor dem Hintergrund des Forschungsinteresses werden quantitative Daten über das Vorwissen und die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler sowie qualitative Daten über die Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeiten erhoben. Im Folgenden werden die Methoden zur Auswertung dieser Daten erläutert.

### 3.5.1 Vor- und Nachtest

Mithilfe des Vor- und Nachtests sollen Informationen über den Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler gewonnen werden. Auf diese Weise lassen sich die Lernentwicklungsverläufe der gesamten Lerngruppe, einzelner Schüler(-innen)-Paare sowie einzelner Schülerinnen und Schüler nachverfolgen und vor dem Hintergrund der Bearbeitungsprozesse einordnen.

Den Kern der Auswertungen bildet eine dichotomisierte Auswertung der parallelen Items, über die ein Vergleich der individuellen Kenntnisstände der Schülerinnen und Schüler zu Beginn und zum Ende der Unterrichtseinheit hergestellt wird. Für diese Auswertungen werden ausschließlich die parallelen Items herangezogen. Dies sind:

- Ablesen von Bruchteilen echter Brüche aus unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen (6 Items)
- Einzeichnen und Einfärben von Bruchteilen in unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen (6 Items)
- Ein- und mehrschrittige Sachaufgaben mit Kontexten aus den Bereichen Geldwerte und Längen (3 Items)
- Begründungsaufgaben zum Größenvergleich von Stammbrüchen, echten Brüchen mit gleichem Zähler und anderen Brüchen (3 Items)
- Ergänzen von Multiplikations- und Divisionsoperatoren in Pfeildarstellungen (2 Items)

Die prozentuale Testleistung der Lernenden wird über die Anzahl der richtig beantworteten Items und der Gesamtzahl der betreffenden Items errechnet. Durch Subtraktion des Vortestergebnisses vom Ergebnis des Nachtests ergibt die die Differenz der beiden Prozentwerte, die die Veränderung über den Verlauf der Unterrichtseinheit beschreibt.

In Ergänzung zum Vergleich der parallelisierten Testitems werden die Lösungen ausgewählter Sach- und Begründungsaufgaben sowie nicht-paralleler Testaufgaben detaillierter analysiert. Hierdurch sollen einerseits zusätzliche Informationen über das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Unterrichtseinheit gewonnen werden und andererseits mögliche Auswirkungen der Unterrichtseinheit anhand spezifischer Begründungsaufgaben untersucht werden.

Die nicht-parallelisierten Aufgaben im Vortest umfassen den Umgang und das Rechnen mit natürlichen Zahlen:

- Ordnen von zwei- bis fünfstelligen natürlichen Zahlen (2 Items)
- Komplexe Sachaufgaben zur Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen (2 Items)
- Sachaufgabe zum Aufteilen eines Geldbetrags (1 Item)

Die nicht-parallelisierten Items im Posttest betreffen spezifische Kompetenzen zu Bruchzahlen, die Inhalt der Unterrichtseinheit sind.

- Sachaufgabe zur Dichte von Bruchzahlen (1 Item)
- Begründungsaufgaben zur Äquivalenz und zum Größenvergleich von Bruchzahlen (2 Items)

### 3.5.2 Analyse von Bearbeitungsprozessen

Vor dem Hintergrund des Forschungsinteresses dieser Arbeit wird für die Analyse der individuellen Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler ein qualitativer Zugang gewählt. Das primäre Forschungsinteresse der Datenanalyse ist zu untersuchen, inwieweit sich die normativ intendierten Transferprozesse in den individuellen Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler abbilden und worauf etwaige Divergenzen zwischen normativer und deskriptiver Ebene zurückzuführen sind. Somit ist es das Ziel, das Denken der Schülerinnen und Schüler im Rahmen von Transferprozessen zu erfassen und zu untersuchen, inwieweit sich in den individuellen Denkprozessen allgemeine Phänomene und Probleme widerspiegeln, die vor dem Hintergrund der Befunde der psychologischen Transferforschung zu interpretieren sind. Das bedeutet, dass es für die Untersuchung von besonderer Bedeutung ist, die individuellen Strategien, Denkmuster und Vorstellungen bzw. die subjektiven Wirklichkeiten der Schülerinnen und Schüler möglichst eingehend zu erfassen und zu rekonstruieren. In diesem Zusammenhang argumentiert vom Hofe (1998, S. 259), dass sich ein qualitativer bzw. rekonstruktiv-interpretativer Zugang besonders anbietet,

> „wenn man sich aus deskriptiver Sicht dafür interessiert, ob Erklärungsmodelle, mit denen man Lern- bzw. Problemlöseprozesse beschreibt, tatsächlich in den Denkprozessen der Schüler die Rolle spielen, die man theoretisch vermutet." (vom Hofe, 1998, S. 259)

Da die Gedanken, mentalen Aktivitäten, Modelle und Vorstellungen von Lernenden nicht direkt beobachtbar sind, „müssen [sie] aus Indikatoren in einem interpretativen Prozess erschlossen und rekonstruiert werden" (Bikner-Ahsbahs, 2001, S. 182). Zudem entwickelt sich Wissen (als subjektive Erfahrungsbereiche)

> „nicht einfach durch „Verfeinerung und Spezialisierung" im Gebrauch. Ihre Grenzen [die Grenzen der SEBe] überschreitet das Individuum aktiv entwerfend, erprobend und aushandelnd in Situationen sozialer Interaktion." (Bauersfeld, 1983, S. 31, Anmerkung des Autors)

Entsprechend geben die individuellen Bedeutungsaushandlungen in auf Sinnkonstruktion ausgelegten interaktiven Argumentationsprozessen Hinweise auf die gedanklichen Konstruktionen der Lernenden und

> „demzufolge müssen Vorstellungen zum Bruchbegriff über die Nachkonstruktion dieses Sinns *aus der Perspektive der Interagierenden* rekonstruiert werden können." (Bikner-Ahsbahs, 2001, S. 182, Hervorhebung des Autors)

Vor diesem Hintergrund erfolgt die Analyse der Prozessdaten der Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler nach einem Verfahren, das Elemente der interpretativen Unterrichtsforschung und der Analyse von Grundvorstellungen auf normativer und deskriptiver Ebene verbindet. In diesem Abschnitt werden die methodologischen Grundlagen der interpretativen Unterrichtsforschung und der Analyse von Grundvorstellungen kurz erläutert und hinsichtlich des Vorgehens in dieser Arbeit konkretisiert.

**Grundzüge der interpretativen Unterrichtsforschung**

Die interpretative Unterrichtsforschung ist ein Ansatz der Sozialforschung. Der Begriff „Interpretative Unterrichtsforschung" bezieht sich als „Sammelbegriff [...] auf den Untersuchungsgegenstand und den methodischen Ansatz von Forschung"

(Schütte, 2009, S. 78; vgl. auch Krummheuer & Naujok, 1999, S. 16). Das Forschungsinteresse liegt in der Erfassung der im Mathematikunterricht ständig neu ausgehandelten Deutungen und Bedeutungszuschreibungen in der Interaktion der Lernenden und Lehrenden. Es wird davon ausgegangen, dass Bedeutungen von mathematischen Begriffen und Verfahren als „situationsüberdauernde Bedeutungszuschreibungen" (Schütte, 2009, S. 79) in Interaktionen konstruiert werden, die konstitutiv für ihr Handeln sind. Mit den Methoden der interpretativen Forschung sollen bestimmte Situationen im Unterricht und ihre Merkmale aufgedeckt, beschrieben und auf sie hingewiesen werden. Auf diese Weise sollen spezifische Deutungs- und Handlungsstrukturen der Lernenden (und Lehrenden) identifiziert und beurteilt werden (vgl. Krummheuer & Naujok, 1999). In diesem Zusammenhang übernimmt die interpretative Forschung eine beschreibende Funktion: Es werden theoretische Konstrukte erarbeitet, die helfen sollen alltägliche Handlungsprozesse begründet zu verstehen. Im Zentrum steht somit das Beschreiben und Verstehen von Lernprozessen. Die hierdurch gewonnen theoretischen Einsichten geben Hinweise zur Identifizierung von Bedingungen für die Verbesserung von Unterricht.

Krummheuer und Naujok (1999) fassen drei Merkmale der Interpretativen Unterrichtsforschung zusammen:

1. „die Fokussierung auf alltägliche Unterrichtsprozesse;
2. das rekonstruktive Vorgehen und
3. die theoretische Grundannahme, daß Lernen, Lehren und Interagieren konstruktive Aktivitäten sind." (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 15)

**Fokussierung auf alltägliche Unterrichtsprozesse:** Der Untersuchungsgegenstand in der interpretativen Unterrichtsforschung ist der alltägliche Mathematikunterricht, der als permanentes interpretatives Geschehen verstanden wird, und durch die wechselseitigen und aufeinander bezogenen Handlungen der Interaktionspartner sukzessive entwickelt wird (vgl. Jungwirth & Krummheuer, 2008, S. 148). Die Frage ist dabei, wie die an der Interaktion Beteiligten ihren unterrichtlichen Alltag herstellen, um diesen zu verstehen. Im Zentrum stehen dabei die „Regelmäßigkeiten im Umgang mit den fachlichen Inhalten unter dem Aspekt ihrer gemeinschaftlichen Produktion und Produziertheit" (Jungwirth & Krummheuer, 2008, S. 147).

Die Untersuchung in dieser Arbeit verfolgt das Ziel alltägliche Lernprozesse im Mathematikunterricht zu erheben: Die Lernenden arbeiten in Paaren, in denen sie auch im alltäglichen Unterricht zusammenarbeiten, die Lernenden sind es gewohnt sich neue Inhalte in Partner- und Gruppenarbeit zu erarbeiten und zuletzt entstammen die Materialien einem regulären Schulbuch, das sie für die mehrwöchige Zeit der untersuchten Unterrichtseinheit nutzen. Ein wesentlicher Faktor zu Bewahrung der Authentizität und Alltäglichkeit der Bearbeitungsprozesse der Lernenden ist, dass die Lehrperson während der Datenerhebung lediglich eine organisatorische und ordnende Funktion einnimmt und keinerlei inhaltliche Auskünfte, Hinweise oder Bemerkungen gibt.

**Rekonstruktives Vorgehen:** Ein rekonstruktives Vorgehen bedeutet im Sinne von Bohnsack (2007), dass versucht wird die von Individuen konstruierte Wirklichkeit zu rekonstruieren. Diese Rekonstruktion erfolgt auf Grundlage von Aufzeichnungen von Unterricht, die dazu dienen verbale und nonverbale Handlungen festzuhalten. Diese können Ton- und Videoaufzeichnungen sowie die Arbeitsmaterialien der Lernenden umfassen. Hierbei ist zu bedenken, dass die Ergebnisse von Rekonstruktionen Konstruktionen der Konstruktionen sind, die die handelnden Individuen selbst herstellen:

> „Die Besonderheit [...] besteht also darin, [...] dass bereits der *Gegenstand* dieses [rekonstruktiven] Denkens, eben das soziale Handeln, das Alltagshandeln auf unterschiedlichen Ebenen durch sinnhafte Konstruktionen, durch Typenbildung und Methoden vorstrukturiert ist." (Bohnsack, 2007, S. 27, Hervorhebung im Original, Anmerkung des Autors)

Die interpretativen Analysen der Bearbeitungs- und Lernprozesse stellen somit Rekonstruktionen von dem dar, was die Lehrenden und Lernenden in den entsprechenden Bedeutungsaushandlungen als (Situations-) Definitionen vorgenommen und damit als Wirklichkeit konstruiert haben.

Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der Rekonstruktion der Bedeutungsaushandlungen der Lernenden. Im Speziellen soll rekonstruiert und beschrieben werden, *wie* sich Transferprozesse in Lernsituationen darstellen und *was* die Lernenden in den entsprechenden Situationen übertragen. Ziel ist es diese Transferprozesse aufzudecken, zu identifizieren und zu beschreiben, um sie schließlich zu verstehen.

**Produkte von interpretativen Analysen:** In der interpretativen Unterrichtsforschung geht es nicht darum eine allgemeingültige, umfassende und alles erklärende Theorie zu entwickeln (vgl. Krummheuer & Naujok, 1999, S. 105; Naujok, 2000, S. 32; Jungwirth & Krummheuer, 2008, S. 167). Vielmehr soll eine auf den Kontext bezogene Theorie für einen begrenzten Gegenstandsbereich entwickelt werden. Naujok bezeichnet dieses Vorgehen daher als „lokale Theoriegenese" und die entstehenden theoretischen Produkte „eher als Versuche [...] die empirischen Phänomene und Zusammenhänge zwischen diesen zu erklären" (Naujok, 2000, S. 32). Im Vordergrund stehen dabei die theoretische Ausdifferenzierung und die Typisierung (vgl. Krummheuer & Naujok, 1999, S. 24).

Die entwickelten lokalen Theorien sollen die ihnen zugrunde liegenden Daten in angemessener Weise widerspiegeln. Das bedeutet, dass die entwickelten Theorien möglicherweise in anderen Zusammenhängen und Kontexten sinnvoll sein können, z. B. beim Erarbeiten anderer mathematischer Inhalte, in unterschiedlichen Unterrichtskontexten oder in den Lernprozessen von jüngeren oder älteren Lernenden.

**Die interpretative Methode – Interaktionsanalyse:** Das Verfahren der Interaktionsanalyse besteht aus mehreren Arbeitsschritten, die jedoch nicht als lineare und unveränderliche Abfolge von Interpretationsschritten zu betrachten ist. Das Verfahren steckt vielmehr einen Rahmen ab für einen dynamischen Interpretationsprozess, bei dem es möglich ist, einzelne Interpretationsschritte oder ganze Abfolgen von Interpretationsschritten zu wiederholen (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 68; Krummheuer & Brandt, 2001, S. 90; Fetzer, 2007, S. 27 ff.; Schütte, 2009, S. 104 ff.).

Nach Voigt (1984) und Bauersfeld et al. (1986) beinhaltet eine Interaktionsanalyse fünf Analyseschritte (vgl. auch Krummheuer & Brandt, 2001, S. 90; Krummheuer & Fetzer, 2005, S. 25):

1. Gliederung,
2. Allgemeine Beschreibung nach dem ersten Eindruck,
3. Erzeugung alternativer Interpretationen zu den Einzeläußerungen,
4. Turn-by-Turn-Analyse und
5. Zusammenfassung der Interpretation

Die *Gliederung* einer Interaktionseinheit dient primär der Übersicht und Strukturierung. Sie kann nach verschiedenen Kriterien vorgenommen werden.

Im Anschluss an die Gliederung erfolgt eine *allgemeine Beschreibung nach dem ersten Eindruck*, die als „erste mehr oder weniger spontane und oberflächliche Schilderung" (Krummheuer & Fetzer, 2005, S. 26) zu verstehen ist. Auf diese Weise soll ein Überblick über die Interaktionseinheit gewonnen und festgehalten werden, wie man ihn spontan interpretiert. Im Rahmen einer Erstzuschreibung wird somit der vermutete „immanente *Sinngehalt*" (Bohnsack, 2010, S. 64) benannt.

Den Kern der Interaktionsanalyse bilden die Schritte der *Erzeugung alternativer Interpretationen zu den Einzeläußerungen* und die *Turn-by-Turn-Analyse*. In der Erzeugung alternativer Interpretationen von den Einzeläußerungen werden die Äußerungen und Handlungen der Interaktionspartizipienten sequentiell in der Reihe ihres Vorkommens analysiert und die Konstruktionen der Beteiligten rekonstruiert. Die Interpretation einer Äußerung folgt dabei stets der Frage, auf welche

Weise die Akteure diese Äußerung interpretieren könnten (vgl. Krummheuer, 2012, S. 237) und es wird versucht „möglichst viele Verstehensmöglichkeiten zu entwerfen“ (Krummheuer & Fetzer, 2005, S. 26). Dabei dürfen etwaige Plausibilisierungen nur rückwärtsgewandt erfolgen, damit man sich stets ausschließlich auf diejenigen Informationen bezieht, die auch dem Interaktionspartner zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung standen. Die erzeugten Interpretationen müssen sich im weiteren Verlauf des Interpretationsprozesses bewähren (vgl. Krummheuer & Fetzer, 2005, S. 26). Um Stützungsmöglichkeiten zu erhalten schlagen Krummheuer und Naujok (1999, S. 69 f.) vor, potentielle Folgehandlungen für die entwickelten Deutungen zu entwerfen. Sofern eine solche Folgehandlung eintritt, kann diese als eine Stützung der Interpretation verstanden werden und man spricht davon, dass sich die jeweilige Interpretation bewährt.

Zur Einschränkung der entwickelten Deutungsalternativen wird eine *Turn-by-Turn-Analyse* durchgeführt. Dabei geht es darum, zu rekonstruieren, inwieweit der zweite Interaktionspartner die Äußerung des ersten Interaktionspartners gemäß einer der zur ersten Äußerung entwickelten Deutungsalternative interpretiert haben könnte. In seiner Reaktion signalisiert der zweite Interaktionspartner dem ersten, wie er dessen Äußerung gedeutet hat, was wiederum dem ersten Interaktionspartner die Möglichkeit gibt eine sogenannte Reparatur vorzunehmen und die Interpretation seines Interaktionspartners zu korrigieren. Bleibt eine solche Reparatur aus, kann sowohl der erste Interaktionspartner sowie auch der analysierende Wissenschaftler davon ausgehen, dass die beiden Interaktionsteilnehmer sich auf eine geltende Deutung verständigt haben (vgl. Krummheuer & Fetzer, 2005, S. 28; Tiedemann, 2012, S. 93):

> „Indem man die Beziehung zwischen den Redezügen zu rekonstruieren versucht, zeichnet man die gemeinsame, Zug um Zug hergestellte Themenentwicklung in der Interaktion nach.“ (Tiedemann, 2012, S. 93).

Auf diese Weise können einzelne Deutungsalternativen verworfen und der Umfang der Ausarbeitung reduziert werden. Es kann jedoch auch notwendig sein, dass für die vorausgehende Äußerung eine neue Interpretation entwickelt werden muss.

In der *Zusammenfassung der Interpretation* werden die tragfähigsten Interpretationen zusammengefasst. Da die ausführliche Darstellung einer vollständigen Interaktionsanalyse sehr umfangreich und für den Leser aufgrund der Vielfalt an Deutungen schwer lesbar ist, wird in Publikationen häufig nur die zusammenfassende Interpretation dargestellt.

Die Zusammenfassungen der Interpretationen werden auch als „Deutungshypothesen“ bezeichnet, „die sich zum Beispiel [...] auf den Verstehensprozeß einer

Schülerin im Laufe einer bestimmten Unterrichtsreihe oder auf die Einführung von Begriffen im gesamten beobachteten Mathematikunterricht“ (Beck & Jungwirth, 1999, S. 232) beziehen. In der vorliegenden Arbeit beziehen sich diese Deutungshypothesen explizit auf die Transferprozesse in den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit der individuellen Entwicklung von Vorstellungen zu Bruchzahlen.

In dieser Arbeit werden die Deutungshypothesen der analysierten Bearbeitungsprozesse einer Unterrichtseinheit miteinander in Beziehung gesetzt und vergleichend diskutiert, um charakteristische Merkmale und Unterschiede in den Transferprozessen der Lernenden herauszustellen. Die vergleichenden Diskussion sowie bereits die Auswahl der dargestellten Bearbeitungsprozesse folgen dabei dem methodischen Prinzip der Komparation.

**Das methodische Prinzip der Komparation:** Die komparative Analyse ist als Methode der Vergleichsgruppenbildung ein zentrales Element der Grounded Theory („constant comparative method„ Strauss & Corbin, 1990; vgl. auch Bohnsack, 2010; Kelle & Kluge, 2010). Sie besteht in einem permanenten Vergleich in allen Stadien und auf allen Ebene der Analyse (Bohnsack, 2010, S. 199; Tiedemann, 2012, S. 75), wodurch sie den gesamten Forschungsprozess bestimmt. Das Ziel der komparativen Analyse ist es zunächst das Spezifische an einem Ausschnitt der Realität erfassen und zu beschreiben, um danach die Spezifität von ausgewählten Fällen in Beziehung zueinander zu untersuchen (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 82). Auf diese Weise soll der Geltungsbereich der Ergebnisse der Analysen über den Rahmen eines einzelnen Falls erweitert werden, da über den Vergleich von Einzelfällen untereinander Betrachtungsdimensionen hervorgebracht werden, die sich isolierten Fallbetrachtungen möglicherweise verschließen. Die komparative Analyse kann somit als „notwendige Voraussetzung“ gesehen werden, „um zu einer validen und methodisch kontrollierten Beschreibung und Erklärung“ (Kelle & Kluge, 2010, S. 11) zu gelangen.

Die Interpretation von Interaktionsprozessen setzt nach Bohnsack (2010, S. 195) „Vergleichshorizonte“ voraus. Das bedeutet, dass die Interpretation eines Interaktionsausschnitts nur im Vergleich mit hypothetischen alternativen Interaktionsverläufen erfolgen kann. Da diesen alternativen Deutungen jedoch das theoretische Vorwissen, die Erfahrung und die Intuition des Interpretierenden zugrunde liegt, werden die Vergleichshorizonte des Interpretierenden durch empirisch generierte Vergleichshorizonte ersetzt, die empirisch generiert und somit intersubjektiv nachvollziehbar und überprüfbar sind (vgl. Bohnsack, 2010, S. 137). Auf diese Weise werden andere empirische Daten als Vergleichshorizonte herangezogen und dadurch das theoretische Vorwissen des Forschenden methodisch kontrolliert. Dies kann sowohl innerhalb eines Falls wie auch über den Fallvergleich gestaltet werden (Bohnsack, 2010, S. 137 f.).

Die komparative Analyse ermöglicht die Bildung von Typen und die Kontrolle des theoretischen Vorwissens. In Hinsicht auf die Entwicklung einer Theorie können durch die Komparation zum einen jene Theoriekonstrukte ausgeschlossen werden, die nicht zu den Interpretationen der ausgewählten Realitätsausschnitte passen und zum anderen werden auf der Basis komparativer Analysen empirisch kontrollierte und theoretisch orientierte Bedingungen für das abduktive Erschließen neuer Theorieelemente erzeugt (Krummheuer & Brandt, 2001, S. 81).

**Analyse von Grundvorstellungen**

In Abschnitt 2.1 wurden Grundvorstellungen auf normativer Ebene als „didaktische Kategorie des Lehrers" beschrieben, die „im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreiben" (vom Hofe, 1995, S. 123). Dieser normativen Ebene der Sachanalyse stellt vom Hofe eine deskriptive Ebene der Analyse von Schülervorstellungen gegenüber: „Schülervorstellungen geben dabei Aufschluss über die individuellen Erklärungsmodelle des Schülers, die in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar sind" (vom Hofe, 1995, S. 123).

Vor diesem Hintergrund wurden die Leitfragen zur Analyse der normativen Verwendung von Grundvorstellungen und der deskriptiv feststellbaren Individualvorstellungen der Lernenden wie folgt formuliert:

- „Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus Sicht des Lehrenden adäquat? (Normativer Aspekt)
- Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen? (Deskriptiver Aspekt)
- Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben? (Konstruktiver Aspekt)" (vom Hofe, 1995, S. 116 f.)

Leitfragen wie diese bilden die Grundlage für „interpretative Fallanalysen" (vom Hofe, 1992, S. 360; vgl. auch vom Hofe, 1998; vom Hofe, 1999), in denen die Bearbeitungen von Lernenden anhand von Transkripten der Lernendenkommunikation und den schriftlichen Produkten der Lernenden in Hinsicht auf ein spezifisches Forschungsinteresse analysiert werden. Die Analysen erfolgen dabei auf zwei Ebenen: Der *Beschreibungsebene* und der *Erklärungsebene*, denen die folgenden Leitfragen entsprechen:

- *„Deskriptives Nachzeichnen der subjektiven Schülerlogik.* Welche subjektiven Vorstellungen bzw. Deutungsmodelle werden in den Lösungsversuchen der Schülerinnen deutlich? Inwieweit lassen sich dabei individuelle Denkmuster bzw. Lösungsstrategien nachzeichnen?
- *Vergleichende Einbeziehung präskriptiver Kategorien.* Inwieweit lassen sich Denkprozesse der Schülerinnen mit vorhandenen didaktischen Begriffen und Modellen erfassen und erklären?" (vom Hofe, 1998, S. 266)

Entsprechend werden die Interaktionen der Lernenden zunächst eingehend beschrieben und in der Folge mit präskriptiven normativen Aspekten verglichen, um Divergenzen zwischen erwarteten und den deskriptiv feststellbaren Erklärungsmodellen und Vorstellungen der Lernenden aufzudecken und zu erklären. Diese Methode bietet sich an,

> „wenn man sich aus deskriptiver Sicht dafür interessiert, ob Erklärungsmodelle, mit denen man Lern- bzw. Problemlöseprozesse beschreibt, tatsächlich in den Denkprozessen der Schüler die Rolle spielen, die man aus theoretischer Sicht vermutet." (vom Hofe, 1998, S. 259)

In den Arbeiten von vom Hofe (1998; 1999) wurden mithilfe interpretativer Fallanalysen selbstorganisierte Arbeitsphasen im computergestützten Analysisunterricht untersucht, um charakteristische Schwierigkeiten bei der Entwicklung des Grenzwertbegriffs (vom Hofe, 1998) und typische Handlungsmuster in selbstgesteuerten Arbeitsphasen am Computer (vom Hofe, 1999) zu identifizieren.

In den Arbeiten von Wartha (2007) und Hafner (2012) wurde dieser methodische Ansatz angewendet, um charakteristische Fehlermuster und Fehlvorstellungen in der Bruchrechnung (Wartha, 2007) und der Prozentrechnung (Hafner, 2012) zu identifizieren und zu beschreiben.

In allen Fällen folgten die Analysen der Struktur, dass zunächst auf Grundlage von sachanalytischen Überlegungen Erwartungen an die Lösungsprozesse der Lernenden formuliert wurden (*normative Ebene*). Die Bearbeitungen der Lernenden wurden dann *deskriptiv* im Detail beschrieben und in Hinsicht auf die vermuteten individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle der Lernenden interpretiert. Über einen Vergleich der normativen und deskriptiven Analysen wurden abschließend Folgerungen für die Unterrichtspraxis (*konstruktive Ebene*) abgeleitet.

**Beschreibung des methodischen Vorgehens in dieser Arbeit**

Das methodische Vorgehen in dieser Arbeit ist als eine Verbindung der Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung und der Analyse von Grundvorstellungen zu beschreiben.

Mit dem Ziel der Identifikation, Rekonstruktion und detaillierten Beschreibung von Transferprozessen in Hinsicht auf die formulierten Forschungsfragen werden ausgewählte Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler auf Grundlage der in Kapitel 2 neu formulierten Leitfragen untersucht:

- Welche Transferprozesse sind zur Lösung einer neuen Anforderung erforderlich und welche Grundvorstellungen werden dafür benötigt? (Normativer Aspekt)
- Welche individuellen Transferprozesse lassen sich in den Bearbeitungen der Lernenden erkennen und welche individuellen Vorstellungen liegen diesen zugrunde? (Deskriptiver Aspekt)
- Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen und wie lassen sich diese beheben? (Konstruktiver Aspekt)

Die Auswahl der Bearbeitungen der Lernenden zur Detailanalyse folgt dem Prinzip der Komparation, indem möglichst unterschiedliche Einzelbearbeitungen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Möglichst große Unterschiede werden dabei zum einen durch unterschiedliche Lösungen und zum anderen durch unterschiedliche Lösungswege beschrieben. Das Ziel ist es über den Vergleich kontrastierender Fälle Spezifika und Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten, die sich einer isolierten Fallbetrachtung möglicherweise verschließen.

Dazu werden zu allen drei Erhebungszeitpunkten Bearbeitungen von Lernenden zu gleichen Aufgaben ausgewählt und analysiert. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse werden dann in den Vergleich zu Analysen von Bearbeitungsprozessen von anderen Aufgaben desselben Erhebungszeitpunkts gesetzt. Am Ende werden die Ergebnisse der vergleichenden Analysen der drei Erhebungszeitpunkte miteinander verglichen, um den Vergleichshorizont zu erweitern und die Transferprozesse im Verlauf aller drei Erhebungszeitpunkte miteinander in Beziehung zu setzen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie übergreifende Charakteristika herauszustellen.

Die Detailanalysen folgen dem Prinzip der Analyse von Grundvorstellungen und sind auf einer Beschreibungs- und einer Erklärungsebene organisiert: Zunächst wird auf der Beschreibungsebene durch interpretative Analysen versucht die subjektive Logik der Lernenden während der Bearbeitung nachzuzeichnen bzw. zu rekonstruieren. Diese werden dann auf der Erklärungsebene mit den zuvor auf Grundlage einer Sachanalyse beschriebenen normativ erwarteten Bearbeitungs- und Transferprozessen verglichen.

Das methodische Vorgehen auf der Beschreibungsebene orientiert sich am Analysemuster der interpretativen Unterrichtsforschung. Es wird zunächst eine Gliederung der Bearbeitung in Szenen vorgenommen, die sich an der Bearbeitung von Teilaufgaben und einzelnen Lösungsschritten orientiert. Im Anschluss werden die Einzeläußerungen und Handlungen der Lernenden beschrieben und mit Bezug auf den Bearbeitungsprozess interpretiert. Die auf diese Weise entwickelten Interpretationen müssen sich im weiteren Verlauf der Analyse bewähren. Zum Schluss werden die tragfähigsten Interpretationen in Form von Deutungshypothesen zusammengefasst, die als Grundlage für die vergleichenden Analysen am Ende des jeweiligen thematischen Abschnitts dienen. Hierbei werden in den Interpretationen empirische Erkenntnisse zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs und charakteristischen Problembereichen (vgl. Abschnitt 2.2) einbezogen.

**Transkription der videographierten Daten**

Für die Transkription der Videodaten wird eine linearisierte Darstellung genutzt, weil diese vor dem Hintergrund des beschriebenen Forschungsinteresses zielführend ist, eine hohe Lesbarkeit verspricht und das Nachvollziehen von Unterrichtssituationen vereinfacht (vgl. Kowal & O'Connell, 2007). Die Vorzüge von detaillierten Darstellungen, zum Beispiel der differenzierten Partiturschreibweise einer gesprächsanalytischen Arbeitstranskription, kämen in der vorliegenden Arbeit kaum zum Tragen, da das zentrale Forschungsinteresse nicht den Interaktionsstrukturen und -mustern in den Lernendenbearbeitungen gilt. Den Nachteilen der gewählten Darstellungsform, wie zum Beispiel die fehlende Möglichkeit synchrone Prozesse und Gesprächssequenzen entsprechend zu repräsentieren, wird durch die Nutzung kursiver Kommentare in den linearen Transkripten begegnet (vgl. Dresing & Pehl, 2020; Salle, 2015). Auf diese Weise können nicht strukturell im Transkript repräsentierbare Informationen angemessen dargestellt werden. Die Zeilennummern eines Transkripts sind fortlaufend vergeben und beginnen stets bei 1. Auslassungen werden im Transkript oder im Text kenntlich gemacht.

Für die Transkripte werden folgende Zeichen und Ausdrücke genutzt:

`normaler Text` stellt gesprochenen Text dar
*`(kursiver Text in Klammern)`* stellt Kommentare zum Transkript dar
`..` symbolisiert eine kurze Pause von maximal 2 Sekunden
`...` symbolisiert eine Pause von maximal 5 Sekunden (längere Pausen werden als Kommentare angegeben)

# Vorwissen und Leistungsentwicklung 4

In diesem Kapitel werden die Auswertungen des parallelisierten Vor- und Nachtests dargestellt. Dazu wird zunächst auf Grundlage des Vortests das Vorwissen der Schülerinnen und Schülern beschrieben. Dieser Charakterisierung wird auf quantitativer Ebene die Lösungshäufigkeit der Testitems und Itemgruppen zugrunde gelegt. Die quantitativen Darstellungen werden durch die Diskussion ausgewählter Aufgabenlösungen der Schülerinnen und Schüler ergänzt, um die Testergebnisse vor dem Hintergrund der Entwicklung von Grundvorstellungen einzuordnen. Die Auswertungen des Vortests werden im Anschluss mit den dichotomisierten Auswertungen des Nachtests abgeglichen, um die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler zu beschreiben. Abschließend wird die Zusammensetzung der Paare für die Partnerarbeiten während der Arbeitssitzungen zur Datenerhebung dargestellt.

## 4.1 Vorwissen der Lernenden

Die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler zeigen eine hohe Heterogenität. Die Spannweite der Testergebnisse reicht von 15 % bis 90 % und im arithmetischen Mittel bearbeiten die Schülerinnen und Schüler 60 % der Aufgaben im Vortest korrekt (vgl. Abb. 4.2).

Die Aufteilung der Testergebnisse in Quartile (vgl. Abb. 4.1) ergibt, dass sechs Schülerinnen und Schüler weniger als 40 % der Aufgaben im Vortest korrekt gelöst haben. Der mittleren Leistungsgruppe (Quartile 2 und 3) lassen sich 15 Testergebnisse zuordnen, deren Lösungshäufigkeiten zwischen 40 und 84 % liegen. Neun Schülerinnen und Schüler haben mehr als 85 % der Testaufgaben korrekt beantwortet und bilden die stärkste Leistungsgruppe.

 
S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs,* Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_4

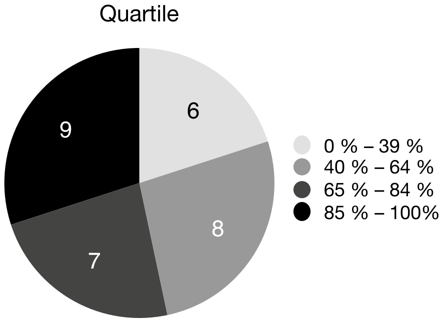



**Abbildung 4.1** Quartilzuordnung der Ergebnisse im Vortest

**Vorwissen der Lernenden nach inhaltlichen Kategorien**

Die parallelisierten Items im Vortest verteilen sich auf fünf inhaltliche Kategorien (siehe Abschnitt 3.3.1). Der Überblick über die Testergebnisse in den einzelnen Kategorien zeigt eine große Streuung in allen Kategorien (vgl. Abb. 4.3). Die breite Streuung der Ergebnisse in den einzelnen Kategorien wird einerseits in der Größe der Boxen deutlich, die die mittleren 50 % der Testergebnisse repräsentieren, sowie in den Abständen der Whiskern, die in der vorliegenden Darstellung die niedrigsten und höchsten Testergebnisse kennzeichnen und somit die Spannweite der individuellen Ergebnisse darstellen.

Nachfolgend werden die Vortestergebnisse in den einzelnen Kategorien näher beschrieben und anhand charakteristischer Lösungen diskutiert.

**Ergänzen von Multiplikations- und Divisionsoperatoren:** In dieser Kategorie sollten die Schülerinnen und Schüler die Rechenoperationen in Operatorpfeil-Darstellungen ergänzen (vgl. Abb. 4.4)

Das erste Item betrifft das Rechnen mit natürlichen Zahlen und die Schülerinnen und Schüler sollten eine Rechenoperation eintragen, mit der die Zahl 16 auf die Zahl 96 abgebildet werden kann. Hier wurden die Lösungen über die Addition $+80$ sowie über die Multiplikation $\cdot 6$ akzeptiert und als korrekt bewertet. Dieses Item wurde von den meisten Schülerinnen und Schülern korrekt beantwortet, wobei 23 Schülerinnen und Schüler die Multiplikation mit 6 und lediglich zwei Schülerinnen und Schüler die Addition mit 80 angaben. Drei Schülerinnen und Schüler haben dieses Item nicht bearbeitet und es wurden insgesamt nur zwei falsche Lösungen abgegeben ($\cdot 4$ und $\cdot 7$), die als Rechenfehler charakterisiert werden können.

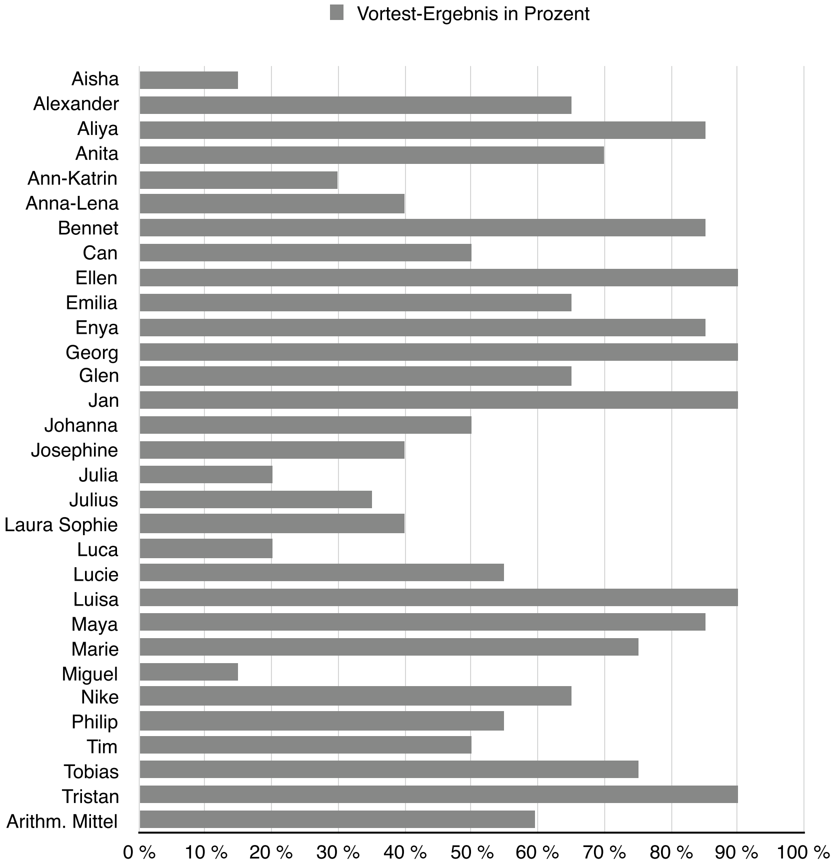



**Abbildung 4.2** Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler im Vortest in Prozent

Das zweite Item beinhaltet eine Bruchzahl und es soll eine Rechenoperation angegeben werden, die die natürliche Zahl 4 auf die Bruchzahl $\frac{1}{2}$ abbildet. Dieses Item wurde lediglich von neun Schülerinnen und Schülern korrekt beantwortet, wobei ein Schüler die Subtraktion $-3{,}5$ und acht Schülerinnen und Schüler die Division $:8$ als korrekte Lösungen angaben. Acht Schülerinnen und Schüler haben keine Angabe gemacht und die häufigsten falschen Nennungen sind $:2$ (7 Nennungen) und $:3,5$ (4 Nennungen).

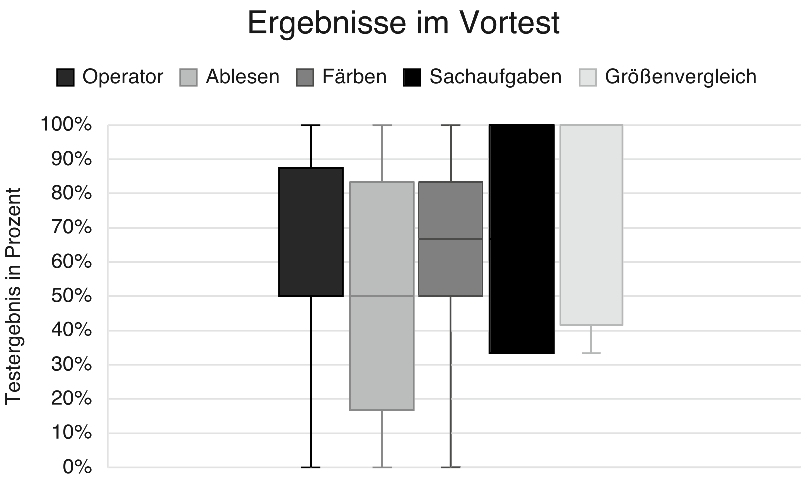



**Abbildung 4.3** Ergebnisse im Vortest nach inhaltlichen Kategorien

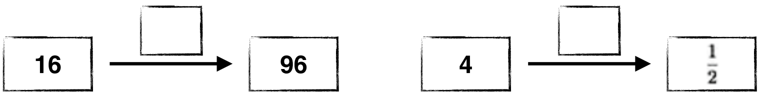



**Abbildung 4.4** Items in der Kategorie Ergänzen von Multiplikations- und Divisionsoperatoren

**Ablesen von Bruchteilen aus unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen:** Der Vortest enthält insgesamt sechs Items zum Ablesen von Brüchen aus ikonischen Repräsentationen, die auf zwei Aufgaben verteilt sind. Die maximale Spannweite der Ergebnisse von 100 % bringt zum Ausdruck, dass einige Schülerinnen und Schüler alle Brüche korrekt ablesen konnten, während andere Schülerinnen und Schüler gar keinen Bruch korrekt abgelesen haben. Der Interquartilsabstand, der in Abb. 4.3 durch den Anfang und das Ende der Box repräsentiert ist, beträgt ca. 65 %, was bedeutet, dass die Hälfte der Schülerinnen und Schüler zwischen 18 und 83 % der Brüche korrekt abgelesen haben, was ein starkes Kennzeichen für die hohe Heterogenität des Vorwissens zum Ablesen von Brüchen ist. Im Durchschnitt konnten die Schülerinnen und Schüler etwa die Hälfte der Brüche korrekt ablesen (Median: 50 %, arithmetisches Mittel: 48,9 %).

Eine Analyse der fehlerhaften Antworten beim Ablesen von Brüchen zeigt ein prototypisches Fehlermuster, bei dem die Zahlen in Zähler und Nenner die Anzah-

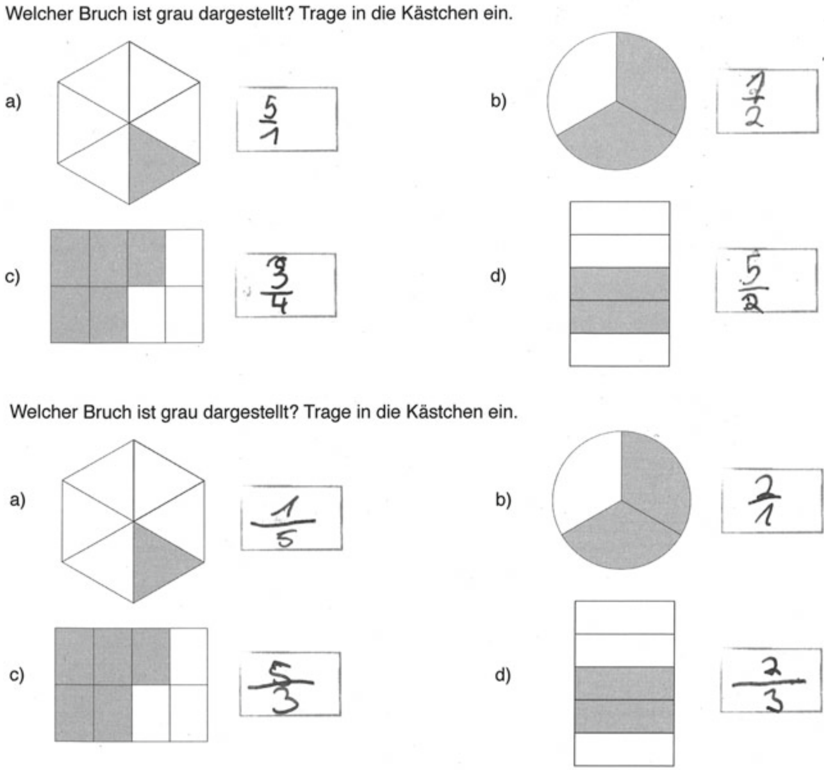



**Abbildung 4.5** Anna Lenas (oben) und Johannas (unten) Lösungen beim Ablesen von Brüchen

len der gefärbten und nicht-gefärbten Teile der ikonischen Repräsentation repräsentieren. Dieses Fehlermuster ist in den Lösungen Anna Lena und Johanna (siehe Abb. 4.5) sehr deutlich zu erkennen. Während Anna Lena im Zähler die Anzahl der nicht-gefärbten Teile und im Nenner die Anzahl der gefärbten Teile notiert, verfährt Johanna genau umgekehrt. Das zweite erkennbare systematische Fehlermuster ist die Orientierung an bekannten (Alltags-) Brüchen, wie z. B. Vierteln. Dieses systematische Fehlermuster ist deutlich in den Lösungen von Laura zu erkennen (siehe Abb. 4.6).

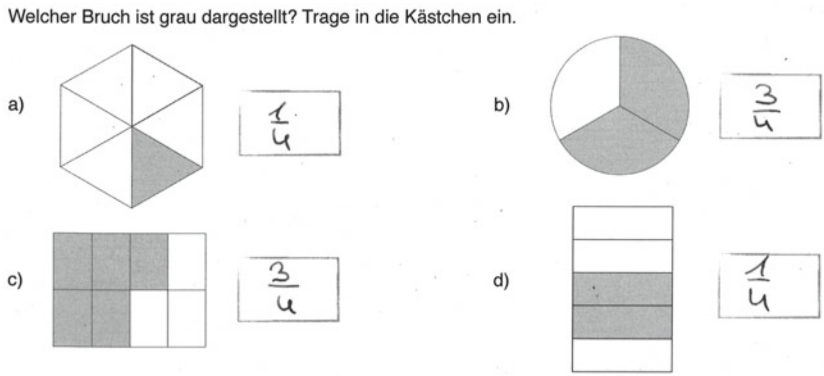



**Abbildung 4.6** Orientierung an Vierteln in Lauras Lösungen zum Ablesen von Brüchen aus ikonischen Repräsentationen

Der Zahl von zwölf Schülerinnen und Schülern der Lerngruppe, die keinen bis maximal einen von sechs Brüchen korrekt ablesen konnten, stehen genau so viele Schülerinnen und Schüler gegenüber, die fünf oder sechs der sechs Brüche korrekt ablesen konnten. Diese Verteilung der minimalen und maximalen Ergebnisse beim Ablesen von Brüchen deutet darauf hin, dass etwa die Hälfte der Lerngruppe bereits sehr gute Erfahrungen im Ablesen von Brüchen hat, während die andere Hälfte nahezu kein Vorwissen in diesem Bereich mitbringt.

**Einzeichnen und Einfärben von Bruchteilen in ikonischen Darstellungen:** Der Pretest enthält sechs Items zum Einzeichnen von Brüchen in ikonische Darstellungen. Von diesen sind vier Repräsentationen bereits durch eine Einteilung strukturiert. Zwei Figuren sind ohne eine Einteilung vorgegeben.

Die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler beim Einzeichnen von Brüchen zeigen eine ähnliche Heterogenität wie in den vorhergehenden Itemgruppen, doch können die mittleren 50 % der Lernenden Brüche besser in ikonischen Darstellungen einzeichnen als Brüche aus diesen ablesen. Im Median konnten die Lernenden drei von vier Brüche in strukturierten Repräsentationen einzeichnen und einen von zwei in Repräsentationen ohne eine vorgegebene Einteilung. Insgesamt liegt die durchschnittliche Lösungshäufigkeit bei 60,6 %. Zehn Schülerinnen und Schüler konnten fünf oder sechs der sechs Brüche korrekt einzeichnen, während lediglich vier Schülerinnen und Schüler keinen oder nur einen der sechs Brüche einzeichnen konnten.

Die beobachteten typischen Fehler beim Einzeichnen von Brüchen in Repräsentationen mit einer vorgegebenen Einteilung deuten darauf hin, dass die Lernenden mit niedrigen Lösungshäufigkeiten auf wenig bis keine früheren Erfahrungen zum Einzeichnen von Brüchen zurückgreifen konnten und versucht haben die Zahlen in den symbolischen Bruchangaben plausibel zu deuten.

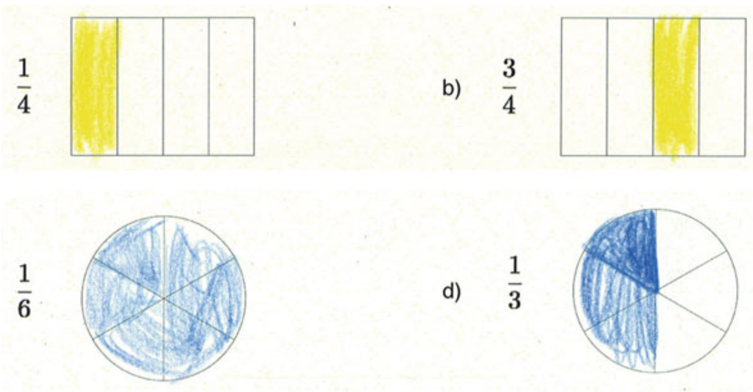



**Abbildung 4.7** Julias Zeichnungen der Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ (oben) und Aishas Zeichnungen der Brüche $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$ (unten)

Während Julia scheinbar den Zähler eines Bruchs als ordinale Angabe interpretiert und von je vier Segmenten das erste Segment für den Bruch $\frac{1}{4}$ und das dritte Segment für den Bruch $\frac{3}{4}$ markiert, interpretiert Aisha die Zahl im Nenner als Anzahl der zu färbenden Teile (siehe Abb. 4.7).

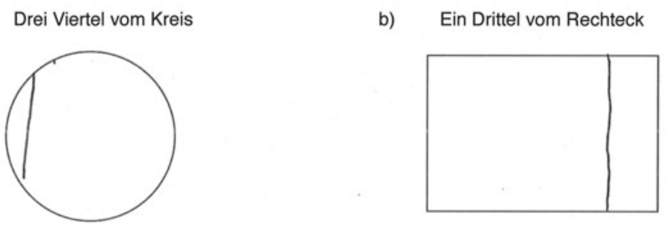



**Abbildung 4.8** Josephines Zeichnungen der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{3}$

Die Fehler der Lernenden zum Einzeichnen von Brüchen in ikonischen Repräsentationen ohne vorgegebene Einteilung lassen erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler mit niedrigen Lösungshäufigkeiten noch über wenige Erfahrungen und Strategien zum Einteilen eines Ganzen verfügen und versuchen nach Größenabschätzung einen entsprechenden Teil des Ganzen abzutrennen (siehe Abb. 4.8).

**Ein- und mehrschrittige Sachaufgaben:** Der Vortest enthält drei ein- und zweistufige Sachaufgaben zum Berechnen von Anteilen. Dabei sollten in den einstufigen Sachaufgaben die Hälfte einer 12 km langen Strecke und drei Viertel von 80 € berechnet werden. In einer zweistufigen Sachaufgabe sollte berechnet werden, wie viel Euro noch zu 120 € fehlen, wenn man bereits zwei Drittel des Geldbetrags gespart hat. Insgesamt konnten von den Lernenden im Vortest im Durchschnitt 63,3 % der Aufgaben korrekt lösen, das bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler im Median zwei der drei Aufgaben korrekt gelöst haben. Zehn Schülerinnen und Schülern, die alle drei Sachaufgaben richtig lösen konnten, stehen 13 Schülerinnen und Schüler gegenüber, die lediglich eine Aufgabe richtig lösen konnten. Bei dieser einen gelösten Aufgabe handelt es sich in allen Fällen um die Berechnung der Hälfte einer zwölf Kilometer langen Strecke.

Als charakteristische Fehler bei der Berechnungen von Anteilen in einem Sachkontext konnten Fehler beim Rechnen mit natürlichen Zahlen und die Wahl der falschen Rechenoperation festgestellt werden. Charakteristisch für den Fehlertyp der Wahl der falschen Rechenoperation waren bei der Aufgabe zur Berechnung von drei Vierteln von 80 €, dass 80 € nicht durch 4, sondern durch 3 geteilt wurden (siehe Abb. 4.9) und bei der zweistufigen Aufgabe zur Berechnung von einem Drittel bzw. zwei Dritteln von 120 € die wiederholte Division, d. h. dass für $\frac{2}{3}$ von 120 € $120 : 3 = 40$ gerechnet wurde und das Zwischenergebnis nicht mit 2 multipliziert, sondern durch 2 dividiert wurde (vgl. Abb. 4.10).

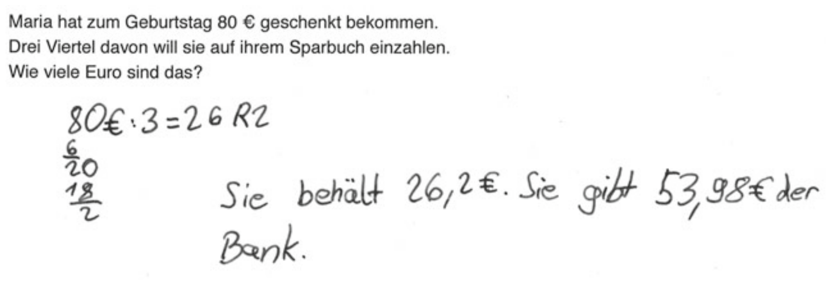
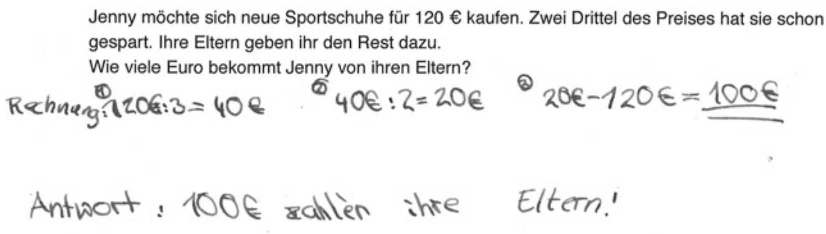



**Abbildung 4.9** Glens Lösung von Aufgabe 9



Jenny möchte sich neue Sportschuhe für 120 € kaufen. Zwei Drittel des Preises hat sie schon gespart. Ihre Eltern geben ihr den Rest dazu.
Wie viele Euro bekommt Jenny von ihren Eltern?

Rechnung: ① 120€ : 3 = 40€ ② 40€ : 2 = 20€ ③ 20€ − 120€ = 100€

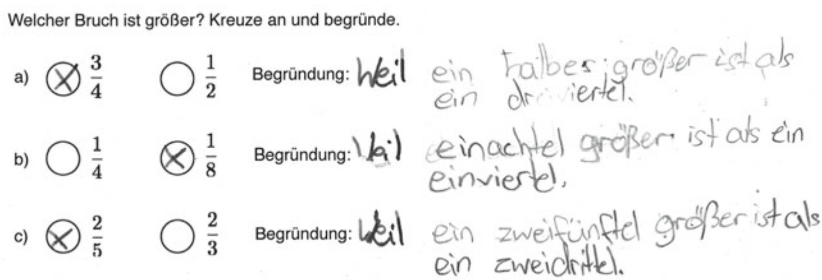
Antwort: 100€ zahlen ihre Eltern!

**Abbildung 4.10** Enyas Lösung von Aufgabe 11 des Vortests

**Größenvergleich von Bruchteilen:** In drei Vortest-Items sollten die Schülerinnen und Schüler Brüche der Größe nach vergleichen und aus je zwei vorgegebenen Brüchen den größeren auswählen. Dabei sollten die Alltagsbrüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ sowie zwei Paare von Brüchen mit gleichen Zählern miteinander verglichen werden ($\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ sowie $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{3}$).

Insgesamt kreuzten 16 Schülerinnen und Schüler in allen drei Fällen korrekt den größeren der zu vergleichenden Brüche an, acht Schülerinnen und Schüler konnten nur im Vergleich der Alltagsbrüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ den größeren Bruch richtig identifizieren. Für die Wertung der Aufgabenlösungen als richtig oder falsch wurde lediglich die Kennzeichnung des größeren Bruchs gewählt. Die Begründungen der Auswahlen der Schülerinnen und Schüler wurden nicht bewertet. Insgesamt wurden somit in dieser Itemgruppe im Schnitt 76,6 % korrekte Antworten gegeben und im Median konnten die Lernenden in allen drei Fällen den größeren Bruch bestimmen.

Charakteristische Fehler, die in den Bearbeitungen der Lernenden unter Einbezug der notierten Begründungen beobachtet werden konnten, folgten in allen Fällen der Argumentation, dass von zwei Brüchen derjenige der größere Bruch ist, in dessen Nenner die größere Zahl steht (vgl. Abb. 4.11)



Welcher Bruch ist größer? Kreuze an und begründe.

a) ⊗ $\frac{3}{4}$ ○ $\frac{1}{2}$ Begründung: weil ein halbes größer ist als ein dreiviertel.

b) ○ $\frac{1}{4}$ ⊗ $\frac{1}{8}$ Begründung: weil einachtel größer ist als ein einviertel.

c) ⊗ $\frac{2}{5}$ ○ $\frac{2}{3}$ Begründung: weil ein zweifünftel größer ist als ein zweidrittel.

**Abbildung 4.11** Julias Lösungen von Aufgabe 10 des Vortests

**Ergebnisse der ergänzenden Testitems zum Umgang mit natürlichen Zahlen:** Die Ergebnisse der ergänzenden Testitems zum Umgang mit natürlichen Zahlen zeigen, dass keine Lernenden auffällige Schwierigkeiten im Umgang und im Rechnen mit natürlichen Zahlen haben. Die Aufgaben zum Ordnen zwei- bis fünfstelliger natürlicher Zahlen, wurden, mit Ausnahme einer einzelnen Nichtbearbeitung einer Teilaufgabe, von allen Schülerinnen und Schülern korrekt gelöst. Ebenso konnten alle Schülerinnen und Schüler eine Sachaufgabe zum Aufteilen von 240 € auf sechs Personen korrekt lösen. Lediglich in den Bearbeitungen einer sehr komplexen mehrschrittigen Sachaufgabe liegt die Lösungshäufigkeit bei 53 %. Fehleranalysen der Bearbeitungen dieser Aufgabe weisen hierbei jedoch darauf hin, dass die Hauptfehlerquelle im vollständigen Textverständnis und dem Einbezug aller im Aufgabentext vorgegebenen Daten zur Berechnung liegen.

## 4.2 Leistungsentwicklung

Der Vergleich der Leistungen im parallelisierten Vor- und im Nachtest (vgl. 3.3.1) gibt Aufschluss über die globale Leistungsentwicklung der Lerngruppe.

Die Repräsentation der Vor- und Nachtestergebnisse in einem Boxplot (Abb. 4.12) veranschaulicht, dass die Leistungen der Schülerinnen und Schüler im Nachtest näher zusammen rücken und im Allgemeinen wesentlich höher sind als die Leistungen im Vortest. Die Spannweite der Ergebnisse verringert sich von 75 % auf 45 % mit einer niedrigsten Testleistung von 55 % und den höchsten Testleistungen mit 100 %. Das untere Quartil ist um 35 Prozentpunkte höher als im Vortest und auch das obere Quartil liegt fünf Prozent höher als im Vortest. Der Medianwert der erreichten Testergebnisse liegt im Vergleich zum Vortest 20 Prozentpunkte höher bei 85 %.

Insgesamt ist zu erkennen, dass die mittleren 50 % der Testergebnisse in einem Rahmen von 75 % bis 90 % liegen, wohingegen sie im Vortest noch zwischen 40 % und 85 % lagen.

Der Vergleich der Kennwerte der beiden Boxplots zeigt eine deutliche Homogenisierung der Testergebnisse im Vergleich zum Vortest und eine insgesamt höhere Testleistung der gesamten Lerngruppe. Die Steigerung der Testleistungen der Lernenden kann durch einen $t$-Test mit paarweise verbundenen Stichproben zum Vergleich der durchschnittlichen Testleistungen der Lerngruppe in Vor- und Nachtest bestätigt werden. Bei Annahme der Gleichheit des Mittelwerts in Vor- und Nachtest und einem Signifikanzniveau von 5 % ergibt sich bei 29 Freiheitsgraden eine Testgröße von $t_{29} = 5,2789$ und ein entsprechender $p$-Wert kleiner als $0,001$. Somit kann aufgrund des festgelegten Signifikanz-Niveaus von $\alpha = 0,05$ die Nullhy-

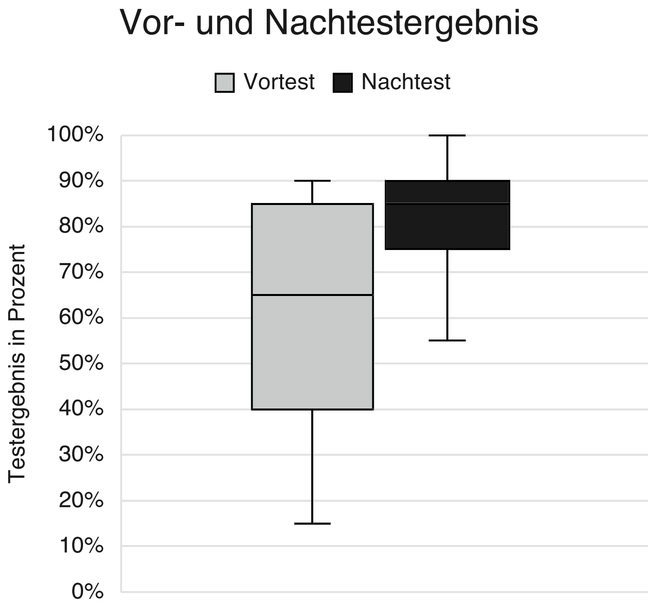



**Abbildung 4.12** Vergleich von Vor- und Nachtestergebnis der untersuchten Lerngruppe

pothese, d. h. die Annahme der Gleichheit des Mittelwerts, abgelehnt werden. Die Verbesserungen der Testleistungen im Vergleich zum Vortest sind somit statistisch signifikant.

Die individuellen Veränderungen der Testleistungen der einzelnen Schülerinnen und Schüler sind im Streudiagramm in Abb. 4.13 dargestellt. Jeder Kreis repräsentiert eine Schülerin oder einen Schüler der Klasse, die $x$-Koordinate wird durch das prozentuale Ergebnis im Vortest und die $y$-Koordinate durch das prozentuale Ergebnis im Nachtest bestimmt. Die Kreise oberhalb der Winkelhalbierenden im Koordinatenursprung repräsentieren demnach Lernende, die im Nachtest ein höheres Ergebnis erzielt haben als im Vortest. Entsprechend repräsentieren Kreise unterhalb der Winkelhalbierenden Lernende, deren Testleistung im Nachtest niedriger als im Vortest waren und Kreise auf der Winkelhalbierenden repräsentieren Lernende mit gleicher Vor- und Nachtestleistung.

Das Streudiagramm zeigt, dass mit Ausnahme von fünf Lernenden alle Schülerinnen und Schüler eine deutliche Verbesserung der Testergebnisse erreicht haben, drei Lernende die gleiche Testleistung erreicht haben und zwei Lernende im

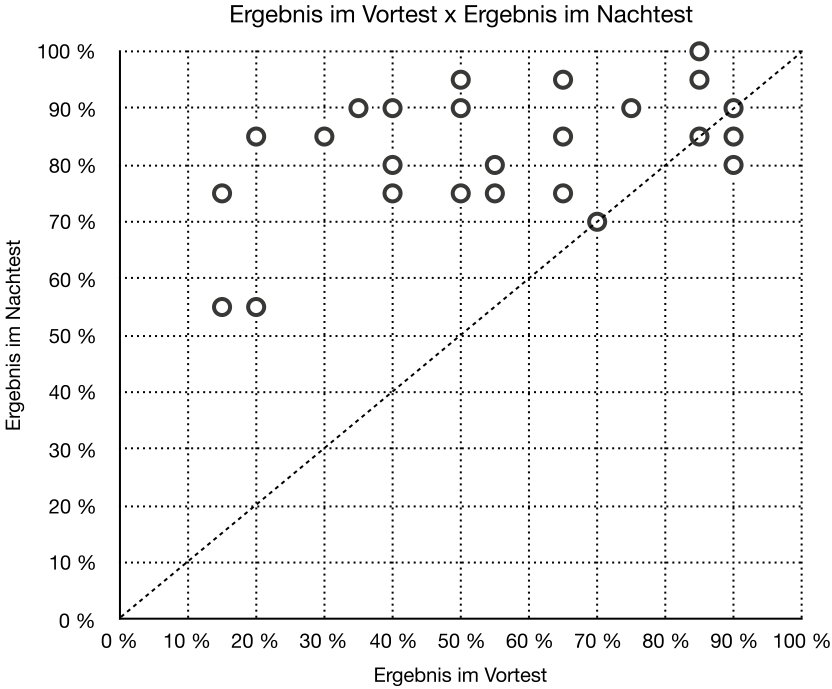



**Abbildung 4.13** Vergleich der Vor- und Nachtestergebnisse der einzelnen Schülerinnen und Schüler

Nachtest ein minimal schlechteres Ergebnis als im Vortest erzielt haben. Es ist zu erkennen, dass vier der fünf niedrigeren bzw. stagnierenden Ergebnisse in einem insgesamt hohen Leistungsbereich mit einer Testleistung von über 85 % liegen. Da insgesamt 20 Items für die Berechnung der dichotomisierten Testleistungen einbezogen wurden, entspricht eine Abweichung um fünf bzw. zehn Prozent der korrekten Beantwortung eines bzw. zweier Testitems.

Bei Betrachtung der Testergebnisse in den einzelnen Inhaltsbereichen zeigt sich, dass die Lernenden im Mittel 100 % (Median) der Items zum Ablesen (arithmetisches Mittel: 97 %) und Einzeichnen (arithmetisches Mittel: 91 %) von Brüchen korrekt lösen. Die Ergebnisse in den Itemgruppen zum Ergänzen von Rechenoperatoren (Median: 50 %, arithmetisches Mittel: 42 %) und den ein- und mehrschrittigen Sachaufgaben (Median: 67 %, arithmetisches Mittel: 62 %) sind minimal rückläufig bzw. stagnierend. Es ist anzunehmen, dass diese Ergebnisse auf die veränderten

Brüche in den Sachaufgaben im Nachtest zurückzuführen sind. Während im Vortest vor allem die Alltagsbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{3}$ in Sachkontexte eingebunden waren, enthielten die Sachaufgaben im Nachtest die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$. Da das Ergänzen von Rechenoperatoren in der Unterrichtseinheit nicht explizit behandelt wurde, sind die leicht niedrigeren Testergebnisse in diesem Bereich wenig aussagekräftig. Die Analyse der einzelnen Lösungen zeigt jedoch, dass die Lernenden im Nachtest vor allem Multiplikations- und Divisionsoperatoren ergänzt haben, während sie im Vortest auch Additions- und Subtraktionsoperatoren ergänzt haben. Die meisten Fehler in diesem Bereich des Nachtests lassen sich auf Rechenfehler zurückführen.

Auch die Testergebnisse zum paarweisen Größenvergleich von Brüchen zeigen einen geringfügig negativen Trend (arithmetisches Mittel im Vortest: 77 %, 67 % im Nachtest). Als Grund dafür lassen sich erneut die Unterschiede zwischen den Testitems vermuten. Während zwei der drei zu vergleichenden Bruchpaare im Vor- und Nachtest sehr ähnlich bzw. identisch waren, enthielt der Nachtest zusätzlich das Bruchpaar $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{8}$, das aufgrund der unterschiedlichen Zahlen in Zähler und Nenner eine höhere Schwierigkeit darstellt als die Vergleiche im Vortest.

Auf eine qualitative Darstellung von typischen Fehlern im Nachtest wird an dieser Stelle verzichtet, da diese sehr ähnlich zu den im Vortest dokumentierten Fehlern sind und entsprechend der beschriebenen Leistungsentwicklung wesentlich seltener aufgetreten sind.

## 4.3 Zusammensetzung der Lernenden-Paare

Die Paare für die Arbeitssitzungen zur Datenerhebung sind in Bezug auf ihr Vorwissen sehr heterogen zusammengesetzt. Dem Bubbleplot in Abb. 4.14 liegt eine Einteilung entsprechend der Quartile der Testleistungen im Vortest zugrunde. Die Leistungen im unteren Bereich liegen zwischen 15 % und 39 %. Weitere Leistungsstufen sind 40 % bis 64 %, 65 % bis 84 % und in den höchsten Bereich fallen Leistungen zwischen 85 % bis 100 %. Alle Lernenden können entsprechend ihres Ergebnisses im Vortest einer der vier Stufen zugeordnet werden. Die Zahlen in den Kreisen des Bubbleplots entsprechen den Anzahlen der Paare, in denen Lernende mit den entsprechenden Vortestleistungen zusammenarbeiten. In der Abbildung wurden die Lernenden mit der besseren Vortestleistung auf der vertikalen Achse angeordnet und die Lernenden mit den niedrigeren Vortestergebnissen auf der horizontalen Achse.

Mit Ausnahme von zwei möglichen Kombinationen finden sich alle möglichen Zusammensetzungen der Lernenden-Paare in der Untersuchungsgruppe wieder. Fünf Paare setzen sich aus Schülerinnen und Schülern mit demselben Vortest-Niveau

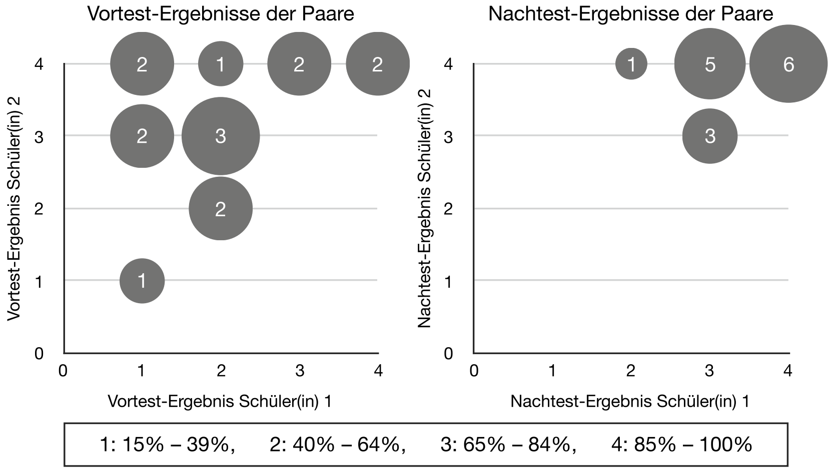



**Abbildung 4.14** Zusammensetzung der Paare hinsichtlich ihrer Leistungen im Vortest und im Nachtest

zusammen, bei ebenfalls fünf Paaren unterscheiden sich die Vortestergebnisse der Schülerinnen und Schüler um eine Stufe. Bei drei Paaren unterscheiden sich die Vortestergebnisse um zwei Stufen und bei zwei Paaren sogar um drei Niveau-Stufen.

Für einen Vergleich der Leistungsniveaus der Paarzusammensetzungen am Anfang und am Ende der Unterrichtseinheit wurden in der rechten Darstellung (Abb. 4.14, rechts) die Nachtestergebnisse der Lernenden den gleichen Kategorien auf Basis des Vortests zugeordnet. Die Abbildung zeigt, dass am Ende der Unterrichtseinheit die Leistungsniveaus mit Ausnahme eines Paares um maximal eine Stufe voneinander abweichen, was als weiteres Zeichen für eine deutliche Homogenisierung der Leistungen der Schülerinnen und Schüler interpretiert werden kann.

# 5 Detailanalysen von Transferprozessen

In diesem Kapitel werden die Detailanalysen der Bearbeitungsprozesse der Lernenden dargestellt. Es werden ausgewählte Bearbeitungen von Lernendenpaaren in Transfersituationen analysiert und miteinander in Beziehung gesetzt. In Hinsicht auf das Forschungsinteresse dieser Arbeit folgen die deskriptiven Analysen vor allem den folgenden Zielen:

**Deskriptive Beschreibung von Transferprozessen:** Es wird der Frage nachgegangen, wie sich Transferprozesse in alltäglichen Unterrichtssituationen gestalten. Zu diesem Zweck werden die Bearbeitungsprozesse der Lernendenpaare in Transfersituationen rekonstruiert, mit dem Ziel Transferprozesse zu identifizieren und detailliert zu beschreiben.

**Rekonstruktion der Erklärungsmodelle der Lernenden:** Ein wesentliches Augenmerk der Analysen der Bearbeitungsprozesse ist die Rekonstruktion der Erklärungsmodelle und Vorstellungen der Lernenden. Die Frage dabei ist zum einen, welche Erklärungsmodelle und Vorstellungen die Lernenden bei der Bearbeitung der Transferaufgaben aktivieren und zum anderen, inwieweit diese Transferprozesse unterstützen oder womöglich behindern.

Auf dieser Grundlage werden mit dem Ziel der Charakterisierung von Transferprozessen mehrere Vergleiche in Rahmen von komparativen Analysen vorgenommen. Hierzu werden einerseits die individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle der Partnerinnen und Partner miteinander verglichen, um individuelle Unterschiede und Gemeinsamkeiten herauszustellen, die einen Einfluss auf Lösungsprozesse und respektive die Transferprozesse haben. Auf einer weiteren Ebene des Vergleichs werden die Bearbeitungsprozesse verschiedener Paare zu der gleichen Transferaufgabe vorgenommen, um die Spezifika der Bearbeitungs- und Transferprozesse in einem größeren Zusammenhang miteinander Beziehung zu setzen. Diese Schritte



S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs,* Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_5

werden für verschiedene Transferaufgaben im gleichen inhaltlichen Kontext wiederholt. Hierbei ist das Ziel zu vergleichen, inwieweit sich Transferprozesse in unterschiedlichen Transfersituationen mit demselben Gegenstand des Transfers ähneln oder unterscheiden.

Zuletzt sollen Transferprozesse im Rahmen einer längerfristigen Unterrichtseinheit untersucht werden. Vor diesem Hintergrund erfolgen die beschriebenen Analysen anhand der Daten von drei verschiedenen Datenerhebungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten der Unterrichtseinheit. Diese bilden die übergeordnete Ebene des Vergleichs der Analyseergebnisse. In Abschnitt 5.1 werden die Analysen der Partnerarbeiten zur Einführung von Brüchen als Teile eines Ganzen geschildert. Die Analysen in Abschnitt 5.2 umfassen Partnerarbeiten, in denen die Schülerinnen und Schüler Transferaufgaben zu Brüchen als Teile beliebiger Größen bearbeiten und im dritten Abschnitt 5.3 ist der inhaltliche Kern der Analysen das Verfahren zum Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung im Zusammenhang mit der Gleichwertigkeit von Brüchen. Abschließend werden die Ergebnisse der Analysen der drei Datenerhebungen in Abschnitt 5.4 zusammengeführt.

## 5.1 Anteile von einem Ganzen

In diesem Abschnitt werden die Analysen der Daten aus der ersten Datenerhebung dargestellt. Dazu werden zunächst in einem Überblick die verwendeten Lernmaterialien beschrieben. Diese umfassen ein interaktives animiertes Lösungsbeispiel, zwei unvollständige Lösungsbeispiele sowie ausgewählte Transferaufgaben. Die Beschreibung der Materialien erfolgt auf sachanalytischer Ebene mit Bezug auf die enthaltenen Grundvorstellungen. Diese normativen Analysen stellen den Ausgangspunkt für die Beschreibung der für eine Lösung der Transferaufgaben erforderlichen Transferprozesse.

**Lösungsbeispiel:** Zur Einleitung der Arbeitsphase lesen die Lernenden ein zweiteiliges animiertes Lösungsbeispiel am Computer. Die beiden Teile des Lösungsbeispiels sind in ihren Endzuständen auch in den Arbeitsheften der Lernenden abgebildet und werden jeweils durch fokussierende Fragestellungen begleitet.

Teil a) des Lösungsbeispiels veranschaulicht die Herstellung des Bruchs $\frac{5}{8}$ an einer Kreisrepräsentation (Endzustand siehe Abbildung 5.1). In den Animationen des Lösungsbeispiels wird zunächst ein Kreis in acht gleich große Teile zerlegt. Ein Teil davon wird farblich als $\frac{1}{8}$ markiert bevor im nächsten Schritt nacheinander fünf Teile eingefärbt werden, sodass insgesamt $\frac{5}{8}$ des ganzen Kreises markiert sind.

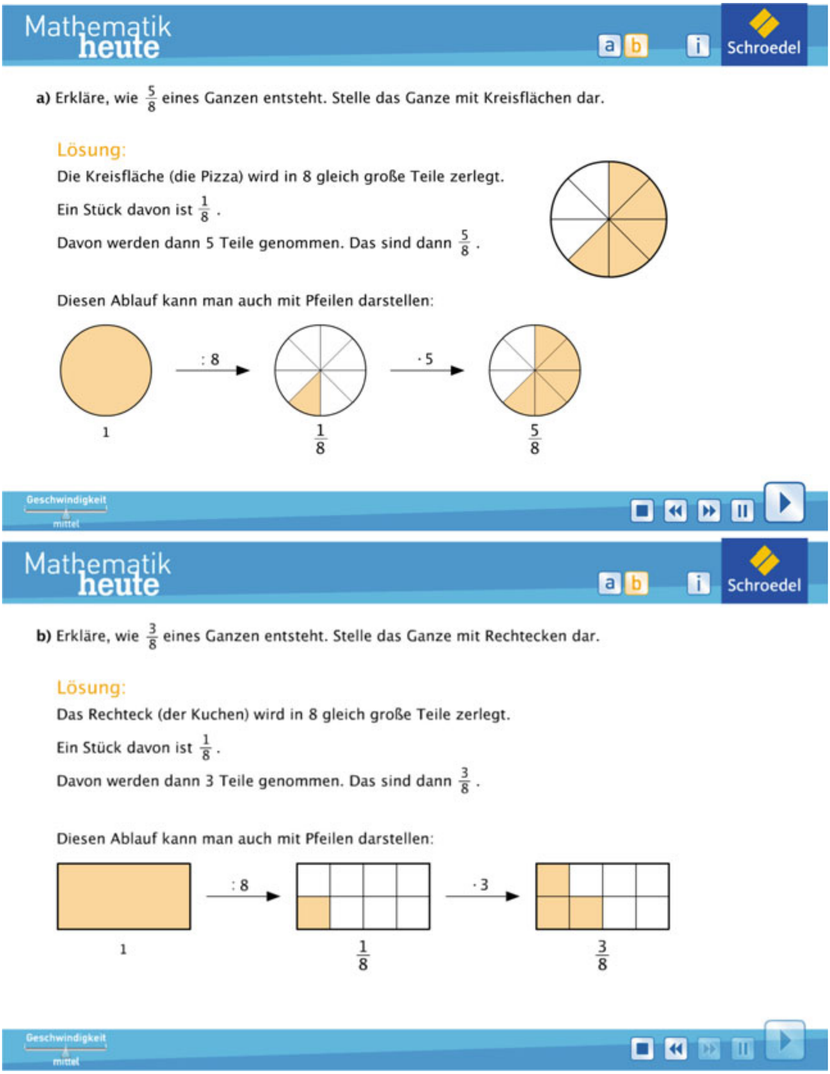



**Abbildung 5.1** Endzustand des animierten Lösungsbeispiels 1a (oben) und 1b (unten)

Im Anschluss wird dieses Bruchherstellungsverfahren in einem ikonischen und symbolischen Pfeildiagramm dargestellt und die jeweiligen Herstellungshandlungen mit den entsprechenden Rechenoperatoren :8 zum Teilen des ganzen in acht gleich große Teile und ·5 zum Vervielfachen bzw. ‘Nehmen’ von fünf Teilen verknüpft.

Teil b) des Lösungsbeispiels vollzieht analog die Anteilbildung des Bruchs $\frac{3}{8}$ in verkürzter Form anhand einer Rechteckdarstellung nach (Endzustand siehe Abbildung 5.1).

In den Arbeitsheften der Lernenden werden die statisch abgebildeten Lösungsbeispiele jeweils mit einer fokussierenden Fragestellung begleitet:

*Lösungsbeispiel Teil a):* Warum erhält man $\frac{5}{8}$ und nicht $\frac{8}{5}$? Begründe.
*Lösungsbeispiel Teil b):* Beschreibe mit eigenen Worten, wie man aus einem Ganzen $\frac{3}{8}$ erhält.

Die fokussierenden Fragen beziehen sich auf das Bruchherstellungsverfahren als Kernkonzept des Lösungsbeispiels und bestehen in der Aufforderung zur Richtigstellung einer häufig auftretenden Fehlvorstellung sowie in einer Aufforderung zur Erklärung des Verfahrens im Lösungsbeispiel mit eigenen Worten. Die erste fokussierende Fragestellung soll so die Lernenden dazu anleiten über die unterschiedlichen Bedeutungen von Zähler und Nenner zu reflektieren und herauszustellen, dass die Zahl im Nenner die Anzahl der gleich großen Teile angibt, in die das Ganze eingeteilt ist, und die Zahl im Zähler die Anzahl der markierten Teile repräsentiert. Im Gegensatz dazu wird in der zweiten fokussierenden Fragestellung dazu aufgefordert, das im Lösungsbeispiel dargebotene Herstellungsverfahren für den Bruch $\frac{3}{8}$ in eigenen Worte wiederzugeben. Das didaktische Ziel ist hierbei die Loslösung vom Lernmaterial anzuregen und auf die selbstständige Anwendung des Verfahrens zur Beschreibung der Herstellung anderer Brüche vorzubereiten.

**Ausgewählte Transferaufgaben:** Im Anschluss an die interaktiven animierten Lösungsbeispiele folgt eine Serie von Übungs- und Transferaufgaben (siehe Tabelle 5.1). Detaillierte Aufgabenbeschreibungen und Erläuterungen der Transferprozesse erfolgen an den entsprechenden Stellen in diesem Kapitel.

**Tabelle 5.1** Aufgabensequenz – Anteile von einem Ganzen

| | Aufgabe | Zentrale Transferprozesse |
|---|---|---|
| 1 & 2 | Unvollständige Lösungsbeispiele | Übertragung des Bruchherstellungsverfahrens auf neue Brüche und ikonische Darstellungen |
| 4 | Bruchdarstellung an einer Strecke | Übertragung des Verfahrens zur Bruchdarstellung von einer Flächendarstellung in eine lineare Darstellung |

### 5.1.1 Unvollständige Beispiele

Das erste unvollständige Beispiel ist strukturgleich mit den zuvor studierten Lösungsbeispielen und dient als Unterstützung zur Übertragung der visualisierten Handlung in den Lösungsbeispielen in eine eigenständige Anwendung. Die zentralen Schritte der Bruchherstellung sind entsprechend der Lösungsschritte im Lösungsbeispiel strukturiert und mit Handlungsanweisungen in seitlichen Sprechblasen kommentiert.

Im ersten Schritt sollen zunächst die Rechenoperationen zur Herstellung von einem Achtel aus einem Ganzen und die notwendige Rechenoperation zum Vervielfachen zu $\frac{6}{8}$ in einem Pfeilschema mit ikonischen Repräsentationen ergänzt werden. Direkt im Anschluss sollen die gleichen Operationen in einem symbolischen Pfeilschema eingetragen werden. Im Vordergrund steht hier die Analogie zwischen der Bruchherstellung auf ikonischer und symbolischer Repräsentationsebene. Die ikonische Repräsentation zur Veranschaulichung ist analog zum Lösungsspiel ein Kreis. Der einzige Unterschied ist an dieser Stelle, dass im Lösungsbeispiel der Bruch $\frac{5}{8}$ und in diesem ersten unvollständigen Beispiel der Bruch $\frac{6}{8}$ hergestellt wird. Somit kann die Einteilung in Achtel durch eine Division mit 8 aus dem Lösungsspiel übernommen werden, im Anschluss muss jedoch mit 6 und nicht mit 5 multipliziert werden.

Im strukturgleichen Aufgabenteil b) des ersten unvollständigen Beispiels sollen die Rechenoperationen zur Herstellung des Bruchs $\frac{4}{5}$ notiert werden. In Analogie zum zweiten Lösungsbeispiel wird die Bruchherstellung in dieser Teilaufgabe anhand einer Rechteckrepräsentation veranschaulicht. Im Gegensatz zu Aufgabenteil a) soll zusätzlich der nach der ersten Rechenoperation entstehende Stammbruch $\frac{1}{5}$ eingetragen werden (siehe Abb. 5.2).

In Aufgabe 2 sollen die Lernenden die Herstellung der Brüche $\frac{2}{3}$ (Teil a) und $\frac{3}{8}$ (Teil b) beschreiben und die Brüche in einer Kreisrepräsentation (a) bzw. einer Rechteckrepräsentation (b) darstellen. Im Gegensatz zu Aufgabe 1 ist die Bearbeitung nicht vorstrukturiert und mit Handlungsanweisungen versehen, sondern es

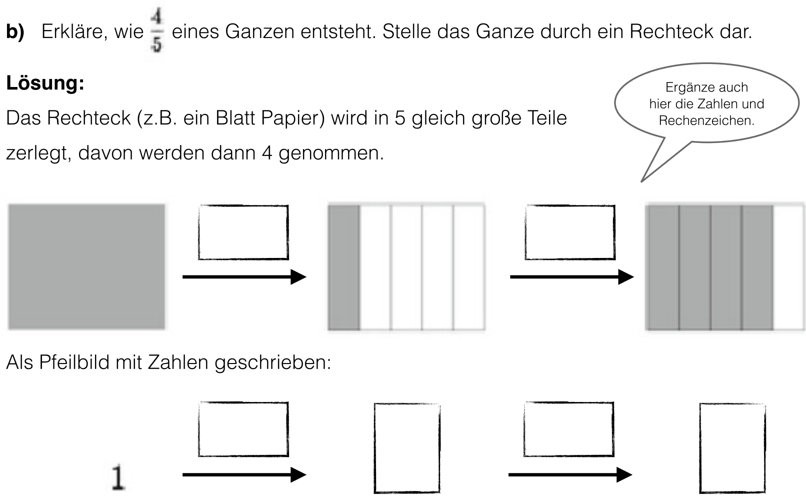



**Abbildung 5.2** Teilaufgabe b) des ersten unvollständigen Lösungsbeispiels (Aufgabe 1b)

sind lediglich ein kariertes Feld für die Lösung und eine leere Repräsentation zum Einzeichnen des jeweiligen Bruchs vorgegeben. In der Aufgabenstellung ist zudem die Hilfestellung enthalten, dass auch ein Pfeildiagramm gezeichnet werden kann (siehe Abb. 5.3).

**Transferprozesse in Aufgaben 1 und 2:** Für die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele in den Aufgaben 1 und 2 sind vor allem drei Transferprozesse von zentraler Bedeutung:

1. Die Übertragung des Bruchherstellungsverfahrens von den Lösungsbeispielen in eine eigene Durchführung,
2. die Übertragung des Bruchherstellungsverfahrens auf neue Brüche und ikonische Figuren sowie
3. die Übersetzung der Herstellungshandlung zwischen der ikonischen und symbolischen Repräsentationsebene.

Im Hinblick auf die Ausbildung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen steht in dieser Aufgabe die Grundvorstellung vom Bruch als Operator (vgl. Kapitel 3) im

**a)** Das Ganze ist hier durch einen Kreis dargestellt.

1) Erkläre, wie $\frac{2}{3}$ eines Ganzen entsteht. Du kannst auch ein Pfeilbild zeichnen.

2) Zeichne den Bruchteil ein.

**Lösung:**


**Abbildung 5.3** Teilaufgabe a) des zweiten unvollständigen Lösungsbeispiels (Aufgabe 2a)

Vordergrund. Mit der Ausbildung der Operatorvorstellung sind folgende Annahmen verbunden, die in die Konzeption des Unterrichtsmaterials einbezogen wurden:

- Die Einübung des Bruchherstellungsverfahrens : $n \cdot m$ als mentales Muster führt zum Aufbau einer Grundvorstellung.
- Dieses mentale Muster kann durch eine Generalisierung unabhängig von Zahlen und Repräsentationen angewendet werden.
- Die Darstellung als Pfeilschema in ikonischer und symbolischer Form dient als Hilfe zum Anknüpfen an das Vorwissen der Lernenden.

### Bennet & Julius – Verknüpfung der Herstellungshandlung mit symbolischen Rechenoperationen

Die Schüler Bennet und Julius bilden ein sehr kommunikationsfreudiges Schülerpaar. Ihre Ergebnisse im Vortest deuten auf sehr unterschiedliche Vorwissensstände hin. Während Bennet im Vortest bereits 85 % Aufgaben fehlerfrei lösen konnte, erreichte sein Partner Julius im Vortest lediglich ein Testergebnis von 35 %. Damit sind ihre Testleistungen in den höchsten und niedrigsten Ergebnisquartilen einzuordnen.

**Transkript B1A1a – Bennet & Julius – Szene 1 – Aufgabe 1 a)**

**Bennet:** Also guck mal, wenn man das .. dann muss man das ja geteilt durch 8 rechnen. Geteilt durch 8 musst du jetzt da hinschreiben, weil damit man 1 .. ähm .. 1 Achtel hat, wie das im Beispiel ist und dann man das mal 6 rechnen und dann hat man ähm .. 6 Achtel. Verstehst du?
**Julius:** Minus 8.
**Bennet:** Mal 6 jetzt.
**Julius:** Minus 6.
**Bennet:** Nein, mal 6.
**Julius:** Wieso denn mal? Wenn du sechs..
**Bennet:** (*unterbricht Julius*) Du behältst doch 1 Achtel.
**Julius:** Ja, aber wenn du den Kuchen doch in 8 gleiche Teile teilst und du dann 6 davon haben willst, dann musst du doch minus 6 haben und dann hast du doch die, oder nicht?
**Bennet:** Ja, aber wir müssen das ja jetzt in diesen Schritten aufschreiben. Also erst geteilt durch 8, dann hast du 1 Achtel und dann mal 6, dann hast du 6 Achtel.
**Julius:** (*liest:*) Als Pfeilbild mit Z..
**Bennet:** (*unterbricht Julius*) Man weiß ja wenn du da minus 6 rechnest, dann weiß man ja nicht was minus 6, hä? Lass uns doch jetzt das nächste, als Pfeilbild mit Zahlen geschrieben. Hä? Achso, 1 geteilt durch 8..
**Julius:** (*unterbricht Bennet:*) Das sind doch 8.
**Bennet:** Mal 6 gleich 6 Achtel.
**Julius:** Wieso denn mal 6? Mal 1.
**Bennet:** Wieso mal 1?
**Julius:** Du willst ja nur 1 Achtel haben.
**Bennet:** Nee, wir wollen ja 6 Achtel haben.
**Julius:** Aber da steht doch erst.. Achso, da kommt das raus und dann will man das haben.
**Bennet:** Ja, man will erst den 1 Achtel haben und dann will man's auf 6 Achtel hoch machen. Dann muss man halt mal 6, sind gleich 6 Achtel.

Unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung formuliert Bennet seinen Lösungsweg laut denkend (1–5). Er erklärt, dass man das Ganze zunächst „geteilt durch 8 rechnen" (2) müsse, „damit man 1 .. ähm 1 Achtel hat" (3). Anschließend müsse man „das mal 6 rechnen und dann hat man ähm .. 6 Achtel" (4–5). Er formuliert die Bruchherstellung anhand der Folge von durchzuführenden Rechenoperationen auf symbolischer Ebene und benennt dabei auch die Ergebnisse der Rechenoperationen: Durch Teilen durch 8 erhält man den Bruch $\frac{1}{8}$. Multipliziert man diesen mit 6 erhält man den Bruch $\frac{6}{8}$. Seinen Lösungsweg begründet Bennet damit, dass das Vorgehen so sei, „wie das im Beispiel ist“ (4), wodurch deutlich wird, dass er sich auf das Herstellungsverfahren im Lösungsbeispiel bezieht. Die kurzen Pausen in seiner Erklärung deuten darauf hin, dass er die Rechenoperatoren Schritt für Schritt aus dem Lösungsbeispiel überträgt und somit eine Analogie zu dem Lösungsbeispiel herstellt. Dabei bezieht er sich ausschließlich auf die symbolische Rechenhandlung und geht nicht auf die ikonische Repräsentation der Bruchherstellung ein. Seine Formulierung „weil damit man 1 .. ähm .. 1 Achtel hat“ (3) lässt zudem annehmen, dass er nicht einfach die entsprechenden Rechenoperationen überträgt, sondern diese für sich auch begründet und plausibilisiert. Seine Rückfrage „verstehst du“ (5) stützt diese Annahme. Er fragt seinen Partner nicht, ob seine Lösung richtig ist oder ob sein Partner ihm zustimmt, sondern er fragt, ob sein Partner das genauso *verstanden* hat.

Sein Partner Julius widerspricht Bennets Lösungsweg umgehend und korrigiert, dass man „minus 8“ (6) bzw. „minus 6“ (8) rechnen müsse. Er bezieht sich damit auf eine Handlung mit konkreten Gegenständen – einem Kuchen – und erklärt: „wenn du den Kuchen doch in 8 gleiche Teile teilst und du dann 6 davon haben willst, dann musst du doch minus 6“ (12–14) rechnen. In diesen Äußerungen wird deutlich, dass er den zweiten Teiloperator zur Bruchherstellung als ein gegenständliches *Wegnehmen* deutet. Es ist nicht hinreichend zu klären, ob er sich bei seinem Einwurf „minus 8“ (6) lediglich versprochen hat und eigentlich „minus 6“ (8) meint oder ob er hier annimmt, dass man vom Ganzen 8 subtrahieren müsse, um auf $\frac{1}{8}$ zu kommen. Deutlich wird jedoch, dass er die Operatoren nicht als ein Teilen und Vervielfachen deutet, sondern die wörtliche Formulierung aus dem Lösungsbeispiel „davon werden dann 5 Teile genommen. Das sind dann $\frac{5}{8}$“ überträgt. Anders als Bennet stellt Julius einen Gegenstandsbezug zum Aufteilen eines Kuchens her, der zunächst in acht gleich große Teile geteilt wird, von denen man schließlich 6 Teile wegnehmen möchte. Das Wegnehmen entspricht in seiner Vorstellung nicht einer Multiplikation mit 6, sondern einer Subtraktion von 6 Teilen. Entsprechend kann er Bennets Lösungsweg nicht nachvollziehen: „wieso denn mal?“ (10).

Bennet reagiert auf den Einwurf seines Partners mit einem Verweis auf das Vorgehen im Lösungsbeispiel und erklärt, dass man „das ja jetzt in diesen Schritten aufschreiben“ (15–16) solle, womit er sich auf die Teiloperatoren des Bruchherstellungsverfahrens bezieht: „Also erst geteilt durch 8, dann hast du 1 Achtel und dann mal 6, dann hast du 6 Achtel“ (16–17). Während Julius noch einmal im Lösungsbeispiel liest, versucht Bennet den Einwand von Julius nachzuvollziehen. Er ergänzt, dass man gar nicht wisse, wovon man 6 abziehen soll (19–20) und setzt an, die Rechenoperationen im symbolischen Pfeilschema zu ergänzen „Achso, 1 geteilt durch 8..“ (22).

Julius hat in der Zwischenzeit noch einmal im Lösungsbeispiel nachgelesen und merkt an, dass man „mal 1“ (25) rechnen müsse, denn man will zunächst „ja nur 1 Achtel haben“ (27). Er nimmt folglich Bennets Argumentation auf, dass man zunächst teilen und dann multiplizieren muss. Diese Schrittfolge überträgt er im Sinne einer Übergeneralisierung auf die Stammbruchherstellung, indem er erklärt, dass man um $\frac{1}{8}$ zu erhalten zunächst durch 8 teilen und dann mit 1 multiplizieren müsse, wobei er möglicherweise nicht erkennt, dass die Division durch 8 bereits zu $\frac{1}{8}$ führt und die Multiplikation mit 1 nicht notwendig ist. Da man im Zwischenschritt „ja nur 1 Achtel haben“ (27) möchte, müsse man mit 1 multiplizieren, falls man das Schema übertragen will.

Auf den Widerspruch von Bennet, der den Gedankengang seines Partners scheinbar nicht nachvollziehen kann, wendet sich Julius noch einmal dem Lösungsbeispiel zu und liest erneut den Rechenweg (29–30). Hier erkennt er, dass bereits die Division mit 8 zu dem Bruch $\frac{1}{8}$ führt.

Abschließend erläutert Bennet noch einmal den Rechenweg: „Ja man will erst den 1 Achtel haben und dann will man’s auf 6 Achtel hoch machen. Muss muss man halt mal 6, sind gleich 6 Achtel“ (31–33). Bemerkenswert in dieser abschließenden Erläuterung ist Bennets Formulierung „man will erst den 1 Achtel haben und dann will man’s auf 6 Achtel hoch machen“, in der deutlich die multiplikative Denkweise von Bennet zu erkennen ist. Mit seiner Formulierung „hochmachen“ bezieht er sich auf die Abbildung von 1 auf 6, die er nicht als wiederholte Addition eines Teils deutet, sondern als Vervielfachen des Teils im Sinne einer Streckung. Diese Vorstellung steht in starkem Kontrast zu der subtraktiven Vorstellung seines Partners Julius, der zuvor den zweiten Teiloperator als Wegnehmen von Teilen interpretiert hat.

### Transkript B1A1b – Bennet & Julius – Szene 2 – Aufgabe 1 b)

**Bennet:** Hier, wie eben.
**Julius:** (*liest den Aufgabentext laut vor*)
**Bennet:** Hier, man muss erst geteilt durch 5 rechnen.
**Julius:** Warte. ... Hm.. Ja, geteilt durch 5.
**Bennet:** Geteilt durch 5, dann hast du 1 Fünftel.
**Julius:** Mal 4.
**Bennet:** Mal 4, dann hast du 4 Fünftel. Und jetzt machen wir das noch als Pfeilbild mit Zahlen geschrieben. Also 1, hast ein Ganzes..
**Julius:** (*unterbricht Bennet:*) Geteilt durch 5.
**Bennet:** Ja, geteilt durch 5.
**Julius:** Gleich ...
**Bennet:** 1 Fünftel.

**Julius:** Ja. Und dann ...
**Bennet:** Mal 4 gleich 4 Fünftel.
**Julius:** Ja.

Bereits in der anschließenden Bearbeitung von Teilaufgabe b), in der die Herstellung des Bruchs $\frac{4}{5}$ erklärt werden soll, ist zu erkennen, dass Bennet das Verfahren zur Bruchherstellung bereits zu verallgemeinern beginnt und spontan die entsprechenden Rechenoperationen nennt. Noch während Julius mit dem Lesen der Aufgabenstellung beschäftig ist sagt Bennet: „Hier muss man erst geteilt durch 5 rechnen" (36), „dann hast du 1 Fünftel" (38). Es gelingt ihm scheinbar mühelos das Verfahren auf die Herstellung anderer Brüche zu übertragen.

Sein Partner Julius kann der Geschwindigkeit, mit der sein Partner die Rechenoperationen ergänzt, zunächst nicht folgen. Er bestätigt dann jedoch „ja, geteilt durch 5" (37) die erste Rechenoperation und ergänzt dann selber „mal 4" (39), was Bennet bestätigt.

In der Notation der Rechenoperatoren und Zwischenergebnisse in dem vorstrukturierten symbolischen Pfeilschema wirkt Julius weiterhin unsicher, bestätigt jedoch jeweils die Vorschläge von Bennet. Es ist anzunehmen, dass Julius an dieser Stelle mehr Zeit zum Nachdenken benötigt als sein Partner, der sehr schnell agiert.

### Transkript B1A2a/b – Bennet & Julius – Szene 3 – Aufgabe 2 a) und b)

**Bennet:** Lass uns ein Pfeilbild machen. Komm, wie eben. Erst so ein Kästchen.. nein.
**Julius:** (*blättert zurück:*) Gucken wir doch einfach ab hier.
**Bennet:** Ja, nein, aber diesmal müssen wir es mit einem Kreis machen.
**Julius:** Wieso? Es geht auch ein Rechteck.
**Bennet:** Wir machen einfach 1, das ist dann ein Ganzes ... mal 2, also 1 mal 2 gleich ... Nein, geteilt durch hä?
**Julius:** Warte.
**Bennet:** Geteilt durch 3 müssen wir erst machen.
**Julius:** Nein, das ist doch falsch.
**Bennet:** Doch, dann ist es 1 Drittel. Denn wenn man geteilt durch 3 macht ist Eins 1 Drittel..
**Julius:** (*unterbricht Bennet:*) Nein, da musst du doch erst mal 1, dann ist es 1 Drittel.
**Bennet:** Hier guck (*blättert zurück*) da auf dem anderen Blatt ... Hier ist doch das Ganze und wir müssen das nicht geteilt durch 8, sondern geteilt durch 3 rechnen.
**Julius:** Ah, ja.
**Bennet:** Geteilt durch 2 ist gleich..
**Julius:** (*unterbricht Bennet:*) Durch 3.

**Bennet:** Geteilt durch 3 gleich 1 Drittel ... mal 2 sind zwo Drittel. Und wir können jetzt die Bruchzahl einzeichnen. Ich glaub, dass muss man mit Bleier machen.
**Julius:** (*schreibt und guckt immer wieder auf Bennets Blatt*)
**beide:** (*zeichnen individuell den Bruchteil ein – 2 min 28 sek*)
**beide:** (*lesen die Aufgabenstellung zu Teil b) laut vor)*
**Bennet:** Das ist das gleiche.
**Julius:** Nur halt in 3 Achteln.
**Bennet:** Ja, also wieder 1.
**Julius:** Mal dr.. geteilt..
**Bennet:** Geteilt durch 8.
**Julius:** 1 geteilt durch 8.
**Bennet:** Gleich 1 Achtel.
**Julius:** Mal 3.
**Bennet:** Mal 3 gleich 3 Achtel. Jetzt müssen wir das wieder einzeichnen.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

In dem zweiten unvollständigen Beispiel (Aufgabe 2) sollen die Lernenden zunächst anhand einer Kreisrepräsentation erklären, wie $\frac{2}{3}$ hergestellt werden. Im zweiten Aufgabenteil soll anhand einer Rechteckrepräsentation erklärt werden, wie der Bruch $\frac{3}{8}$ hergestellt wird.

Unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung schlägt Bennet vor ein Pfeilbild „wie eben" (1) zu zeichnen, womit er sich auf das Pfeilschema im Lösungsbeispiel und im ersten unvollständigen Beispiel bezieht. Dazu möchte er „erst so ein[en] Kasten" zeichnen. Der Vorschlag einen Kasten zu zeichnen, kann einerseits so interpretiert werden, dass er den Bruchteil in einem Rechteck darstellen möchte und aus diesem Grund zunächst einen Kasten als Repräsentation eines Ganzen zeichnen müsste. Es ist auch möglich, dass er einen Kasten zeichnen möchte, in den er wie im ersten unvollständigen Beispiel die Zahl 1 oder eine Rechenoperation eintragen möchte. Seine spätere Äußerung „nein, aber diesmal müssen wir es mit einem Kreis machen" (4–5) stützt wiederum die erste Annahme, dass er ein Pfeilschema mit ikonischen Darstellungen anfertigen möchte, aber übersehen hat, dass die Aufgabenstellung die Darstellung in einem Kreis vorgibt. Es kann angenommen werden, dass er sich für den Lösungsweg an den Teilschritten des Lösungsbeispiels und des ersten unvollständigen Beispiels orientiert.

Die Feststellung, dass die Aufgabenstellung eine Bruchdarstellung im Kreis vorsieht, veranlasst ihn dazu, das Verfahren mit dem Ziel den Aufwand zu verringern abzuändern: „Wir machen einfach 1, das ist dann ein Ganzes … mal 2, also 1 mal 2 gleich … Nein, geteilt durch hä?" (7–8), „geteilt durch 3 müssen wir erst machen" (10), „dann ist es ein Drittel" (12). Bennet überspringt demnach die iko-

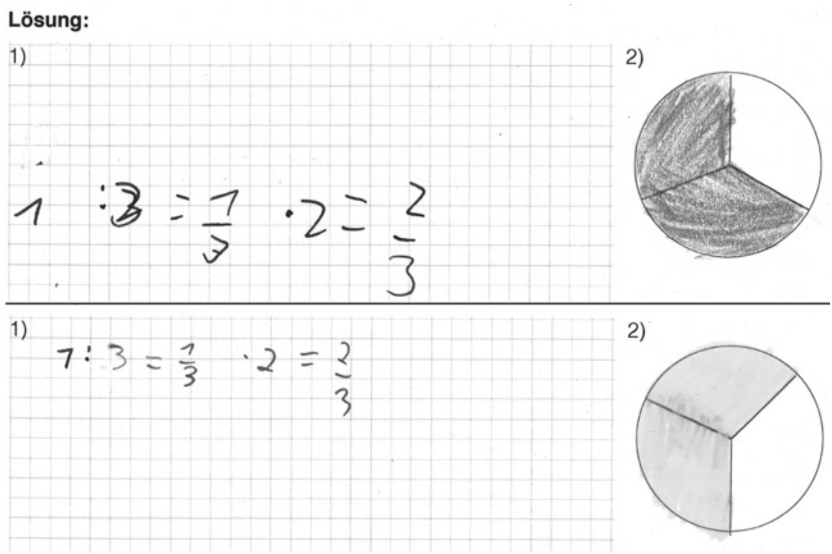



**Abbildung 5.4** Bennets (oben) Julius (unten) Lösung von Aufgabe 2 a)

nische Darstellung der einzelnen Herstellungsschritte und geht sofort zur Notation der Herstellungsschritte in symbolischer Form über.

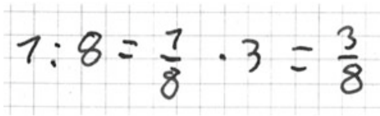
Dabei beginnt er anders als im Lösungsbeispiel und im ersten unvollständigen Beispiel nicht mit dem Nenneroperator zum Teilen des Ganzen, sondern mit dem Zähleroperator zum Vervielfachen des Ganzen. Er erkennt vermutlich nicht, dass ein Vertauschen der Reihenfolge keine Auswirkungen auf das Ergebnis hat, und korrigiert seinen Rechenweg entsprechend des bisherigen Vorgehens im Lern- und Aufgabenmaterial. Ungeachtet der Reihenfolge der Anwendung der Operatoren ist zu erkennen, dass er den Zähleroperator mit einer Multiplikation und den Nenneroperator mit einer Division verbindet, was die Annahme bestärkt, dass er mit den Positionen der Zahlen in einer Bruchdarstellung eine feste Rechenoperation assoziiert: Die Zahl im Zähler vervielfacht, die Zahl im Nenner teilt. Auch ohne die einzelnen Herstellungsschritte zeichnerisch darzustellen hinterfragt und begründet er seine Rechnung $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (siehe Abb. 5.4). Er sagt: „Denn wenn man geteilt durch 3 macht ist Eins 1 Drittel“ (12–13). Hierbei ist nicht zu erkennen, ob er sich diesen Schritt bildlich vorstellt oder die Rechnung auf symbolischer Ebene hinterfragt. Er schließt seine Erklärung der Bruchherstellung ohne erkennbare Schwierigkeiten: „Geteilt durch 3 gleich 1 Drittel … mal 2 sind zwo Drittel“ (22–23).

Während Bennet nahezu mühelos das Verfahren zur Bruchherstellung übertragen, anwenden und, durch Auslassung der Darstellung in einem ikonischen Pfeilschema, anpassen kann, zeigt sein Partner Julius deutliche Unsicherheiten. Zu Beginn der Bearbeitung blättert Julius zurück zum statischen Lösungsbeispiel im Arbeitsheft und schlägt vor, dort abzugucken (3). Dieses Zurückblättern bringt zum Ausdruck, dass er die einzelnen Herstellungsschritte zu diesem Zeitpunkt noch nicht in dem Maße verinnerlicht hat, dass er die Schrittfolge ohne Vorlage anwenden kann. Zudem ist zu erkennen, dass er die Übergeneralisierung aus der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels, dass man zur Herstellung eines Stammbruchs $\frac{1}{n}$ erst durch $n$ teilt und dann mit 1 multipliziert, noch nicht überwunden hat, sodass diese erneut zum Tragen kommt. Dies wird an der Stelle deutlich, an der er die Rechnung von Bennet unterbricht und einwirft „Nein, da musst du doch erst mal 1, dann ist es 1 Drittel“ (14–15). Zur Aufklärung geht Bennet auf ihre Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels zurück und erklärt ihm daran, dass sie dort auch allein durch ein Teilen durch 8, den Bruch $\frac{1}{8}$ erhalten haben. Zudem nimmt er einen analogen Vergleich vor, indem er erklärt: „Hier ist doch das Ganze und wir müssen das nicht geteilt durch 8, sondern geteilt durch 3 rechnen“ (16–18). Diese Verbindung erkennt Julius an und stimmt im Weiteren dem Vorgehen Bennets im Allgemeinen zu. Er korrigiert Bennets Versprecher und stellt richtig, dass sie im ersten Schritt nicht „geteilt durch 2“ (20), sondern „durch 3“ (21) rechnen müssen.

Bei der Notation des Rechenwegs orientiert sich Julius nicht an der Struktur des Lösungsbeispiels und des ersten unvollständigen Beispiels, sondern übernimmt die Notation von seinem Partner. Insgesamt ist zu erkennen, dass Julius noch große Unsicherheiten bei der Anwendung des Verfahrens zur Bruchherstellung hat und die einzelnen Herstellungsschritte zwar nachvollziehen kann, jedoch nicht eigenständig ohne Vorlage anzuwenden vermag. Diese Interpretation wird dadurch gestützt, dass er in der Bearbeitung der zweiten Teilaufgabe zur Erläuterung der Herstellung des Bruchs $\frac{3}{8}$ mit seinem Partner im Wechsel die notwendigen Rechenoperationen nennt und auch eigenständig notiert. Hierbei orientiert er sich bei der Notation ebenfalls nicht an der Darstellung im Lösungsbeispiel und im ersten unvollständigen Beispiel, sondern an der von Bennet übernommenen Notation aus Aufgabenteil a) (vgl. Abb. 5.5).

Die mathematisch inkorrekte Notation des Rechenweges geht auf Bennet zurück, der scheinbar versucht den Schreib- und Zeichenaufwand zu minimieren. Zunächst verzichtet Bennet auf die Darstellung der Herstellung in einem ikonischen Pfeilschema und auch für die symbolische Notation verzichtet er auf die Darstellung als Pfeilschema. Stattdessen schreibt er den Rechenweg in einer Art Gleichungskette

**Abbildung 5.5** Julius Notation des Rechenweges zur Herstellung von $\frac{3}{8}$




auf, wobei er nicht beachtet, dass an den jeweiligen Enden der Gleichungskette nicht das gleiche steht. Dennoch sind die einzelnen Rechenschritte bzw. Teiloperatoren abzulesen.

Beide Schüler haben keine Schwierigkeiten bei der zeichnerischen Darstellung der Bruchteile in den vorgegebenen Figuren. Sie teilen die Figur in drei bzw. acht gleiche Teile und färben die entsprechende Anzahl von Teilen. Sie stellen die Zeichnungen in stiller Individualarbeit her, was annehmen lässt, dass sie das Verfahren zur Bruchherstellung auf ikonischer Ebene durchaus anwenden können.

Insgesamt lassen sich die Interpretationen der Bearbeitungen von Bennet und Julius anhand der folgenden Deutungshypothesen zusammenfassen:

- Bennet und Julius übertragen sehr unterschiedliche Aspekte aus dem Lösungsbeispiel auf die unvollständigen Beispiele: Während Bennet die Struktur des Bruchherstellungsverfahrens als Hintereinanderausführung zweier Teiloperatoren überträgt, anwendet und an andere Brüche anpasst, überträgt sein Partner Julius eher kontextbezogene Aspekte der Bruchherstellung. Julius überträgt insbesondere die Formulierung, dass ein Ganzes in $n$ gleiche Teile geteilt wird, von denen dann $m$ Teile *weggenommen* werden. Dieses *Wegnehmen* übersetzt er mit einer Subtraktion als Rechenoperation für den Zähleroperator. Seine Erklärungen sind deutlich an die Handlung mit konkreten Gegenständen gebunden, während sein Partner Bennet bereits vornehmlich auf symbolischer Ebene mit Zahlen und Rechenhandlungen argumentiert und operiert.
- Obgleich Bennet die schrittweise Herstellungshandlung aus dem Lösungsbeispiel auf die Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels überträgt, wandelt er die Notationsweise ab. Er zeichnet keine Pfeilschemata, sondern schreibt eine Rechnung auf, in der beide Teiloperatoren nacheinander aufgeführt werden. Julius übernimmt die Notation seines Partners und bedarf einer Vorlage zur Ausführung der einzelnen Herstellungsschritte.
- Die ikonische Darstellung von Bruchteilen gelingt beiden Schülern ohne einen direkten Bezug zum Bruchherstellungsverfahren herzustellen. Das Vorgehen dabei wird an keiner Stelle diskutiert und die Zeichnungen in individuellen Arbeitsphasen unabhängig voneinander angefertigt. Dabei unterteilen die bei-

den Schüler die Figuren zunächst in die dem Nenner entsprechende Anzahl von Teilen und Färben schließlich die im Zähler angegebene Anzahl.

**Can, Philip & Glen – Getrennte Betrachtung von ikonischer und symbolischer Darstellung**

Da Glens eigentliche Partnerin Johanna in der ersten Doppelstunde der Datenerhebung fehlt, arbeitet er zusammen mit Philip und Can. Im Vortest erreichte Can 50 %, Philip 55 % und Glen 65 % der möglichen Punkte, sodass alle drei Testergebnisse den mittleren Niveaustufen zugeordnet werden konnten. Das Arbeitsverhalten der drei Schüler kann anhand des vorhergehenden Stundenverlaufs als unkonzentriert beschrieben werden. Sie albern viel herum und widmen sich nur in geringem Maße den vorliegenden Lern- und Aufgabenmaterialien. Da ihr unruhiges Verhalten die nahesitzenden Paare zunehmend ablenkt, wurden sie zuvor bereits wiederholt von der Lehrkraft ermahnt. Das Lösungsbeispiel zum Einstieg in die Arbeitsphase haben sie nicht eingehend gelesen, sondern lediglich überflogen, indem sie die einzelnen Segmente des animierten Lösungsbeispiels „durchgeklickt" haben, sobald der Segmentaufbau abgeschlossen war und die Möglichkeit bestand zum nächsten Schritt überzugehen. Es findet keine Kommunikation über das Lösungsbeispiel statt und auch die fokussierenden Fragen haben sie zu diesem Zeitpunkt nicht beachtet.

**Transkript B1A1a – Can, Philip & Glen – Szene 1 – Aufgabe 1 a)**

**Can:** Was du rechnen musst. Geteilt durch 1 Achtel?
**Philip:** Geteilt durch.. warte mal.. geteilt durch ...
**Glen:** Egal, trage in die Kästchen ein, was man rechnen muss, um zum nächsten Schritt zu kommen.
**Can:** Ja, geteilt durch 1 Achtel, natürlich.
**Glen:** Nein, mal 1 Achtel.
**Can:** Ja, mal 1 Achtel, das sind dann ... und das dann geteilt durch 1.
**Glen:** Geteilt durch 5.
**Can:** Das sind aber 6.
**Glen:** Nein, guck, das hast du doch schon geteilt durch 5. ... Nein, das mal 6 gleich das.
**Can:** Verstehst du das schon, Philip?
**Philip:** Geht so. Du?
**Can:** Ja, erklär nochmal Glen, damit Philip das versteht.
**Philip:** Okay, warte, ich hab's: Das eine Stück davon wurde ja schon berechnet.
**Can:** Nämlich bei dem hier, bei dem normalen 1 Achtel. Und das nochmal, ja gut.
**Glen:** Mal 1 Fünftel ... Weil das eine wurde ja schon berechnet und zwei Dinger sind frei.

**Can:** Aber das sind doch 8 Stücke?
**Glen:** Warte warte, 5 Achtel, mal 5 Achtel.
**Philip:** Ja.
**Can:** Mal 5 Achtel.

Bereits zu Beginn wird deutlich, dass die drei Schüler das Lösungsbeispiel nicht eingehend genug gelesen haben und für die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele nicht auf die Informationen aus dem Lernmaterial zurückgreifen. Stattdessen versuchen sie anhand der im Aufgabenmaterial abgebildeten ikonischen Pfeildarstellung die gesuchten Rechenoperationen herzuleiten und ihren Rechenweg zu plausibilisieren (Abb. 5.6).

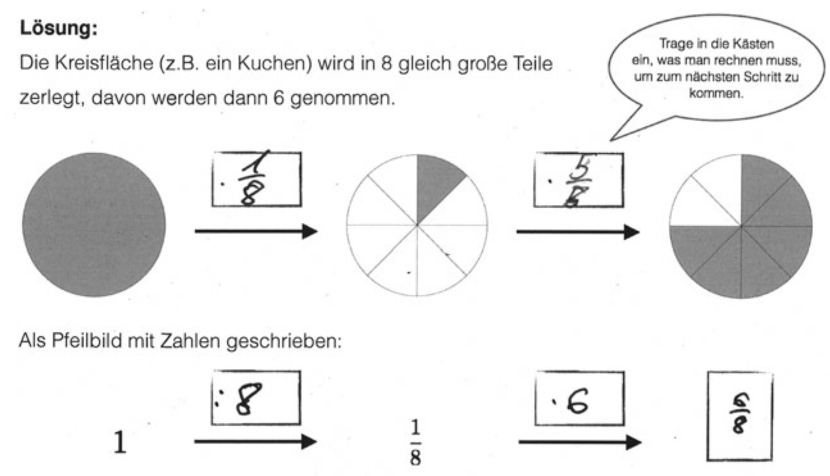



**Abbildung 5.6** Glens Lösung von Aufgabe 1 a)

Zunächst versuchen sie die Rechenoperationen im ikonischen Pfeilschema zu ergänzen. Ihre Vorschläge haben einen ratenden Charakter. Es werden Rechenoperationen genannt, die nicht begründet werden. Die Vorschläge für den ersten Rechenschritt sind „geteilt durch 1 Achtel" (1, 5) und „mal 1 Achtel" (6). Es ist anzunehmen, dass Can mit seinem Vorschlag „geteilt durch 1 Achtel" (1, 5) zu rechnen auf eine Verkleinerung des Ganzen abzielt. Da er keine näheren Erläuterungen zu seinem Vorschlag gibt, können verschiedene gedankliche Hintergründe vermutet werden. Es kann angenommen werden, dass er mit der Division die Operationsvorstellung einer Verkleinerung verbindet. Da $\frac{1}{8}$ weniger als ein Ganzes ist, schlägt er demnach vor „geteilt“ zu rechnen. Ferner steht zur Frage, warum er durch $\frac{1}{8}$ teilen möchte und nicht durch 8. Hier kann angenommen werden, dass er einen Bruch notieren will, da es in der Unterrichtsreihe um Brüche geht. Er verbindet mit dieser Operation jedoch ein Teilen durch 8. Diese Interpretation wird durch seine weitere Ausführung auf die Erwiderung von Glen gestärkt. Er nimmt Glens Erwiderung auf, dass sie nicht durch ein Achtel teilen müssen, sondern mit einem Achtel multiplizieren müssen und fügt an: „Ja, mal 1 Achtel, das sind dann … und das geteilt durch 1“ (7–8). Diese Ergänzung kann so interpretiert werden, dass er ähnlich wie Julius Übergeneralisierung in der zuvor geschilderten Bearbeitung zur Herstellung von einem Achtel zunächst im Nenneroperator durch 8 teilt und dann mit dem Zähleroperator 1 multiplizieren möchte.

Sein Partner Glen stellt Cans Vorschlag durch ein Achtel zu teilen entgegen, dass sie „mal 1 Achtel rechnen müssen“ (6). Er begründet diesen Vorschlag nicht, es ist jedoch anzunehmen, dass er hierbei nicht die Multiplikation mit einem Bruch meint. Dies wird insbesondere durch seinen Vorschlag für die nachfolgende Rechenoperation deutlich, für die er vorschlägt „geteilt durch 5“ (9) zu rechnen, um von einem Achtel zu sechs Achteln zu kommen. Er wirkt verwirrt bezüglich der Wirkungen der Rechenoperationen und es ist anzunehmen, dass er dem Lösungsbeispiel entnommen hat, dass in einem Schritt dividiert und in einem Schritt multipliziert wird. Entsprechend wählt er jeweils eine der Rechenoperationen für einen Schritt. Als Can anmerkt, dass es am Ende „aber 6“ (10) Achtel sein sollen, denkt er noch einmal über seine Vorschläge nach und stellt fest, dass die Rechenoperation „durch 5“ (11) nicht passt. Er korrigiert seinen Vorschlag und erkennt, dass ein Achtel vervielfacht werden muss, so dass er sagt: „Nein, das [1 Achtel] mal 6 gleich das [6 Achtel]“ (12). In der Folge überlegt er noch einmal neu und erklärt schließlich „mal 1 Fünftel … Weil das eine wurde ja schon berechnet und zwei Dinger sind frei“ (20–21). An dieser Stelle wird deutlich, dass er mit der Multiplikation „mal 1 Fünftel“ die Addition von fünf Teilen verbindet. Da im Zwischenschritt bereits einer von acht Teilen markiert ist, müssen für die Darstellung von $\frac{6}{8}$ noch fünf Teile zusätzlich markiert werden, sodass insgesamt sechs Teile gefärbt und zwei Teile bzw. „zwei Dinger“ nicht gefärbt bzw. „frei“ sind. Auch hier ist anzunehmen, dass er ähnlich wie Can einen Bruch in die Kästchen für die Rechenoperationen eintragen möchte, da es im Unterricht um Brüche geht, aber eigentlich an eine Division und Multiplikation mit einer natürlichen Zahl denkt.

Zuletzt einigen sich die Schüler auf die zweite Rechenoperation „mal 5 Achtel“ (23), mit der sie eine Addition von fünf Achteln verbinden. Ihr Rechenweg kann so zusammengefasst werden, dass sie zunächst durch acht teilen wollen, um ein Achtel zu erhalten. Für diese Rechenoperation notieren sie jedoch $\cdot\frac{1}{8}$. Zu diesem einen Achtel wollen sie in der Folge fünf Achtel hinzufügen bzw. addieren. Sie notieren jedoch die Rechenoperation $\cdot\frac{5}{8}$.

In ihren Herleitungen des Rechenwegs ist zu erkennen, dass sie im Prinzip ein Teilen und ein Vervielfachen als Herstellungsschritte erkannt haben, jedoch diese nicht notieren, sondern entsprechend des Unterrichtsinhalts „Brüche“ Bruchoperatoren notieren.

Philip hält sich aus der Interaktion weitgehend heraus und gibt zu verstehen, dass er das alles nicht so richtig versteht (14). Er kann dann aber nachvollziehen, dass wenn schon ein Achtel vorhanden ist noch fünf Achtel zu sechs Achteln fehlen, weil „das eine Stück davon wurde ja schon berechnet“ (16–17).

**Transkript B1A1a – Can, Philip & Glen – Szene 2 – Aufgabe 1 a)**

**Glen:** (*zur Lehrkraft:*) Wofür ist das große da? Soll das ein Ganzes sein?
**Lehrkraft:** Da soll eine Zahl rein. Guckt mal was da steht. (*liest Sprechblase laut vor:*) Trage in die Kästchen ein, was man rechnen muss, um zum nächsten Schritt zu kommen.
**Glen:** Guck, 1 geteilt durch 8 gleich 1 Achtel.
**Lehrkraft:** Genau, wie geht’s dann weiter? ... Das ist dasselbe wie hier (*zeigt auf die ikonische Darstellung*).
**Glen:** Achso, das sind 6 Achtel.
**Can:** Hä? Das steht da doch schon?
**Glen:** 5 Achtel, wo steht das?
**Can:** Bei dem hier.
**Glen:** Da steht doch gar nichts.
**Can:** Ja, aber das sind doch 6 Stückchen von 8, also stimmt das.
**Glen:** Ja, 6 Achtel muss man da hinschreiben und jetzt 1 Achtel mal 6 gleich 6 Achtel.
**Philip:** Mal 5, weil man hat ja schon 1 Achtel.
**Glen:** Mal 6, mal 5 ist 5 und wir brauchen 6 Achtel.

In der Folge gehen die Schüler zum Ergänzen der Rechenoperationen im symbolischen Pfeilschema über. In ihrer Kommunikation wird deutlich, dass sie dabei keine Verbindung zwischen der ikonischen Darstellung der Herstellung und der rechnerischen Herstellungshandlung herstellen.

Nachdem sie mit Hilfe der Lehrkraft geklärt haben, was in diesem Aufgabenteil zu tun ist (26–30) erklärt Glen: „guck, 1 geteilt durch 8 gleich 1 Achtel“ (31), was durch die Lehrkraft bestätigt wird. Die Lehrkraft weist ferner darauf hin, dass es „dasselbe wie hier [in der ikonischen Darstellung]“ (32–33) sei. Can merkt an, dass sie das doch bereits aufgeschrieben haben (35, 39).

Glen führt im weiteren aus, dass sie im zweiten Schritt „1 Achtel mal 6 gleich 6 Achtel“ (40–41) rechnen und notieren müssen. Er widerspricht zudem Philips Einwand, dass sie „mal 5“ rechnen müssen, „weil man hat ja schon 1 Achtel“ (42). Glen korrigiert ihn und erklärt „mal 6, mal 5 ist 5 und wir brauchen 6 Achtel“ (43).

Während Can und Philip in ähnlicher Weise argumentieren, wie beim Ergänzen der Rechenoperatoren im ikonischen Pfeilschema, ändert Glen seine Argumentation beim Ergänzen des symbolischen Pfeilschemas. Er beschreibt die Teiloperatoren richtigerweise als :8 und ·6 und widerlegt seine Rechnung, die er eine Zeile darüber notiert hat. Er hinterfragt diesen Unterschied jedoch nicht und seine Partner übernehmen seine Lösung.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Schüler die ikonische und symbolische Darstellung der Bruchherstellung nicht miteinander in Beziehung setzen, sondern getrennt voneinander unterschiedliche Rechenoperationen derselben Funktion zuweisen. Während sie anhand des ikonischen Pfeilschemas versuchen den dargestellten Bildern eine Bedeutung zu zuweisen, scheint ihnen die symbolische Darstellung des Rechenweges keine Schwierigkeiten zu bereiten. Anstatt wie in der ikonischen Darstellung mit dem zweiten Teiloperator fünf Teile hinzufügen zu wollen, erklärt Glen, dass ein Achtel mit 6 multipliziert werden müsse, da man schließlich 6 Achtel und nicht 5 Achtel erhalten wolle. Während sie in der ikonischen Pfeildarstellung versucht haben Bruchoperatoren für die jeweiligen Schritte anzugeben, steht dies bei der Ergänzung des symbolischen Pfeilschemas nicht zur Diskussion und sie notieren Rechenoperatoren mit natürlichen Zahlen. Diese Beobachtungen stützen die Interpretation, dass die ikonische Darstellung der Bruchherstellung für sie in keiner Beziehung zum Rechenweg auf symbolischer Darstellungsebene steht.

**Transkript B1A1b – Can, Philip & Glen – Szene 3 – Aufgabe 1 b)**

**Can:** Geteilt durch 4 Fünftel. ... Weißt du warum?
**Philip:** Ja.
**Can:** Warum?
**Philip:** Weil die Kästchen.. Weil das 4 sind. Und das allgemein sind 5.
**Can:** (*zeigt auf Glens Arbeitsblatt*) Das ist falsch ... 1 Fünftel!
**Philip:** Geteilt durch 1 Fünftel.
**Can:** Ja, weil der immer 1 kommt.. 1 brauchst und nicht 4.
**Philip:** Ja, weil das ja auch schon grau ist und nicht weiß ist.
**Glen:** Ja eben.. deswegen musst du durch 1, 2, 3, 4, 4 Fünftel. Und hier musst du doch mal 4 Fünftel.
**Can:** Nein, das ist doch wieder geteilt durch 4 Fünftel.

**Glen:** Nein, guck: 1 mal 4, das ist was anderes als 5 geteilt durch 4.

**Philip:** (*zeigt auf Glens Arbeitsblatt*) Das ist falsch, weil das eine ist da ja schon berechnet worden.

**Can:** Ja.

**Glen:** Und dann wollt ihr da jetzt 3 Fünftel hinschreiben oder was?

**Can:** Nein, 1 Viertel kommt da hin. Mal 1 Viertel.

**Philip:** Also das hier ist ja schon berechnet.. einer muss sowieso also ...

**Can:** Mal 1 Viertel ... mal 1 Fünftel.

**Glen:** Mal 3 Fünftel. Das eine haben wir ja schon. Das mal das Fünftel, das Fünftel und das Fünftel. Und mal nimmt man 1 mal 4, also 4 Fünftel.

**Can:** Also mal 4 Fünftel?

**Glen:** Ja. (*Nach ca. 13 Minuten Ablenkung und erneutem flüchtigen Durchsehen des Lösungsbeispiels:*) Als Pfeilbild mit Zahlen geschrieben ... geteilt durch 4 gleich 1 Fünftel mal 4 gleich 4 Fünftel.

**Can:** Ja.

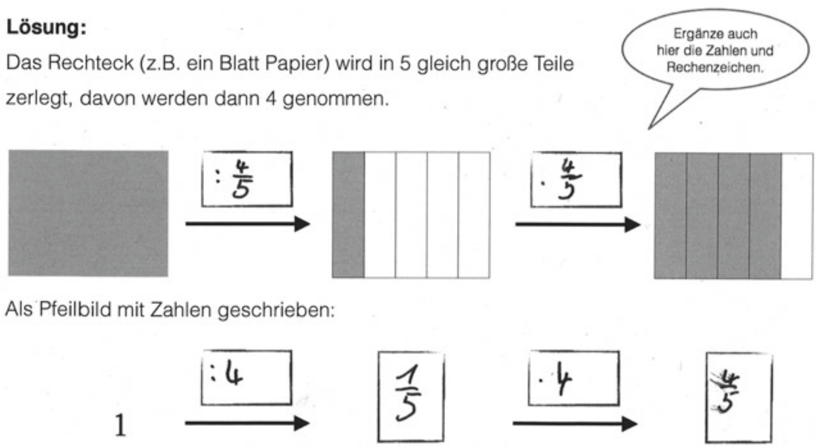



**Abbildung 5.7** Glens Lösung von Aufgabe 1 b)

Ein ähnliches Bild zeigt sich in ihrer Bearbeitung von Teilaufgabe b), in der sie im selben Format die Herstellung des Bruchs $\frac{4}{5}$ erklären sollen.

In Analogie zu ihrer Bearbeitung von Aufgabenteil a) nennt Can als erste Rechenoperation zu Herstellen eines Fünftels aus einem Ganzen „geteilt durch 4 Fünftel" (44). Da er sich jedoch scheinbar sehr unsicher ist, fragt er seine Partner, warum das so sei, worauf Philip mit Bezug auf die Teile des Ganzen in der ikonischen Darstellung antwortet: „Weil das 4 sind. Und allgemein sind es 5" (47–48). Er argumentiert somit im Sinne einer Subtraktion von $\frac{4}{5}$. Mit „allgemein sind es 5" meint er vermutlich, dass das Ganze in fünf Teile geteilt ist, von denen ein Teil markiert ist. Demnach müsse man „4 Fünftel" abziehen, wobei er mit wahrscheinlich meint, dass vier Teile abgezogen werden müssen. Das Abziehen der vier Teile verbindet er mit einer Division.

Mit Blick auf das Arbeitsblatt seines Partners Glen, der ebenfalls bereits $: \frac{4}{5}$ an der Stelle der ersten Rechenoperation notiert hat (Abb. 5.7), kommentiert Can im Gegensatz zu seinem anfänglichen Vorschlag, dass das falsch sei und man durch „1 Fünftel" (49–50) teilen müsse. Er begründet dies damit, dass „der immer 1 kommt.. 1 brauchst und nicht 4" (52), womit er auf die 1 im Zähler des Zwischenergebnisses $\frac{1}{5}$ Bezug nimmt. Philip stimmt ihm zu und erklärt weiter, dass das so sei, da „das ja auch schon grau ist und nicht weiß ist" (53). Demnach folgt Philip dem neuen Vorschlag von Can, dass $1 : \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ sei. Sie nehmen keinen Bezug auf ihren ersten Vorschlag und die dazu gehörige Erklärung von Philip.

Glen widerspricht seinen Partnern und merkt an, dass, gerade weil man vier Teile wegnehmen wolle, man durch $\frac{4}{5}$ teilen müsse: „Ja, eben.. deswegen musst du durch 1, 2, 3, 4, 4 Fünftel" (54). Er folgt demnach demselben Gedanken, den Philip zu Beginn geäußert hat in Anlehnung an ihre Lösung von Aufgabenteil a).

Für die zweite Rechenoperation fügt Glen an „und hier musst du dich mal 4 Fünftel" (55), womit er vermutlich meint, dass das Zwischenergebnis $\frac{1}{5}$ mit 4 multipliziert werden müsse. Anders als noch bei Aufgabenteil a), in der er den zweiten Rechenoperator im Sinne einer Addition beschrieben hat, beschreibt er nun eine Multiplikation.

Philip folgt ihrer Lösung von Aufgabenteil a) und argumentiert für eine Addition von drei Fünfteln, weil „das hier [1 Fünftel] ist ja schon berechnet" (65–66). Darauf hin gibt Glen ihm indirekt Recht, indem er erklärt „mal 3 Fünftel. Das eine haben wir ja schon. Das mal das Fünftel, das Fünftel und das Fünftel" (68–69), wobei angenommen werden kann, dass er „plus" meint, obgleich er „mal" sagt. Er fügt hinzu: „Und mal nimmt man 1 mal 4, also 4 Fünftel" (69–70). Diese Rechenoperation notieren daraufhin auch Can und Philip.

Die Beiträge von Can sind über den gesamten Bearbeitungsverlauf nur schwer nachzuvollziehen. Zunächst schlägt er selber „durch 4 Fünftel" (1) vor, was er wenig später als falsch bezeichnet und sagt, dass man durch „1 Fünftel" (49–50) teilen müsse. Wenig später argumentiert er erneut für seinen ersten Vorschlag bevor er zuletzt für den zweiten Rechenoperator „mal 1 Viertel" (64) vorschlägt. Seine Äußerungen können so gedeutet werden, dass er ratend an der Interaktion zwischen den Partnern teilnimmt. Sein Vorschlag „mal 1 Viertel" kann aber auch so interpretiert werden, dass er sich damit auf eine Multiplikation mit 4 bezieht. Dies ist jedoch nicht schlüssig zu klären.

Im Anschluss an diese Sequenz folgt eine längere Ablenkungsphase, in der die Schüler nahezu 13 Minuten lang herumalbern, die umliegenden anderen Partnerarbeiten stören und nebenbei gelangweilt und zum Teil ohne hinzuschauen das animierte Lösungsbeispiel am Bildschirm durchlaufen lassen. Glen nimmt schließlich die Bearbeitung der Aufgabe wieder auf und notiert entsprechend seiner Eintragungen der Rechenoperatoren im ikonischen Pfeilschema :4 und ·4, was seine Partner übernehmen. Hierbei ist anzunehmen, dass er mit :4 eine Subtraktion von vier Teilen assoziiert, da er sagt „geteilt durch 4 gleich 1 Fünftel" (74). Unmittelbar darauf gehen die Schüler zur Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels über.

### Transkript B1A2 – Can, Philip & Glen – Szene 4 – Aufgabe 2

**Glen:** Das ist ganz einfach.
**Philip:** Hä? Einfach durch 3 teilen und dann 2 Flächen anmalen, oder nicht?
**Philip & Glen:** (*beginnen zu zeichnen*)
**Can:** (*guckt bei Glen*) Was machst du? Zeig mal.
**Can, Philip & Glen:** (*zeichnen*)
**Glen:** (*liest Aufgabenstellung b) laut vor*) 3 Achtel, also müssen wir das in 8 Teile unterteilen.
**Can:** Ja, is ja voll leicht.
**Glen:** Wenn man bei mir abschreibt bestimmt.
**Can:** Ich schreib bei dir nicht ab.
**Philip:** Glen, erklär uns das mal bitte.
**Can:** Glen, blätter bitte einmal um und dann erklär uns das.
**Can & Philip:** (*schreiben bei Glen ab*)
**Glen:** 3 Achtel plus 5 Achtel gleich 1 Ganzes.

Auch in ihrer Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels ist eine Trennung von der ikonischen und symbolischen Darstellungsebene zu erkennen. Philip und Glen beginnen unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung mit der zeichnerischen Darstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$. Ungeachtet seiner Schwierigkeiten in der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels, weiß Philip sofort, was zu tun ist. Er erklärt: „Einfach durch 3 teilen und dann 2 Flächen anmalen, oder nicht?" (2–3).

Seine Beschreibung der Vorgehensweise zum Einzeichnen von $\frac{2}{3}$ in einer Kreisrepräsentation zeigt, dass er im Kontext der ikonischen Darstellung von Brüchen, den Zähler und Nenner eines Bruchs als Teiloperatoren interpretiert: „durch 3 teilen und dann 2 Flächen anmalen“. Er kann dieses Herstellungsschema jedoch nicht auf die symbolische Darstellung übertragen, sodass er Hilfe bei seinem Partner Glen sucht und ihn um eine Erklärung bittet (12).

Glen bemerkt, dass er die Aufgabe „ganz einfach“ (1) findet und beginnt sofort mit der zeichnerischen Darstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$. Für die Darstellung des Bruchs $\frac{3}{8}$, beschreibt er: „3 Achtel, also müssen wir das in 8 Teile unterteilen“ (7–8). Ähnlich wie Philip hat er keine Schwierigkeiten, anhand der Zähler und Nenner eines vorgegebenen Bruchs abzuleiten, in wie viele Teile das Ganze geteilt werden muss und wie viele dieser Teile farbig markiert werden müssen. Anstelle einer Beschreibung der Bruchherstellung notiert Glen je eine Addition: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\ Ganzes$ und $\frac{3}{8} + \frac{5}{3} = 1\ Ganzes$ (vgl. Abb. 5.8). In seinen Äußerungen wird nicht ersichtlich, warum er diese Gleichungen aufschreibt. Obwohl sowohl im Lösungsbeispiel sowie im ersten unvollständigen Beispiel die die Bruchherstellung stets anhand eines Pfeilschemas erklärt wurde bzw. erklärt werden sollte, wird diese Struktur nicht übertragen. Die Schwierigkeiten der Schüler beim Ergänzen der Rechenoperationen im ersten unvollständigen Beispiel stützen jedoch die Annahme, dass sie das Pfeilschema nicht als Hilfsmittel zur Strukturierung und Darstellung der Bruchherstel-

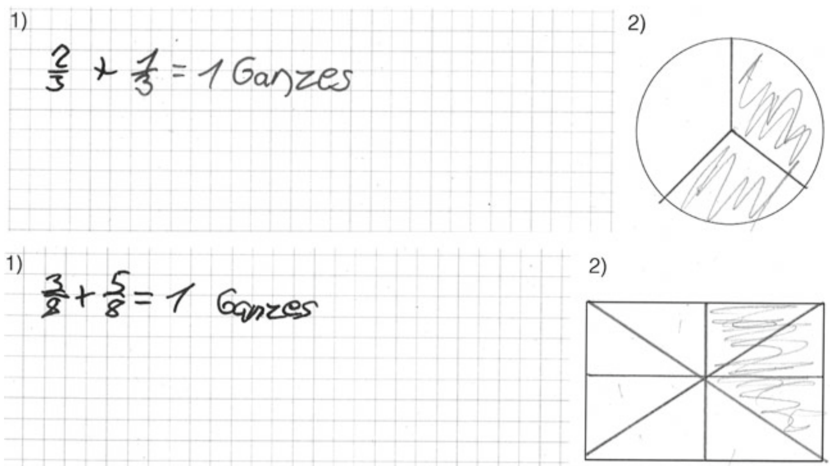



**Abbildung 5.8** Glens Lösung von Aufgabe 2a (oben) und 2b (unten)

lung betrachten, sondern das Ergänzen der Rechenoperationen im ersten unvollständigen Beispiel lediglich als unverbundenes Aufgabenformat wahrgenommen haben. Glen beschreibt daher nicht den Prozess der Bruchherstellung, sondern notiert die Ergänzung zu einem Ganzen.

Can wirkt bei der Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels hilflos und kann scheinbar weder einen Beitrag zur Erklärung der Bruchherstellung leisten, noch die Brüche in den vorgegebenen Figuren einzeichnen.

Zusammenfassend lassen sich die Interpretationen der Bearbeitungen von Can, Glen und Philip anhand der folgenden Deutungshypothesen zusammenfassen:

- Aufgrund einer oberflächlichen Verarbeitung des einleitenden Lösungsbeispiels werden die wesentlichen Aspekte des Bruchherstellungsverfahrens nicht erfasst und können in der Folge nicht auf das unvollständige Beispiel übertragen werden. Die Schüler haben das Lösungsbeispiel zu Beginn der Unterrichtsstunde eilig durchgesehen, es fand keine Kommunikation über den Inhalt statt und auch die fokussierenden Fragestellungen zu dem Lösungsbeispiel wurden nicht beachtet. Im Anschluss gehen sie umgehend zur Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels über, in dem sie versuchen die zu ergänzenden Rechenoperationen herzuleiten. Das Pfeilschema zur Veranschaulichung der Bruchherstellung wird nicht auf das zweite unvollständige Beispiel übertragen.
- Es werden unterschiedliche Operationsvorstellungen zur Beschreibung der Bruchherstellung auf ikonischer und symbolischer Darstellungsebene angewandt. In den Bearbeitungen der Schüler ist zu erkennen, dass sie mit Bezug auf eine ikonische Darstellung die Teiloperatoren auf einer gegenständlichen Ebene eher mit einem Wegnehmen und Hinzufügen von Teilen verbinden, während sie diese mit Bezug auf eine symbolische Darstellung eher mit einem Teilen und Vervielfachen verbinden. In der Folge ergänzen sie im ersten unvollständigen Beispiel unterschiedliche Rechenoperation für die Herstellung desselben Bruchs. Im Kontext der ikonischen Darstellung von Brüchen hingegen interpretieren Glen und Philip die Teiloperatoren bzw. die Nenner und Zähler von Brüchen als Teilen des Ganzen in gleich große Teile und Färben der dem Zähler entsprechenden Anzahl dieser Teile. Die Schüler stellen keine Beziehung zwischen den Beschreibungen der Herstellungshandlung auf ikonischer und symbolischer Ebene her.

**Luca & Miguel – Entkopplung von symbolischer und anschaulicher Ebene**

Luca und Miguels Ergebnisse im Vortest fallen mit lediglich 20 % und 15 % der erreichbaren Punktzahl in das niedrigste Leistungsquartil. In ihrer Partnerarbeit überwiegen individuelle Arbeitsphasen und sie sprechen allgemein sehr wenig über die Bearbeitung der Aufgaben. Das Lösungsbeispiel zur Einführung in die Unterrichtsstunde haben sie eingehend gelesen und auch die fokussierenden Fragen zum Lösungsbeispiel bearbeitet.

### Transkript B1A1 – Luca & Miguel – Szene 1 – Aufgabe 1

**Luca:** (*liest gesamten Aufgabentext laut vor*) Das ist..
**Miguel:** Durch 8.
**Luca:** Durch 8.
**Miguel:** Mal 6.
**Luca:** Mal 6. ... (*liest laut:*) Als Pfeilbild mit Zahlen geschrieben ... hä? ... (*schaut auf den Endzustand des animierten Lösungsbeispiels auf dem Bildschirm*) Hä? Das ist das gleiche.
**Miguel:** (*schaut auf das Lösungsbeispiel am Bildschirm*)
**beide:** (*arbeiten individuell*)
**Luca:** Durch 8 und dann hä das ist doch eh mal 6. ... Wenn's 1 Achtel sind..
**Miguel:** Das ist doch die gleiche Aufgabe wie vorhin.
**beide:** (*arbeiten individuell*)
**Luca:** (*liest Aufgabenstellung zu Teilaufgabe b) laut vor*) ... Geteilt durch ... 4.
**Miguel:** 5.
**Luca:** Geteilt durch 5 und dann mal 4.
**beide:** (*arbeiten individuell*)

In ihrer Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels nennen sie umgehend im Einvernehmen „durch 8" (2, 3) und „mal 6" (4, 5) für die Ergänzungen der Rechenoperationen im ikonisch dargestellten Pfeilschema zur Herstellung des Bruchs $\frac{6}{8}$. Beide Schüler nennen die Rechenoperationen, ohne dass sie lange darüber nachdenken oder diskutieren müssen. Luca ist zunächst irritiert davon, dass sie die gleichen Rechenoperationen erneut in der symbolischen Pfeilschemadarstellung ergänzen sollen: „Hä? Das ist das gleiche" (7–8). Seine Irritation kann so interpretiert werden, dass er erkennt, dass an dieser Stelle die gleichen Rechenoperationen eingetragen werden müssen wie zuvor, und er entsprechend unabhängig von der Darstellung zuvor die gleichen Rechenoperationen identifiziert. Er vergewissert sich durch einen Blick auf den Endzustand des animierten Lösungsbeispiels auf dem Bildschirm, dass er dabei richtig liegt. Auch Miguel stellt fest: „Das ist doch die gleiche Aufgabe wie vorhin" (12).

Nachdem sie ohne weiteren Kommentar die Rechenoperationen in ihrem Arbeitsheft ergänzt haben liest Luca die Aufgabenstellung zu Aufgabenteil b) laut vor, in der die Rechenoperationen zur Herstellung des Bruchs $\frac{4}{5}$ ergänzt werden sollen. Nach kurzem Nachdenken und Zögern nennt Luca „geteilt durch … 4“ (15) als erste Rechenoperation. Er wird umgehend von Miguel korrigiert, dass sie zuerst durch 5 teilen müssen (16) und nennt unmittelbar darauf den vollständigen Rechenweg „geteilt durch 5 und dann mal 4“ (17). An dieser Stelle sind zwei Erklärungen für seinen Zahlendreher denkbar: Entweder er hat sich lediglich versprochen oder er hat die Bedeutung von Zähler und Nenner eines Bruchs vertauscht (vgl. auch Abb. 5.9).

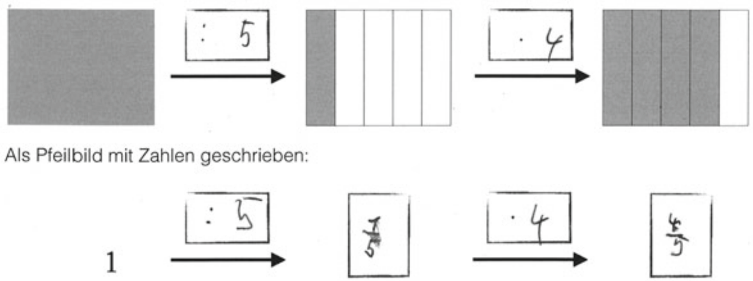



**Abbildung 5.9** Lucas Lösung von Aufgabe 1 b)

### Transkript B1A2 – Luca & Miguel – Szene 2 – Aufgabe 2

**Luca:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*) ... Zeichne den Bruchteil... OK ... (*liest die Aufgabenstellung erneut laut*) ... durch 2 ... mal 3 ...
**beide:** (*arbeiten individuell*)
**Miguel:** Ich muss einfach auf die vorherige Seite gucken, dann weiß ich schon die Lösung.
**beide:** (*arbeiten individuell weiter*)
**Miguel:** (*guckt bei Luca*) Geteilt durch 3, Junge.
**Luca:** Durch 2.
**Miguel:** Nee, geteilt durch 3. ... Doch geteilt durch 3, das sind 2 Drittel.
**beide:** (*arbeiten still weiter*)
**Luca:** (*schreibt bei Miguel ab*)

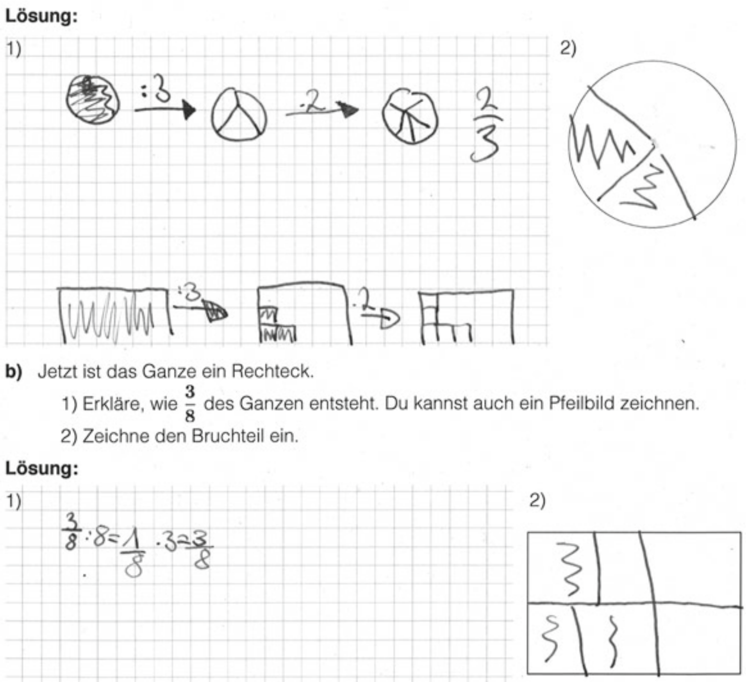



**Abbildung 5.10** Miguels Lösung von Aufgabe 2

Nach der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels gehen sie unmittelbar zum zweiten unvollständigen Beispiel über. Nachdem Luca die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat, nennt er seine Lösung „durch 2 … mal 3“ (3). Er macht erneut einen Zahlendreher und interpretiert den Zähler als Anzahl der Teile des Ganzen und den Nenner als Anzahl der Teile. Dieser wiederholte Zahlendreher stützt die Annahme, dass sein Zahlendreher bei der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels kein Versprecher war, sondern dass er tatsächlich die Bedeutung von Zähler und Nenner vertauscht. Nach einem Blick auf Lucas Arbeitsheft wird er von Miguel korrigiert: „geteilt durch 3, Junge“ (8) „das sind 2 Drittel“ (10–11). Luca besteht zunächst weiterhin darauf, dass sie zunächst „durch 2“ (9) rechnen müssen, übernimmt aber schließlich doch die Lösung von Miguel (Abb. 5.10). Im weiteren Verlauf arbeiten Luca und Miguel individuell in Stillarbeit. Im Video ist zu erkennen, dass Luca die Lösungen seines Partners abschreibt.

Die sprachliche Kommunikation von Luca und Miguel lässt annehmen, dass sie das Verfahren zur Bruchherstellung verstanden haben und jeweils die korrekten Teiloperatoren zur Herstellung der vorgegebenen Brüche ableiten und notieren können. Auch ihre schriftlichen Bearbeitungen zeigen, dass sie auf symbolischer Ebene das Operatorschema zur Herstellung von Brüchen übertragen und anwenden können.

Miguels ikonische Darstellungen der Bruchherstellungen deuten jedoch darauf hin, dass er die Rechenoperationen nicht mit den entsprechenden Herstellungshandlungen verknüpft bzw. seine ikonischen Darstellungen nicht die Rechenoperationen repräsentieren. Zur Darstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$ zeichnet er zwei ikonische Pfeilschemata, eines mit einer Repräsentation als Kreis und eines mit einem Rechteck. Für die Darstellung in einem Kreis übersetzt er den Teiloperator :3 korrekt als Einteilen des Ganzen in drei gleich große Teile. In seiner Darstellung in einem Rechteck hingegen teilt er nicht die ganze Figur in drei gleich große Teile, sondern zeichnet lediglich drei gleich große Teile ein, die jedoch zusammen entsprechend der Kästchen auf dem Arbeitsblatt lediglich etwa $\frac{3}{15}$ des Ganzen Rechtecks entsprechen. Demgegenüber ist seine Übersetzung des zweiten Operators konsistent über die Darstellung in einem Kreis und einem Rechteck. In beiden Fällen übersetzt er den Teiloperator $\cdot 2$ als Hinzufügen von zwei weiteren Teilen. Während die zusätzlichen Teile, die er in das Rechteck einzeichnet, die gleiche Größe wie die zuvor eingezeichneten Teile haben, halbiert er zwei der zuvor eingezeichneten Segmente in seiner Kreisdarstellung, da er zuvor den ganzen Kreis in gleich große Teile eingeteilt hat. In beiden Darstellungen kann jedoch angenommen werden, dass er zwei Teile hinzufügt. In beiden Endzuständen seiner Darstellungen im Kreis und im Rechteck sind keine Segmente farbig markiert.

Seine ikonische Darstellung des Bruchs in der vorgegebenen Kreisfläche unterscheidet sich wiederum erneut von seiner Darstellung im Pfeilschema. Hier hat er den ganzen Kreis in drei unterschiedlich große Teile eingeteilt und zwei Teile markiert, deren Fläche in etwa gleich ist. Die markierten Teile entsprechen jedoch weniger als der Hälfte des ganzen Kreises.

In Aufgabenteil b), zeichnet er für die Erklärung der Herstellung von $\frac{3}{8}$ kein Pfeilschema, sondern einen ähnlichen Term, wie ihn auch Bennet und Julius notiert haben. Hier fällt jedoch auf, dass er seine Rechnung nicht mit 1 als symbolische Repräsentation eines Ganzen beginnt, sondern von dem Bruch $\frac{3}{8}$ ausgeht und schreibt: $\frac{3}{8} : 8 = \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{8}$. Dabei benennt er die Herstellungsoperatoren :8 und $\cdot 3$ jedoch korrekt. Für die ikonische Darstellung des Bruchs teilt er das ganze Rechteck in sechs unterschiedlich große Teile von denen er drei Teile markiert. Hier kann angenommen werden, dass er nicht darauf geachtet hat, wie viele Teile er einzeichnet und so lediglich sechs anstelle von acht Teilen eingezeichnet hat, von denen er aber dennoch drei Teile markiert.

Insgesamt zeigen die schriftlichen Produkte von Miguel, die Luca abgeschrieben hat, dass er zwar die Operatoren zur Herstellung eines Bruchs korrekt angeben kann, jedoch die Rechenoperationen anders als vorgesehen interpretiert und entsprechend in fehlerhafte ikonische Darstellungen übersetzt. Er übersetzt den ersten Operator $:n$ eines Bruchs $\frac{m}{n}$ nicht als Teilen des Ganzen in $n$ gleich große Teile, sondern als Einzeichnen von $n$ drei gleich großen Teilen, die jedoch nicht das Ganze in gleiche Teile einteilen. Den zweiten Operator $\cdot m$ übersetzt er nicht mit dem Färben bzw. Markieren von $m$ Teilen, sondern als Hinzufügen von $m$ Teilen. Dieses Muster ist in Ansätzen auch beim Einzeichnen eines Bruchs in eine vorgegebene Figur zu erkennen. Auch hier teilt er das Ganze zwar in die entsprechende Anzahl von Teilen, jedoch sind die Teile nicht gleich groß.

Zusammenfassend lassen sich die folgenden Deutungshypothesen auf Grundlage der Bearbeitung von Luca und Miguel festhalten:

- Miguel kann zwar die Operatoren zur Bruchherstellung auf symbolischer Darstellungsebene korrekt auf die Herstellung von neuen Brüchen übertragen, jedoch verbindet er fehlerbehaftete anschauliche Wirkungen mit diesen, die letztendlich in falschen Darstellungen der Anteile resultieren. Es ist hier bereits eine Entkopplung von symbolischer und anschaulicher Ebene zu erkennen.
- Die Wirkung der Herstellungsoperatoren ist von der Repräsentation abhängig, auf die sie angewendet wird. In seiner Darstellung in einem Kreisdiagramm interpretiert Miguel die Division :3 korrekt als Teilen des Ganzen in drei nahezu gleich große Teile. In seiner Rechteckdarstellung dagegen deutet er die Division :3 als Einzeichnen von drei beliebigen untereinander gleich großen Teilen, anstelle das Ganze in drei gleiche Teile aufzuteilen.

**Vergleich der Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele**

Auf Grundlage sachanalytischer Überlegungen wurden für die Bearbeitung der beiden unvollständigen Beispiele drei zentrale Transferprozesse identifiziert: Die Übertragung der Operatorstruktur, die Anwendung dieses Verfahrens auf die Herstellung neuer Brüche mitsamt ihren ikonischen Repräsentationen sowie die Übersetzung der Herstellungshandlung zwischen der ikonischen und symbolischen Repräsentationsebene.

**Übertragen der Operatorstruktur & Anwenden des Verfahrens auf neue Brüche:** In allen drei vorgestellten Lösungsprozessen kann ein Transfer des Operatorschemas zumindest in Ansätzen nachgewiesen werden. Hierbei ist zu bedenken, dass die Schülerinnen und Schüler in den zwei vorhergehenden Unterrichtsstunden die Stammbruchherstellung behandelt haben, weshalb der erste Teiloperator bzw.

der erste Schritt des Bruchherstellungsverfahrens ihnen möglicherweise bekannt ist. Entgegen dieser Annahme kann beobachtet werden, dass die Erweiterung der Stammbruchherstellung um den zweiten Teiloperator zum Vervielfachen eines Teils eine neue Anwendungssituation darstellt, in der die Bedeutung des ersten Teiloperators neu interpretiert und ausgehandelt wird. In keiner der hier diskutierten Bearbeitungen wird ein Bezug zum vorhergehenden Unterricht hergestellt. Zudem konnte in zwei der betrachteten Fälle beobachtet werden, dass die Erweiterung des Verfahrens um den zweiten Teiloperator der Überinterpretation des Schemas führte, und angenommen wurde, dass auch zur Herstellung eines Bruchs $\frac{1}{n}$ zwei Operatoren benötigt werden: $: n$ und $\cdot 1$.

Die allgemeine Grundstruktur der Hintereinanderausführung von zwei Teiloperatoren wird von allen Schülern erkannt und übertragen. Es treten jedoch Fehler bzw. Schwierigkeiten bei der Anwendung der Teiloperatoren zur Herstellung neuer Brüche auf, die auf die Übersetzung der Herstellungshandlung zwischen der symbolischen und anschaulichen Repräsentationsebene zurückgeführt werden können.

**Übersetzen der Herstellungshandlung zwischen der ikonischen und symbolischen Repräsentationsebene:** Die Übersetzung zwischen der anschaulichen und symbolischen Darstellungsebene stellt sich in allen hier dargestellten Bearbeitungsprozessen sehr unterschiedlich dar und führt zu Schwierigkeiten unterschiedlicher Art. Bei einer reinen Betrachtung der schriftlichen Lösungen der Schülerinnen und Schüler würden alle beobachteten Fehler dem Fehlermuster „Wahl der falschen Rechenoperation“ (vgl. Abschnitt 2.2.4) zugeordnet werden. Die Analyse der Bearbeitungsprozesse zeigt jedoch in allen drei Fällen deutliche Unterschiede in den Ursachen für diese Fehler.

Julius Interpretation der Herstellungsoperatoren orientiert sich an Handlungen mit konkreten Gegenständen. Entsprechend der Formulierung „man teilt das Ganze in $n$ gleiche Teile und nimmt davon $m$“ interpretiert er den zweiten Teiloperator subtraktiv als „Wegnehmen von Teilen“. Aus diesem Grund argumentiert er dafür, dass der zweite Teiloperator „minus m“ sein müsse. Im Gegensatz dazu interpretiert sein Partner Bennet die Formulierung in einem multiplikativen Zusammenhang als Vervielfachen eines Teils.

In der Bearbeitung von Can, Glen und Philip konnte beobachtet werden, dass sie zwar Bezug auf die grundlegende Struktur von zwei Herstellungsschritten genommen haben, jedoch die Bedeutung der jeweiligen Teiloperatoren anhand der vorgegebenen ikonischen Darstellungen abgeleitet haben ohne einen Bezug zum Lösungsbeispiel oder den vorhergehenden Unterrichtsstunden herzustellen. In ihren Ableitungen der Rechenoperationen für die einzelnen Herstellungsschritte ist zu beobachten, dass sie abhängig von der Repräsentationsebene, auf der sie argumentieren, unterschiedliche Operationsvorstellungen anwenden. Während sie auf der ikonischen Repräsentationsebene die Teiloperatoren mit einem Wegnehmen und Hinzufügen von Teilen interpretieren, beschreiben sie auf symbolischer Ebene ein Teilen und Vervielfachen. Als Folge erklären sie die Herstellung desselben Bruchs mit unterschiedlichen Teiloperatoren und somit mit unterschiedlichen Herstellungshandlungen.

Miguel gelingt es sowohl auf ikonischer wie auch auf symbolischer Ebene die jeweils korrekten Teiloperatoren zur Herstellung der verschiedenen Brüche abzuleiten. Seine ikonischen Darstellungen der Bruchherstellung bringen jedoch zum Vorschein, dass er die Teiloperatoren mit fehlerbehafteten anschaulichen Wirkungen verbindet, die zudem abhängig von dem verwendeten Repräsentationsobjekt sind. Anhand einer Kreisrepräsentation übersetzt er den ersten Teiloperator korrekt mit dem Einteilen der ganzen Figur in gleich große Teile. Bei der Darstellung in einer Rechteckdarstellung hingegen veranschaulicht er den ersten Teiloperator als Einzeichnen von Teilen, deren Größe unabhängig vom Ganzen ist und deren Anzahl der Zahl im Nenner des darzustellenden Bruchs entspricht. Den zweiten Teiloperator interpretiert er als Hinzufügen einer Anzahl von Teilen, die er dem Zähler des darzustellenden Bruchs entnimmt. In seiner Kreisrepräsentation fügt er zwei Teile hinzu, indem er zwei der zuvor eingeteilten Kreissegmente halbiert. Demgegenüber zeichnet er in seiner Rechtecksrepräsentation zwei zusätzliche Teile ein.

Insgesamt ist festzustellen, dass in allen beschriebenen Fällen ein Transfer der grundlegenden Operatorstruktur als Hintereinanderausführung von zwei Teiloperatoren identifiziert werden kann. Dabei kann es jedoch zu fehlerhaften anschaulichen Interpretationen der Wirkungen dieser Teiloperatoren kommen, was zur Wahl der falschen Rechenoperation oder zur fehlerhaften ikonischen Darstellung der Anteile führt. In diesen Fällen ist somit in einem sehr frühen Stadium der Begriffsentwicklung eine Entkopplung von symbolischer und anschaulicher Ebene zu erkennen.

### 5.1.2 Bruchdarstellung an einer Strecke

Während die ikonische Darstellung von Brüchen bis zu diesem Zeitpunkt nahezu ausschließlich anhand von Kreis- und Rechtecksrepräsentationen vorgenommen wurde, sollen die Lernenden in dieser Transferaufgabe ihr Vorgehen auf die lineare Darstellung einer Strecke übertragen. Für jede Teilaufgabe ist eine Strecke mit der Länge von zwölf Kästchen abgebildet, an denen die Lernenden die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{5}{12}$ darstellen sollen (siehe Abb. 5.11). Es ist somit ein Transfer auf Repräsentationsebene erforderlich, der in zwei Transferschritten beschrieben werden kann:

- Die Übertragung des Teiloperators $:n$ zur Einteilung der Strecke in $n$ gleich große Teile bzw. Abschnitte und
- die Übertragung des Teiloperators $\cdot m$ zum Färben von $m$ Streckenabschnitten.

Für diese Aufgabe wurde bewusst eine Streckenabbildung gewählt, die eine Einteilung ohne Berechnungen auf Zahlenebene ermöglicht. Auf diese Weise sollen die Lernenden sich auf die ikonische Darstellung konzentrieren können. Mit dem Repräsentationstransfer zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke soll die Verallgemeinerung des Verfahrens zur Bruchdarstellung unterstützt werden, indem es von den bekannten Repräsentationsobjekten Kreis und Rechteck losgelöst wird. Aus didaktischer Perspektive ist dies ein wichtiger Schritt für die flexible Anwendung des Verfahrens auf unterschiedliche Bezugsgrößen und Darstellungen.

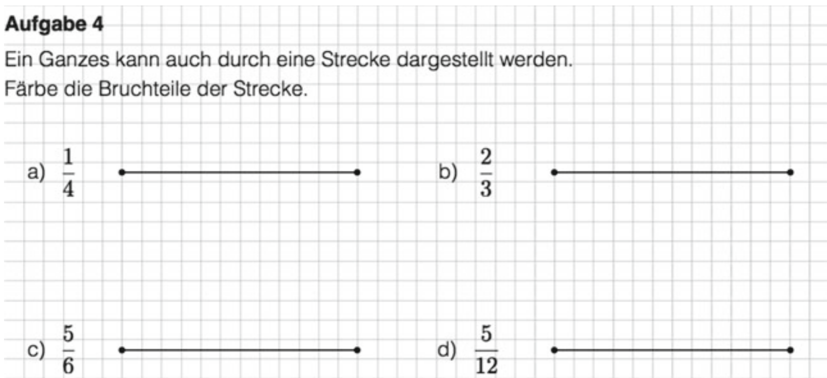



**Abbildung 5.11** Aufgabe 4

Der Vortest enthielt ein Item zum Ablesen von Brüchen aus einer Streckendarstellung sowie zwei Items zur Darstellung von Brüchen in einer Strecke. Nur vier der 30 Lernenden konnten im Vortest den Bruch $\frac{3}{4}$ in einer in vier Teile geteilten Strecke ablesen. Demgegenüber konnten etwa ein Drittel der Lernenden die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{8}$ in einer in acht gleiche Teile eingeteilten Strecke markieren.

**Bennet & Julius – Übertragung der Operatorstruktur**

Im Anschluss an die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele zeichneten Bennet und Julius ohne Schwierigkeiten die Bruchdarstellungen in Aufgabe 3. Dabei arbeiteten sie weitgehend in Einzelarbeit, wählten eigene Darstellungen und Einteilungen für das Ganze und verglichen ihre Zeichnungen. Während der Bearbeitung der Aufgabe stellten sie fest, dass die Darstellung in einem Kreis aufwändiger als die Darstellung von Bruchteilen in einem Rechteck sei, da ein Rechteck schneller und einfacher zu zeichnen sei und mit höherer Genauigkeit in gleich große Teile eingeteilt werden können. Direkt im Anschluss lesen die die Aufgabenstellung zu Aufgabe 4 und beginnen mit der Bearbeitung.

### Transkript B1A4 – Bennet & Julius – Szene 1 – Aufgabe 4

**Julius:** Das ist einfach. Da muss man doch nur hier das in vier Teile aufteilen und dann eins davon nehmen. Und da 6 und dann 5 davon nehmen.
**Bennet:** Ja, genau.
**Julius:** Da müssen wir erstmal messen. Wie lange genau ist das?
**Bennet:** Fünf.
**Julius:** Fünf. Wie viel brauchen wir? Vier. Das heißt immer ...
**Bennet:** Und wie machst du das?
**Julius:** Keine Ahnung, einfach so grob.
**Bennet:** Ich auch. ... Ein bisschen mehr als eins.
**Julius:** Dann 2 Drittel.
**Bennet:** Warte, einen müssen wir, ne?
**Julius:** Ja.
**Bennet:** Ich mache das nur so kurz über'n Daumen.
**beide:** (*arbeiten individuell – ohne Kommunikation ca. 1,5 Minuten*)
**Julius:** So, zwölf. Wie viele brauchen wir? 5.

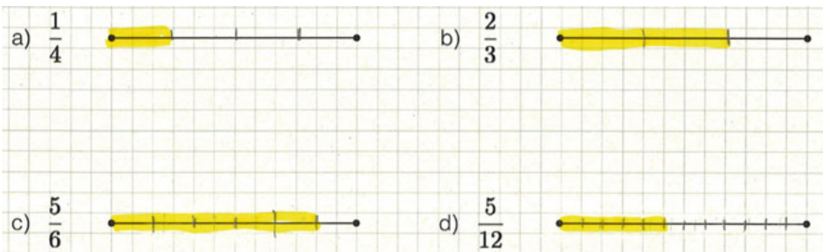



**Abbildung 5.12** Julius Bearbeitung von Aufgabe 4

Julius kommentiert unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung, dass die Darstellung von Bruchteilen an einer Strecke „einfach" sei, denn für die Darstellung des Bruchs $\frac{1}{4}$ in Teilaufgabe a) müsse „man doch nur hier das in vier Teile aufteilen und dann eins davon nehmen“ (1–2). Analog formuliert er seinen Lösungsvorschlag zur Darstellung des Bruchs $\frac{5}{6}$ in der unter a) gelegenen Teilaufgabe c): „Und da 6 und dann 5 davon nehmen“ (2–3). Bennet stimmt ihm zu, dass dies ein richtiges Vorgehen sei (4). Zur Bestimmung der Größe eines Teils schlägt Julius vor, dass man zunächst die Länge der ganzen Strecke „genau“ vermessen müsse (5), was Bennet auch umgehend tut und antwortet, dass die ganze Strecke die Länge „5“ habe (6). Eine Maßeinheit nennt er dabei nicht. Julius unterteilt in der Folge die Strecke in 4 gleich große Teile. Bennet scheint Schwierigkeiten zu haben die 5 Einheiten lange Strecke in vier gleiche Teile zu teilen und fragt Julius wie er das mache (8). Julius antwortet ihm, dass er nicht wisse, wie man die Strecke in exakt gleich große Segmente teilt und er die Teilung „grob“ vornimmt (9). Bennet nimmt dieses Vorgehen auf und schätzt die Länge eines Teils als „ein bisschen mehr als eins“ (10). Während Julius bereits zu Teilaufgabe b) übergeht (11), versichert sich Bennet bei Julius, dass in Teilaufgabe a) eines der vier Streckensegmente eingefärbt werden muss (12), was Julius ihm bestätigt (13).

Bennet erklärt, dass er „das nur so kurz über’n Daumen mache“ (14), worauf eine individuelle Arbeitsphase folgt, in der beide Schüler die übrigen Aufgaben bearbeiten.

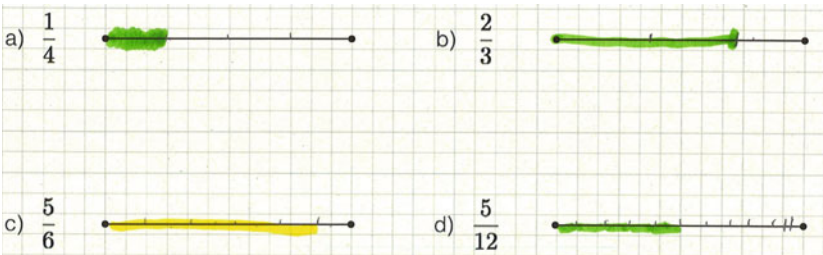



**Abbildung 5.13** Bennets Bearbeitung von Aufgabe 4

Was Bennet mit seiner Bemerkung meint, wird erst bei der Betrachtung seiner Zeichnung ersichtlich. Im Gegensatz zu Julius, der, obgleich er es nicht sagt, die Kästchenstruktur des Arbeitsblattes als Hilfe nutzt, unterteilt Bennet die Strecke nach Augenmaß in die entsprechende Anzahl von Teilen bzw. Segmenten.

Zum Ende der individuellen Arbeitsphase ist Julius bei Teilaufgabe d) angekommen und spricht laut bei seiner Bearbeitung mit. Er teilt die Strecke in zwölf gleich große Teile und fragt wie viele sie „brauchen“. Er beantwortet seine Frage unmittelbar selbst mit „5“ (17).

Die Analyse des Bearbeitungsprozesses zeigt, dass Bennet und Julius Bruchteile ohne erkennbare Schwierigkeiten an einer Strecke darstellen können. In Julius Erklärungen ist die Übertragung der Herstellungshandlung deutlich zu erkennen. Er beschreibt, dass man die Strecke bzw. das Ganze zur Darstellung der Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{5}{6}$ zunächst in vier (bzw. sechs) gleiche Teile aufteilen und dann einen (bzw. fünf) Teile „davon nehmen“ (1–3) müsse. Mit „nehmen“ bezieht er sich an dieser Stelle auf ein Markieren des entsprechenden Anteils, wobei seine Formulierung weiterhin eine Orientierung an Handlungen mit konkreten Darstellungsobjekten erkennen lässt. Ungeachtet dessen ermöglicht ihm der Rückgriff auf die Operatorstruktur die korrekte Darstellung ohne erkennbare Schwierigkeiten.

Die Leichtigkeit und Direktheit, mit der er die zur Darstellung erforderlichen Schritte nennt, deutet vor dem Hintergrund seiner Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der unvollständige Beispiele darauf hin, dass er die Herstellungshandlung wohl verstanden hat und flexibel auf neue Brüche und Darstellungsobjekte übertragen kann. Anders als in den unvollständigen Beispielen sind hier jedoch keine symbolischen Rechenoperatoren zu nennen, weshalb aus dieser Bearbeitung keine weiteren Schlüsse auf die Entwicklung der Operatorvorstellung gezogen werden können.

Um eine möglichst genaue Einteilung der Strecke vornehmen, möchte Julius die Länge der Strecke messen, was Bennet für ihn übernimmt. Die metrische Länge von 5 cm ermöglicht jedoch kein ganzzahliges Teilen in vier Teilabschnitte, wie sie in Teilaufgabe a) benötigt werden, sodass beide Schüler eine andere Methode zur Einteilung der Strecke wählen. Während die Zeichnungen von Julius (vgl. Abb. 5.12) nahelegen, dass er im Weiteren die unterliegende Kästchenstruktur des Arbeitsblattes zur Einteilung der Strecke benutzt, teilt Bennet die Streckensegmente nach Augenmaß ein. Er benutzt dazu das geschätzte Maß von „ein bisschen mehr als eins [1 cm]“ (10). Da er dieses Maß in den weiteren Teilaufgaben jedoch stets neu abschätzen muss, deuten seine Zeichnungen (vgl. Abb. 5.13) darauf hin, dass er in den weiteren Teilaufgaben nicht die Länge eines Teils überschlägt, sondern per Augenmaß die Länge eines Teils im Verhältnis zur ganzen Strecke und der Anzahl der benötigten Teilen abschätzt. Dies wird besonders in seinen Zeichnungen zu den Teilaufgaben b) und d) deutlich, bei denen er die Einteilung zunächst regelmäßig vornimmt, zum Ende hin aber nicht mehr genug Platz für die entsprechende Anzahl von Teilen vorhanden ist und er diese entsprechend kleiner einzeichnet. Er erklärt, dass er „das nur so kurz über’n Daumen“ (14) mache. Dieses Vorgehen deutet darauf hin, dass es ihm nicht wichtig ist, dass die Einteilung exakt ist, sondern lediglich die Grundstruktur erkennbar sein muss. In diesem Zusammenhang kann sein Vorgehen als Zeichen dafür interpretiert werden, dass er eine zunehmende Flexibilität bei der Darstellung von Brüchen entwickelt.

Insgesamt kann die Analyse der Bearbeitung von Bennet und Julius in folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Bennet und Julius übertragen das Bruchherstellungsverfahren zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke. Dabei gehen sie nach demselben Handlungsschema vor wie bei der Darstellung von Bruchteilen an einem Kreis oder einem Rechteck. Sie teilen die Strecke zunächst in gleich große Teilsegmente und färben den entsprechenden Anteil der Strecke. Die Übertragung der Herstellungsschritte führt dazu, dass der Repräsentationstransfer zur Strecke für Bennet und Julius keine Schwierigkeit darstellt und spontan vorgenommen wird.
- Julius Erklärungsmodell zur Bruchherstellung orientiert sich weiterhin an Handlungen mit konkreten Repräsentationsobjekten. Er formuliert erneut, dass das Ganze in gleiche Teile eingeteilt wird, von denen man im Anschluss eine bestimmte Anzahl „nimmt“. Auf ikonischer Darstellungsebene interpretiert er das *Nehmen* von Teilen jedoch nicht als ein *Wegnehmen*, sondern als ein Färben bzw. Markieren einer bestimmten Anzahl von Teilen.
- Bennet löst sich zunehmend von einer Einteilung in exakt gleich große Teile. Stattdessen ist in seinen Darstellungen zu erkennen, dass er die Länge der Streckensegmente nicht rechnerisch oder abzählend bestimmt, sondern ihre Größe abschätzt und somit das Ganze nach Augenmaß in die entsprechende Anzahl von Teile zerlegt. Hierbei legt er keinen Wert auf eine exakte Darstellung, sondern auf die allgemeine Identifizierbarkeit der dargestellten Bruchteile, was auf eine zunehmende Verallgemeinerung und Abstraktion des Verfahrens hindeutet.

**Aliya und Aisha – Statische und dynamische Sichtweise auf Anteile**

Aliya und Aisha sind ein sehr leistungsheterogenes Schülerinnenpaar. Während Aliya zu den Klassenbesten gehört und im Vortest bereits 85 % der Aufgaben korrekt lösen konnte, zählt Aishas Vortestergebnis mit lediglich 15 % zu den niedrigsten Ergebnissen in der Lerngruppe. In der vorhergehenden Partnerarbeit ist zu erkennen, dass beide Schülerinnen sehr sorgfältig und gewissenhaft arbeiten. Sie haben das Lösungsbeispiel zur Einführung ausführlich gelesen und bereits während des Lesens die einzelnen Lösungsschritte in eigenen Worten erklärt. Auch die unvollständigen Beispiele haben sie sicher gelöst. Obgleich Aliya in der Interaktion der beiden Schülerinnen sehr dominant ist, stellt Aisha regelmäßig Zwischenfragen, bittet um eine Erklärung und macht selber Lösungsvorschläge, die zu einer erfolgreichen Aufgabenlösung beitragen. Die ikonischen Darstellung der Bruchteile in Aufgabe 3 fertigen beide Schülerinnen größtenteils in Einzelarbeit an und vergleichen abschließend ihre Zeichnungen. Für die Darstellung der Brüche nutzen sie ausschließlich die Repräsentation eines Rechtecks und stellen alle Brüche korrekt dar.

### Transkript B1A4 – Aisha & Aliya – Szene 1 – Aufgabe 4

**Aisha:** Ja hier, 1 Viertel sind von vier Stücken eins von vier Stücken.
**Aliya:** Also, wie viele Kästchen sind das?
**Aisha:** 4 Stück.
**Aliya:** Nein! Nein, warte, du musst doch erstmal die Kästchen zählen. 2, 4, 6, 8, 10, 12.
**Aisha:** Achso.
**Aliya:** Also müssen wir 12 durch 4 und das sind ...
**Aisha:** 3.
**Aliya:** Ja, Und dann hier so'n Strich bei 3 machen, oder? Nee, färben.
**Aisha:** Was?
**Aliya:** Färben. So, jetzt ... (*zeichnet*)
**Aisha:** (*guckt bei Aliya*) 1 Viertel.
**Aliya:** Und jetzt 12 durch 3 sind ...
**Aisha:** 4.
**Aliya:** Ja, 4, und das sind ... 2 Drittel, das sind dann 8, denn mal 2.
**beide:** (*zeichnen und bearbeiten Aufgabenteil b) individuell – ca. 1 min*)
**Aisha:** Ok, und dann 6 durch 12 sind 2.
**Aliya:** Nee, 12 durch 6.
**Aisha:** Ja, 12 durch 6.
**Aliya:** Und dann mal 5, das sind 10, einfach 2 auslassen.
**beide:** (*zeichnen*)
**Aisha:** Und 12 durch 12 sind 1.
**Aliya:** Und dann mal 5, das sind halt 5.

Direkt nachdem die beiden Schülerinnen die Aufgabenstellung gelesen haben beschreibt Aisha ihre Vorstellung von $\frac{1}{4}$: „1 Viertel sind von vier Stücken eins von vier Stücken" (1–2). Entsprechend ihrer Beschreibung stellt sie sich unter $\frac{1}{4}$ einen Anteil vor: Ein Teil von insgesamt vier Teilen. Aliya fragt sie darauf hin, was diese Feststellung für die ikonische Darstellung an der Strecke bedeutet: „Also, wie viele Kästchen sind das?" (3). Sie fragt direkt nach der Länge der zu markierenden Strecke, wobei sie die der Strecke unterliegende Kästchenstruktur als Maß für die Länge definiert. Aisha antwortet ihr darauf, dass der Bruchteil $\frac{1}{4}$ „4 Stück" (4), also vier Kästchen entspreche. Als Hintergrund für diesen Lösungsvorschlag kann die verbreitete Fehlvorstellung zu Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ *bezeichnet eine Menge von n Objekten* (vgl. Abschnitt 2.2.4) vermutet werden. Sie nimmt keinen Bezug zu der Länge der gesamten Strecke, sondern schließt vom Nenner des Bruchs direkt auf die Anzahl der zu färbenden Kästchen. Es anzunehmen, dass dieser Lösungsvorschlag von einer statisch-abbildhafte Vorstellung von $\frac{1}{4}$ herrührt, bei der sich eine diskrete Menge von vier Objekten vorstellt und keine Beziehung zwischen einem Teil und dem Ganzen herstellt. Anstelle die Anzahl der Kästchen zu bestimmen, die die Länge der ganzen Strecke ausmacht, schließt sie direkt auf die Anzahl von vier Kästchen. Entsprechend assoziiert sie den Bruch nicht mit seiner Herstellungshandlung, sondern als *statisches Objekt*.

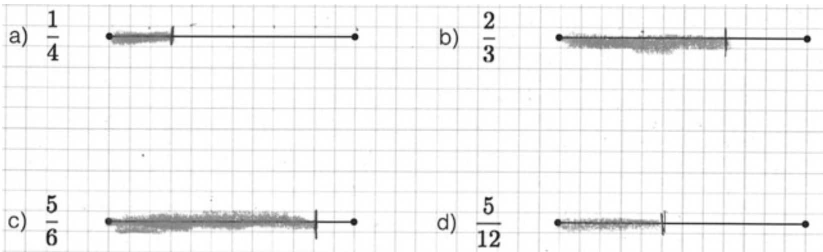



**Abbildung 5.14** Aliyas Bearbeitung von Aufgabe 4

Aliya weist sie umgehend auf ihren Fehler hin: „Nein! Nein, warte, du musst doch erstmal die Kästchen zählen. 2, 4, 6, 8, 10, 12.“ (5–6). Sie erklärt damit, dass sie zunächst einmal die Länge der Strecke als Anzahl von Kästchen bestimmen müssen, die sie dann auch direkt in Zweierschritten abzählt. Sie erklärt weiter, dass sie nun die Länge der ganzen Strecke in vier gleiche Teile teilen müssen, was mit dem Kästchenmaß der Division „12 durch 4“ (8) entspricht. Aisha ergänzt, dass das Ergebnis dieser Rechnung „3“ (9) sei, worauf Aliya erklärt, dass sie folglich „hier so'n Strich bei 3 machen“ (10–11) müssen, womit sie meint, dass sie am nach dem dritten Kästchen einen Trennstrich einzeichnen und die Teilstrecke von Beginn der Strecke bis zu diesem Trennstrich farbig markieren sollen. Im Gegensatz zu ihrer Partnerin ist in den Ausführungen von Aliya zu erkennen, dass sie eine *dynamische Vorstellung* zum Bruch $\frac{1}{4}$ aktiviert und einen Bezug zur Operatorstruktur des Bruchherstellungsverfahrens herstellt. Sie bestimmt die Länge der ganzen Strecke in der Einheit 1 Kästchen, teilt diese Strecke auf symbolischer Ebene mit dem Teiloperator :4 in vier gleich große Teile, um dann einen Teil farbig zu kennzeichnen (Abb. 5.14).

Aisha kommentiert diese Korrektur ihrer Partnerin mit „achso“ (7) und erweckt den Eindruck, dass sie ihren Fehler erkennt. Sie sieht ihrer Partnerin dabei zu, wie diese den Bruchteil markiert.

Aliya fährt umgehend mit der nächsten Teilaufgabe fort, in der sie den Bruch $\frac{2}{3}$ an der Strecke darstellen sollen. Dazu rechnet sie „12 durch 3“ (15) sind „4, und das sind … 2 Drittel, dass sind dann acht, denn mal 2“ (17–18). Auch in dieser Rechnung ist deutlich zu erkennen, dass Aliya zur Bestimmung des Bruchteils die Operatorstruktur anwendet und zunächst :3 und dann ·2 rechnet.

Nachdem die beiden Schülerinnen auch diesen Anteil der Strecke gekennzeichnet haben übernimmt Aisha Teilaufgabe c), in der der Bruchteil $\frac{5}{6}$ dargestellt werden soll. Dazu rechnet sie „6 durch 12 sind 2“ (21), wobei ungeachtet des Zahlendrehers zu erkennen ist, dass sie Aliyas Vorgehen aufnimmt und auf symbolischer Ebene den Operator :6 auf die Länge der Strecke anwendet und richtig feststellt, dass ein Teil die Länge von zwei Kästchen hat. Aliya ergänzt den zweiten Operator und rechnet: „und dann mal 5, das sind 10, einfach 2 auslassen“ (24). Auch hier stellt sie unmittelbar einen Bezug zum Ganzen her, indem sie nicht ihrer Rechnung entsprechend zehn Kästchen vom Beginn der Strecke abzählt, um diese durch einen Trennstrich zu kennzeichnen, sondern feststellt, dass sie einfach von hinten zwei Kästchen abtrennen können, da die Strecke insgesamt zwölf Kästchen lang ist.

Auch für die letzte Teilaufgabe, der Darstellung des Bruchteils $\frac{5}{12}$ nutzen die beiden Schülerinnen die Operatorstruktur und rechnen „12 durch 12 sind 1“ (26) „und dann mal 5, das sind halt 5“ (27). Obgleich sie hier direkt die Kästchen abzählen könnten, formulieren sie ihr Vorgehen weiterhin anhand der zwei Teiloperatoren der Bruchherstellung und formulieren eine Rechnung auf symbolischer Ebene.

Zuletzt muss festgestellt werden, dass Aisha lediglich die Anwendung des ersten Teiloperators übernimmt und Aliya die Rechnung durch die Anwendung des zweiten Teiloperators vervollständigt. Obwohl angenommen werden könnte, dass Aisha nur einen Teil des Operatorschemas anwenden kann, enthält die Interaktion der beiden Schülerinnen keinen Hinweis darauf, dass Aisha möglicherweise Schwierigkeiten bei der Anwendung des zweiten Teiloperators hat. Stattdessen ist die Aufteilung der Rechenschritte zwischen den beiden Schülerinnen eher im Rahmen einer arbeitsökonomischen und interaktiven Partnerarbeit zu interpretieren.

Zusammenfassend kann der Bearbeitungsprozess von Aisha und Aliya anhand der folgenden Deutungshypothesen beschrieben werden:

- Aishas *statische* Deutung des Bruchs als Anteil einer diskreten Menge führt dazu, dass sie den Bruchteil nicht in Beziehung zum Ganzen sieht, sondern den Nenner des Bruchs als Anzahl der zu markierenden Längeneinheiten (Kästchen) interpretiert. Sie stellt zunächst keinen Bezug zum Bruchherstellungsverfahren her.

- Im Gegensatz zu ihrer Partnerin interpretiert Aliya den Bruch *dynamisch* vor dem Hintergrund des Bruchherstellungsverfahrens. Sie überträgt die Operatorstruktur als Hintereinanderausführung von zwei Teiloperatoren und berechnet in der Folge die Länge der Bruchteile der Strecke auf symbolischer Ebene.
- Auf ihren Fehler hingewiesen, scheint Aisha ihr fehlerhaftes Denkmuster zu erkennen und das Vorgehen ihrer Partnerin zu übernehmen, sodass für die nachfolgenden Bruchteile das Operatorschema anwendet und die Partnerinnen kooperativ die Längen der weiteren Streckenanteile berechnen.

**Laura & Nike – Unvollständige Übertragung des Bruchherstellungsverfahrens**
Die Vortestergebnisse von Laura und Nike können mit 40 % (Laura) und 65 % (Nike) den mittleren Leistungsstufen zugeordnet werden. Zum Einstieg in die Unterrichtsstunde haben sie das animierte Lösungsbeispiel eingehend gelesen und bereits während des Lesens über die einzelnen Herstellungsschritte gesprochen und diese nachvollzogen. Sie hatten keine Schwierigkeiten die fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel zu beantworten und in ihren Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele war deutlich zu erkennen, dass sie die Operatorstruktur erfolgreich auf neue Brüche anwenden. In einer ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{3}{8}$ im zweiten unvollständigen Beispiel haben sie gar versucht, den Herstellungsprozess in ihre Bruchdarstellung zu integrieren (vgl. Abb. 5.15).

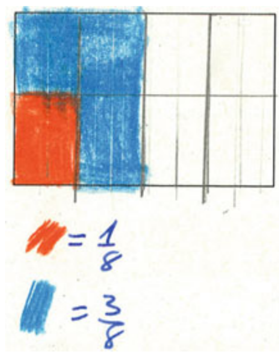



**Abbildung 5.15** Nikes Darstellung des Bruchs $\frac{3}{8}$ im zweiten unvollständigen Beispiel

### Transkript B1A4 – Laura & Nike – Szene 1 – Aufgabe 4

**Laura:** (*liest die Aufgabe laut vor*) Das kann ich nicht.
**Nike:** Ein .., warte, wie lang ist die Strecke?
**Laura:** Obwohl, also ein Halbes, ein Viertel ...
**Nike:** 5. 5 cm, nein, warte mal.
**Laura:** Warte, ich zähl die Kästchen. 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 Kästchen. Also sind 1 Viertel ... 3.
**Nike:** Genau, 3.
**Laura:** Bei b) sind 2 Drittel, das verstehe ich nicht, wie viel das ist.
**Nike:** Wie lang ist die denn? 12 cm, 12 Kästchen, das sind 4, 4 Kästchen sind eine Einheit, also (*zeichnet*) so, so, so.
**Laura:** Hä? Wie denn? Ich kann mir das nicht vorstellen.
**Nike:** So, so, so, das sind 12 Kästchen. 12 durch 3 sind 4, 4 Kästchen ein Strich, 4 Kästchen ein Strich, 4 Kästchen, fertig.
**Laura:** (*schaut bei Nike*) Achso, du hast mehrere eingezeichnet. Ich hab nur eins eingezeichnet. (*zeichnet*) ... 5 Sechstel, dann macht man dann ...
**Nike:** 2, jedes zweite.
**Laura:** Jedes zweite? (*guckt bei Nike und zeichnet*)
**Nike:** Und dabei jedes.
**Laura:** 6, äh, 12. Jedes erste.

Laura erklärt unmittelbar nachdem sie die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat: „Das kann ich nicht" (1), relativiert dann jedoch nachdem sie kurz nachgedacht hat und ihre Partnerin Nike sie nach der Länge der vorgegebenen Strecke gefragt hat (2), dass sie womöglich doch eine Idee habe: „Obwohl, also ein Halbes, ein Viertel …" (3). Ihre Äußerung deutet darauf hin, dass sie in Gedanken die Strecke sukzessive halbiert, sodass sie „ein Halbes, ein Viertel" (3) erhält. Es wird nicht ersichtlich, inwieweit die Nachfrage ihrer Partnerin sie auf diese Idee gebracht hat. Es ist durchaus möglich, dass sie mit ihrer anfänglichen Bemerkung, dass sie das nicht könne, zum Ausdruck bringt, dass sie keinen spontanen Zugang bzw. keinen Lösungsansatz erkennt. Die Nachfrage ihrer Partnerin richtet ihre Aufmerksamkeit dann jedoch darauf, dass der Anteil der Strecke in Form einer Länge bestimmt werden müsse, wozu zunächst die Länge der ganzen Strecke bestimmt werden muss. Diese Interpretation würde bedeuten, dass ihr für einen Ansatz die entsprechende *Größe* bzw. ein *Maß* für die Einteilung der Strecke fehlt.

Während Nike mit ihrem Lineal die Länge der Strecke ausmisst (4), beginnt Laura die Länge der Strecke durch Abzählen der Kästchen als Einheit zu bestimmen: „Warte, ich zähl die Kästchen. 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 Kästchen" (5). Sie teilt die Anzahl der Kästchen durch vier und stellt dann fest: „Also sind 1 Viertel … 3“ (5–6). Sie wendet entsprechend den Operator :4 auf die Anzahl der Kästchen an, um $\frac{1}{4}$ zu erhalten. Ihr Partnerin Nike stimmt ihr zu (7) und Laura geht direkt zu Aufgabenteil b) über, in der der Bruch $\frac{2}{3}$ an der Strecke dargestellt werden soll.

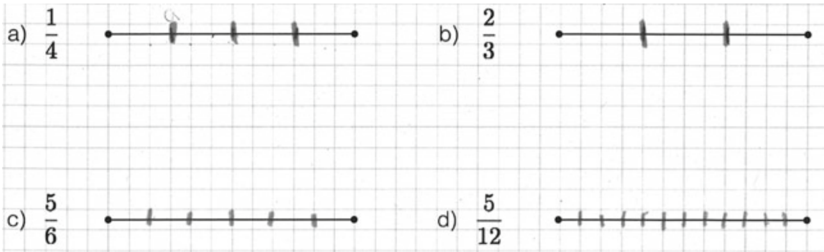



**Abbildung 5.16** Lauras Bearbeitung von Aufgabe 4

Wie bereits am Anfang erklärt Laura: „Bei b) sind 2 Drittel, das verstehe ich nicht, wie viel das ist“ (8). Erneut reagiert Nike mit der Frage nach der Länge der ganzen Strecke, die sie dieses Mal jedoch selber beantwortet: „12 Kästchen, das sind 4, 4 Kästchen sind eine Einheit, also (*zeichnet*) so, so so“ (10–11). Sie stellt fest, dass die Strecke erneut eine Länge von 12 Kästchen hat und wendet den ersten Teiloperator zum Teilen der Strecke an. Sie teilt also die Länge der Strecke und respektive die Anzahl durch 3 und sagt: „4 Kästchen sind eine Einheit“ (10–11). Mit Einheit meint sie vermutlich Drittel – 4 Kästchen entsprechen einem Drittel der Strecke. In der Folge zeichnet sie nach je vier Kästchen der Strecke einen Trennstrich und teilt so die Strecke in drei Teile ein.

Laura wirft ein, dass sie sich „das nicht vorstellen“ (12) könne, womit sie vermutlich meint, dass sie sich nicht vorstellen kann, wie man diese Rechenhandlung auf die Darstellung der Strecke überträgt. Sie schaut auf auf die Zeichnung ihrer Partnerin. Nike erklärt ihr Vorgehen erneut: „So, so, so, das sind 12 Kästchen- 12 durch 3 sind 4, 4 Kästchen ein Strich, 4 Kästchen ein Strich, 4 Kästchen fertig“ (13–15). Anhand Nikes Zeichnung erkennt Laura ihren (gedanklichen) Fehler: „Achso, du hast mehrere eingezeichnet. Ich hab nur eins eingezeichnet“ (14–15). An dieser Äußerung wird deutlich, was Laura damit meinte, dass sich das nicht vorstellen könne. Sie stellt fest, dass ihre Partnerin „mehrere eingezeichnet“ hat, was bedeutet, dass Nike die ganze Strecke eingeteilt hat. Laura hingegen habe „nur eins eingezeichnet“. Sie orientiert sich folglich an der Darstellung des ersten Bruchs $\frac{1}{4}$, für dessen Darstellung es genügt hat, ein Teilsegment in der Strecke einzuzeichnen und den Bruch damit bereits zu repräsentieren. In der Folge übernimmt sie das Vorgehen von Nike und beide Schülerinnen unterteilen die Strecke in Teilaufgabe c) in sechs und in Teilaufgabe d) in zwölf gleiche Teile.

Es fällt auf, dass Laura und Nike zwar alle Strecken korrekt einteilen, jedoch den zweiten Herstellungsschritt, das Färben des Anteils, auslassen (vgl. Abb. 5.16). Sie markieren keine Anteile, sondern sind mit ihren Ergebnissen zufrieden und gehen zur nächsten Aufgabe über. Für die Auslassung des zweiten Herstellungsoperators sind drei Erklärungen denkbar. Zum einen ist es möglich, dass die beiden Schülerinnen schlichtweg vergessen, den Anteil einzuzeichnen, ohne dass es einen besonderen Grund dafür gibt. Zum anderen wird jedoch deutlich, dass es für Nike und Laura und Nike nicht natürlich ist die Strecke einzuteilen und somit eine beträchtliche kognitive Belastung darstellt. Vor diesem Hintergrund ist es denkbar, dass bereits die Übertragung des ersten Herstellungsoperators und die Anpassung des Vorgehens an die neue Repräsentation eine besondere Herausforderung darstellen, sodass sie die Aufgabe danach als abgeschlossen ansehen. Drittens beschreibt Laura ihre Schwierigkeiten bei der Darstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$ darin, dass sie sich das „nicht vorstellen“ könne, während sie es sich zur Darstellung von $\frac{1}{4}$ vorstellen konnte. Ausgehend davon kann angenommen werden, dass sie den zweiten Teil der Herstellungshandlung – das Vervielfachen eines Teils – nicht auf die Darstellung in einer Strecke übertragen kann. Sie erklärt weiter, dass sie zuvor „nur eins“ also nur einen Teil eingezeichnet habe, ihre Partnerin jedoch die ganze Strecke in gleiche Teile teilt. Sie könnte dieses Einteilen der ganzen Strecke bereits als Anwendung des zweiten Herstellungsschritts interpretieren.

Insgesamt können die Beobachtungen in Laura und Nikes Bearbeitung in folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Der Repräsentationswechsel bzw. die Anwendung des Herstellungsverfahrens auf ein neues Repräsentationsobjekt bedarf der Anpassung des Verfahrens an die Eigenschaften der neuen Repräsentation. Im Falle des Wechsels von Flächendarstellungen, wie einem Kreis oder Rechteck auf die Darstellung einer Strecke, fällt es Laura schwer ein *Maß* bzw. die Größe zu identifizieren, auf die das Verfahren angewendet wird. Während zuvor Anteile zumeist als Fläche dargestellt wurden, ist die Größe für einen Anteil einer Strecke eine Länge. Da Laura dies nicht sofort erkennt, hat sie zunächst Schwierigkeiten bei der Anwendung des Verfahrens.
- Die hohe kognitive Belastung, die durch die Übertragung des Verfahrens und Anpassung an die Eigenschaften des neuen Repräsentationsobjekts aufgebaut wird, kann dazu führen, dass einzelne Lösungsschritte übergangen bzw. ausgelassen werden oder anders interpretiert werden als zuvor. In Laura und Nikes

vorhergehenden Bearbeitungen war deutlich zu erkennen, dass sie großen Wert auf die Darstellung beider Herstellungsschritte gelegt haben, weshalb davon auszugehen ist, dass das fehlende Markieren des Anteils nicht auf ihr Unverständnis zurückzuführen ist. Vielmehr ist anzunehmen, dass sie diesen zweiten Schritt vergessen oder das Einteilen der ganzen Strecke als entsprechenden Handlungsschritt interpretieren.

**Luca & Miguel – Darstellung nach Augenmaß**

In Luca und Miguels Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels war zu erkennen, dass sie auf symbolischer Ebene ohne Schwierigkeiten die richtigen Teiloperatoren zur Bruchherstellung ableiten können. In ihren ikonischen Darstellungen wurde jedoch deutlich, dass sie die Teiloperatoren auf enaktiver bzw. ikonischer Ebene nicht entsprechend deuten und ihre Interpretationen sich für verschiedene Repräsentationsobjekte unterscheiden (siehe 5.1.1). In der vorhergehenden Aufgabe 3 sollten die Lernenden verschiedene Brüche ikonisch darstellen. Die Zeichnungen von Luca und Miguel lassen erkennen, dass sie zur Darstellung der Brüche die Schritte zum Einteilen des Ganzen in gleiche Teile und Färben des Anteils durchführen, sondern die Anteile nach Augenmaß markieren, ohne eine Einteilung des Ganzen vorzunehmen (vgl. Abb. 5.17). Im Anschluss beginnen sie unmittelbar mit der Bearbeitung von Aufgabe 4.

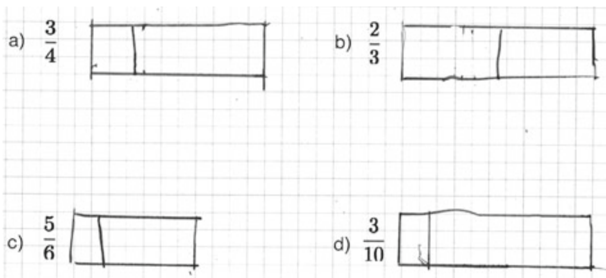



**Abbildung 5.17** Lucas Bruchdarstellungen in Aufgabe 3

### Transkript B1A4 – Luca & Miguel – Szene 1 – Aufgabe 4

**beide:** (*lesen Aufgabenstellung und beginnen individuell zu arbeiten*)
**Miguel:** Ok, 2 Drittel.

**Luca:** 1 Viertel
**beide:** (*individuelles Arbeiten*)
**Luca:** 2 Drittel. Das ist hier so. 5 Sechstel, das ist hier so, 3 Zwölftel ...
**Miguel:** Woher weißt du eigentlich was du machst? ... Du musst das vier mal in die Reihe kriegen.
**beide:** (*individuelles Arbeiten*)
**Luca:** 2 Drittel. ... 5 Sechstel. ... Das passt nicht.
**Miguel:** (*guckt bei Luca*)
**Luca:** Hier ungefähr so. Ach egal, komm 5 Zwölftel.

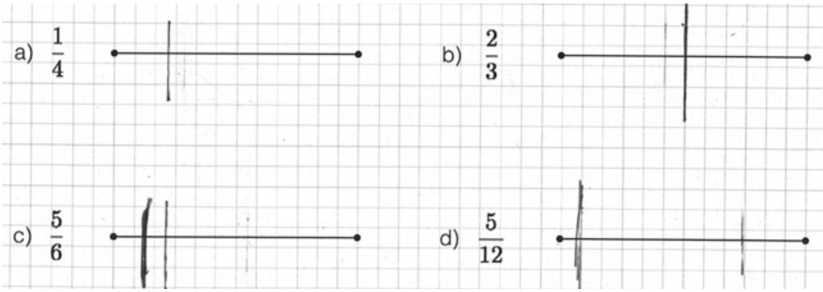



**Abbildung 5.18** Lucas Bruchdarstellungen in Aufgabe 4

Luca und Miguel widmen sich der Aufgabe wie in den vorhergehenden Bearbeitungen zunächst ohne miteinander über die Aufgabe zu sprechen. Luca kommentiert: „Das ist hier so. 5 Sechstel, das ist hier so, 3 Zwölftel …" (6–7). Dabei lässt seine Beschreibung den Eindruck entstehen, dass er die Bruchteile nach Augenmaß an der Strecke abträgt. Die Genauigkeit seiner Markierungen scheint ihm dabei nicht sonderlich wichtig zu sein. In diesem Sinne interpretiert auch sein Partner Miguel seine Beschreibung, der ihn fragt: „Woher weißt du eigentlich was du machst?" (8). Luca antwortet ihm auf diese Frage zunächst nicht, was die Deutung seines Vorgehens stützt, dass er die Länge der Bruchteile abschätzt. Miguel fügt mit Bezug auf den Bruch $\frac{1}{4}$ an, dass er „das vier mal in die Reihe kriegen" (8–9) müsse. Luca erwidert auf diese Bemerkung nichts, sondern überprüft und korrigiert seine Zeichnungen: „2 Drittel … 5 Sechstel … Das passt nicht" (11). Er stellt scheinbar einen Fehler bei seiner Markierung des Bruchs $\frac{5}{6}$ in Teilaufgabe c) fest, den er umgehend korrigiert (vgl. Abb. 5.18). Erneut macht seine Äußerung nicht den Eindruck, die Bruchteile sonderlich genau einzeichnen zu wollen. Er kommentiert seine zeichnerische Korrektur mit den Worten „Hier ungefähr so. Ach egal, komm 5 Zwölftel“ (13). Miguel übernimmt Lucas Darstellungen ohne diese weiter zu hinterfragen.

Die eingehende Betrachtung von Lucas Darstellungen stützt die Annahme, dass er, wie sein Partner Miguel festgestellt hat, zunächst durch Abschätzen und nach Augenmaß die Bruchteile an der Strecke abträgt. Er orientiert sich dabei nicht unbedingt an dem den Streckenabbildungen unterliegenden Kästchenmuster, wie in seiner Darstellung in Teilaufgabe zu erkennen ist. Auf den Hinweis von Miguel, dass der Streckenabschnitt mit der Länge $\frac{1}{4}$ vier mal in die ganze Strecke passen müsse, nimmt er diese Eigenschaft des Anteils als Anlass seine Zeichnungen zu überprüfen und dementsprechend zu korrigieren. Dabei orientiert er sich bei den Brüchen $\frac{5}{6}$ und $\frac{5}{12}$ ausschließlich am Nenner der Brüche und markiert in etwa ein Sechstel und ein Zwölftel der Strecke durch einen Trennstrich. Er überträgt somit das Vorgehen aus Teilaufgabe a) auf die nachfolgenden Bruchdarstellungen. Die Ausnahme zu diesem Vorgehen ist der Bruch $\frac{2}{3}$, für den er die Strecke in zwei Teile teilt, was so erklärt werden kann, dass er sich hier am Zähler des Bruchs orientiert und versucht ein Segment der Strecke zu kennzeichnen, das zweimal in die ganze Strecke hineinpasst.

Insgesamt wird deutlich, dass Luca und Miguel nicht das Bruchherstellungsverfahren übertragen um Bruchteile an einer Strecke zu markieren. Stattdessen orientieren sich an der Anteilvorstellung zu Stammbrüchen, dass $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ bzw. ein Ganzes ist. Dabei werden Unsicherheiten bezüglich der Bedeutung von Zähler und Nenner erkennbar. Es kann angenommen werden, dass die fehlende Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens auf die Darstellung an einer Strecke darauf zurückzuführen ist, dass sie fehlerhafte Herstellungshandlungen mit den Teiloperatoren zur Bruchherstellung verbinden, wie in ihrer Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels zu erkennen war. Die Beobachtungen in dieser Aufgabe stärken weiterhin die Deutung, dass Luca und Miguel die anschauliche Ebene und die rechnerische Ebene des Bruchherstellungsverfahrens nicht miteinander in Beziehung setzen. Aus diesem Grund haben sie Schwierigkeiten bei der ikonischen Darstellung von Bruchteilen und kein Handlungsschema verfügbar, an dem sie sich orientieren können.

Die Bearbeitung von Luca und Miguel kann in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Luca und Miguel übertragen das Bruchherstellungsverfahren nicht auf die Darstellung von Bruchteilen an einer Strecke. Aus Ermangelung eines Herstellungsschemas versucht Luca zunächst die Anteile an der Strecke nach Augenmaß abzuschätzen.
- Im Weiteren orientieren sich sich an der Anteilvorstellung zu Stammbrüchen, dass $\frac{1}{n}$ $n$-mal in die ganze Strecke passen muss. Mit Ausnahme eines Bruchs, bei

dem sie sich am Zähler und nicht am Nenner des Bruchs orientieren, übertragen sie dieses Vorgehen auf die nachfolgenden Bruchdarstellungen und markieren entsprechend jeweils nur einen Teil des Bruchteils.

- Da bereits in ihren vorhergehenden Bearbeitungen eine Entkopplung von symbolischer und anschaulicher Ebene angenommen wurde, wird diese Annahme weiter gestützt. Luca und Miguel verbinden die Teilschritte der Bruchherstellung nicht mit entsprechenden anschaulichen Vorstellungen und können das Herstellungsschema in der Folge nicht übertragen und anwenden.

**Vergleich der Bearbeitungen zur Bruchdarstellung an einer Strecke**
Auf normativer Ebene stellt sich der Transfer des Bruchherstellungsverfahrens auf die Darstellung von Bruchteilen $\frac{m}{n}$ an einer Strecke in Form von zwei Transferschritten dar:

- Anwenden des Teiloperators: $n$ zum Einteilen der Strecke in $n$ gleich lange Streckenabschnitte und
- Anwenden des Teiloperators $\cdot m$ zum Markieren von $m$ Streckenabschnitten.

Die Beobachtungen der Analysen umfassen daher im Wesentlichen Aspekte der *Übertragung des Operatorschemas* sowie der *Anpassung des Herstellungsverfahrens an die neue Repräsentation.*

**Übertragung des Operatorschemas:** Mit Ausnahme der Bearbeitung von Luca und Miguel sind in allen Analysen deutlich die Übertragung von Aspekten des Operatorschemas in Form des Bruchherstellungsverfahrens zu erkennen. Bennet und Julius übertragen dieses Verfahren quasi spontan und ohne Zögern. In Bezug auf die Anwendung sind jedoch Unterschiede im Vorgehen von Bennet und Julius zu erkennen. Julius orientiert sich strikt an dem Handlungsschema *Aufteilen und Markieren*. Er bestimmt die Länge der ganzen Strecke in der Einheit 1 Kästchen, teilt die Länge rechnerisch in gleiche Teile und markiert die entsprechende Anzahl der Teile. Im Gegensatz zu Julius ist in den schriftlichen Dokumenten zu erkennen, dass Bennet die Länge der Teilsegmente nicht rechnerisch bestimmt, sondern „so kurz über'n Daumen" die Strecke unterteilt. Dieses Vorgehen lässt vermuten, dass er sich im Zuge einer Abstraktion beginnt von der schematischen Ausführung des Verfahrens zu lösen, indem er zwar das grundlegende Handlungsschema anwendet, aber scheinbar bereits ein mentales Bild vor Augen hat, an dem er sich orientiert, und keine Notwendigkeit sieht, die Länge der einzelnen Streckenabschnitte rechnerisch exakt zu bestimmen.

Genau wie Julius wendet auch Aliya ohne Schwierigkeiten das Operatorschema zur *Berechnung der Segmentlänge und zum Markieren des Anteils* an. Anders verhält es sich bei ihrer Partnerin Aliya, die zur Darstellung der Anteile an einer Strecke vorwiegend eine statisch-abbildhafte Vorstellung eines Bruchs als Anteil einer diskreten Menge aktiviert. Anders als ihre Partnerin stellt sie keinen Bezug zur Herstellung des Bruchs her, sondern deutet den Nenner des Bruchs entsprechend der Fehlvorstellung $\frac{1}{n}$ bezeichnet eine Menge von $n$ Objekten als Anzahl der zu markierenden Kästchen, ohne dabei einen Bezug zur ganzen Strecke herzustellen. Im Gegensatz zu ihrer Partnerin, die durch ihre *dynamische* Sichtweise die vorgegebenen Brüche mit ihrer Herstellungshandlung verknüpft, betrachtet Aisha Brüche *statisch* als Anzahl von Teilen. Sie formuliert zwar, dass $\frac{1}{4}$ „eins von vier Stücken" bedeutet, betrachtet dann aber nur den Nenner, was auf eine Verhaftung ihres Denkens an die natürlichen Zahlen hindeutet.

Ein ähnliches Erklärungsmodell kommt auch in der Bearbeitung von Luca und Miguel zum Tragen. Die Bearbeitungen der beiden Schüler deuteten bereits zuvor eine Entkopplung der symbolischen und anschaulichen Ebene hin, bei der sie die symbolischen Herstellungsoperatoren mit fehlerhaften Herstellungshandlungen übersetzt haben. In ihrer Bearbeitung kommt das Operatorschema nicht zur Anwendung. Stattdessen betrachten sie ausschließlich die Nenner $n$ der vorgegebenen Brüche $\frac{m}{n}$ und markieren jeweils ein Streckensegment der Länge $\frac{1}{n}$. Das ihrer Bearbeitung zugrunde liegende Erklärungsmodell ist, dass $\frac{1}{n}$ $n$-mal in die ganze Strecke passen muss. Auch hier ist eine Orientierung am Umgang mit natürlichen Zahlen anzunehmen, die sich in der Deutung der Brüche auf Grundlage der Anteilvorstellung von Stammbrüchen äußert.

In der Bearbeitung von Laura und Nike ist die teilweise Anwendung des Operatorschemas zu erkennen. Sie bestimmen die Länge der Strecke in der Größeneinheit 1 Kästchen und berechnen die Länge der Streckensegmente. Jedoch tragen sie im Anschluss daran nicht die vorgegebenen Anteile ein, sondern beschränken sich auf die Einteilung der Strecke in je $n$ gleiche Teile. Die Äußerungen der beiden Schülerinnen deuten auf Schwierigkeiten bei der Übertragung des zweiten Teiloperators auf die neue Repräsentation hin. Während sie bei der Darstellung von $\frac{1}{4}$ keine Schwierigkeiten formulieren, bemerkt Laura beim Einzeichnen des Bruchs $\frac{2}{3}$, dass sie sich das nicht vorstellen könne. Es ist anzunehmen, dass sie sich dabei auf die Anwendung des zweiten Teiloperators zum Vervielfachen eines Teils bezieht.

Die Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens und respektive die Anwendung des Operatorschemas zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke ist insbesondere von der Anwendung auf eine Strecke als neues Repräsentationsobjekt und der Anpassung des Verfahrens an die Eigenschaften einer Strecke geprägt.

**Anpassung des Herstellungsverfahrens an die neue Repräsentation:** Beim Vergleich der dargestellten Bearbeitungsprozesse wird erkennbar, dass die Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens auf eine neue Repräsentation, wie in diesem Fall die Darstellung an einer Strecke, die Koordination von wenigstens drei subjektiven Erfahrungsbereichen bzw. Grundvorstellungen erfordert:

- Der Vorstellung von Brüchen als Anteil: $\frac{m}{n}$ bedeutet $m$ von $n$ Teilen,
- die Vorstellung der Bruchherstellungshandlung: $\frac{m}{n}$ bedeutet, das Ganze wird in $n$ Teile geteilt, von denen $m$ markiert werden sowie
- dem subjektiven Erfahrungsbereich „Operieren mit einer Strecke".

Die Argumentationen von Aliya, Bennet und Julius spiegeln diese Koordination wieder. Sie erkennen die vorgegebenen Brüche als Anteile, bringen diese Anteile mit ihrer Herstellungshandlung in Verbindung und erkennen, wie sie diese Herstellungshandlung an einer Strecke durchführen können. In Julius Argumentation ist weiterhin eine Orientierung an Handlungen mit konkreten Gegenständen erkennbar. Im Gegensatz zur Bearbeitung der unvollständigen Beispiele zuvor, in der die Orientierung am Umgang mit gegenständlichen Handlungsobjekten zur Wahl der falschen Rechenoperation führte, unterstützt sie in diesem Fall den Transfer des Herstellungsverfahrens auf die Repräsentation an einer Strecke.

Im Gegensatz dazu ist Lauras Argumentationen zu entnehmen, dass sie zunächst einmal Schwierigkeiten bei der Aktivierung des subjektiven Erfahrungsbereichs „Operieren mit einer Strecke" hat. Sie hat zunächst Probleme zu identifizieren, welches *Maß* bzw. welche *Größeneinheit* beim Umgang mit einer Strecke zu verwenden ist. Erst als ihre Partnerin ihr erklärt, dass sie die *Länge der Strecke* ermitteln müsse, findet sie einen Zugang zur Darstellungshandlung. In der Folge gelingt es ihr korrekt $\frac{1}{4}$ der Strecke zu kennzeichnen. Eine weitere Schwierigkeit in ihrem Bearbeitungsprozess stellt die Übertragung des zweiten Herstellungsoperators auf die neue Repräsentation dar. Bei der Darstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$ erklärt sie, dass sie das nicht verstehe, wobei sie sich sehr wahrscheinlich auf die Übersetzung des Zählers bezieht. Sie erkennt im weiteren, dass ihre Partnerin Nike, anders als Laura, bei der Darstellung von $\frac{1}{4}$ nicht nur den Bruchteil kenntlich gemacht hat, sondern die ganze Strecke in gleich große Teile eingeteilt hat, was sie im weiteren als Anwendung des zweiten Herstellungsoperators interpretiert. Entsprechend kann im Fall von Laura und Nike die Schwierigkeit bei der Bearbeitung auf die Koordination der Bruchherstellungshandlung und des Operierens mit einer Strecke zurückgeführt werden. Es gelingt ihnen nur für den ersten Herstellungsschritt eine Analogie zwischen der Herstellungshandlung an einer Flächenrepräsentation (Kreis oder Rechteck) und der linearen Darstellung an einer Strecke herzustellen.

Auch die beobachteten Schwierigkeiten in den Bearbeitungsprozessen von Aisha, Luca und Miguel lassen sich durch ein unzureichende Koordination der oben genannten Vorstellungen bzw. Erfahrungsbereiche beschreiben. Die Bearbeitungsprozesse der drei Schülerinnen und Schüler haben gemeinsam, dass zwar die Anteilvorstellung und auch den Erfahrungsbereich des Operierens mit einer Strecke aktivieren. Es sind jedoch keine Anzeichen für die Aktivierung der Operatorvorstellung bzw. des Bruchherstellungsverfahrens zu erkennen und sie interpretieren die vorgegebenen Brüche vor allem als statische Entitäten. Aisha deutet den Bruch $\frac{1}{4}$ als „eins von vier Stücken" und Luca und Miguel deuten den Bruch $\frac{1}{4}$ so, dass das entsprechende Streckensegment vier mal in die ganze Strecke passen muss. Insgesamt kann angenommen werden, dass die Schwierigkeiten von Aisha, Luca und Miguel auf eine noch nicht erfolgte oder fehlerhafte Verknüpfung der Anteil- und Operatorvorstellung zurückzuführen ist. In Luca und Miguels Bearbeitung der unvollständigen Beispiele wurde deutlich, dass sie die Herstellungsoperatoren mit fehlerhaften Handlungen auf ikonischer Ebene übersetzen. Aufgrund dessen haben sie bereits grundlegende Schwierigkeiten bei der Darstellung von Brüchen in einem Kreis oder Rechteck. In der Folge mangelt es ihnen an einem konkreten Handlungsschema, an dem sie sich orientieren können und dass sie an die Eigenschaften einer Strecke anpassen können.

### 5.1.3 Vergleich der Bearbeitungsprozesse zu den beiden Transferaufgaben

Die hier dargestellten Analysen der Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler können in der Charakterisierung von drei zentralen Transferprozessen zusammengefasst werden:

(i) Der Verknüpfung der Herstellungshandlungen auf symbolischer und anschaulicher Ebene,
(ii) die Verknüpfung von Brüchen als Anteile eines Ganzen mit ihrer Herstellungshandlung und
(iii) die Aktivierung und Koordination verschiedener Erfahrungsbereiche zur Anpassung des anschaulichen Herstellungsverfahrens auf die Eigenschaften der neuen Repräsentation.

Für die Anwendung des Operatorschemas zur Erklärung der Herstellung von Brüchen stand insbesondere die Verknüpfung der Herstellungshandlung auf symbolischer und anschaulicher Repräsentationsebene im Zentrum des Transfers. In den

Analysen wurde aufgezeigt, dass es für die Übertragung des Herstellungsverfahrens von besonderer Bedeutung ist, die Teiloperatoren der Herstellung mit adäquaten Herstellungshandlungen auf anschaulicher Ebene in Beziehung zu setzen. Diesbezüglich konnte beobachtet werden, dass die Formulierung des „Nehmens von $m$ Teilen" sinngemäß mit einem *Wegnehmen* und entsprechend einer Subtraktion von $m$ Teilen übersetzt wird. Zudem war zu beobachten, dass mit dem Divisionsoperator ein Wegnehmen von Teilen und mit dem Multiplikationsoperator ein Hinzufügen von Teilen anstelle des Vervielfachen eines Teils verbunden wurde. Fehlerhafte Übersetzungen dieser Art hatten vor allem die Wahl der falschen Rechenoperationen sowie eine Entkopplung der symbolischen und anschaulichen Ebene der Bruchherstellung zur Folge.

In den Bearbeitungen zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke konnte in diesem Zusammenhang festgestellt werden, dass eine unzureichende Verknüpfung von Brüchen mit ihrer Herstellungshandlung bzw. des Bruchherstellungsverfahrens zu einer statischen Sichtweise auf Brüche und der Dominanz der Anteilvorstellung führt. Die Schülerinnen und Schüler, die die vorgegebenen Anteile nicht mit ihrer Herstellung in Verbindung gebracht haben, hatten Schwierigkeiten bei der Darstellung an der Strecke und somit beim Repräsentationstransfer, was möglicherweise zur Verfestigung der Entkopplung der symbolischen und anschaulichen Ebene beiträgt. In Bezug auf die Anwendung der Herstellungshandlung auf die Darstellung von Brüchen in unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen konnte in diesem Zusammenhang beobachtet werden, dass die Herstellungshandlungen bei der Anwendung auf unterschiedliche Repräsentationsobjekte unterschiedlich gedeutet werden, was der intendierten Förderung der Abstraktion des Verfahrens und Loslösung von spezifischen Repräsentationsobjekten entgegen wirken kann.

Bei der Übertragung des Herstellungsverfahrens auf die Darstellung von Brüchen an unterschiedlichen ikonischen Repräsentationen wurde deutlich, dass die Vorstellung von Brüchen als Anteile, die Herstellungshandlung von Brüchen und die Eigenschaften des betreffenden Repräsentationsobjekt als zunächst voneinander getrennte subjektive Erfahrungsbereiche betrachtet werden können. In den Bearbeitungen konnte beobachtet werden, dass eine fehlende Koordination bzw. Verknüpfung dieser Erfahrungsbereiche zu fehlerhaften Darstellungen und Verständnisschwierigkeiten führen kann. In den analysierten Bearbeitungen wurden Fälle dargestellt, in denen eine unzureichende Verknüpfung von Anteilen mit ihrer Herstellungshandlung zu Schwierigkeiten oder fehlerhaften Darstellungen führte. Zum anderen wurde ein Fall dargestellt, in dem eine Schülerin zunächst keinen *Größenbereich* zur Darstellung an einer Strecke identifiziert hat. In den Fällen, in denen die Schülerinnen und Schüler erfolgreich die Herstellungshandlung zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke übertragen haben, konnte hingegen festgestellt werden, dass sie die Brüche mit ihrer entsprechenden Herstellungshandlung in Beziehung gesetzt und diese an die Eigenschaften bzw. den Größenbereich des neuen Repräsentationsobjekt angepasst haben.

## 5.2 Anteile von beliebigen Größen

In diesem Abschnitt werden die Analysen der Daten aus der zweiten Datenerhebung dargestellt. Dazu werden zunächst zum Überblick die eingesetzten Lernmaterialien beschrieben. Diese umfassen wie zuvor ein interaktives animiertes Lösungsbeispiel, zwei unvollständige Beispiele sowie ausgewählte Transferaufgaben. Die Beschreibung der Materialien erfolgt auch sachanalytischer Ebene mit Bezug zu den enthaltenen Grundvorstellungen. Die normativen Analysen bilden den Ausgangspunkt für die Beschreibung der in den Transferaufgaben erforderten Transferprozesse.

In der Zeit zwischen der ersten und zweiten Datenerhebung haben die Schülerinnen im Klassenunterricht mit dem Arbeitsbuch weitergearbeitet. In zwölf Unterrichtsstunden haben sie dabei den Inhalt der ersten Datenerhebung weiter vertieft und zudem folgende Inhalte behandelt:

- Brüche als Teile eines Ganzen – Unechte Brüche und gemischte Schreibweise
- Brüche als Teile eines Ganzen – Brüche als Maßzahlen in Größenangaben
- Brüche als Teile mehrerer Ganzer

**Lösungsbeispiel:** Die Eingangsphase der Unterrichtsstunde beginnt mit dem Lesen eines digitalen animierten Lösungsbeispiels in zwei Teilen. Der Kontext ist für beide Teile ein gerechtes Aufteilen eines Geldgewinns von 21000 € auf die zwei Familien Meyer und Familie Stein. Familie Meyer besteht dabei aus drei, Familie Stein aus vier Personen.

Im ersten Teil des Lösungsbeispiels (vgl. Abbildung 5.19) werden die Anteile am Gewinn für jede Familie bestimmt. Dazu wird 21000 € als Ganzes interpretiert und durch einen Kreis repräsentiert. Da der Anteil entsprechend der Anzahl an Personen jeder Familie bestimmt wird, wird das Ganze auf die Anzahl aller Personen der beiden Familien in sieben gleich große Teile aufgeteilt. Ein Teil ist $\frac{1}{7}$ des Ganzen und wird durch ein Stück des Kreises repräsentiert. Jede Person erhält ein Teil des Ganzen und somit ein Stück des Kreises.

Familie Meyer besteht aus drei Personen und erhält entsprechend drei Teile, also $\frac{3}{7}$ des Ganzen. In einer Animation werden drei Teile des Kreises in Richtung der Familie verschoben. Familie Stein besteht aus vier Personen und erhält somit vier

Teile des Ganzen. Die vier Teile der Familienmitglieder bewegen sich zusammen zu einem Anteil, der $\frac{4}{7}$ beträgt.

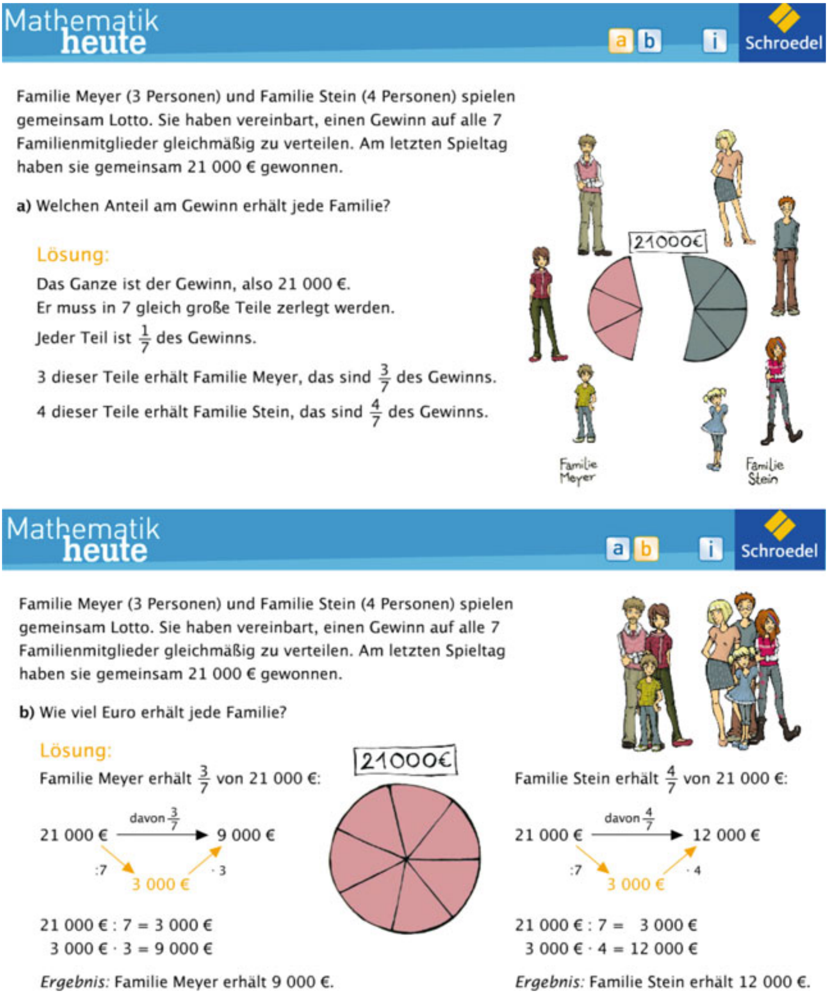



**Abbildung 5.19** Endzustand der Teile a) und b) des animierten Lösungsbeispiels

Im zweiten Teil des Beispiels werden die Anteile am Gewinn für beide Familien anhand eines Pfeildiagramms berechnet (siehe Abbildung 5.19).

Familie Meyer erhält $\frac{3}{7}$ und Familie Stein $\frac{4}{7}$ des 21000 € Gewinns. Zur Berechnung wird der Gewinn zunächst durch 7 geteilt – $\frac{1}{7}$ von 21000 € sind 3000 € – und für Familie Meyer schließlich mit 3 und für Familie Stein mit 4 multipliziert. Somit erhält Familie Meyer 9000 € und Familie Stein 12000 €. Die Berechnung der Anteile nacheinander für jede Familie in einem Pfeildiagramm dargestellt. Die Pfeildiagramme bauen sich als Animation Schritt für Schritt auf.

Unter der Darstellung der Rechenoperationen in den Pfeildiagrammen, wird die Rechnung zusätzlich in schrittweiser Form dargestellt und jeweils mit einem Ergebnissatz ergänzt.

In den Arbeitsheften der Lernenden werden die statisch abgebildeten Teile des Lösungsbeispiels mit folgenden fokussierenden Fragestellungen ergänzt:

*Lösungsbeispiel Teil a):* Erkläre, warum Familie Meyer $\frac{3}{7}$ und Familie Stein $\frac{4}{7}$ erhält.
*Lösungsbeispiel Teil b):* Was bedeutet $\frac{3}{7}$ von 21000 € und wie kann man das berechnen?

Die erste fokussierende Fragestellung bezieht sich auf das Nachvollziehen der Aufteilung des Gewinns auf die beiden Familien. Im Vordergrund steht hierbei die Argumentation, dass die beiden Familien unterschiedliche Anzahlen an Familienmitgliedern haben. Die zweite fokussierende Frage bezieht sich auf das Verfahren der Anteilberechnung. Für die Beantwortung dieser Frage wird erwartet, dass die Lernenden beschreiben, dass der Gewinn durch die Division :7 in sieben gleiche Teile zu je 3000 € aufgeteilt wird. $\frac{3}{7}$ entsprechen drei dieser sieben Teile und man erhält den Anteil durch Vervielfachen eines Teils durch die Multiplikation ·3.

**Ausgewählte Transferaufgaben:** Im Anschluss an die interaktiven animierten Lösungsbeispiele folgt eine Serie von Übungs- und Transferaufgaben (siehe Tabelle 5.2). Detaillierte Aufgabenbeschreibungen und Erläuterungen der Transferprozesse erfolgen an den entsprechenden Stellen in diesem Abschnitt. Der Haupttransfer in dieser Sitzung ist *der Übergang von konkreten Gegenständen zu beliebigen Größen*. In der Unterrichtseinheit wurden zunächst Anteile von konkreten Gegenständen, z. B. einer Pizza oder eines Kuchens, gebildet. Im Gegensatz dazu sind die Ganzen in den nachfolgenden Aufgaben keine gegenständlichen Ganzen, sondern (abstrakte) Größen, wie z. B. ein Geldbeträge, Längen oder Mengen von Objekten. Dieser Transfer der Anteilbildung von konkreten Gegenständen auf abstrakte Größen spielt in allen Bearbeitungen eine wichtige Rolle, auch wenn er nicht zwingend in den Aufgaben enthalten ist.

**Tabelle 5.2** Transferaufgaben – Anteile von beliebigen Größen

| | **Aufgabe** | **Zentrale Transferprozesse** |
|---|---|---|
| 2.1 & 2.2 | Unvollständige Lösungsbeispiele | Übertragung des Verfahrens zur Anteilbestimmung und -Berechnung aus dem Lösungsbeispiel auf eine analoge und strukturähnliche Sachsituationen |
| 2.9 | Umkehrung der Anteilbildung | Umkehrung der Anteilbildung zur Bestimmung zur Bestimmung des Ganzen |

## 5.2.1 Unvollständige Beispiele

**Erstes unvollständiges Beispiel:** Das erste unvollständige Beispiel ist strukturgleich mit dem vorhergehenden Lösungsbeispiel (siehe Abb. 5.20). Ein Geldgewinn von 900 € soll auf zwei Familien, die Familie Schmidt und die Familie Tenner, aufgeteilt werden, wobei Familie Schmidt aus zwei Personen und Familie Tenner aus vier Personen besteht.

Analog zum ersten Teil des Lösungsbeispiels soll zunächst der Anteil bestimmt werden, den jede Familie vom Gewinn erhält. Als Hilfestellung wird im Aufgabentext bereits vorweggenommen, dass das Ganze entsprechend der Anzahl der Personen beider Familien in sechs gleiche Teile geteilt wird, die auf die beiden Familien verteilt werden. Jeder Teil ist ein Sechstel des Gewinns. Da Familie Schmidt zwei Familienmitglieder hat erhält sie zwei Teile, also $\frac{2}{6}$ vom Ganzen. Familie Tenner erhält mir vier Familienmitgliedern $\frac{4}{6}$ vom Ganzen. Zur Veranschaulichung der Aufteilung des Ganzen sollen die Lernenden in einer vorgegebenen Kreisrepräsentation die Anteile einzeichnen.

Die jeweiligen Lösungsschritte sind als Bearbeitungshilfen in Sprechblasen notiert. Sie enthalten die Hinweise: „Wie viele Sechstel erhält jede Familie?“ und „Teile passend ein und färbe die Anteil der Familien.“

Im zweiten Teil des unvollständigen Beispiels sollen die den Anteilen entsprechenden Geldbeträge für jede Familie berechnet werden. Analog zur Struktur im Lösungsbeispiel sind für diese Rechnungen zwei unvollständige Pfeilschemata dargestellt, in denen die entsprechenden Rechenoperationen und Ergebnisse eingetragen werden sollen. Zum Abschluss sollen die Schülerinnen und Schüler analog zum Lösungsbeispiel einen Antwortsatz formulieren, dessen Anfang bereits vorgegeben ist. In zwei Sprechblasen werden Hinweise zur Bearbeitung gegeben: Mit Verweis auf die Pfeildarstellungen enthalten sie den Auftrag „Ergänze die Pfeilbilder“ und

**AUFGABE 1**

Familie Schmidt (2 Personen) und Familie Tenner (4 Personen) haben bei einer Verlosung 900 € gewonnen. Das Geld soll auf alle Familienmitglieder gleichmäßig verteilt werden.

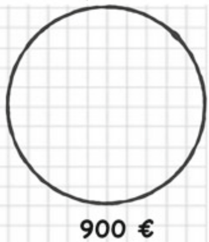
a) Welchen Anteil am Geld erhält jede Familie?
b) Wie viel Euro bekommt jede Familie?

**Lösung:**

Teile passend ein und färbe die Anteile der Familien.

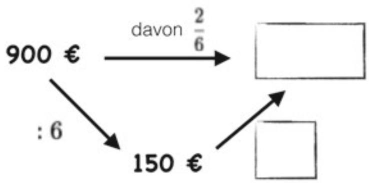
a) 900 Euro sind das ganze gewonnene Geld.
Es wird in 6 gleich große Teile zerlegt.

Jeder Teil ist ein Sechstel des Gewinns.

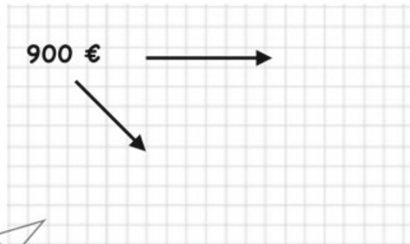



Wie viele Sechstel erhält jede Familie?

b) Familie Schmidt:




Familie Tenner:




Ergänze die Pfeilbilder.

Wie viel Geld erhält jede Familie?

Antwort:

Familie Schmidt ...

**Abbildung 5.20** Unvollständiges Beispiel – Aufgabe 2.1

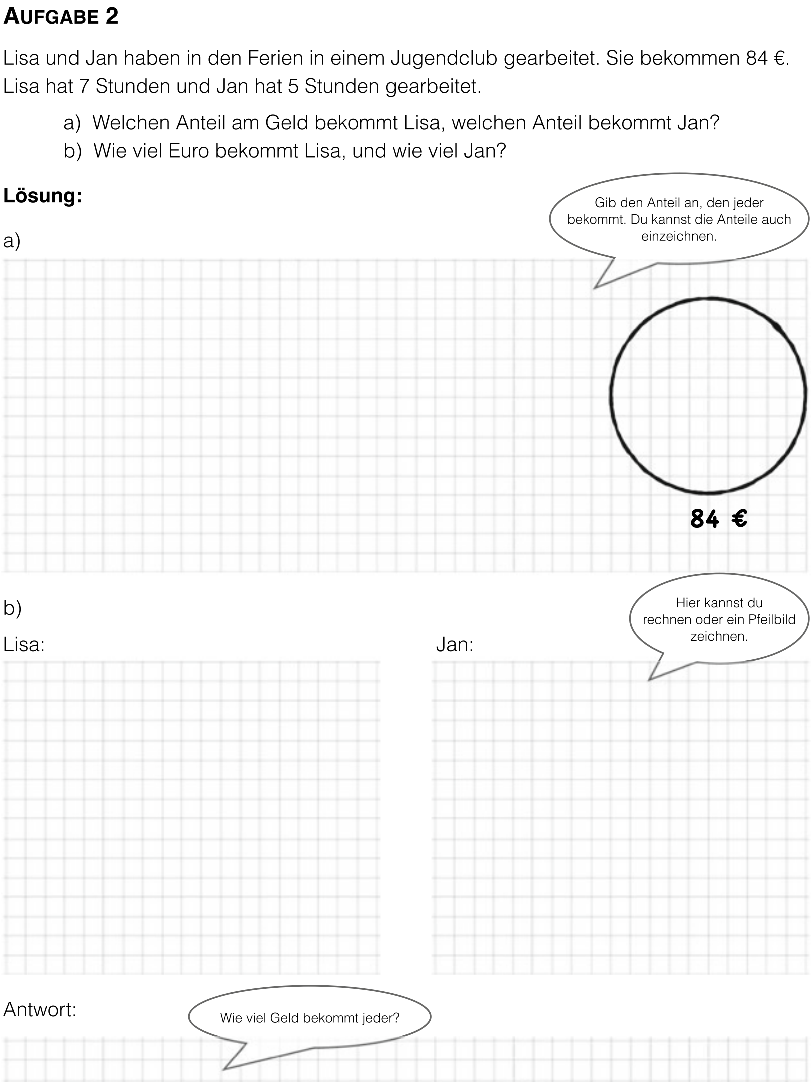
mit Verweis auf den Lösungssatz wird die Frage formuliert „Wie viel Geld erhält jede Familie?“.

**Transferprozesse im ersten unvollständigen Beispiel:** Das erste unvollständige Beispiel ist sehr nah am Lösungsbeispiel gestaltet. Das bedeutet, dass der Sachkontext und die beinhalteten Größen dieselben sind. Der zentrale Transferprozess ist in diesem Zusammenhang die Übertragung der einzelnen Lösungsschritte, dem Bestimmen der Anteile für die beiden Familien und die Berechnung der entsprechenden Geldbeträge. Die einzigen Unterschiede zum Lösungsbeispiel betreffen die Personenzahl der beiden Familien und den aufzuteilenden Geldbetrag: Der Gewinn beträgt nicht 21000 €, sondern 900 € und die Familien bestehen aus zwei und vier Personen, weshalb der Gewinn nicht in sieben, sondern in sechs gleiche Teile geteilt wird und die entsprechenden Anteile $\frac{2}{6}$ von 900 € sowie $\frac{4}{6}$ von 900 € sind.

**Zweites unvollständiges Beispiel:** Im zweiten unvollständigen Beispiel soll erneut ein Geldbetrag gerecht auf zwei Parteien aufgeteilt werden. Im Gegensatz zum Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel wurde der Sachkontext leicht verändert. Zwei Jugendliche, Lisa und Jan, haben in einem Jugendclub gearbeitet und gemeinsam 84 € als Lohn für ihre Arbeit bekommen, den sie gerecht untereinander aufteilen wollen. Da Lisa mit sieben Stunden mehr gearbeitet hat als Jan, der fünf Stunden gearbeitet hat, muss der Gewinn für eine gerechte Teilung entsprechend der geleisteten Arbeitsstunden aufgeteilt werden (Abb. 5.21).

Zur Strukturierung des Lösungsweges ist die Aufgabenstellung zweigeteilt. Im ersten Schritt sollen die jeweiligen Anteile für Lisa und Jan bestimmt werden. Da die beiden Jugendlichen zusammen $7 + 5 = 12$ Stunden gearbeitet haben, muss der Lohn in zwölf gleiche Teile aufgeteilt werden. Da Lisa sieben der insgesamt zwölf Stunden gearbeitet hat, bekommt sie sieben Teile, also $\frac{7}{12}$ vom Ganzen. Jan hat fünf der zwölf Stunden gearbeitet und bekommt somit $\frac{5}{12}$ des Ganzen. Im Arbeitsheft ist anders als im unvollständigen Beispiel zuvor kein Lösungsansatz vorgezeichnet. Es ist lediglich eine Fläche mit Kästchenmuster vorgegeben, in der die Lernenden ihren Lösungsweg notieren sollen. Zur Veranschaulichung findet sich auf der rechten Seite die Abbildung eines Kreises, der mit 84 € unterschrieben ist, in den die Schülerinnen und Schüler die Anteile am Gewinn einzeichnen können. In einer Sprechblase ist der Hinweis notiert: „Gib den Anteil an, den jeder bekommt. Du kannst die Anteile auch einzeichnen“.

Im zweiten Aufgabenteil sollen die Anteile berechnet und die Frage beantwortet werden, wie viel Euro Lisa und Jan jeweils bekommen. Dazu sind zwei getrennte und mit den Namen von Lisa und Jan überschriebene Bearbeitungsflächen vorgegeben. In einer Sprechblase wird der Hinweis gegeben „Hier kannst du rechnen oder ein



**AUFGABE 2**

Lisa und Jan haben in den Ferien in einem Jugendclub gearbeitet. Sie bekommen 84 €. Lisa hat 7 Stunden und Jan hat 5 Stunden gearbeitet.

a) Welchen Anteil am Geld bekommt Lisa, welchen Anteil bekommt Jan?
b) Wie viel Euro bekommt Lisa, und wie viel Jan?

**Lösung:**

a)



b)

Lisa: Jan:



Antwort:



**Abbildung 5.21** Unvollständiges Beispiel – Aufgabe 2.2

Pfeilbild zeichnen“. Es wird den Lernenden somit selbst überlassen, ob sie eine einfache Rechnung oder eine Rechnung im Operator- bzw. Pfeilschema notieren. Zuletzt ist eine Fläche für die Formulierung eines Antwortsatzes vorgegeben.

**Transferprozesse im zweiten unvollständigen Beispiel:** Obgleich die Aufgabenstellung und auch die Aufgabenlösung analog zum Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel ist, erfordert die Lösung dieser Aufgabe einen weiteren Transfer als noch im ersten unvollständigen Beispiel. Die Gründe dafür sind die folgenden: Zunächst sind anders als im ersten unvollständigen Beispiel keine Teile des Lösungsweges oder Darstellungen zur Ergänzung vorgegeben und die Lernenden müssen alle Lösungsschritte selbst durchführen. Die zweigeteilte Aufgabenstellung sowie die Hinweise in den Sprechblasen sind die einzigen Lösungshilfen für die Lernenden und sollen den Lösungsprozess strukturieren und die Übertragung des Lösungsweges aus dem Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel unterstützen.

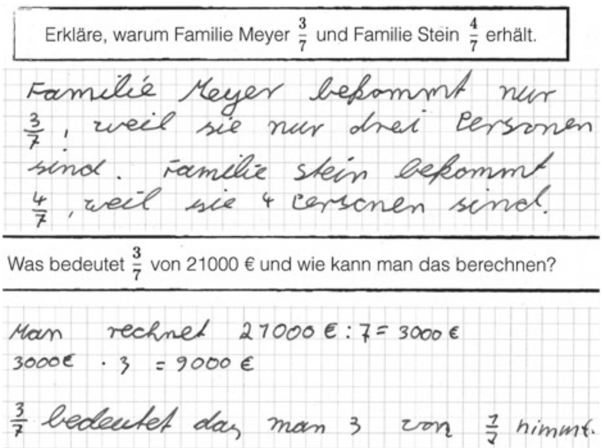
Für die Übertragung und Anwendung des Verfahrens sind die Unterschiede zu den vorhergehenden Aufgaben von Relevanz, da sie die Bildung einer Analogie und damit die Anpassung des Lösungsweges erfordern. Erstens wird der Geldbetrag nicht auf zwei Familien aufgeteilt, sondern auf zwei Personen und zweitens ist hier nicht die Anzahl der Personen die Bezugsgröße zur Bildung der Anteile, sondern die Anzahl an geleisteten Arbeitsstunden.

Durch diese Unterschiede lässt sich der Transfer in dieser Aufgabe als Transfer auf Ebene des Sachkontexts charakterisieren. Für die Bildung einer Analogie zum Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel ist es essenziell zu erkennen, dass die Summe der Arbeitsstunden als Einteilung des Ganzen genutzt werden muss. Die Summe der Arbeitsstunden in dieser Aufgabe entspricht der Summe der Familienmitglieder der beiden Familien zuvor. Es wird angenommen, dass diese Abbildung bei einigen Schülerinnen und Schülern zu Schwierigkeiten führt, da unterschiedliche Bezugsgrößen miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Es besteht somit die Möglichkeit, dass eine fehlerhafte Analogie hergestellt wird, die zu einem falschen Ergebnis bzw. einer ungerechten Aufteilung des Geldbetrags führen kann.

Zusammenfassend sind die für die Lösung dieser Aufgabe erforderlichen Transferprozesse im Rahmen des Übertragens und Anwendens des Verfahrens aus dem Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel zu beschreiben. Im Spezifischen betrifft das die folgenden Prozesse:

- Herstellen der Analogie zwischen der Anzahl der Personen der Familien und der Anzahl der geleisteten Arbeitsstunden als Bezugsgröße für die Aufteilung des Ganzen,
- Übertragung und Anwendung des Verfahrens zu Anteilbestimmung und
- Übertragung und Anwendung des Verfahrens zur Berechnung von Anteilen einer Größe.

**Bennet & Julius – Erfolgreicher Transfer des Operatorschemas**
Bennet und Julius haben das Lösungsbeispiel zum Einstieg eingehend gelesen und während des Lesens auch mehrfach innegehalten, um einzelne Lösungsschritte nachzuvollziehen und vereinzelte Unklarheiten zu diskutieren. Dies spiegelt sich auch in ihren Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen wieder, in der sie zunächst die Aufteilung des Gewinns auf Grundlage der Anzahl der Personen in jeder Familie erklären und die Berechnung des Anteils für Familie Meyer in Form einer Rechnung beschreiben (vgl. Abb. 5.22).


Erkläre, warum Familie Meyer $\frac{3}{7}$ und Familie Stein $\frac{4}{7}$ erhält.

Familie Meyer bekommt nur $\frac{3}{7}$, weil sie nur drei Personen sind. Familie Stein bekommt $\frac{4}{7}$, weil sie 4 Personen sind.

Was bedeutet $\frac{3}{7}$ von 21000 € und wie kann man das berechnen?

Man rechnet 21000 € : 7 = 3000 €
3000€ · 3 = 9000 €
$\frac{3}{7}$ bedeutet das man 3 von $\frac{7}{7}$ nimmt.

**Abbildung 5.22** Julius Antworten auf die fokussierenden Fragen zum Lösungsbeispiel

**Transkript B2A1 – Bennet & Julius – Szene 1 – Aufgabe 1**

**Bennet:** Hä? Ist das nicht dasselbe a) und b)? (*liest laut:*) a) Welchen Anteil am Gewinn erhält jede Familie? Und b) wie viel Euro bekommt jede Familie?

**Julius:** Nein, der Anteil das ist doch das in dem Bruch oder nicht? (*zur Lehrkraft:*) Ist der Anteil dann der Bruch? Weil da steht ja: Wie viel Euro bekommt jede Familie und wie viel Geld erhält jede Familie.
**Lehrkraft:** Für den Anteil müsst ihr gucken, was das für ein Bruch ist.
**Bennet:** Also für alle?
**Lehrkraft:** Für jede Familie, also du hast ja zwei Familien.
**Bennet:** Also geteilt durch 2. ... Nein, achso, hä? Man muss das ja ganz anders rechnen. Das ist ja schwierig.
**Lehrkraft:** Guckt euch nochmal das Lösungsbeispiel an und lest euch noch einmal die Aufgabe durch.
**Julius:** Aber dazu gibt's gar keins.
**Bennet:** Egal, komm wir machen das jetzt.
**Julius:** Wir müssen färben.
**Bennet:** So, man muss das jetzt doch geteilt durch 6. Man muss erstmal 6 Dinger machen.
**Julius:** Hä? Wie sollen wir da 6 machen?
**Bennet:** Na wie das da. (*zeigt auf den Endzustand von LSB2b auf dem Bildschirm*) Ach nee, das sind 7.

Der Beginn der Bearbeitung von Bennet und Julius ist auf den ersten Blick von der Klärung der Aufgabenstellung geprägt. Bennet sieht direkt nach dem Lesen der Aufgabenstellung keinen Unterschied zwischen den Teilaufgaben a) und b): „Ist das nicht dasselbe?" (1). Im weiteren Verlauf ist jedoch zu erkennen, dass die Klärung der Aufgabenstellung die Abgrenzung des Begriffs *Anteil* voraussetzt. Julius erwidert, dass mit dem Begriff Anteil die Angabe eines Bruchs gemeint ist. Er versichert sich dazu bei der Lehrkraft: „Ist der Anteil dann der Bruch?" (5), was die Lehrkraft bestätigt und erklärt, dass sie für die Angabe des Anteils überlegen müssen, „was das für ein Bruch ist" (8–9). Bennet fragt daraufhin, ob sie die Anteile für „alle" (10) Personen bestimmen sollen, worauf die Lehrkraft verweist, dass sie überlegen sollen welchen Anteil jede der zwei Familien bekommt (11). Mit Blick auf die zwei Familien schlägt Bennet spontan vor, den Gewinn „durch 2" (12) zu teilen, bemerkt dann aber umgehend, dass sie „ja ganz anders rechnen" müssen, was „ja schwierig" (13) sei.

Ab diesem Moment scheint Bennet zu wissen, wie sie vorgehen müssen: „So, man muss das jetzt doch geteilt durch 6" (19) rechnen. Bezüglich der Veranschaulichung der Anteile im Kreisdiagramm sagt er, dass sie „erstmal 6 Dinger machen" (20) müssen, womit er meint, dass sie den Kreis in sechs gleiche Teile einteilen müssen.

Die erste Szene der Bearbeitung von Bennet und Julius macht deutlich, dass selbst nach intensivem Lesen und Diskutieren des animierten Lösungsbeispiels und der ausführlichen Beantwortung der fokussierenden Fragestellungen, die Übertragung des Vorgehens nicht einfach ist. Beide Schüler stellen zunächst keine Beziehung zum Lösungsbeispiel her und Julius erwidert auf den Hinweis der Lehrkraft, noch einmal in das Lösungsbeispiel zu schauen, dass es zu dieser Aufgabe „gar keins" gebe (16). Auch Bennet stellt zunächst keine Verbindung zum Vorgehen im Lösungsbeispiel her. Erst als er selber vorschlägt, dass der Geldbetrag durch zwei geteilt werden müsse, stellt er eine Verbindung zum Lösungsbeispiel her und erkennt, dass das Ganze durch Summe der Anzahlen an Familienmitgliedern geteilt werden muss. Es ist anzunehmen, dass er sich durch seinen Vorschlag den Gewinn in zwei gleiche Teile zu teilen an das Lösungsbeispiel erinnert, in dem der Gewinn ebenfalls gerecht auf zwei Familien aufgeteilt werden sollte, dabei jedoch nicht halbiert, sondern auf die Anzahl an Personen aufgeteilt wurde.

Es sind verschiedene Gründe denkbar, warum die Schüler die Analogie zum Lösungsbeispiel nicht sofort herstellen. Zum einen unterscheidet sich die visuelle Gestaltung der Aufgabe deutlich von der Darstellung im Lösungsbeispiel. Besonders hervorzuheben ist hierbei, dass die Aufgabenstellung keine Abbildungen der Familien bzw. Familienmitglieder enthält, während die Personenabbildungen im Zentrum der Darstellung des Vorgehens im Lösungsbeispiel stehen. Entsprechend stellen Bennet und Julius nicht direkt einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Personen und der Anzahl der Teile her, in die das Ganze geteilt werden muss. Zum anderen unterscheiden sich die enthaltenen Zahlen im Lösungsbeispiel und im ersten unvollständigen Beispiel deutlich. Während im Lösungsbeispiel ein verhältnismäßig großer Geldbetrag von 21000 € aufgeteilt wird, ist es im ersten unvollständigen Beispiel ein Betrag von 900 €.

### Transkript B2A1 – Bennet & Julius – Szene 2 – Aufgabe 1

**Julius:** In wie viele Teile muss ich das denn machen? In 6?
**Bennet:** In so viele Teile wie Personen da sind.
**Julius:** Also 6 Personen, ne?
**Bennet:** Ja, aber ich kann das nicht so gut. (*zeigt auf sein Arbeitsheft*) Das ist doch kein Sechstel. Wie hässlich das geworden ist.
**Julius:** Hä? Aber dann kann ich doch den ganzen Kreis anmalen, oder nicht?
**Bennet:** Ja, aber wir müssen ja wissen, wie viel jede Familie bekommt.
**Julius:** Achso, soll ich dann in zwei unterschiedlichen Farben?
**beide:** (*zeichnen individuell*)
**Bennet:** Also 2 Personen hat Familie Schmidt, also können wir die auch anmalen.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

40 **Julius:** Scheiße, ich hab meins in 8 Teile gemacht. Mist.
41 **Bennet:** 8 Teile sind noch einfach, aber 6 Teile ist richtig
42 schwer einzuteilen. Deswegen habe ich eben noch so lange
43 überlegt.
44 **beide:** (*zeichnen individuell*)

Bennet und Julius beginnen ihre Bearbeitung mit der ikonischen Darstellung der Anteile für jede Familie. Auf Julius Rückfrage, ob sie den Kreis „in 6“ (25) Teile sollen, stellt Bennet noch einmal heraus, dass sie das Ganze „in so viele Teile wie Personen da sind“ (26) teilen müssen. Diese Äußerung stützt die Annahme, dass er die Analogie zum Lösungsbeispiel aufgrund der fehlenden Personendarstellung in der Aufgabe nicht sofort herstellen konnte. In der Abbildung der Aufgabe sind die Personen nicht zu sehen, sondern lediglich den Zahlen im Aufgabentext zu entnehmen.

Im Gegensatz zu seinem Partner scheint Julius die Verbindung zum Lösungsbeispiel noch nicht vollständig hergestellt zu haben. Nachdem er die Kreisrepräsentation in sechs gleiche Teile eingeteilt hat, stellt er irritiert fest, dass er „doch den ganzen Kreis anmalen“ (31–32) könne. Es kann angenommen werden, dass er erkannt hat, dass die Familien zusammen sechs Personen haben, jedoch nicht erkannt hat, dass die Teile dann entsprechend der Personenanzahl der beiden Familien verteilt werden, also eine Familie zwei Teile und eine Familie vier Teile bekommt. Auf den Hinweis von Bennet, dass sie „wissen [müssen], wie viel jede Familie bekommt“ (33–34) schlägt er dann jedoch vor die Anteile „in zwei unterschiedlichen Farben“ (35–36) einzuzeichnen.

Das Einteilen der Kreisrepräsentation in sechs gleiche Teile gestaltet sich für beide Schüler schwierig. Beim Einfärben der Teile fällt Julius auf, dass er das Ganze nicht in sechs, sondern in acht Teile eingeteilt hat (41). Auch Bennet erklärt, dass das Einteilen in 8 Teile „noch einfach“ sei, aber „6 Teile […] richtig schwer einzuteilen“ sei, weswegen er „eben noch so lange überlegt“ (42–44) habe. Diese Äußerung von Bennet deutet darauf hin, dass er die Darstellung der Anteile vor dem Einzeichnen zunächst in seiner Vorstellung simuliert hat und somit beim Einzeichnen auf dem Papier mit einer Strategie vorgegangen ist. Im Gegensatz dazu ist anzunehmen, dass Julius versucht hat durch sukzessives Halbieren sechs Teile herzustellen, was zu seiner Einteilung des Ganzen in acht gleiche Teile geführt hat.

### Transkript B2A1 – Bennet & Julius – Szene 3 – Aufgabe 1

45 **Bennet:** Das ist einfach. 900.
46 **Julius:** Hä? Da muss man doch nur ...

**Bennet:** Geteilt durch 6. Ich rechne das schriftlich, dann wissen die das besser.
**Julius:** Also, da muss man doch nur 2 Sechstel und 4 Sechstel, oder?
**Bennet:** Ja, ich rechne das jetzt erstmal aus.
**Julius:** Wie?
**Bennet:** 150 Euro sind 1 Sechstel und dann wollen wir Familie Schmidt als erstes machen.
**Julius:** Also 900 durch 6?
**Bennet:** 150 Euro mal 2.
**Julius:** Kommt da 150 Euro raus?
**Bennet:** Kann sein, 150 Euro mal 2 gleich 300 Euro. Das ist jetzt Familie Schmidt.
**Julius:** Was?
**Bennet:** Das.
**Julius:** Ja, und dann muss man ja nur noch Dingens machen, oder, warte ... dies hier ist doch für Familie Schmidt hier?
**Bennet:** Nee, du musst das ja noch mal 2 rechnen, weil du hast ja jetzt erst 1 Sechstel ausgerechnet, aber wir brauchen 2 Sechstel.
**Julius:** Ok, dann rechne ich hier drunter 2 mal 150 Euro gleich 300 Euro.
**Bennet:** Und 600 Euro bekommt Familie Tenner.
**Julius:** Genau 600? Ah ja, zeig mal, wie hast du das gerechnet?
**Bennet:** Mal 4.
**Julius:** Also 300 Euro mal 4? Oder 150?
**Bennet:** 150.
**beide:** (*schreiben individuell*)

Nachdem Bennet und Julius jeweils die Anteile für beide Familien in unterschiedlichen Farben eingezeichnet haben, beginnen sie mit der Berechnung der Anteile. Bennet scheint sofort zu wissen, wie er den Gewinn der beiden Familien berechnen kann (45). Er rechnet schriftlich 900 : 6 (47–48) und erklärt, dass 150 € einem Sechstel des Gewinns entsprechen (53–54). Für den Anteil von Familie Schmidt multipliziert er „150 Euro mal 2 gleich 300 Euro. Das ist jetzt Familie Schmidt" (58–59). Es ist deutlich zu erkennen, dass Bennet die Berechnung der Anteile durch Anwendung des Operatorschemas leicht fällt, was auch durch seine Bemerkung „Das ist einfach" (45) gestützt wird. In seinem Rechenweg ist deutlich die Übersetzung des Anteils in die Hintereinanderausführung von zwei Teiloperatoren zu erkennen.

Im Gegensatz zu seinem Partner scheint Julius nicht sofort zu wissen, wie man die Anteile am Gewinn ausrechnet. Auf die Aussage von Bennet, dass er das „jetzt erstmal aus[rechnet]" (51) reagiert Julius mit der Frage „Wie?" (52). Im weiteren versucht er dem schnellen Vorgehen von Bennet zu folgen und versichert sich der einzelnen Rechenschritte und Zwischenergebnisse (55, 57). In seinen Nachfragen ist zu erkennen, dass er sich bezüglich der erforderlichen Rechenschritte sehr unsicher ist. Er teilt wie sein Partner 900 € durch 6 und kommt ebenfalls zu dem Ergebnis 150 €. Er folgert dann jedoch, dass diese 150 € bereits den Anteil für Familie Schmidt darstellen, woraufhin Bennet ihm erklärt: „Du musst das ja noch mal 2 rechnen, weil du hast ja jetzt erst 1 Sechstel ausgerechnet, aber wir brauchen 2 Sechstel“ (64–66). Auch bei der Berechnung des Anteils für Familie Tenner scheint Julius unsicher zu sein, was er rechnen muss. Er bittet seinen Partner ihm zu zeigen, wie er das gerechnet hat (70) und weiß auch auf die Erwiderung von Bennet, dass er „mal 4“ (71) gerechnet habe nicht, worauf der den Operator ·4 anwenden soll: „Also 300 Euro mal 4? Oder 150?“ (72).

Es ist denkbar, dass Julius Schwierigkeiten bei der Anteilberechnung auf die hohe Geschwindigkeit der Bearbeitung seines Partners zurückzuführen ist und er mehr Zeit zur Herstellung der Analogie zum Lösungsbeispiel und zum Ableiten der entsprechenden Rechenoperationen benötigt. Hinzu kommt, dass die beiden Schüler die Berechnung der Anteile bereits in Teilaufgabe a) vornehmen und sich noch nicht die vorgegebenen Pfeilschemata in Teilaufgabe b) angeschaut haben (vgl. Abb. 5.23). An dieser Stelle kann angenommen werden, dass ihm die Berechnung der Anteile in einem Pfeildiagramm helfen würde.

### Transkript B2A1 – Bennet & Julius – Szene 4 – Aufgabe 1

**Julius:** Hast du den Bruch schon hingeschrieben?
**Bennet:** Ja.
**Julius:** Wo denn?
**Bennet:** Ach nee, hab ich nicht.
**Julius:** Ich würde da drunter noch schreiben 2 Drittel ... äh 2 Sechstel sind das und 4 Sechstel.
**Bennet:** Das ist eigentlich richtig einfach. Nur wenn man das so [*zeigt auf ein Pfeilbild*] aufschreibt, dann ...
**Julius:** Das haben wir doch schon gemacht. Hä? Was soll man denn da machen?
**Bennet:** Das gleiche wie daneben, aber da muss man noch ein Pfeilbild malen.
**Julius:** Davon 4 Sechstel? Und was machen wir da drunter?
**Bennet:** Das, was wir da gerechnet haben, weil wir müssen ja geteilt durch 6 rechnen, dann haben wir die Sechstel, die 150 und das dann mal 4, dann haben wir 4 Sechstel.
**beide:** (*schreiben individuell*)

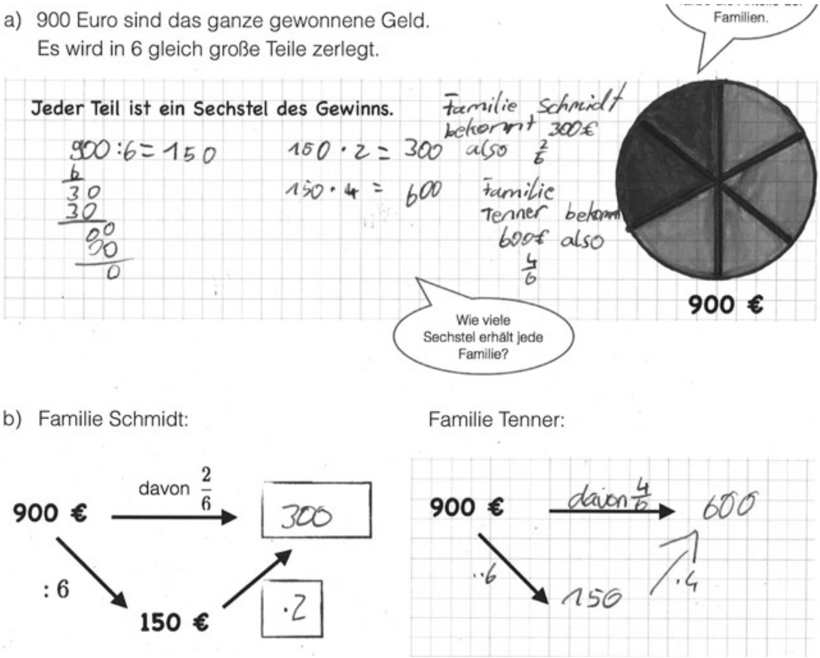



**Abbildung 5.23** Bennets Lösung von Aufgabe 2.1

Als die beiden Partner im Anschluss zu Teilaufgabe b) übergehen, ist Julius zunächst irritiert: „Das haben wir doch schon gemacht. Hä? Was soll man denn da machen?“ (84–85). Er erkennt scheinbar, dass das Pfeilschema der Berechnung der Anteile dient, weshalb er feststellt, dass sie das schon gemacht haben. Entsprechend wundert er sich, was sie dann mit den Pfeildiagrammen machen sollen.

Bennet erkennt, dass sie mit der Berechnung der Anteile dem Aufgabenteil b) bereits vorgegriffen haben. Er erklärt, dass er die Berechnung von Anteilen „eigentlich richtig einfach“ (82) findet, jedoch die Darstellung der Rechnung in einem Pfeildiagramm nicht als Hilfe, sondern als Erschwernis empfindet (82–83). Er weiß jedoch sofort, was an den entsprechenden Stellen im Pfeildiagramm eingetragen werden muss und erklärt: „Das, was wir da gerechnet haben, weil wir müssen ja geteilt durch 6 rechnen, dann haben wir die Sechstel, die 150 und das dann mal 4, dann haben wir 4 Sechstel“ (89–91). Es ist anzunehmen, dass er die Darstellung im Pfeildiagramm als erschwerend empfindet, weil er sie nicht als Hilfe benötigt und auch ohne die Darstellung, weiß was er rechnen muss. Vor diesem Hintergrund ist anzunehmen, dass er somit für die Darstellung des Pfeilschemas zusätzlich zu den erforderlichen Rechenoperatoren noch darüber nachdenken muss, wie diese Rechnung im Diagramm dargestellt werden muss, wodurch diese Darstellung für ihn lediglich einen zusätzlichen Aufwand bedeutet.

Obwohl sie die entsprechenden Anteile bereits in Teilaufgabe a) berechnet und die erforderlichen Rechenoperatoren und Ergebnisse berechnet haben, scheint Julius diese nicht auf die Darstellung im Pfeildiagramm übertragen zu können, sodass er seinen Partner fragt, was sie dort eintragen müssen. Diese Beobachtung entkräftet die Annahme, dass er zuvor lediglich Schwierigkeiten hatte, der Geschwindigkeit seines Partners zu folgen. Wäre dem so gewesen, wäre anzunehmen gewesen, dass er ohne Schwierigkeiten die entsprechenden Ergänzungen im Pfeildiagramm hätte vornehmen können. Stattdessen sucht er jedoch Hilfe bei seinem Partner und übernimmt dessen Lösung.

Die Interpretation von Bennet und Julius Bearbeitung von Aufgabe 1 kann in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Die Schüler haben die Analogie zum Lösungsbeispiel erst nach einem Hinweis von der Lehrkraft hergestellt. Obgleich die Aufgabenstellung mit Ausnahme der Zahlenwerte nahezu identisch zur Aufgabenstellung im Lösungsbeispiel ist, erkennen Bennet und Julius zunächst keinen Zusammenhang. Julius merkt sogar an, dass es für diese Aufgabe kein Lösungsbeispiel gebe. Erst im Austausch mit der Lehrkraft, die den Fokus der Schüler auf den Kontext der Aufgabe und im Speziellen auf das Aufteilen eines Geldbetrags auf zwei Familien lenkt, stellt Bennet eine Beziehung zum Lösungsbeispiel her und bildet die einzelnen Lösungsschritte auf die Bearbeitung des unvollständigen Beispiels ab. Es kann vermutet werden, dass die äußere Gestaltung der Aufgabe, die sich sehr vom Lösungsbeispiel unterscheidet, der wesentliche Grund für die zunächst getrennte Betrachtung von Bennet und Julius ist. Da im Lösungsbeispiel durch die Abbildung von Personen ein direkter Zusammenhang zwischen den Teilen des Ganzen und den Familienmitgliedern dargestellt wird, sind im ersten unvollständigen Beispiel keine Personen abgebildet. Dies hat womöglich zur Folge, dass die Personenanzahl nicht direkt als Aufteilungsgrundlage erkannt und somit zunächst kein Bezug zum Lösungsbeispiel hergestellt wird.
- Das Einzeichnen von Sechsteln im Kreisdiagramm fällt beiden Schülern schwer. Bennet und Julius sind sich schnell einig, dass sie die Kreisrepräsentation in insgesamt sechs gleich große Teile einteilen müssen. Die Durchführung gestaltet sich jedoch nicht so einfach. Während Julius versucht über ein schrittweises Halbieren der Kreissegmente die Einteilung herzustellen und so den Kreis in acht anstelle von sechs gleichen Teilen einteilt, erklärt Bennet, dass er „lange“

über die Einteilung nachdenken musste. Beiden Schülern ist an einer möglichst genauen Einteilung gelegen. Da die Einteilung in Sechstel nicht durch fortgesetztes Halbieren des Kreises und der Kreissegmente hergestellt werden kann, ist es notwendig im Vorhinein entweder eine genaue Vorstellung von dem Ergebnis der Einteilung oder eine Strategie zum Einzeichnen zu haben, z. B. Einteilen in Drittel und Halbieren der Drittel. Beides setzt die mentale Simulation des Vorgehens oder eine mentale Repräsentation voraus.

- Das Operatorschema wird sowohl auf die Bildung wie auch auf die Berechnung der Anteile übertragen und angewendet. Nachdem Bennet den Zusammenhang zum Lösungsbeispiel hergestellt hat, gelingt es ihm zunächst die Anteile für beide Familien zu bestimmen, indem er das Ganze in sechs gleiche Teile aufteilt und diese Teile den einzelnen Familien zuordnet. Auch die Berechnung des Gewinns für beide Familien stellt für ihn keine Schwierigkeit dar. Er wendet die korrekten Lösungsschritte und Rechenoperationen an, ohne dass er sich dabei am Lösungsbeispiel orientieren muss bzw. auf dieses zurückgreifen muss, was so interpretiert werden kann, dass er das Operatorschema bereits verinnerlicht hat und flexibel auf neue Anforderungen übertragen kann. Im Gegensatz zu Bennet zeigt Julius Unsicherheiten bezüglich der Anwendung des Operatorschemas. Seine Unsicherheiten betreffen die Bestimmung der erforderlichen Teiloperatoren und auf welche Größen diese angewendet werden müssen. Dennoch gelingt es ihm, dem Lösungsweg seines Partners zu folgen und die Lösung selbstständig zu notieren.
- Bennet äußert, dass die Anwendung des Operatorschemas zur Berechnung von Anteilen „eigentlich einfach“ sei, er jedoch die Darstellung im Pfeilschema als schwierig oder aufwändig empfindet. Es ist anzunehmen, dass er das Vorgehen zur Bruchherstellung und Anteilberechnung bereits soweit verallgemeinert hat, dass er direkt die erforderlichen Herstellungs- bzw. Rechenschritte ableiten und auf symbolischer Ebene anwenden kann. Die Darstellung in einer gesondert strukturierten Darstellung wie dem Pfeilschema bedeutet in diesem Fall einen zusätzlichen Aufwand, da die Struktur erinnert und zeichnerisch dargestellt werden muss. Im Fall von Julius, der Unsicherheiten bei der Anwendung des Verfahrens zeigt, ist im Gegensatz dazu anzunehmen, dass für ihn eine Darstellung im Pfeilschema eine Unterstützung bei der Strukturierung des Rechenwegs sein könnte. In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, dass Bennet und Julius bereits in Teilaufgabe a) die Gewinnanteile der beiden Familien berechnen, ohne die vorgegebenen Pfeilschemata bisher bewusst wahrgenommen zu haben und somit nicht auf ihre Struktur zugegriffen haben.

Direkt im Anschluss an die Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels gehen Bennet und Julius zum zweiten unvollständigen Beispiel über.

**Transkript B2A2 – Bennet & Julius – Szene 5 – Aufgabe 2**

**Bennet:** Wir zeichnen das wieder.
**Julius:** Ja, aber ich verstehe das nicht. Das hier, guck. Lisa und Jan haben in den Ferien in einem Jugendclub gearbeitet. Sie bekommen 84 Euro. Bekommen die zusammen 84 Euro, oder was?
**Bennet:** Sie bekommen 84 Euro und jetzt teilen sie es auf, wer wie viel gearbeitet hat. Das müssen wir ausrechnen. Ich teil das hier jetzt.
**Julius:** Durch 2 doch, oder?
**Bennet:** Nee, weil jeder hat ja unterschiedlich gearbeitet, also ...
**Julius:** Durch 12.
**Bennet:** Durch 12, ja richtig, durch 12. Und das müssen wir dann ...
**Julius:** Und dann muss einer ja mehr bekommen.
**Bennet:** Das müssen wir erstmal so teilen.
**Julius:** In 12 Stücke, ne?
**Bennet:** Ja, ich weiß gar nicht, wie man das macht.
**Julius:** Ich glaub, so schwer ist das nicht.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

Nach dem Lesen der Aufgabenstellung schlägt Bennet vor, wieder eine Zeichnung anzufertigen (1). Er scheint beim Lesen der Aufgabenstellung bereits verstanden zu haben, was in der Aufgabe zu tun ist und möchte direkt die Aufteilung des Geldbetrags auf die beiden Jugendlichen zeichnerisch veranschaulichen: „Sie bekommen 84 Euro und jetzt teilen sie es auf, wer wie viel gearbeitet hat. Das müssen wir ausrechnen. Ich teil das hier jetzt" (6–8). Bennets Erklärung lässt annehmen, dass er sofort erkannt hat, dass die Summe der Arbeitsstunden der beiden Jugendlichen als Grundlage für die Einteilung des Ganzen genutzt werden muss.

Julius erkennt diesen Zusammenhang hingegen nicht auf Anhieb und sagt, er „verstehe das nicht" (2). Er entnimmt der Aufgabenstellung, dass die beiden Jugendlichen zusammen 84 € bekommen haben, die sie untereinander aufteilen wollen. Entsprechend schlägt er vor, dass der Lohn „durch 2" (9) geteilt werden müsse, worin zu erkennen ist, dass er die unterschiedliche Arbeitszeit der beiden Jugendlichen in seinen Überlegungen nicht berücksichtigt. Auf die Erwiderung von Bennet, dass die beiden Jugendlichen unterschiedlich lange gearbeitet haben (10–11), erkennt Julius seinen Fehler und stellt fest, dass der Lohn dann „durch 12" (12) geteilt werden müsse, was Bennet bestätigt. Es ist anzunehmen, dass Julius Wahl des falschen Ansatzes eher darauf zurückzuführen ist, dass er die Aufgabenstellung nicht direkt in vollem Umfang erfasst hat, als dass er das grundlegende Verfahren nicht verstanden hat. Diese Annahme wird insbesondere dadurch gestützt, dass Julius sich zu Beginn bei seinem Partner versichert, dass die beiden Jugendlichen zusammen einen Lohn ausgezahlt bekommen, was eine eher ungewöhnliche Situation ist, da ein Arbeitslohn im Alltag direkt an die arbeitende Person ausgezahlt wird und dieser nicht erst aufgeilt werden muss. In diesem Zusammenhang kann seine Irritation auf die Erschließung des Aufgabenkontexts zurückgeführt werden. Zudem erkennt er unmittelbar auf den Hinweis von Bennet, dass die beiden Jugendlichen unterschiedlich lange gearbeitet haben, dass der Gewinn durch die Summe der Arbeitsstunden geteilt und das Ganze entsprechend in zwölf gleiche Teile geteilt werden muss. Zudem erkennt er, dass die beiden Jugendlichen nicht denselben Anteil erhalten, sondern „einer ja mehr bekommen“ (15) muss. Die Spontaneität dieser Folgerung deutet darauf hin, dass er sofort einen Bezug zu den vorhergehenden Aufgaben herstellt und das Verfahren auf die neue Situation bzw. die neuen Zahlenwerte anpasst und anwendet.

Im Anschluss teilen die beiden Partner eigenständig die vorgegebene Kreisrepräsentation in zwölf gleiche Teile und färben die Anteile von Lisa und Jan in verschiedenen Farben ein (vgl. Abb. 5.24).

### Transkript B2A2 – Bennet & Julius – Szene 6 – Aufgabe 2

**Julius:** Warte, jetzt muss ich ja dann 5 Stunden ... hä? Da mach ich doch 5 und 7, oder? 7 Zwölftel und 7 Fünftel, oder? Äh, 5 Siebtel. Nee, 5 Zwölftel.
**Bennet:** Du musst jetzt erstmal 5 Stücke und nochmal 7 Stücke.
**beide:** (*schreiben individuell*)
**Bennet:** Hä? Wir müssen doch hier jetzt den Anteil ausrechnen (*schaut bei Julius*) Wie bist du auf das gekommen?
**Julius:** Was?
**Bennet:** Ach, egal.
**Julius:** 84 Euro durch 12 sind doch 7.
**beide:** (*schreiben individuell*)
**Julius:** Dann kommt da ja 7 Euro raus und dann müssen wir 7 mal 7 ...
**Bennet:** Warte doch kurz.
**beide:** (*schreiben individuell*)
**Julius:** Hast du das genauso wie ich? Wenn man 84 durch 12 nimmt, kommt ja 7 Euro raus, ne? Und dann musst du ja, Lisa hat ja 7 Stunden gearbeitet und Jan 5. Dann muss man 7 mal 7 Euro sind ja gleich 49 Euro. Also Lisa hat

```
     49 Euro bekommen und bei Jan ist es ja auch so und da
     nur einfach mal 5 mal 7. Da kommt 35 Euro raus.
```
**Bennet:** Ja, hab ich genauso.
**Julius:** Und wenn man beides addiert kommt da ...

Nachdem beide Schüler ohne Schwierigkeiten die entsprechenden Anteile eingezeichnet haben versucht Julius die Anteile zu benennen: „Warte, jetzt muss ja dann 5 Stunden … hä? Da mach ich doch 5 und 7, oder? 7 Zwölftel und 7 Fünftel, oder? Äh, 5 Siebtel. Nee, 5 Zwölftel“ (21–23). Obwohl er die Anteile korrekt eingeteilt und markiert hat, wirkt Julius zunächst ein wenig irritiert, was die Einheit bzw. der Nenner der Brüche ist. Er hat erkannt, dass die eine Person fünf Stunden und die andere Person sieben Stunden bezahlt bekommt (21) und entsprechend die Zähler der Brüche 5 und 7 sein müssen (22). Nach einigen Versprechern nennt er dann korrekt die Anteile $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{12}$. Bennet bestätigt dies, indem er auf die Einteilung der Kreisfläche verweist: „Du musst erstmal 5 Stücke und nochmal 7 Stücke“ (24), wobei er sich mit „Stücke“ auf die Teile des Ganzen, also Zwölftes bezieht.

In der Folge rechnen beide Schüler in individueller Stillarbeit die entsprechenden Lohnanteile für die beiden Jugendlichen aus. Dabei zeigt Julius, dass er das Operatorschema zur Anteilberechnung sicher anwenden kann. Er beschreibt seine Rechnung: „84 Euro durch 12 sind doch 7. […] Dann kommt da ja 7 Euro raus und dann müssen wir 7 mal 7“ (30, 32–33). Um sich der Richtigkeit seiner Lösung zu versichern wiederholt er schließlich noch einmal den ganzen Rechenweg für die Anteile beider Schüler. Dabei formuliert er: „Wenn man 84 durch 12 nimmt, kommt ja 7 Euro raus, ne? […]Lisa hat ja 7 Stunden gearbeitet und Jan 5. Dann muss man 7 mal 7 Euro […] Also Lisa hat 49 Euro bekommen und bei Jan ist es ja auch so und da nur einfach mal 5 mal 7. Da kommt 35 Euro raus“ (36–41). Hier ist deutlich zu erkennen, dass er die Operatoren zur Anteilberechnung (:12 und ·7 bzw. ·5) korrekt anwendet und ihre Wirkung im Kontext interpretiert. Bennet bestätigt die Richtigkeit von Julius Rechnungen und sagt, dass er „genauso“ (42) gerechnet habe.

Zuletzt setzt Julius zu einer Proberechnung an und beginnt: „Und wenn man beides addiert kommt da…“ (43). Er wird jedoch von Bennet unterbrochen, der bereits mit der Bearbeitung der nächsten Aufgabe beginnt. An dieser Stelle zeigt sich, dass Julius verstanden hat, dass die beiden Anteile zusammen wieder das Ganze, also 84 € ergeben müssen und er folglich die Anteile jeweils im Bezug zum Ganzen sieht und den Zusammenhang zwischen Anteilen und Ganzem im Sachkontext herstellt.

Für die Darstellung ihrer Rechnung verzichten Bennet und Julius auf eine Darstellung im Pfeilschema und schreiben die beiden Rechnungsschritte als Terme untereinander. Die Möglichkeit der Erstellung eines Pfeilschemas wird in ihrer Bearbeitung nicht erwähnt.

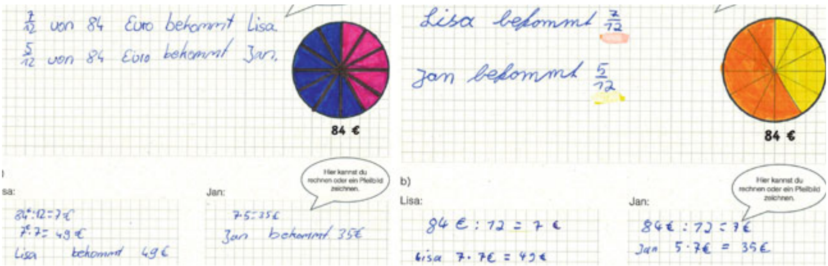


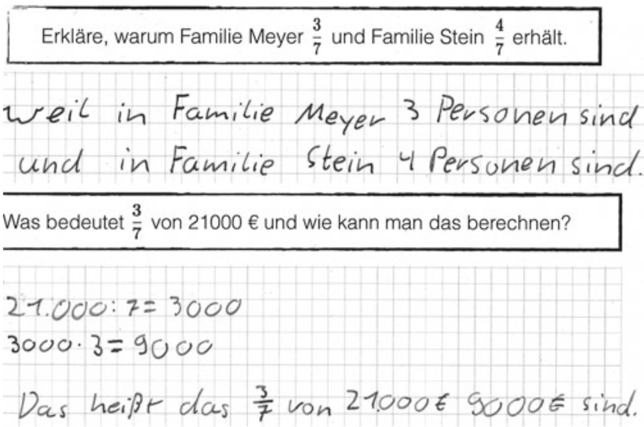

**Abbildung 5.24** Bennets (links) und Julius (rechts) Lösung von Aufgabe 2.2

Bennet und Julius Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels kann zusammenfassend in den folgenden Deutungshypothesen beschrieben werden:

- Die ungewöhnliche Sachsituation führt zu Verständnisschwierigkeiten. Julius ist zunächst irritiert von der Sachsituation des zweiten unvollständigen Beispiels. Dies betrifft insbesondere die Beschreibung, dass die beiden Jugendlichen gemeinsam einen Lohn ausgezahlt bekommen. Julius ist sich zunächst unsicher, ob er die Aufgabe richtig versteht.
- Bennet und Julius übertragen das Operatorschema erfolgreich zur Bestimmung und zur Berechnung der jeweiligen Anteile am Geldbetrag. Wohingegen in Julius Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels zunächst Unsicherheiten bezüglich der Bestimmung und Anwendung der Teiloperatoren beobachtet werden konnten, sind in seiner Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels keine derartigen Schwierigkeiten zu erkennen. Dies kann als Zeichen gedeutet werden, dass er mit dem Verfahren zunehmend vertraut wird.
- Beide Schüler verzichten in ihrer Notation des Rechenwegs auf die Darstellung in einem Pfeilschema, sondern notieren den Rechenweg in Form von zwei Termen. Es ist anzunehmen, dass Bennet und Julius das Verfahren soweit verallgemeinert haben, dass sie auf das Pfeildiagramm zur Strukturierung der Anteilberechnung nicht angewiesen sind und es im Gegenteil als zusätzliche Erschwernis betrachten.

### Can & Philip – Probleme bei der Übertragung und Anwendung des Verfahrens

Can und Philip Arbeitsverhalten kann als unkonzentriert charakterisiert werden. Insbesondere Can versucht häufig seinen Partner sowie die benachbarten Paare abzulenken. Das Lösungsbeispiel haben sie schnell überflogen, ohne über einzelne Lösungsschritte zu sprechen. Die fokussierenden Fragestellungen wurden im Wesentlichen von Philip bearbeitet (vgl. Abb. 5.25), der die Antworten im Endzustand des Lösungsbeispiels am Bildschirm gesucht hat. Can hat die Antworten unkommentiert von Philip abgeschrieben. Im Anschluss gehen sie zur Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels über.


Erkläre, warum Familie Meyer $\frac{3}{7}$ und Familie Stein $\frac{4}{7}$ erhält.

weil in Familie Meyer 3 Personen sind und in Familie Stein 4 Personen sind.

Was bedeutet $\frac{3}{7}$ von 21000 € und wie kann man das berechnen?

21.000 : 7 = 3000
3000 · 3 = 9000
Das heißt das $\frac{3}{7}$ von 21000 € 9000 € sind.

**Abbildung 5.25** Philips Antworten zu den fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel

### Transkript B2A1 – Can & Philip – Szene 1 – Aufgabe 1

**Can:** 900 geteilt durch 6, wie viel sind das?
**Philip:** 1500.
**Can:** Echt?
**beide:** (*Ablenkung*)
**Can:** So, was war das noch mal? 900 geteilt durch 6, ne? Wie rechnet man nochmal geteilt? Wie oft passt 6 in die 9, ne? ... Einmal.
**Philip:** (*rechnet schriftlich 900 : 6, Can sieht ihm dabei zu*)
**Can:** Ja, was kommt jetzt raus? 1500?

**Philip:** (*liest Sprechblase laut vor:* Wie viel Sechstel erhält jede Familie?
**Can:** Ja, 1500.
**Philip:** Wie viele Sechstel?
**Can:** Ja, woher sollen wir das wissen ... 2 Sechstel, das steht da doch schon.
**Philip:** Das ist b).
**Can:** Ja und? (*zur Lehrkraft:*) Hier steht ja, wie viele Sechstel erhält jede Familie, dann erhält doch jede Familie 2 Sechstel, oder?
**Philip:** Jede Familie erhält 3 Sechstel.

Nachdem Can und Philip die Aufgabenstellung gelesen haben fragt Can umgehend wie viel „900 geteilt durch 6“ (1) ist, was Philip mit „1500“ (2) beantwortet. Es folgt eine Phase der Ablenkung. Cans Frage deutet darauf hin, dass er nicht der Aufgabenstellung entsprechend die Anteile am Gewinn für jede Familie bestimmen möchte, sondern sich mit seiner Frage auf das vorgegebene Pfeildiagramm in Aufgabenteil b) bezieht und dort eine Rechnung herausgreift.

Als die beiden Schüler sich wieder der Aufgabe zuwenden, geht Can erneut auf diese Rechnung „900 geteilt durch 6“ ein und fragt seinen Partner, wie man eine solche Division durchführt (5–7). Philip hilft ihm und beginnt schriftlich 900 : 6 zu rechnen. Er führt diese Rechnung jedoch nicht vollständig aus, sondern liest die Sprechblase mit dem Bearbeitungshinweis „Wie viel Sechstel erhält jede Familie?“ (10–11). Can antwortet direkt mit „1500“ (12). In dieser Sequenz wird deutlich, dass die beiden Schüler das erste unvollständige Beispiel nicht mit dem Lösungsbeispiel in Verbindung setzen, sondern versuchen den unvollständigen Lösungsweg auf Grundlage der dargebotenen Informationen zu ergänzen. Erst als Philip den Bearbeitungshinweis liest beginnen sie mit der Bestimmung der Anteile für die zwei Familien. Can scheint mit dem Begriff „Anteil“ keinen Bruch zu verbinden, sondern wiederholt Philips Antwort auf seine Frage, wie viel 900 : 6 sei.

Philip gibt Can zu verstehen, dass „1500“ keine „Sechstel“ sind, indem er die Frage wiederholt: „Wie viele Sechstel?“ (13). Can erwidert, dass sie das nicht wissen können und greift dann den Anteil $\frac{2}{6}$ aus dem unvollständigen Pfeildiagramm in Aufgabenteil b) auf (14–15). Can wendet sich an die Lehrkraft und fragt diese, ob jede Familie 2 Sechstel erhalte (17–19), was Philip mit „jede Familie erhält 3 Sechstel“ (20) erwidert bevor die Lehrkraft auf Cans Frage antworten kann.

Insgesamt wird der Eindruck verstärkt, dass Can im vorliegenden Aufgabenmaterial nach Lösungen bzw. Rechenwegen sucht, ohne auf die Aufgabenstellung einzugehen. Im Gegensatz dazu greift Philip die Information auf, dass das Ganze auf zwei Familien aufgeteilt werden soll. Er folgert daraus, dass jede Familie den gleichen Anteil „3 Sechstel“ (20) erhält. Es fällt auf, dass die beiden Schüler an keiner Stelle das Teilen des Gewinns durch sechs hinterfragen oder reflektieren. Entsprechend ist weiterhin anzunehmen, dass sie keine Verbindung zum Lösungsweg im Lösungsbeispiel herstellen, sondern im Aufgabenmaterial nach einem Lösungsweg suchen. Dabei nutzen sie keine erkennbaren Strukturen, sondern befolgen die Hinweise im Arbeitsheft.

### Transkript B2A1 – Can & Philip – Szene 2 – Aufgabe 1

**Lehrkraft:** Guckt euch das noch mal ganz genau an, schaut euch das (*das Lösungsbeispiel*) noch einmal ganz von vorne an und geht mal wirklich Schritt für Schritt durch was da gemacht wird, ok? Diese Aufgabe ist nämlich fast genauso. Also, mit ganz genau angucken meine ich, durchlesen und gucken, ob ihr jeden Schritt und alles was da passiert auch wirklich versteht.
**Can:** Was hast du gesagt? 3 Sechstel erhält jede Familie?
**beide:** (*klickenLösungsbeispielüberdieVorspultasteschnell durch – kein Lesen erkennbar*)
**Can:** Also, erhält jede Familie 3 Sechstel.
**Philip:** Ja.
**beide:** (*schreiben individuell*)

Die Lehrkraft weist Can und Philip darauf hin, dass sie sich noch einmal „genau“ das Lösungsbeispiel anschauen sollen, da dieses nämlich „fast genauso“ sei (21–25). Sie erklärt zudem, dass sie sich das Lösungsbeispiel nicht nur anschauen sollen, sondern versuchen sollen, die einzelnen Lösungsschritte nachzuvollziehen (25–27). Auf die Aufforderung der Lehrkraft klicken Can und Philip sich erneut über die Vorspultaste durch das Lösungsbeispiel, ohne dass zu erkennen ist, dass sie den Text im Lösungsbeispiel lesen, und bleiben bei Philips Annahme, dass beide Familien den gleichen Anteil $\frac{3}{6}$ bekommen. Erneut stellen sie keinen Bezug zwischen der Personenanzahl der beiden Familien und der Aufteilung des Gewinns her.

### Transkript B2A1 – Can & Philip – Szene 3 – Aufgabe 1

**Can:** Guck mal Philip, Familie Schmidt hat 2 Personen, Familie Tenner hat 4 Personen.
**Philip:** (*benutzt seinen Tintenkiller großflächig*)
**Can:** Hä? Das war doch richtig.
**Philip:** Dann bekommen die 2 Sechstel und die 4 Sechstel.
**beide:** (*Philip schreibt/zeichnet, Can sieht ihm zu*)
**Can:** (*liest bei Philip:*) 900 geteilt durch 6 sind 150.
**Philip:** Und 2 Sechstel von 900 sind 300. Ja.

**Can:** Davon 4 Sechstel, ne?
**Philip:** Ja, 900 geteilt durch 6 sind 150, mal 4 sind 600.
**beide:** (*individuell, Philip schreibt, Can schreibt ab*)
**Can:** Familie Schmidt erhält 300 Euro, Familie Tenner erhält 600 Euro.
**Philip:** Ja.

Can liest erneut die Aufgabenstellung durch und merkt an, dass Familie Schmidt aus zwei und Familie Tenner aus vier Personen besteht (34–35). Auf diese Bemerkung seines Partners löscht Philip aus, was er bisher notiert hat und erklärt „dann bekommen die 2 Sechstel und die 4 Sechstel“ (38). Er notiert die Anteile und ergänzt in der Folge die vorgegebenen Pfeilschemata (Abb. 5.26). Während im ersten Pfeildiagramm zur Berechnung von $\frac{2}{6}$ von 900 € lediglich der Operator zum vervielfachen sowie das Ergebnis ergänzt werden müssen, sind im zweiten Pfeildiagramm keine Teillösungen vorgegeben. Auch hier trägt Philip die korrekten Rechenoperatoren und Ergebnisse ein: „900 geteilt durch 6 sind 150, mal 4 sind 600“ (44). Can übernimmt die Ergebnisse von Philip.

Die plötzliche Reaktion von Philip lässt vermuten, dass er die Information über die Anzahl der Familienmitglieder beim Lesen der Aufgabenstellung übersehen hat oder nicht für wichtig befunden hat. Als Can ihm die Information vorliest, reagiert Philip sofort, nennt die korrekten Anteile für die Familien und ergänzt die Berechnungen der Anteile im Pfeildiagramm. Er scheint unmittelbar mit dieser Information eine Beziehung zum Lösungsbeispiel herzustellen und den Lösungsweg zu übertragen.

Can stellt weiterhin keine Beziehung zum Lösungsbeispiel her, worauf seine Reaktion „Hä, das war doch richtig“ (37) auf Philips Auslöschen seiner bisherigen

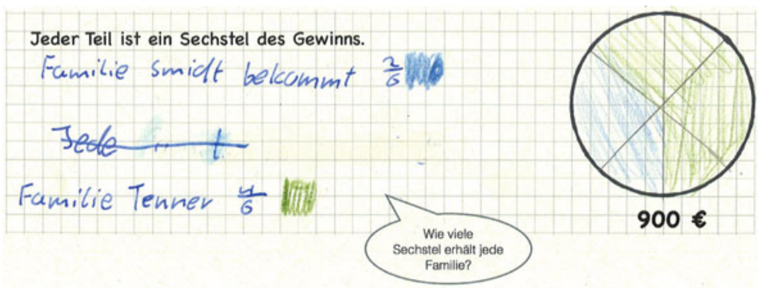



**Abbildung 5.26** Philips Lösung von Aufgabenteil a) des ersten unvollständigen Beispiels

Ergebnisse hindeutet. Im weiteren schreibt er die Lösungen seines Partners ab, ohne dass zu erkennen ist, dass er diese nachvollzieht oder reflektiert (Abb. 5.27).

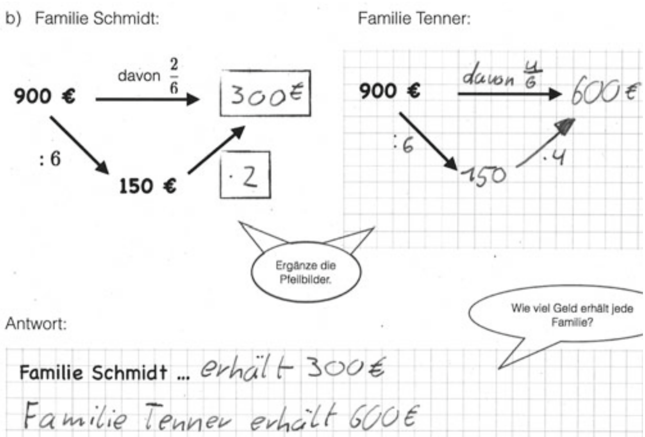



**Abbildung 5.27** Philips Lösung von Aufgabe 1 b)

Insgesamt lässt sich die Bearbeitung von Can und Philip in folgenden Aspekten zusammenfassen:

- Can und Philip stellen keinen Bezug zur Situation in der Aufgabenstellung, dem Sachkontext im Allgemeinen oder dem Lösungsbeispiel her. Stattdessen versuchen sie die Aufgabe allein anhand der vorgegebenen Lösungsansätze und Zahlenwerte zu bearbeiten. Ihre Hauptschwierigkeit besteht darin, die Anteile zu bestimmen, zu denen der Geldbetrag auf die beiden Familien aufgeteilt werden soll. Zu einem Transfer des Vorgehens aus dem Lösungsbeispiel kommt es erst, als Can beim erneuten Lesen der Aufgabenstellung bemerkt, dass die beiden Familien aus unterschiedlich vielen Personen bestehen und die Personenzahlen nennt. Als unmittelbare Reaktion auf diese Information stellt Philip die Anteile für jede der beiden Familien fest und beginnt sofort die Geldbeträge zu berechnen. Es ist daher anzunehmen, dass die Schüler zu Beginn die Aufgabenstellung nicht eingehend genug gelesen haben und aufgrund des daraus resultierenden Mangels an Informationen versuchen die vorgegebenen Lösungsansätze zu vervollständigen, ohne einen wirklichen Bezug zur Aufgabenstellung oder eine Analogie zum Lösungsbeispiel herzustellen.

- Unmittelbar nach der Feststellung der Anteile am Gewinn für jede Familie wendet Philip das Operatorschema zur Berechnung der Anteile an und ergänzt die fehlenden Angaben in den vorgegebenen Pfeildiagrammen. Dabei sind keine Schwierigkeiten erkennbar. Im Gegensatz zu Philip trägt sein Partner Can wenig zur Berechnung der Anteile bei und übernimmt zuletzt die Lösungen von seinem Partner. Insbesondere Cans als „ratend“ zu charakterisierendes Vorgehen sowie sein kurzzeitiges beharren auf der Idee, dass beide Familien $\frac{3}{6}$ des Gewinns erhalten, bestärken die Annahme, dass er das Verfahren im Lösungsbeispiel nicht erfasst hat, sodass er entsprechend auch nicht auf dieses zurückgreifen kann.

**Transkript B2A2 – Can & Philip – Szene 4 – Aufgabe 2**

**Philip:** Wir müssen jetzt wieder diesen scheiß Rechenweg beschreiben.
**Can:** Ich schreib da jetzt einfach hin 84 Euro geteilt durch 7.
**Philip:** Aber hier musst du doch den Rechenweg hinmachen.
**Can:** Bei b), aber wir sind doch erst bei a). Lass uns erstmal ein anderes Blatt machen. Das ist zu schwer.
**beide:** (*gehen zur nächsten Aufgabe im Arbeitsheft über*)

Zu Beginn der Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels lesen Can und Philip im Stillen die Aufgabenstellung. Philip erklärt umgehend, dass sie „diesen […] Rechenweg beschreiben“ (1–2) müssen, womit er sich vermutlich auf die Berechnung eines Anteils anhand des Operatorschemas bezieht. Sein Partner Can erwidert, dass er „da jetzt einfach […] 84 Euro geteilt durch 7“ (3–4) schreibe. Auf einen Einwand von Philip (5) erklärt er weiter, dass sie erst bei Teilaufgabe b) „den Rechenweg“ aufschreiben müssen, sie jedoch erst bei Teilaufgabe a) seien (6–7). Es ist anzunehmen, dass er erkennt, dass seine Rechnung in den Aufgabenteil b) gehört, in dem die Anteile berechnet werden sollen, und er somit nicht weiß, was sie im Aufgabenteil a) machen sollen. Er stellt für sich fest „das ist zu schwer“ (7) und schlägt vor, zunächst die übrigen Aufgaben im Arbeitsheft zu bearbeiten.

Es ist zu erkennen, dass Can nicht versucht den Aufgabenkontext zu erschließen und zur Erarbeitung eines Lösungsweg zu nutzen, sondern im Aufgabentext nach Zahlenwerten sucht, die er direkt in einer Rechnung zusammenstellen kann. Mit Ausnahme von Philips Feststellung, dass sie erneut eine Rechnung im Pfeilschema darstellen sollen, wird keine Beziehung zum Lösungsbeispiel oder dem ersten unvollständigen Beispiel hergestellt. Da die beiden Schüler auf Anhieb keinen Zugang zu der Aufgabe finden, beschließen sie, die Aufgabe an das Ende ihrer Bearbeitung des Arbeitshefts zurückzustellen, da sie „zu schwer“ (7) sei.

### Transkript B2A2 – Can & Philip – Szene 5 – Aufgabe 2

**Can:** 84 geteilt durch 7 rechnen wir jetzt. ... Was sollen wir machen, das hat er uns nicht erklärt. Das machen wir nicht.
**Philip:** Wir müssen uns diese scheiß Pfeilrechnung überlegen.
**Can:** Wir machen das nicht, wir haben das nicht verstanden.
**Philip:** Das geht doch aber.
**Can:** Ja, natürlich geht das, nur ... Das ist genau dasselbe wie bei dieser Aufgabe Philip.
**Philip:** Wie bei der ersten. (*beginnt zu schreiben*)
**Can:** Was machst du?
**Philip:** Ich mach diese Rechnung.
**Can:** 84 geteilt durch 7?
**Philip:** Ja, ok. ... Geteilt durch 7? Das sind 12.
**Can:** Gleich 12, und dann? Mal? 12 mal?
**Philip:** Nee, 12 ist richtig.
**Can:** Und dann?
**Philip:** Einfach nur 12. Hä? Da steht kein Bruch.
**Can:** Ja, Lisa bekommt 12 Euro. Und dann bekommt er den Rest. Hä? Dann bekommt er doppelt so viel wie sie einfach. ... Was ist das für eine Scheiße. Hier ist gar kein Bruch. (*Ablenkung*)
**Can:** (*zum Paar am Nebentisch:*) Das ist voll schwer. Da steht gar kein Bruch, wie soll man das rechnen?
**Nachbarin:** Die Stunden sind der Bruch.
**Can:** 7 Stunden ist der Bruch? Das geht nicht. Wie viel Geld bekommt Lisa? 12 Euro? Wir lassen das jetzt einfach weg, ok? (*Ablenkung*)
**Can:** Die Hälfte ist 32.
**Philip:** Nein, die Hälfte ist 42.
**Can:** 42 Euro bekommt jeder, was willst du?
**Philip:** Nein.

Am Ende der Unterrichtsstunde nehmen Can und Philip die Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels wieder auf. Nachdem Can seine Rechnung „84 geteilt durch 7“ (9) vom ersten Bearbeitungsversuch wieder aufnimmt, fragt er, was sie machen sollen und bemängelt, dass man ihnen „nicht erklärt“ (10) habe. Philip erwidert, dass „diese […] Pfeilrechnung“ (11) überlegen müssen und das es „wie bei der ersten“ (16) Aufgabe sei. Es wird nicht deutlich, ob er sich dabei auf das Lösungsbeispiel oder das erste unvollständige Beispiel bezieht. Es kann jedoch vermutet werden, dass er das Lösungsbeispiel meint, indem der Gewinn zunächst entsprechend der sieben Personen in sieben gleiche Teile geteilt wurde. In der Folge beginnt er „84 geteilt durch 7“ (19) zu rechnen und kommt zu dem Ergebnis „das sind 12“ (20). Can stellt augenscheinlich einen Bezug zum Operatorschema her und fragt, was sie danach rechnen sollen: „Mal? 12 mal?" (21). Diese Nachfrage deutet darauf hin, dass er das Operatorschema soweit verinnerlicht hat, dass er nach dem Teilen des Ganzen eine Multiplikation durchführen muss.

Philip ist ebenfalls irritiert und stellt fest, dass „da [...] kein Bruch [steht]" (24). Er erkennt, dass er zum Berechnen eines Anteils zunächst wissen muss, welchen Anteil er berechnen soll. Entsprechend findet er keinen Faktor, mit dem er 12 multiplizieren kann. Er äußert, dass das Ergebnis „einfach nur 12" (24) sei, vermutet aber scheinbar, dass 12 nicht das korrekte Ergebnis ist.

Can nimmt entgegen Philips Unsicherheit das Ergebnis „12" auf und folgert: „Lisa bekommt 12 Euro. Und dann bekommt er [Jan] den Rest" (25). Beim Vergleich der entsprechenden Löhne für die beiden Jugendlichen bemerkt er dann aber auch, dass diese Annahme nicht stimmen kann, denn „dann bekommt er doppelt so viel wie sie einfach" (26). Es ist bemerkenswert, dass er annimmt, dass die Differenz von 84 und 12 lediglich das Doppelte von 12 sei. Es ist jedoch möglich, dass er mit dem Doppelten meint, dass Jan in diesem Fall wesentlich mehr Geld bekäme als Lisa. Es ist jedoch nicht auszuschließen, dass er Schwierigkeiten beim Einordnen von natürlichen Zahlen hat.

Can wendet sich an das Paar, das am Nebentisch arbeitet, und merkt an, dass diese Aufgabe „voll schwer" sei, da „kein Bruch" angegeben sei (29–30) Aus diesem Grund wissen sie nicht, wie „man das rechnen" (30) soll. Ihre Nachbarin erwidert, dass „die Stunden" (31) der Bruch seien, womit sie meint, dass die Stunden die Grundlage zum Aufteilen des Ganzen sind. Can interpretiert diesen Hinweis jedoch wörtlich und versteht ihn dementsprechend nicht: „7 Stunden ist der Bruch? Das geht nicht." (32).

Nach einer weiteren Ablenkung schlägt Can vor, dass sie den Gewinn einfach zu gleichen Teilen auf die beiden Jugendlichen aufteilen. Er sagt „die Hälfte [von 84] ist 32" (36), was die Annahme seiner Unsicherheit beim Umgang mit natürlichen Zahlen stützt. Nach der Korrektur von Philip, dass die Hälfte von 84 nicht 32, sondern 42 sei, erklärt Can weiter: „42 Euro bekommt jeder" (38). Philip lehnt diese Lösung jedoch ab (39).

Es ist deutlich zu erkennen, dass es Can und Philip nicht gelingt, die Anteile am Ganzen für beiden Jugendlichen zu bestimmen. Sie suchen weiterhin nach möglichen Kombinationen der Zahlen im Aufgabentext zur Durchführung einer Rechnung. Obwohl sie eine Ähnlichkeit zu den vorhergehenden Aufgaben und dem Lösungsbeispiel vermuten, stellen sie keine Beziehung zu diesen her. Dies kann möglicherweise dadurch erklärt werden, dass sie den Aufgabenkontext und die Aufgabensituation nicht in ihre Überlegungen einbeziehen, sondern lediglich nach Zahlenwerten zum Aufstellen einer Rechnung suchen.

**Transkript B2A2 – Can & Philip – Szene 6 – Aufgabe 2**

**Nachbarin:** Jan bekommt 5 Zwölftel.
**Can:** Was hast du gesagt? 5 Zwölftel bekommen die?
**Nachbarin:** Jan bekommt die.
**Can:** 5 Zwölftel ist richtig, weil 5 mal 12 sind 84.
**beide:** (*schreiben: Jan bekommt 5 Zwölftel*)
**Philip:** Lisa bekommt ... 7 Zwölftel.
**Can:** Is so, weil 7 Stunden, 5 Stunden. ... Also müssen wir das in 12 Teile aufteilen, dieses Ding.
**Philip:** Ja.
**beide:** (*Philip beginnt zu zeichnen; Can sieht ihm zunächst zu und beginnt dann selber zu zeichnen*)
**Can:** Aber jetzt, 5 Zweitel ... 5 Zwölftel von 84. Wie viel sind das? Uns fehlt die Antwort. Wie viel Geld bekommt jeder?
**Philip:** Das ist voll leicht, du musst jetzt 84 ... (*beginnt zu schreiben*)
**Can:** Was machst du?
**Philip:** 48 durch 12 rechnen.
**Can:** 48 geteilt durch 12 mal 5. Oh, bin ich gut.
**Philip:** (*schreibt, Can schreibt ab*)
**Can:** Und dann 7 mal 5, ne?
**Philip:** 7 mal 5, 35.
**Can:** Ja.
**Philip:** Ok, und jetzt ...
**Can:** Antwort erstmal: Lisa bekommt 35 Euro.
**Philip:** Nein, das müssen wir mal 7 rechnen.
**Can:** Was? (*guckt bei Philip*) Aber trotzdem bekommt Jan 35 Euro.
**Philip:** Ja. Und 7 mal 7 gleich 49.
**Can:** 48 auch geteilt durch ... 12 gleich 7.
**Philip:** Ja, gleich 7 und dann mal 7, 49.
**Can:** Warte, das musst du hier doch hinschreiben.
**Philip:** Ich hab das ohne geschrieben.
**Can:** Warum bekommt das Mädchen denn mehr als der Junge?
**Philip:** Weil das Mädchen mehr gearbeitet hat, weil der Junge zu faul ist.
**Can:** Zwei Stunden und sie bekommt direkt das doppelte.

Ihre Tischnachbarin gibt ihnen einen zweiten, diesmal wesentlich expliziteren Hinweis und sagt ihnen vor, dass „Jan […] 5 Zwölftel [bekommt]“ (40). Can nimmt diesen Hinweis direkt auf und begründet ihn damit, dass „5 mal 12 […] 84 [sind]“ (43). Er begründet demnach, dass $\frac{5}{12}$ ein korrekter Anteil sei, weil das Produkt von Zähler und Nenner die Ausgangsgröße ergebe. Ungeachtet des Rechenfehlers, der ihm hier unterläuft, deutet seine Begründung auf eine Fehlvorstellung hin: Er interpretiert, den Zähler und Nenner eines Bruchs nicht als Herstellungshandlungen oder

Teiloperatoren, die auf eine Größe wirken, sondern als Faktoren, deren Produkt die Ausgangsgröße ergibt. Somit deutet der den Bruch $\frac{5}{12}$ weder als Anteil noch als Operator, sondern betrachtet den Bruch komponentenweise als Zusammenfassung zweier natürlicher Zahlen.

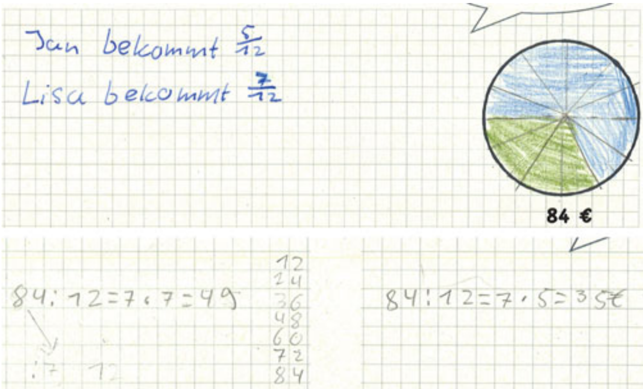



**Abbildung 5.28** Philips Lösung von Aufgabe 2

Philip geht nicht auf Cans Erklärung ein, sondern schließt von dem Hinweis, dass Jan $\frac{5}{12}$ des Ganzen erhält, darauf dass Lisa $\frac{7}{12}$ des Ganzen bekommt (45). Es ist nicht zu entscheiden, ob er diesen Schluss zieht, da er den Zusammenhang zu den Arbeitsstunden erkennt, oder ob er lediglich den Bruch $\frac{5}{12}$ zu einem Ganzen ergänzt. Can stellt darauf hin den Zusammenhang zu den Anzahlen der geleisteten Arbeitsstunden her (46) und folgert für die ikonische Darstellung der Anteile im Kreisdiagramm: „Also müssen wir das in 12 Teile aufteilen, dieses Ding" (47). In der Folge unterteilt Philip die vorgegebene Kreisfläche in zwölf gleiche Teile und färbt je acht und vier Teilsegmente in unterschiedlichen Farben als Repräsentation für die Arbeitsstunden der beiden Jugendlichen (vgl. Abb. 5.28). Die fehlerhafte Anzahl der gefärbten Teilsegmente kann dabei als Flüchtigkeitsfehler betrachtet werden. Can schaut Philip zunächst beim Zeichnen zu bevor er selber damit beginnt, die Anteile in der Kreisrepräsentation darzustellen. Er übernimmt die Zeichnung nicht von seinem Partner, sondern zeichnet die Anteile eigenständig ein (vgl. Abb. 5.29).

Nachdem beide Partner die Anteile eingezeichnet haben, gehen Can und Philip zur Berechnung der Anteile über. Philips Aussagen zeigen, dass er jetzt, wo er weiß, welche Anteile die beiden Jugendlichen jeweils bekommen, das Operatorschema anwendet, die jeweiligen Teiloperatoren :12 und ·5 bzw. ·7 korrekt bestimmt und die Anteile berechnet.

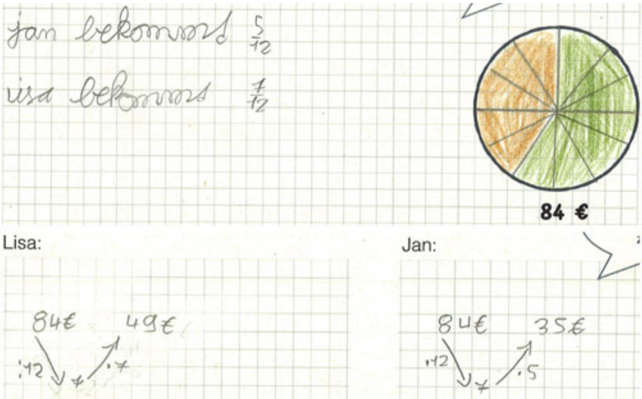



**Abbildung 5.29** Can Lösung von Aufgabe 2

Im Gegensatz zu Philip zeigt Can Unsicherheiten bezüglich der Berechnung der Anteile. Er fragt seinen Partner zunächst wiederholt, wie viel $\frac{5}{12}$ von 84 sind, wie viel Geld jeder bekommt (51–53) und was Philip macht, um die Anteile zu berechnen (56). Philip erklärt ihm den Rechenweg und Can notiert ihn in seinem Arbeitsheft. Obgleich die Interaktion und Cans wiederholte Blicke auf Philips Arbeitsheft den Anschein erwecken, dass er die Rechnungen bei seinem Partner abschreibt, sind deutliche Unterschiede in der Notation der beiden Schüler zu erkennen. Während Philip die Rechnungen in einer Art Term notiert, in dem er schreibt $84 : 12 = 7 \cdot 7 = 49$ (vgl. Abb. 5.28), notiert Can den Rechenweg korrekt in einem Pfeilschema (vgl. Abb. 5.29). Es ist anzunehmen, dass er aufgrund großer Unsicherheit sich mehrfach bei seinem Partner versichert, wie der Rechenweg lauten muss, jedoch die Darstellung der Rechnung in einem Pfeilschema übertragen und in dieser Situation anwenden kann. Es kann daher angenommen werden, dass er die Struktur der Rechnung im Allgemeinen überträgt, jedoch Schwierigkeiten hat, die korrekten Rechenoperatoren eigenständig herzuleiten. Diese Interpretation wird durch die beobachteten Schwierigkeiten Cans beim Rechnen mit natürlichen Zahlen sowie seine vorhergehende Begründung, dass $\frac{5}{7}$ der korrekte Anteil sei, da $5 \cdot 7 = 84$ sei, gestützt.

Zuletzt äußert Can seine Irritation darüber, dass Lisa mehr Geld ausgezahlt bekommt als Jan. Auch die Differenz der Geldbeträge scheint er nicht korrekt zu erfassen, da er anmerkt, dass Lisa lediglich „zwei Stunden“ mehr gearbeitet habe und mit 49 € „direkt das doppelte“ (76) von 35 € bekomme. Aufgrund dieser Äußerungen von Can ist zu anzunehmen, dass er die Anteilbildung in dieser Situation noch nicht vollständig verstanden hat. Ihm scheint nicht ersichtlich zu sein, dass die beiden Jugendlichen entsprechend ihrer unterschiedlichen Anzahl an geleisteten Arbeitsstunden einen unterschiedlichen Betrag ausgezahlt bekommen. Obwohl seine Irritation jedoch auch mit der weit überschätzten Differenz der Geldbeträge erklärt werden kann, ist vor dem Hintergrund seiner vorhergehenden Aussagen, geäußerten Verständnisschwierigkeiten und Fehlinterpretationen von Anteilen dennoch anzunehmen, dass er den Bezug der Anteile zur Aufgabensituation nicht vollständig hergestellt und verstanden hat, auch wenn er den Hinweis der Sitznachbarin wiederholt, dass die Anteile der beiden Jugendlichen etwas damit zu tun haben, dass Lisa 7 und Jan 5 Stunden gearbeitet hat (46–47).

Insgesamt lässt sich die Bearbeitung von Can und Philip in den folgenden Deutungshypothesen zusammenfassen:

- Es wird kein Bezug zum Lösungsbeispiel oder dem ersten unvollständigen Beispiel hergestellt und demzufolge auch keine Analogie zum Transfer des Lösungsverfahrens gebildet. Im Lösungsbeispiel sowie im ersten unvollständigen Beispiel werden die Anteile des Ganzen gemäß der Personenanzahl gebildet. Im zweiten unvollständigen Beispiel hingegen müssen die Anteile entsprechend der Arbeitszeit in Stunden gebildet werden. Can und Philip identifizieren zwar den Geldbetrag von 84 € als das Ganze, jedoch gelingt es ihnen nicht die Anteile zu bestimmen, auf die das Ganze aufgeteilt werden soll. Es anzunehmen, dass der ausbleibende Transfer auf die veränderten Kontextbedingungen im Vergleich zum Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel zurückzuführen ist. Entsprechend der Aufteilung auf Grundlage der Anzahl an Personen wird eine Aufteilung in gleiche Teile vorgeschlagen, jedoch aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an Arbeitsstunden der beiden Jugendlichen verworfen. Eine Aufteilung anhand der Arbeitsstunden wird dennoch nicht in Betracht gezogen.
  Auch mit dem Hinweis ihrer Sitznachbarin, dass sie die Anteile entsprechend der Arbeitszeit in Stunden bilden sollen, gelingt es ihnen nicht die Anteile zur Aufteilung des Ganzen zu bestimmen. Der Grund dafür ist, dass sie lediglich den Geldbetrag von 84 € als Ganzes identifizieren und nicht erkennen, dass dieser Geldbetrag mit der Summe der Arbeitsstunden im Zusammenhang steht.
- Die Schwierigkeit die Anteile am Gewinn zu bestimmen führt dazu, dass Can und Philip versuchen anhand der Zahlenwerte im Aufgabentext eine Rechnung zusammenzustellen, ohne dabei den Aufgabenkontext einzubeziehen.
- Ungeachtet ihrer Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Anteile übertragen Can und Philip das Operatorschema zur Berechnung der Anteile. Nachdem ihre Sitznachbarin ihnen gesagt hat, welche Anteile die beiden Jugendlichen erhalten, beginnen Can und Philip sofort damit die Anteile auszurechnen. Während Can

zunächst Unsicherheiten bezüglich der Teiloperatoren und Zwischenergebnisse zeigt, wendet Philip das Operatorschema sicher an. Im Gegensatz zu Can, der den Rechenweg in einem Pfeildiagramm darstellt, notiert Philip eine Art Term, in dem er die beiden Teilrechnungen hintereinander ausführt.

- Can deutet den Bruch im Anteil $\frac{5}{12}$ von 84 € im Sinne einer komponentenweise Betrachtung von Zähler und Nenner und argumentiert, dass $5 \cdot 12 = 84$ sei. Diese Fehlinterpretation kann einerseits auf die fehlerhafte Kopfrechnung zurückgeführt werden, deutet andererseits aber auch darauf hin, dass er den Bruch in diesem Zusammenhang weder als Anteil noch als Operator, sondern als zwei natürliche Zahlen betrachtet, was möglicherweise zur Entwicklung eines fehlerhaften Denkmusters bzw. einer Fehlvorstellung führen kann.

**Vergleich der Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele:**
Die Bearbeitung erfordert die Übertragung des Verfahrens der Anteilbestimmung und Anteilberechnung von dem Lösungsbeispiel auf nahezu identische Aufgabenstellung mit veränderten Zahlenwerten sowie auf eine analoge Aufgabenstellung in einem neuen strukturgleichen Sachkontext mit anderen Bezugsgrößen. Die zentralen Aspekte in den Detailanalysen der Bearbeitungsprozesse waren dabei zum einen die *Bildung einer Analogie* zwischen dem Lösungsbeispiel und den unvollständigen Beispielen sowie *die Übertragung des Operatorschemas* zur Bestimmung und Berechnung von Anteilen eines Ganzen.

**Analogiebildung:** In den beiden dargestellten Bearbeitungsprozessen können die zentralen Schwierigkeiten der Aufgabenlösung im Rahmen der Analogiebildung als Voraussetzung zur Übertragung des Lösungsverfahrens beschrieben werden. Anders als es aufgrund der sachanalytischen Analysen erwartet wurde, betrifft dies bereits die Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels, in dem sowohl der identische Sachkontext sowie die beinhalteten Größen eine direkte Abbildung der Lösungsschritte ermöglichen sollten.

Bennet und Julius erkennen zunächst keinen Zusammenhang zu dem Lösungsbeispiel und betrachten das erste unvollständige Beispiel als vollkommen neue Aufgabe. Julius bemerkt gar, dass es für diese Aufgabe kein Lösungsbeispiel gebe. Erst im Austausch mit der Lehrkraft, die sie zunächst auf die Beziehung mit dem Lösungsbeispiel hinweist und zudem die Aufmerksamkeit der Schüler auf den Kontext der Aufgabe, insbesondere das Aufteilen eines Geldbetrags auf zwei Familien mit unterschiedlichen vielen Familienmitgliedern lenkt, erkennen sie die analoge Struktur zum Lösungsbeispiel. In der Folge bilden sie erfolgreich und ohne erkennbare inhaltliche Verständnisschwierigkeiten die einzelnen Verfahrensschritte auf die neuen Zahlenwerte ab.

Genau wie Bennet und Julius erkennen auch Can und Philip zunächst keinen Zusammenhang zwischen dem Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel. Es fällt auf, dass der Sachkontext in ihre Bearbeitung zunächst nicht aufgegriffen wird und die Schüler versuchen allein auf Grundlage der vorgegebenen Lösungsansätze und Zahlenwerte die Aufgabe zu bearbeiten. Dies scheitert zunächst daran, dass es ihnen nicht gelingt die Gewinnanteile für jede Familie zu bestimmen, die genau wie im Lösungsbeispiel von der Anzahl der Familienmitglieder der beiden Familien abhängt. Erst als Can scheinbar zufällig beim wiederholten Lesen der Aufgabenstellung bemerkt, dass die beiden Familien aus unterschiedlichen vielen Personen bestehen, stellt Philip erkennt Philip den Zusammenhang zum Lösungsbeispiel und es gelingt ihm die einzelnen Lösungsschritte zu übertragen.

Beide Bearbeitungsprozesse haben gemeinsam, dass die Schüler ihre Aufmerksamkeit zunächst nicht auf die Anzahl der Personen in jeder Familie richten und entsprechend keine Beziehung zum Lösungsbeispiel herstellen, obwohl der Lösungsweg bereits vorstrukturiert und mit Hinweisen versehen ist. Die Bearbeitungsprozesse beider Schülerpaare deuten darauf hin, dass die vom Lösungsbeispiel verschiedene äußere Gestaltung des ersten unvollständigen Beispiels ein wesentlicher Grund für das anfängliche Nichterkennen der Strukturgleichheit zwischen diesen beiden ist. Während im Lösungsbeispiel die Aufteilung des Ganzen auf die jeweiligen Familien und Familienmitglieder in Form von ikonischen Personendarstellungen und einer ikonischen Kreisrepräsentation dynamisch veranschaulicht wird, sind im ersten unvollständigen Beispiel keine Abbildungen von Personen enthalten. Stattdessen ist die Darstellung der Aufgabenstellung auf einen Text beschränkt, der die Anzahl der Familienmitglieder in Klammern hinter den Familiennamen angibt. Auch die vorgegebene Kreisrepräsentation enthält keinen Hinweis auf die Anteile für die beiden Familie, da diese von den Schülern selbst eingezeichnet werden müssen. Aus diesen Gründen wird die Aufmerksamkeit nicht direkt auf die Personen gelenkt und die Schüler suchen nach alternativen Möglichkeiten der Anteilbestimmung. Dies wird insbesondere durch die Vorgabe von Lösungsansätzen unterstützt, da diese nahelegt, das die Lösungsschritte nur ergänzt werden müssen. Vor allem in der Bearbeitung von Can und Philip ist zu beobachten, dass die Schüler zunächst ausschließlich in den Lösungsansätzen nach Hinweisen für die Anteilbestimmung suchen, und den Sachkontext im Aufgabentext nicht beachten.

In den Bearbeitungen des zweiten unvollständigen Beispiels besteht die Bildung einer Analogie in der Abbildung der Strukturelemente unter Beachtung der unterschiedlichen Bezugsgrößen (vgl. Tab. 5.3).

**Tabelle 5.3** Abbildung der Kontextelemente des Lösungsbeispiels auf das zweite unvollständige Beispiel

| **Lösungsbeispiel** | **Zweites unvollständiges Beispiel** |
|---|---|
| Das Ganze ist ein Geldbetrag von 21000 €. | Das Ganze ist ein Geldbetrag von 84 €. |
| Der Geldbetrag wird auf die zwei Familien Meyer und Stein aufgeteilt. | Der Geldbetrag wird auf die zwei Jugendlichen Lisa und Jan aufgeteilt. |
| Die Familien haben eine unterschiedliche Anzahl an Familienmitgliedern. Familie Meyer besteht aus drei Personen, Familie Stein aus vier. | Die beiden Jugendlichen haben eine unterschiedliche Anzahl an Stunden gearbeitet. Lisa hat sieben Stunden gearbeitet und Jan fünf. |
| Insgesamt wird der Geldbetrag auf sieben Personen aufgeteilt. | Die beiden Jugendlichen haben zusammen zwölf Stunden gearbeitet. |
| Jede Familie erhält jeweils einen Teil für jedes Familienmitglied. | Lisa und Jan erhalten jeweils einen Teil für jede Arbeitsstunde. |

Im Fall von Bennet und Julius konnte beobachtet werde, dass Bennet quasi spontan die in Tabelle 5.3 beschriebenen Abbildungen vorgenommen hat, und auf diese Weise die neue Sachsituation erfassen und erschließen konnte, sodass er sofort erklärt, dass das Ganze in zwölf gleiche Teile aufgeteilt werden muss, die dann auf die beiden Jugendlichen aufgeteilt werden. Seinem Partner Julius gelingt die Abbildung nicht auf Anhieb, sondern erst durch einen Hinweis von Bennet. Julius geäußerte Verständnisschwierigkeiten bringen zum Ausdruck, dass es in seinem Fall womöglich nicht allein die veränderten Bezugsgrößen sind, die ihn irritieren. Seine Irritation betrifft vor allem die Beschreibung der Sachsituation, dass zwei Jugendliche unterschiedlich lange gearbeitet haben und gemeinsam einen Lohn für ihre Arbeit ausgezahlt bekommen. Für gewöhnlich bekommt man den Lohn für seine Arbeit direkt ausgezahlt und muss ihn sich nicht mit einem Arbeitskollegen teilen. Sein erster Vorschlag für eine Aufteilung ist, dass sie den Lohn in gleiche Teile aufteilen. Erst als Bennet ihn darauf hinweist, dass die beiden Jugendlichen unterschiedlich lange gearbeitet haben, erkennt er, dass der Lohn durch die Summe der Arbeitsstunden in zwölf gleiche Teile aufgeteilt werden muss, von denen Lisa und Jan schließlich die ihren Arbeitsstunden entsprechende Anzahl an Teilen bekommen.

Can und Philip haben wesentlich größere Schwierigkeiten mit der Abbildung der strukturrelevanten Aufgabenelemente. Sie identifizieren den Geldbetrag von 84 € sofort als Ganzes und erkennen auch, dass dieser gerecht auf die zwei Jugendlichen aufgeteilt werden soll. Sie stellen jedoch keinen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Arbeitsstunden der beiden Jugendlichen und der Aufteilung des Ganzen her und es gelingt ihnen aufgrund dessen nicht, die Anteile am Geldbetrag für die beiden Jugendlichen zu bestimmen. In ihren Bearbeitungsvorschlägen wird deutlich, dass sie nicht versuchen auf Grundlage des Sachkontexts die Anteile abzuleiten, sondern versuchen anhand der enthaltenen Zahlenwerte direkt die Geldbeträge zu berechnen. Auch ein erster Hinweis ihrer Sitznachbarin, dass die Stunden zur Anteilbildung genutzt werden sollen, hilft ihnen nicht. Erst als ihre Nachbarin expliziter wird und ihnen den Anteil nennt, den Jan bekommt, erschließen sie auch den Anteil für Lisa und stellen die Anteile im Kreisdiagramm dar. Diese Beobachtungen legen den Schluss nahe, dass Can und Philip zwar die Stundenanzahl wahrgenommen haben, jedoch nicht den Zusammenhang entdeckt haben, dass der Geldbetrag der Summe der Arbeitsstunden entspricht. Es ist möglich, dass ihre Schwierigkeiten bei der Analogiebildung auf ihr flüchtiges Lesen des Lösungsbeispiels zurückzuführen ist. Anstatt die einzelnen Lösungsschritte nachzuvollziehen, haben sie diese lediglich schnell durchgeklickt und die Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen in den Endzuständen des Lösungsbeispiels gesucht. Diese Beobachtung stützt die Vermutung einer oberflächlichen Verarbeitung des Lösungsbeispiels, die dazu führt, dass sie die strukturellen Zusammenhänge nicht vollständig erschließen und entsprechend auf die Anteilbildung im zweiten unvollständigen Beispiel übertragen können.

Zusammenfassend kann angenommen werden, dass die folgenden Aspekte den Transfer des Lösungswegs auf die unvollständigen Beispiele beeinflussen:

- Die äußere Gestaltung der unvollständigen Beispiele,
- Oberflächliches Lesen des Lösungsbeispiels,
- geringe Vertrautheit mit der Sachsituation,
- die Fokussierung auf den Rechenweg,
- Irritationen durch veränderte Größen und Bezüge zueinander.

**Übertragung und Anwendung des Operatorschemas:** Im Gegensatz zum Bilden der Anteile des Ganzen gelingt es beiden Schülerpaaren das Operatorschema zur Berechnung der Anteile auf die unvollständigen Beispiele zu übertragen und anzuwenden. Im Fall von Julius ist zu beobachten, dass er bei der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels noch deutliche Unsicherheiten bei der Bestimmung der Teiloperatoren hat, und nicht sicher ist, auf welche Größen diese angewendet werden. In der Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels sind diese Unsicherheiten hingegen nicht mehr zu beobachten. Diese Beobachtung kann als eine zunehmende Vertrautheit und Verinnerlichung mit dem Verfahren interpretiert werden.

Ähnliche Unsicherheiten, wie sie in Julius Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels zu beobachten sind, können auch im Fall von Can gemacht werden. Er versichert sich sowohl im ersten wie auch im zweiten unvollständigen Beispiel bei seinem Partner über die korrekten Rechenschritte.

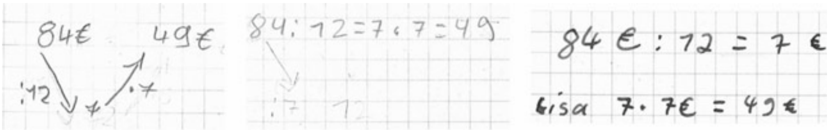



**Abbildung 5.30** Cans, Philips und Julius (von links nach rechts) Notation der Berechnung von $\frac{7}{12}$ von 84

In Bezug auf die Notation des Rechenwegs ist festzustellen, dass lediglich Can die Darstellung der Rechnung im zweiten unvollständigen Beispiel anhand eines Pfeildiagramms vornimmt. Die anderen Schüler notieren den Rechenweg in Form von Termen (vgl. Abb. 5.30). Insbesondere in der Abbildung der Rechnung von Philip ist zu erkennen, dass er zunächst 84 : 7 gerechnet hat, und diesen Rechenweg in einem Pfeildiagramm darstellen wollte. Da er diese Rechnung im Rahmen der Suche nach einem Lösungsweg aufgestellt hat, ist anzunehmen, dass er sich hierbei nicht sicher ist ob diese Rechnung zum Ziel führt. Zusammen mit der Beobachtung von Cans Unsicherheiten bei der Berechnung der Anteile kann vermutet werden, dass die Schüler im Fall von Unsicherheit die Darstellung in einem Pfeildiagramm bevorzugen bzw. sich an diesem orientieren. In Bennet und Julius sowie später auch Philips Anteilberechnung im zweiten unvollständigen Beispiel sind keine Unsicherheiten oder Schwierigkeiten zu erkennen und sie notieren den Rechenweg ohne die Darstellung in einem Pfeildiagramm in einer ihnen womöglich vertrauteren Termschreibweise. In diesem Zusammenhang merkt Bennet an, dass er die Rechnung an sich „einfach“ findet, jedoch die Darstellung im Pfeildiagramm einen zusätzlichen und womöglich unnötigen Aufwand darstellt.

### 5.2.2 Anwendung des Verfahrens in einem komplexen Sachkontext

Im Anschluss an die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele haben die Schülerinnen und Schüler in ihren Arbeitsheften verschiedene Aufgaben zum Berechnen von Anteilen beliebiger Größen bearbeitet. Diese umfassten u. a. Aufgaben zur Berechnung von Anteilen von Strecken und Gewichten, Anteilen von mehreren Ganzen sowie Aufgaben, in denen Fehler in vorgegebenen Rechnungen gesucht und korrigiert werden sollten. Die nun vorliegende Aufgabe geht über die Anwendung des Verfahrens zur Berechnung von Anteilen beliebiger Größen hinaus, da nicht wie bisher ein Anteil von einer beliebigen Größe berechnet, sondern von einem Anteil einer beliebigen Größe auf einen anderen Anteil derselben Größe geschlossen werden soll (Abb. 5.31).

**AUFGABE 9**

Bei einer Fahrradkontrolle wurden an 34 Fahrrädern Mängel festgestellt.
Das waren $\frac{2}{7}$ aller kontrollierten Fahrräder.
An wie vielen Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt?

**Abbildung 5.31** Aufgabe 2.9

Im Aufgabentext ist die Anzahl von 34 Fahrrädern gegeben, die $\frac{2}{7}$ der Gesamtmenge kontrollierter Fahrräder entspricht. Es soll berechnet werden, an wie vielen Fahrrädern keine Mängel festgestellt wurden. Dazu ist es notwendig die 34 Fahrräder als Teil eines Ganzen zu interpretieren und einen Bezug zum Ganzen bzw. der Anzahl aller kontrollierten Fahrräder herzustellen. Es sind drei Lösungswege denkbar:

1. *Bestimmen des Ganzen und Berechnen von $\frac{5}{7}$ des Ganzen als komplementären Anteil zu $\frac{2}{7}$ (Zweisatz):*
   34 Fahrräder entsprechen $\frac{2}{7}$ aller kontrollierten Fahrräder. Zur Bestimmung des Ganzen muss somit das Verfahrens zur Anteilberechnung umgekehrt werden:
   34 Fahrräder : 2 = 17 Fahrräder und 17 Fahrräder ·7 = 119 Fahrräder.
   Es wurden also insgesamt 119 Fahrräder kontrolliert. Da an $\frac{2}{7}$ dieser Fahrräder Mängel festgestellt wurden, wurden an $\frac{5}{7}$ von 119 Fahrrädern keine Mängel festgestellt:
   119 Fahrräder : 7 = 17 Fahrräder und 17 Fahrräder ·5 = 85 Fahrräder.
2. *Bestimmen von $\frac{1}{7}$ des Ganzen und Berechnen von $\frac{5}{7}$ des Ganzen (Anwenden von Operatoren):*
   Da 34 Fahrräder $\frac{2}{7}$ aller kontrollierten Fahrräder sind, entspricht die Hälfte dieser 34 Fahrräder, also 17 Fahrräder, $\frac{1}{7}$ aller kontrollierten Fahrräder. Durch Multiplikation mit 5 erhält man $\frac{5}{7}$ des Ganzen bzw. die Anzahl der Fahrräder, an denen

keine Mängel festgestellt wurden:
34 Fahrräder : 2 = 17 Fahrräder und 17 Fahrräder ·5 = 85 Fahrräder.

3. *Bestimmen des Ganzen und Bilden der Differenz:*
34 Fahrräder entsprechen $\frac{2}{7}$ aller kontrollierten Fahrräder. Zur Bestimmung des Ganzen muss somit das Verfahrens zur Anteilberechnung umgekehrt werden:
34 Fahrräder : 2 = 17 Fahrräder und 17 Fahrräder ·7 = 119 Fahrräder. Da an 34 von 119 Fahrrädern Mängel festgestellt wurden, sind an $119 - 34 = 85$ Fahrrädern keine Mängel festgestellt worden.

**Transferprozesse:** Die Lösung dieser mehrschrittigen Aufgabe erfordert sowohl die Aktivierung der Anteilvorstellung als auch der Operatorvorstellung. Im ersten Schritt muss der Bruch $\frac{2}{7}$ als Anteil interpretiert werden, um abzuleiten, dass zu einem Ganzen noch $\frac{5}{7}$ fehlen. Auf Grundlage der Operatorvorstellung muss in der Folge entweder das Verfahren zur Anteilberechnung rückgängig gemacht werden, um vom Anteil ausgehend das Ganze zu berechnen, oder von $\frac{2}{7}$ auf $\frac{1}{7}$ zu schließen, um $\frac{5}{7}$ berechnen zu können.

Somit besteht der Transfer in dieser Aufgabenstellung zum einen in der Interpretation der Sachsituation auf Grundlage der *Anteilvorstellung* zum Bestimmen des Anteils, eines Teils und des Ganzen sowie zum Herstellen eines Zusammenhangs zwischen diesen. Zum anderen ist es erforderlich das *Operatorschema* bzw. das Verfahren zur Berechnung von Anteilen zu übertragen und anzuwenden, um ausgehend von dem vorgegebenen Anteil des Ganzen einen Teil des Ganzen zu berechnen und mit diesem das Ganze oder den gesuchten Anteil vom Ganzen zu berechnen. Die Anwendung des Operatorschemas erfordert zudem eine Anpassung in Form der Umkehrung des Verfahrens zum Rückgängigmachen von Teiloperationen der Anteilberechnung.

Auf Ebene des Sachkontexts besteht der Transfer in dieser Aufgabe zudem in der Übertragung der Anwendung des Verfahrens von standardisierten Maßeinheiten (Geldbeträge in €, Längen, Gewichten) als Größe auf eine diskrete Menge von Objekten (Fahrräder).

**Bennet & Julius – Bestimmen des Ganzen**

Im Anschluss an die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele haben Bennet und Julius die nachfolgenden Aufgaben im Arbeitsheft der Reihe nach gelöst. Dabei konnten keine besonderen Schwierigkeiten beobachtet werden. Einzig in der Bearbeitung einer Aufgabe zum Bestimmen eines Anteils mehrerer Ganzer, in der gefragt wurde, wie viel Pizza jede Person bekommt, wenn sich sechs Personen 4 Pizzas teilen, konnte beobachtet werden, dass Julius einen zeichnerischen Lösungsansatz verfolgte. Bennet hingegen interpretierte die Situation im Rahmen einer Division und beschrieb die Aufteilung auf symbolischer Ebene als „4 Pizzen : $6 = \frac{4}{6}$ Pizzen“. Während Bennet bereits zur nächsten Aufgabe übergehen wollte, war Julius noch mit dem Zeichnen von vier Kreisen beschäftigt, was er kurzerhand abbrach und die Lösung von seinem Partner übernahm. Die unterschiedlichen Lösungsansätze in dieser Aufgabe sind charakteristisch für die allgemeinen Zugänge von Bennet und Julius: Während Julius stets versucht, die Aufgaben auf eine anschauliche Ebene zu übertragen, arbeitet Bennet stets auf rein symbolischer Ebene und fertigt nur Darstellungen an, wenn es in der Aufgabenstellung vorgesehen ist.

### Transkript B2A9 – Bennet & Julius – Szene 1 – Aufgabe 9

**Bennet:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*) Ach herrje. ... Ach, das ist ganz einfach. 7 mal ... Nein, das ist falsch. ... Achso, das ist einfach 34 geteilt durch 2 gleich 16 ... 17. 17, ne?
**Julius:** Was denn? 34?
**Bennet:** 7 mal ... 17 gleich ... 70 ... 119.
**Julius:** Warte mal (*schaut auf Bennets Arbeitsblatt*) 7 mal 8 ... 7 mal was?
**Bennet:** 7 mal 17.
**Julius:** Ach, ist die 8 durchgestrichen?
**Bennet:** Das soll ’ne 3 sein. (*schreibt laut*) An 119 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt. ... Ach herrje, jetzt hab ich schon wieder was falsch gemacht.
**Julius:** (*schreibt bei Bennet ab*) Also die 8 hier soll durchgestrichen sein, ne?
**Bennet:** Fuck ey ... Das hab ich jetzt richtig falsch gemacht.

Direkt nach dem Lesen der Aufgabenstellung erweckt Bennet den Eindruck, dass er mehrere Ideen für einen Lösungsweg hat. Zunächst scheint er die Aufgabe schwierig zu finden, kurz darauf wiederum „ganz einfach“ (1–2). Sein erster Lösungsvorschlag ist die Berechnung des Ganzen durch eine Multiplikation mit sieben (2). Diesen Vorschlag revidiert er kurz darauf jedoch wieder und erklärt, dass man zunächst „34 geteilt durch 2“ (3) rechnen müsse.

Intuitiv nimmt er zunächst an, dass er über eine Multiplikation mit sieben das Ganze erhält (2), was er nach kurzem Nachdenken jedoch revidiert und erklärt, dass man zunächst „34 geteilt durch 2“ (3) rechnen müsse. Er kommt zu dem Zwischenergebnis 17, multipliziert mit 7 und nennt 119 als Ergebnis (6). In seinem Arbeitsheft notiert er laut mitlesend: „An 119 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt“ (11–12). Unmittelbar nachdem er seinen Satz beendet hat bemerkt er jedoch, dass er „schon wieder was falsch gemacht“ (12–13, 16) habe.

Bennets Erklärungen bieten Anlass zur Annahme, dass er den Lösungsweg nach und nach erschließt, indem er eine Idee ausprobiert, diese reflektiert und korrigiert. Auf diese Weise folgt er zunächst seiner ersten Idee, die vorgegebene Anzahl von 34 Fahrrädern mit sieben zu multiplizieren, um das Ganze bzw. die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder zu berechnen. Er bemerkt jedoch, dass die Anzahl 34 nicht $\frac{1}{7}$, sondern $\frac{2}{7}$ des Ganzen sind und korrigiert seine Rechnung umgehend. Er dividiert im Weiteren durch 2 und multipliziert anschließend mit 7. Während er seine Lösung notiert, bemerkt er seinen Fehler, dass er lediglich das Ganze bestimmt hat, was jedoch nicht der Anzahl aller Fahrräder ohne Mängel entspricht.

Julius trägt zu der Bearbeitung nichts bei. Er fragt wiederholt, was Bennet rechnet und aufschreibt, stellt jedoch keine inhaltlichen Nachfragen oder beteiligt sich konstruktiv an der Lösung.

**Transkript B2A9 – Bennet & Julius – Szene 2 – Aufgabe 9**

**Julius:** 7 mal 17, oder?
**Bennet:** Die Aufgabe ist schon mal richtig, nur die Antwort noch nicht.
**Julius:** 7 mal 17 gleich ... 119?
**Bennet:** Ja, aber du kannst das auch nochmal nachrechnen.
**beide:** (*individuell – Julius schreibt ab*)
**Bennet:** Ich schreib da jetzt noch was anderes hin. (*schreibt laut mitlesend*) 119 minus 34 sind 20, 17, 85. So, jetzt hab ich's richtig.
**Julius:** Was kommt da raus? ... Was sind denn Dingens, Bennet? Keine Mängel?
**Bennet:** Mängel gefunden?
**Julius:** Was ist das?
**Bennet:** Warte, ... du weißt nicht, was Mängel sind?
**Julius:** Nein.
**Bennet:** Mängel sind, wenn das irgendwie kaputt ist, also wenn es zum Beispiel ganz verrostet ist.
**Julius:** Achso.
**Bennet:** Oder die Bremsen nicht funktionieren.
**Julius:** (*schreibt bei Bennet ab*)

Bennet erklärt, dass seine Rechnung bisher „schon mal richtig" sei, „nur die Antwort noch nicht" (18–19). Wenig später er notiert er erneut laut mitlesend seine Lösung und stellt fest: „So, jetzt hab ich's richtig" (23–25). Da er bereits die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder berechnet hat, subtrahiert er von diesen die Anzahl der mangelhaften Fahrräder und kommt zu dem Ergebnis, dass 85 Fahrräder die Kontrolle ohne Mängel passiert haben. In seinem Lösungsweg (Abb. 5.32) ist deutlich zu erkennen, dass er sich Schritt für Schritt dem einem richtigen Lösungsweg annähert, sein Vorgehen dabei stets hinterfragt und in Beziehung zum Aufgabenkontext setzt. Dabei wird deutlich, dass er das Operatorschema äußerst flexibel anwendet und problemlos Beziehungen zwischen Teil und Ganzem herstellt und diese rechnerisch bestimmen kann. Obgleich er zunächst die 34 Fahrräder als $\frac{1}{7}$ interpretiert, bemerkt er seinen Fehler und korrigiert diesen umgehend.

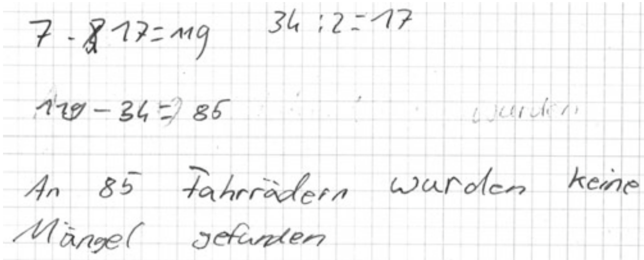



**Abbildung 5.32** Bennets Lösung von Aufgabe 2.9

Seine Erklärungen deuten darauf hin, dass er die Aufgabensituation zunächst nicht richtig gelesen oder verstanden hat, da er zunächst das Ganze bzw. die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder berechnet und diese als Ergebnis der Aufgabe interpretiert. Während er einen Antwortsatz auf die Frage in der Aufgabenstellung formuliert (11–13) bemerkt er seinen Fehler. Es ist anzunehmen, dass er sich bewusst ist, die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder berechnet zu haben, und genau das das Ziel seines Lösungsweges war. Während er seinen Antwortsatz notiert und dazu Bezug zum Aufgabenstellung nimmt, erkennt er jedoch sofort, dass er nicht die Frage nach der Anzahl der mängelfreien Fahrräder, sondern die Fragen nach der Anzahl aller kontrollierten Fahrräder beantwortet hat. Erneut kann er umgehend seinen Fehler korrigieren, indem er die Differenz zwischen der Anzahl aller kontrollierten Fahrräder und der Anzahl der mangelhaften Fahrräder berechnet. Es ist zu vermuten, dass in ähnlichen Aufgabenstellungen, die im Unterricht behandelt wurden, stets nach dem Ganzen gefragt wurde, da dies ein übliches Aufgabenformat ist, bei dem ein Zusammenhang zwischen Teil und Ganzem hergestellt wurde. Vor diesem Erfahrungshintergrund ist es möglich, dass er die Aufgabenstellung nicht wortgetreu gelesen hat und entsprechend nicht erkannt hat, dass nicht nach dem Ganzen, sondern nach dem komplementären Anteil gefragt wird. Diese Vermutung wird dadurch gestützt, dass er beim Schreiben seines Antwortsatzes, wobei er sich an der Formulierung der Aufgabenstellung orientiert, seinen Fehler sofort erkennt und diesen korrigieren kann.

Während Julius die Lösung von Bennet abschreibt, fragt er seinen Partner was der Ausdruck „keine Mängel“ (26–27) bedeutet und erklärt, dass er nicht wisse, was dieser bedeutet. Da er im gesamten Bearbeitungsprozess vor allem die Rolle eines Beobachters einnimmt und seine Teilnahme an der Bearbeitung sich auf Nachfragen nach Rechenschritten und Notationen beschränken, ist anzunehmen, dass er tatsächlich nicht weiß was dieser Ausdruck bedeutet. In diesem Zusammenhang kann seine Passivität im Lösungsprozess als mangelndes sprachliches Verständnis der Aufgabenstellung gedeutet werden.

Insgesamt kann die Bearbeitung von Bennet und Julius in folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Durch flexibles Anpassen des Operatorschemas gelingt es Bennet von dem vorgegebenen Anteil zunächst einen Teil des Ganzen, das Ganze selber sowie einen anderen Anteil des Ganzen zu bestimmen und diesen zu berechnen. Dabei interpretiert er die angegebenen Anteile durchgehend als Größen und rechnet mit diesen auf symbolischer Ebene. Vor allem vor dem Hintergrund der wiederholten Korrekturen seines Lösungsweges ist zu erkennen, dass er sehr sicher die *Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem herstellen* und diese auf eine rechnerische Ebene übertragen kann.
- Eine zentrale Schwierigkeit bei der Bearbeitung ist das *Verständnis der Aufgabenstellung*. In der Bearbeitung von Bennet und Julius konnte dies in zwei Ausprägungen beobachtet werden. Im Fall von Julius ist anzunehmen, dass er die Aufgabenstellung sprachlich nicht versteht. Er bittet seinen Partner ihm das Wort „Mängel“ zu erklären, da er dieses nicht kenne. Da dieses Wort wesentlich für das Verständnis der Aufgabenstellung ist, nimmt er lediglich passiv am Bearbeitungsprozess teil. Im Fall von Bennet ist anzunehmen, dass er im Sinne einer Übergeneralisierung früherer Aufgaben, in denen von einem Teil auf das Ganze geschlossen werden sollte, die Aufgabenstellung falsch interpretiert und annimmt, dass das Ganze bestimmt werden soll. Bei der Notation seines Antwortsatzes, für die er sich an der Fragestellung im Aufgabentext orientiert, bemerkt er seinen Fehler und korrigiert diesen umgehend.

**Anna Lena & Ellen – Pfeilschema**

Anna Lena und Ellen arbeiten über die gesamte Zeit sehr konzentriert und interaktiv. In allen Bearbeitungen besprechen sie sehr detailliert ihre Lösungsansätze und -vorschläge und stellen stets sicher, dass beide Partner alles verstanden haben. Obgleich die Vortestergebnisse der beiden Schülerinnen von 40 % (Anna Lena) und 90 % (Ellen) auf deutliche Unterschiede im Vorwissen hindeuten, sind diese in ihren Bearbeitungsprozessen nicht zu erkennen. Beide Schülerinnen tragen in gleicher Weise zur Bearbeitung der Aufgaben bei. Ihre vorhergehenden Aufgabenlösungen lassen dabei erkennen, dass sich sehr nah am Vorgehen im Lösungsbeispiel orientieren. So haben sie z. B. Anteile von Größen stets anhand eines Pfeilschemas berechnet und dargestellt. In ihren Bearbeitungsprozessen der vorhergehenden Aufgaben konnten mit Ausnahme vereinzelter Rechenfehler keine nennenswerten Schwierigkeiten der beiden Schülerinnen festgestellt werden. Das folgende Transkript dokumentiert ihre Bearbeitung von Aufgabe 2.9.

**Transkript B2A9 – Anna Lena & Ellen – Szene 1 – Aufgabe 9**

**Ellen:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*)
**Anna Lena:** Ok, wir rechnen jetzt. Kein Schaubild, ok? Ich muss überlegen. ... Ich weiß es drei vier ... Ich muss jetzt rechnen ...
**Ellen:** Das geht nicht.
**Anna Lena:** Betrug.
**Ellen:** Dann gibt's halt nur ein halbes Fahrrad ... Oder einer hat sein Einrad dabei.
**Anna Lena:** Einrad?
**Ellen:** Ja, mit Lenker.
**Anna Lena:** Warte mal, ich muss mal in den Lösungen schauen. (*blättert durch die vorherigen Aufgaben*) Immer mal das untere.. Nee, durch das untere. ... Ja, durch 7, ich hab alles richtig gemacht. ... Ich kapier das nicht.
**Ellen:** Ich kapier das auch nicht. Wieso haben wir denn da ein halbes Fahrrad? ... Ja, echt, das müssten 35 sein. 34 durch 7 geht ja auch nicht mal.

Nachdem Ellen die Aufgabenstellung laut vorliest, sagt Anna Lena umgehend, dass sie „jetzt rechnen“ müssen und schlägt vor in dieser Aufgabe „kein Schaubild“ zu zeichnen, womit sie sich auf die Darstellung der Rechnung in einem Pfeilschema bezieht (2–4). Ellen versucht zunächst 34 durch 7 zu teilen, stellt dann aber fest, dass diese Division nicht ganzzahlig aufgeht: „Das geht nicht“ (5).

Anna Lena blättert zunächst über die vorhergehenden Aufgaben und versichert sich der Teiloperatoren zur Anteilberechnung bzw. der Bedeutung des Zählers und Nenners eines Bruchoperators: „Immer mal das untere.. Nee, durch das untere“ (11–13). Daraus schließt sie auf den gleichen Rechenweg wie ihre Partnerin und stimmt ihr zu: „Ja, durch 7“ (13). Auch sie kommt bei dieser Rechnung nicht auf ein ganzzahliges Ergebnis und schließt mögliche Rechenfehler aus (13–14).

Ohne dass Ellen zu Beginn sagt, was sie rechnet, sind sich die beiden Partnerinnen über den Lösungsansatz einig. Sie versuchen beide die vorgegebene Anzahl von 34 Fahrrädern entsprechend des zuvor wiederholt angewendeten Verfahrens zur Berechnung von Anteilen durch sieben zu teilen. Beide Schülerinnen stellen dabei fest, dass diese Division kein ganzzahliges Ergebnis hat. Sie stellen direkt eine Beziehung zum Aufgabenkontext her und interpretieren das Ergebnis ihrer Rechnung im Sachkontext: „Dann gibt's halt nur ein halbes Fahrrad … Oder einer hat sein Einrad dabei“ (7–8). Während Ellen unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung beginnt zu rechnen, muss Anna Lena noch einmal auf die vorhergehenden Aufgaben zurückgehen, um sich des genauen Vorgehens bei der Anteilberechnung zu versichern. Es kann einerseits angenommen werden, dass Anna Lena noch sehr unsicher bei der Wahl der Rechenoperationen ist, während Ellen das Verfahren an dieser Stelle bereits soweit verinnerlicht hat, dass sie sofort die Rechenoperationen zur Anwendung des Operators $\cdot\frac{2}{7}$ ableiten kann. Ungeachtet dessen, stellen beide Schülerinnen fest, dass ihr Rechenansatz nicht richtig sein kann. Ellen erklärt: „Ich kapier das auch nicht. Wieso haben wir denn da ein halbes Fahrrad? … Ja echt, das müssten 35 sein. 34 durch 7 geht auch nicht mal“ (15–17).

**Transkript B2A9 – Anna Lena & Ellen – Szene 2 – Aufgabe 9**

**Anna Lena:** Ah, wir haben was völlig falsches gerechnet..
**Ellen:** Ja, eben, sag ich doch.
**Anna Lena:** Es sind ja die, die Mängel haben. Ich glaube, wir müssen genau anders herum. Also es waren, es sind 2 von ... Ah, ich weiß es. Also 2 sind ja diese 34, ne? Hör auf am Finger zu nuckeln. Also, und dann 7, 7 sind ... von 7 ... Was ist die Hälfte davon? Was ist 34 durch 2? Geht das?
**Ellen:** Ja, das geht ... 18.
**Anna Lena:** 18, super. Sicher?
**Ellen:** Ja.
**Anna Lena:** Gut, dann sind es 18 und das 5 mal, 18 mal 5.
**Ellen:** 18 mal 5. (*rechnet schriftlich*) 90.
**Anna Lena:** Und was macht das jetzt?
**Ellen:** 90 Fahrräder ... Ja, 90 Fahrräder.

Nach einer kurzen Phase, in der die beiden Schülerinnen still für sich nachdenken stellt Anna Lena fest: „Ah, wir haben was völlig falsches gerechnet“ (18). Sie erklärt weiter, dass die Zahl 34 für die Anzahl der Fahrräder steht, „die Mängel haben“ (20) und „genau anders herum“ (21) rechnen müssen. Sie erkennt, dass 34 Fahrräder zwei Teilen entsprechen (Zeile 22: „Also 2 sind ja diese 34“) und sie diese Anzahl demnach halbieren müssen, um $\frac{1}{7}$ des Ganzen zu erhalten: „Was ist die Hälfte davon? Was ist 34 durch 2?“ (24).

Ellen stimmt Anna Lena zu und nennt „18“ (26) als die Hälfte von 34, woraufhin Anna Lena hinzufügt, dass der weitere Rechenweg „18 mal 5“ (29) sei. Ellen übernimmt diese Rechnung und kommt zu dem Ergebnis „90 Fahrräder … Ja, 90 Fahrräder“. Beide Schülerinnen notieren im Stillen ihre Lösung.

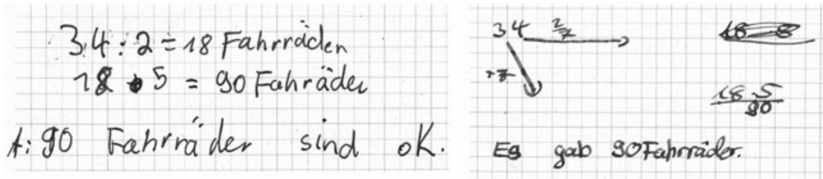



**Abbildung 5.33** Anna Lenas (links) und Ellens (rechts) Lösung von Aufgabe 2.9

Ungeachtet ihres Rechenfehlers $34 : 2 = 18$ ist in der Bearbeitung von Anna Lena und Ellen deutlich zu erkennen, dass sie zunächst versuchen das Verfahren zur Anteilberechnung direkt auf die Zahlen in der Aufgabenstellung anzuwenden und $\frac{2}{7}$ von 34 Fahrrädern berechnen wollen. Da die Division durch sieben jedoch zu keinem ganzzahligen Ergebnis führt, folgern sie, dass ihr Ansatz falsch sein muss. Nach kurzem Überlegen stellt Anna Lena dann fest, dass die angegebene Anzahl von 34 Fahrrädern nicht die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder ist, sondern der Anteil $\frac{2}{7}$ von 34 Fahrrädern ist und berechnen müssen, an wie vielen Fahrrädern keine Mängel festgestellt wurden. Sie leitet richtig ab, dass wenn $\frac{2}{7}$ der Fahrräder mangelhaft waren, der Anteil der Fahrräder ohne Mängel dann $\frac{5}{7}$ entsprechen müssen. Um dies zu Berechnen teilt Anna Lena dann 34 durch zwei, um $\frac{1}{7}$ zu erhalten und multipliziert danach mit fünf, um $\frac{5}{7}$ zu erhalten.

Obwohl Anna Lena zu Beginn noch einmal nachsehen muss, welche Rechenoperationen mit dem Zähler und Nenner durchgeführt werden, gelingt es ihr einen Zusammenhang zwischen dem vorgegebenen Anteil, einem Teil und dem komplementären Anteil herzustellen. Dabei erscheint es ihr der naheliegendste Weg zu sein $\frac{1}{7}$ des Ganzen zu berechnen, was darauf hindeutet, dass sie die Rechenoperationen und Brüche im Zusammenhang richtig interpretiert und das ursprüngliche Verfahren flexibel an die neue Situation anpasst. Dieser Eindruck wird auch durch ihre schriftliche Formulierung der Lösung bestärkt, in der sie anders als in allen vorhergehenden Aufgaben kein Pfeilschema zeichnet, sondern ihre schrittweise Rechnung in Termen notiert.

In der Kommunikation der beiden Schülerinnen wird nicht deutlich, inwieweit Ellen den Lösungsweg von Anna Lena nachvollzieht. Anders als ihre Partnerin notiert sie nicht den Rechenweg, sondern schreibt lediglich die schriftliche Multiplikation $18 \cdot 5$ sowie einen Antwortsatz auf. Ihr Antwortsatz deutet jedoch darauf hin, dass sie den Lösungsweg möglicherweise nicht verstanden hat. Sie schreibt „Es gab 90 Fahrräder" (siehe Abb. 5.33). Dieser Antwortsatz kann unterschiedlich interpretiert werden. Einerseits kann dieser Satz bedeuten, dass sie den Lösungsweg ihrer Partnerin nicht verstanden hat, und annimmt, dass in der Fahrradkontrolle insgesamt 90 Fahrräder geprüft wurden. Andererseits ist es möglich, dass sie mit „Es gab 90 Fahrräder" zum Ausdruck bringen will, dass es 90 Fahrräder gab, an denen keine Mängel festgestellt wurden. Auf Grundlage der vorliegenden Daten kann dies jedoch nicht entschieden werden.

Die Bearbeitung von Anna Lena und Ellen kann in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Anna Lena und Ellen versuchen zunächst das Operatorschema anzuwenden und $\frac{2}{7}$ von 34 zu berechnen, ohne einen direkten Bezug zur Situation im Aufgabenkontext herzustellen. Da diese Rechnung zu keinem plausiblen Ergebnis führt, suchen sie nach einem neuen Lösungsansatz.
- Obwohl Anna Lena zu Beginn Unsicherheiten bezüglich der Anwendung des Operatorschemas gezeigt hat, gelingt es ihr in der Folge das Verfahren flexibel an die Sachsituation anzupassen und über die Bestimmung eines Teils des Ganzen den gesuchten Anteil zu berechnen.
- Das Pfeilschema wird zur direkten Anwendung des Verfahrens genutzt. Anna Lena und Ellen setzen zunächst an $\frac{2}{7}$ von 34 zu berechnen und beginnen die Rechnung in einem Pfeilschema darzustellen. Als diese Rechnung jedoch zu keinem Ergebnis führt und sie den Rechenweg anpassen, wählen sie eine Termschreibweise zur Notation ihrer mehrschrittigen Rechnungen.

**Julia & Marie – Fehlvorstellung von Anteilen**

Die Partnerarbeit von Julia und Marie wird stark von Marie geleitet. Die Vortestergebnisse der beiden Schülerinnen zeigten beträchtliche Unterschiede in ihren Vorkenntnissen. Während Julia lediglich 20 % der Aufgaben im Vortest korrekt lösen konnte, erreichte Marie 75 % der möglichen Punkte. In den vorhergehenden Aufgabenlösungen zeigte Julia wiederholt, dass sie noch große Unsicherheiten bei der Deutung von Brüchen hat und sehr unsicher beim Berechnen von Anteilen ist. Die unterschiedlichen Leistungsniveaus werden insbesondere darin deutlich, dass Marie die Aufgaben größtenteils eigenständig löst. Julia versucht dabei ihrer Partnerin zu folgen und stellt viele Nachfragen, die von Marie ausführlich beantwortet werden.

### Transkript B2A9 – Julia & Marie – Szene 1 – Aufgabe 9

**Julia:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*) An 4.. Nein, an 5.
**Marie:** Hä?
**Julia:** An 5. An 5 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt.
**Marie:** 5 Siebtel bleiben über. Das sind keine Fahrräder. (*liest Aufgabenstellung laut vor*)
**Julia:** Aber warum nicht 5?
**Marie:** Ja, weil 2 Siebtel, 5 Siebtel.
**Julia:** Aah.
**Marie:** Es wurden ja hier 2 Siebtel ... (*stöhnt*) das sind ja ...
**Julia:** Es wurden 2 Siebtel kontrolliert und 5 Siebtel bleiben noch über.
**Marie:** Und dann sind's ja 34 Fahrräder, das sind 2 Siebtel, also musst du 34 durch 2..
**Julia:** (*unterbricht Marie*) Warum nicht 34 durch 7? Und dann mal 2? So geht das doch immer.
**Marie** Ja, aber du kannst ja nicht..
**Julia:** (*zeigt auf das LSB2 am Bildschirm*) Guck, da ist das auch so.
**Marie:** Guck mal, ich meine doch das Ganze ... Die 34 Fahrräder, an 34 Fahrrädern wurden Mängel festgestellt, an den anderen nicht. Jetzt müssen wir erstmal rausfinden, wie viele andere Fahrräder ... wie viele Fahrräder gab es denn?
**Julia:** Ok, 34 durch 2.
**Marie:** Gleich 17.
**Julia:** Gleich 17.
**Marie:** Das sind 17, so. Dann sind das ja 5 mal 17 ... 85.
**Julia:** 85.
**beide:** (*individuell – Marie schreibt – Julia schreibt bei ihr ab*)
**Marie:** Hast du das denn verstanden?
**Julia:** Ja.

Julia liest zunächst die Aufgabenstellung laut vor und sagt sofort, dass die Antwort auf die Frage, an wie vielen Fahrrädern keine Mängel festgestellt wurden, „5“ sei: „An 5 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt“ (1–2, 4). Ihre Partnerin Marie widerspricht diesem Vorschlag und erklärt, dass „5 Siebtel“ übrig bleiben und die Siebtel „keine Fahrräder“ seien (5). Julia scheint diese Erwiderung nicht zu verstehen und fragt „warum nicht 5?“ (7), worauf Marie ihr erklärt, dass es „2 Siebtel, 5 Siebtel“ (8) sind. Julia nimmt diese Argumentation auf und interpretiert sie so, dass „2 Siebtel kontrolliert [wurden] und 5 Siebtel noch über“ (12–13) bleiben.

Julias Lösungsvorschlag, dass an nur fünf Fahrrädern keine Mängel festgestellt wurden, deutet darauf hin, dass sie die Brüche nicht als Anteile eines Ganzen, sondern die Zähler der Brüche als natürliche Zahlen interpretiert. Ihrer Argumentation zufolge interpretiert sie die Aufgabensituation so, dass 7 Fahrräder kontrolliert wurden, und an 2 dieser Fahrrädern Mängel festgestellt wurden. Entsprechend müssen fünf dieser Fahrräder ohne Mängel gewesen sein. Diese Interpretation ist auf anschaulicher Ebene mit der verbreiteten Fehlvorstellung *$\frac{1}{n}$ bezeichnet eine Menge von n Objekten* als Übergeneralisierung des Quasikardinalzahlaspekts von Brüchen vergleichbar. Demnach übersetzt sie den Bruch $\frac{2}{7}$ als 2 und den Bruch $\frac{5}{7}$ als 5. Es ist anzunehmen, dass sie nur bedingt eine anschauliche Vorstellung zu diesen Brüchen aktivieren kann und in der Folge und in Bezug auf die Fragestellung in der Aufgabenstellung, in der nach einer Anzahl von Fahrrädern gefragt wird, auf die natürlichen Zahlen ausweicht. Auch ihre Antwort auf die Erwiderung ihrer Partnerin, dass „2 Siebtel kontrolliert [wurden] und 5 Siebtel […] noch über [bleiben]" (12–13) unterstützt diese Annahme. Bei wörtlicher Interpretation dieser Aussagen müsste angenommen werden, dass Julia meint, dass insgesamt $\frac{2}{7}$ Fahrräder kontrolliert wurden und demnach noch $\frac{5}{7}$ Fahrräder nicht kontrolliert wurden, was darauf hindeutet, dass Julia keinen Bezug zum Ganzen herstellt bzw. $\frac{2}{7}$ als Ganzes interpretiert. Diese Äußerung kann jedoch auch so interpretiert werden, dass sie meint, dass $\frac{2}{7}$ und $\frac{5}{7}$ zusammen das Ganze ergeben.

Auf Maries Feststellung, dass 34 Fahrräder $\frac{2}{7}$ sind und sie folglich 34 : 2 rechnen müssen (14–15) unterbricht Julia ihre Partnerin und fragt, warum sie nicht „34 durch 7 […] und dann mal 2" (16–17) rechnen, da „das doch immer" so gerechnet würde. Hier wird deutlich, dass Julia nun den Anteil $\frac{2}{7}$ von 34 berechnen möchte und für diesen Fall auch die korrekten Rechenoperatoren bestimmt, also in dieser Situation das Verfahren der Anteilberechnung übertragen möchte. Da sie jedoch die Aufgabensituation und insbesondere die Beziehungen zwischen Anteil, Teil und Ganzem nicht verstanden hat, versteht sie nicht, warum Marie etwas anderes rechnen möchte. Julia verweist weiterhin auf das Lösungsbeispiel am Bildschirm und stützt ihr Argument damit, dass im Lösungsbeispiel auch so gerechnet werde (19–20).

Im Gegensatz zu Julia scheint Marie die Aufgabensituation und insbesondere den Zusammenhang zwischen Anteil, Teil und Ganzem sofort zu erkennen. Sie halbiert in der Folge $\frac{2}{7}$ bzw. 34 Fahrräder um zu berechnen, dass $\frac{1}{7}$ des Ganzen 17 Fahrrädern entspricht. Diesen Teil multipliziert sie danach mit fünf um $\frac{5}{7}$ des Ganzen bzw. 85 Fahrräder als Anzahl der mangelfreien Fahrräder zu erhalten (21–29).

Insgesamt kann die Bearbeitung von Julia und Marie wie folgt zusammengefasst werden:

- Julia interpretiert die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{5}{7}$ nicht als relative Anteile einer Menge, sondern entsprechend der Fehlvorstellung $\frac{m}{n}$ *bedeutet m* (siehe Abschnitt 2.2.4) als absolute Anteile (bzw. Stückzahlen) 2 und 5 Fahrräder (Übergeneralisierung des Quasikardinalzahlaspekts von Brüchen).
- Julia möchte den Anteil $\frac{2}{7}$ von 34 berechnen und nennt auch die dazu notwendigen Rechenoperatoren. Damit zeigt sie, dass die das Verfahren zur Anteilberechnung überträgt und anwendet. Ihre Äußerungen deuten darauf hin, dass sie diese Rechenschritte soweit verallgemeinert hat, dass sie sagt, dass immer auf diese Weise gerechnet würde, und nicht versteht, warum ihre Partnerin in dieser Situation anders rechnen möchte.
- Aufgrund ihrer Fehlvorstellung zu den angegebenen Brüchen gelingt es Julia nicht den Anteil, einen Teil und das Ganze zu identifizieren und damit die Aufgabensituation zu verstehen.
- Marie hat keine Schwierigkeiten, die Aufgabensituation zu erschließen und das Verfahren zur Anteilberechnung anzupassen. Sie berechnet korrekt aus dem Anteil des Ganzen einen Teil des Ganzen, um von diesem ausgehend den gesuchten Anteil zu berechnen.

**Enya & Luisa – Fehlerhafter Bezug zum Ganzen**

Enya und Luisa gehören zu den leistungsstarken Schülerinnen und Schülern der Lerngruppe. Bereits im Vortest konnten sie 85 % (Enya) und 90 % (Luisa) der Aufgaben korrekt lösen. In den vorhergehenden Aufgaben zeigten sie keine besonderen Schwierigkeiten und konnten alle Aufgaben korrekt lösen.

**Transkript B2A9 – Enya & Luisa – Szene 1 – Aufgabe 9**

**Enya:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*) ... Da müssen wir 32 ... äh 34 mal 5 rechnen, oder?
**Luisa:** Oder 34 mal 7.
**Enya:** Nee.
**Luisa:** Ja, dann so.
**beide:** (*multiplizieren individuell 34 mit 5*)
**Luisa:** Nein, man muss nicht feststellen, wie viele Fahrräder ... ah doch, rechne mal so.
**beide:** (*rechnen weiter*)
**Luisa:** Nein, das ist falsch. Das ist ja nicht richtig. Du musst ja feststellen, an wie vielen nicht Mängel festgestellt werden konnten.
**Enya:** Ja, also muss man ... 2 Siebtel waren es. 2 minus 7 sind 5, das heißt 5 mal 34, weil so viele waren das ja.
**Luisa:** Ja, aber bei 2 ...

**Enya:** Und dann sind es 170 Fahrräder, die keinen Mangel hatten.
**beide:** (*individuell – schreiben*)

Die Bearbeitung von Enya und Luisa beginnt damit, dass Enya die Aufgabenstellung laut vorliest und nach kurzem Überlegen vorschlägt: „da müssen wir […] 34 mal 5 rechnen“ (1–2). Sie interpretiert 34 Fahrräder bzw. $\frac{2}{7}$ der Fahrräder als Einheit und hat erkannt, dass zwei Teile durch fünf Teile zu einem Ganzen ergänzt werden. Somit folgert sie, dass fünf Einheiten die gesuchte Menge an Fahrrädern ohne Mängel ergeben.

Ihre Partnerin Luisa schlägt alternativ vor zunächst die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder bzw. das Ganze zu bestimmen und 34 mit 7 zu multiplizieren (3). Ihr Alternativvorschlag deutet darauf hin, dass sie genau wie ihre Partnerin 34 Fahrräder als Einheit betrachtet und nicht erkennt, dass $\frac{2}{7}$ bereits zwei Teile beinhaltet.

Luisas Vorschlag wird von Enya abgelehnt und so multiplizieren die beiden Schülerinnen im Stillen 34 mit 7. Während der Ausführung dieser Rechnung hält Luisa inne und äußert Zweifel an ihrem Vorgehen: „Nein, muss man nicht feststellen, wie viele Fahrräder … ah doch rechne mal so“ (7–8). Unmittelbar nach der Fertigstellung ihrer Rechnung führt sie ihre Zweifel genauer aus und erklärt: „Nein, das ist falsch. Das ist ja nicht richtig. Du musst ja feststellen, an wie vielen nicht Mängel festgestellt werden konnten“ (10–12). Demnach deutet sie ihre Rechnung nicht als Berechnung des komplementären Anteils, sondern nimmt an, dass sie durch eine Multiplikation mit 5 die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder bestimmt.

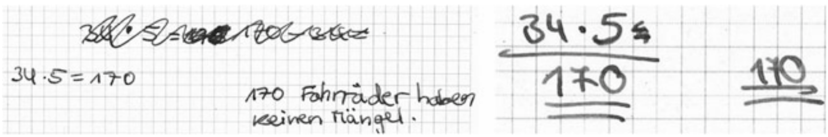



**Abbildung 5.34** Luisas (links) und Enyas (rechts) Lösung von Aufgabe 2.9

Die schriftliche Dokumentation ihrer Bearbeitung stützt diese Deutung (vgl. 5.34). Nachdem sie $34 \cdot 7 = 170$ berechnet hat, setzt sie an 34 von 170 zu subtrahieren. Sie führt diese Rechnung jedoch nicht aus und streicht den Term im weiteren wieder durch. Dieser Ansatz bestärkt einerseits die Vermutung, dass sie annimmt durch eine Multiplikation von 34 mit 5, die Anzahl aller kontrollierten Fahrräder zu erhalten. Zudem ist hier zu erkennen, dass sie unter der Annahme, dass insgesamt $\frac{7}{7}$ 170 Fahrrädern entsprechen, sie $\frac{2}{7}$, also 34 Fahrräder abziehen möchte, um $\frac{5}{7}$ zu erhalten. Dies ist insbesondere bemerkenswert, da sie offenbar 34 Fahrräder als $\frac{2}{7}$ des Ganzen erkennt, jedoch keine Rückschlüsse auf ihren Lösungsansatz zieht.

Enya widerspricht dem Einwand von Luisa und begründet: „2 Siebtel waren es. 2 minus 7 sind 5, das heißt 5 mal 34, weil so viele waren es ja“ (13–14). Auch in dieser Begründung von Enya ist zu erkennen, dass sie korrekt den komplementären Anteil zu $\frac{2}{7}$ bestimmen, dann jedoch $\frac{2}{7}$ bzw. 34 Fahrräder als Einheit bzw. als $\frac{1}{7}$ betrachten und mit diesem Wert weiter rechnet.

Luisas erneuten Einwand „Ja, aber bei 2“ (15) ignoriert sie und setzt sich letztlich durch, indem sie ihre Begründung fortführt und erklärt, dass es dann „170 Fahrräder [sind], die keinen Mangel hatten“ (16–17).

Die Bearbeitung von Enya und Luisa kann in folgender Deutungshypothese zusammengefasst werden:

- Das Verfahren zur Anteilberechnung wird direkt auf die gegebenen Zahlenwerte übertragen und angewendet. Enya und Luisa interpretieren den vorgegebenen Zahlenwert von 34 Fahrrädern als Einheit bzw. als $\frac{1}{7}$ der kontrollierten Fahrräder und nehmen diesen als Grundlage für ihre Rechnung. Sie erkennen nicht, dass diese 34 mangelhaften Fahrräder selber bereits ein Anteil sind und multiplizieren diese Anzahl gemäß des bekannten Verfahrens zur Anteilberechnung mit 5.

**Philip & Can – Übergeneralisierung des Verfahrens zur Anteilberechnung und Plausibilisierung einer falschen Rechnung sowie des Ergebnisses**

Im Anschluss an die geschilderte Bearbeitung der unvollständigen Beispiele war die Partnerarbeit von Can und Philip weiterhin von vielen Ablenkungen geprägt. In den auf die unvollständigen Beispiele folgenden Aufgaben waren zwei Aufgaben enthalten, in denen Anteile von Größen berechnet werden sollten. In diesen sollten $\frac{4}{9}$ und $\frac{5}{9}$ von 90 Kilometern, $\frac{1}{4}$ von 256 Kilogramm und $\frac{3}{4}$ von 6 Metern berechnet werden. Can und Philip haben keine dieser Aufgaben erfolgreich lösen können und in allen Fällen nach einem ersten Lösungsversuch aufgegeben. Im Gegensatz dazu haben sie in einer Aufgabe zum Kontrollieren von vorgegebenen Berechnungen von Anteilen den enthaltenen Fehler korrekt identifiziert, konnten diesen jedoch nicht korrigieren. Die Analyse ihrer vorhergehenden Bearbeitungsprozesse zeigt, dass sie das Verfahren zur Berechnung von Anteilen beliebiger Größen nicht selbstständig auf neue Aufgabensituationen und Sachkontexte übertragen haben. Das nachfolgende Transkript dokumentiert ihre Bearbeitung von Aufgabe 2.9.

**Transkript B2A9 – Can & Philip – Szene 1 – Aufgabe 9**

**Can:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*) 34 Fahrräder geteilt durch 2 Siebtel.

**Philip:** 34 durch 7. ... Geht überhaupt 34 durch 7? ... 34 durch 7 geht gar nicht.

**Can:** 34 geteilt durch 2 Siebtel.

**Philip:** Ich überlege gerade, was durch 7 ist und das dann mal 2. ... 35 geht, ne?

**Can:** Ja, Rest 1. Dann das mal 2? Und dann plus 1. ... Gut, dann rechnen wir das jetzt. Also 35 mal 2, ne? Sind 70. ... Plus 1 ... 71. An 71 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt.

**Philip:** Aber es sind doch nur 34 Fahrräder.

**Can:** (*liest:*) Bei einer Fahrradkontrolle wurden an 34 Fahrrädern Mängel festgestellt. Da steht nicht, dass das die sind. Da steht nicht, dass nur 34 Fahrräder kontrolliert wurden. Also an 71 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt.

**beide:** (*schreiben individuell*)

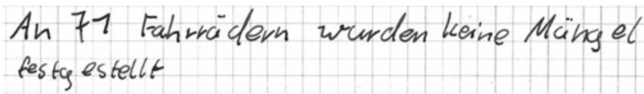



**Abbildung 5.35** Philips Lösung von Aufgabe 2.9

Direkt nachdem Can die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat, versucht er das Verfahren zur Berechnung von Anteilen anzuwenden und schlägt vor „34 Fahrräder geteilt durch 2 Siebtel“ (1–2) zu rechnen. Philip beginnt sofort zu rechnen und teilt „34 durch 7“ (3). Er stellt jedoch fest, dass 34 nicht durch sieben teilbar ist, woraufhin Can wiederholt, dass sie „34 geteilt durch 2 Siebtel“ rechnen müssen.

Beide Schüler versuchen somit das Verfahren Anteilberechnung anzuwenden und $\frac{2}{7}$ von 34 zu berechnen. Während Philip jedoch direkt beginnt zu rechnen und versucht 34 durch sieben zu teilen, geht Can nicht auf die Feststellung seines Partners ein, dass 34 nicht durch 7 teilbar ist. Can selber versucht nicht den Anteil auszurechnen, was vor dem Hintergrund der vorhergehenden Bearbeitungen, insbesondere der unvollständigen Beispiele, die darauf hindeuten könnten, dass er Schwierigkeiten bei der Durchführung einer solchen Anteilberechnung hat.

Es ist zudem zu erkennen, dass Can und Philip zunächst keinen Bezug zur Aufgabenstellung herstellen und dem Aufgabentext lediglich die Zahlenwerte 34 und $\frac{2}{7}$ entnehmen, auf die sie das Operatorschema anwenden wollen. Sie hinterfragen dabei nicht, was diese Zahlen im Sachkontext bedeuten.

Philip versucht weiter den Anteil $\frac{2}{7}$ von 34 auszurechnen und nennt auch korrekt die dazu notwendigen Teiloperatoren geteilt „durch 7“ und „mal 2“. Erneut bemerkt er, dass 34 nicht durch sieben teilbar ist, jedoch 35 durch 7 teilbar sei. Diesen Gedanken nimmt Can auf und interpretiert ihn so, dass 34 bei der Division durch sieben den Rest eins lässt und somit die Rechnung aufgehe (8). Er formuliert darauf aufbauend einen neuen Rechenweg: „Dann das mal 2? Und dann plus 1 […] Also 35 mal 2 […] sind 70 […] plus 1 … 71“ (8–11). Can erkennt nicht, dass 34 bei der Division durch sieben nicht den Rest eins, sondern sechs lässt. Unabhängig davon geht er nun von 35 als Bezugsgröße aus und multipliziert diese entsprechend des zweiten Teiloperators mit 2. Er kommt zu dem Ergebnis 70 und addiert auf diesen noch den vermeintlichen Rest eins.

Obwohl seine Rechnung den korrekten zweiten Teiloperator zum Berechnen des Anteils von $\frac{2}{7}$ von einer Größe enthält, kann Cans Rechnung so interpretiert werden, dass er vermeintlich willkürlich versucht eine Rechnung aufzustellen, die diesen Teiloperator enthält. Den ersten Teiloperator :7 erwähnt er zu keinem Zeitpunkt, was die Annahme seiner Schwierigkeiten bei der Anwendung des Verfahrens weiter bestärkt. Er plausibilisiert seinen Rechenweg im weiteren dadurch, dass er den vermeintlichen Rest eins auf sein Ergebnis addiert, obgleich er von seinem Ergebnis eigentlich das Doppelte dieses Rests subtrahieren müsste.

Im Anschluss setzt er seine Lösung in Bezug zum Aufgabenkontext und erklärt auf den Einwand von Philip, dass es „doch nur 34 Fahrräder“ (12) seien, dass in der Aufgabenstellung nicht stehe, „dass nur 34 Fahrräder kontrolliert wurden“, sondern „an 34 Fahrrädern Mängel festgestellt wurden“ (13–16). Im Aufgabenkontext erscheint ihm sein Ergebnis plausibel und er formuliert den Antwortsatz „An 71 Fahrrädern wurden keine Mängel festgestellt“ (16–17), den Philip übernimmt und im Arbeitsheft notiert (vgl. Abb. 5.35).

Philips Einwand, dass „es doch nur 34 Fahrräder“ (12) seien, bringt zum Ausdruck, dass auch er, wie zu Beginn vermutet, die Aufgabensituation nicht richtig versteht, sondern annimmt, dass die Aufgabe darin besteht, $\frac{2}{7}$ von 34 zu berechnen. Er ist zunächst irritiert, dass Cans Ergebnis größer ist als die von ihm angenommene Gesamtmenge der kontrollierten Fahrräder, lässt sich dann aber von Can überzeugen und übernimmt dessen Ergebnis.

Insgesamt lässt sich die Bearbeitung von Can und Philip in den folgenden Deutungshypothesen zusammenfassen:

- Die Aufgabensituation wird von Can und Philip nicht vollständig erschlossen. Sie entnehmen dem Aufgabentext lediglich die Zahlenwerte $\frac{2}{7}$ und 34, die sie so interpretieren, dass die Aufgabe darin besteht, den Anteil $\frac{2}{7}$ von 34 zu berechnen. Dieses Vorgehen kann als *Übergeneralisierung* des Verfahrens zur Anteilberechnung verstanden werden. Can und Philip übertragen das Vorgehen aus den vorhergehenden Aufgaben, ohne dass sie die Aufgabenstellung in ihre Überlegungen mit einbeziehen.

- Philip nennt die für Berechnung des Anteils $\frac{2}{7}$ von 34 korrekten Rechenoperatoren und zeigt, dass er das Verfahren zur Anteilberechnung grundsätzlich anwenden kann und die erforderlichen Rechenoperationen ableiten kann.
- Da ihr Rechenweg bereits bei der Division durch 7 nicht aufgeht, stellt Can einen willkürlich wirkenden Rechenweg zusammen, anhand dem seine Schwierigkeiten bei der Anteilberechnung deutlich werden. Anstatt den Ausgangswert zunächst durch 7 zu teilen und das Ergebnis dann mit 2 zu multiplizieren, multipliziert er direkt 34 mit 2 und addiert im Anschluss eins dazu. Es wundert ihn dabei nicht, dass sein berechneter Anteil vom Ganzen größer als das Ganze ist.
- Can stellt sein Ergebnis in Beziehung zum Aufgabentext und versucht anhand diesem sein Ergebnis zu *plausibilisieren*. Seine Argumentation überzeugt auch Philip, der seine Lösung übernimmt.

**Vergleich der Bearbeitungen**

In den Analysen der Bearbeitungsprozesse der unterschiedlichen Paare ist zu erkennen, dass in allen Fällen das Verfahren zur Anteilberechnung übertragen und angewendet wird. Der Bruchoperator „$\frac{2}{7}$ von“ wurde in nahezu allen Fällen mit dem Handlungsschema des Teilens des Ganzen in sieben gleiche Teile und dem Multiplizieren eines Teils mit zwei übersetzt. Dies ist insbesondere in den Wahlen der Rechenoperationen der Schülerinnen und Schüler zu erkennen.

Es konnte zudem beobachtet werden, dass die korrekte Interpretation des Operators kein hinreichendes Kriterium zur Anpassung des Verfahrens an die Situationseigenschaften des Aufgabenkontexts darstellt. Hierzu ist es erforderlich zu erkennen, dass die vorgegebene Anzahl von 34 Fahrrädern, an denen Mängel festgestellt wurden, ein Anteil der Menge aller kontrollierten Fahrräder ist. Nur durch die Interpretation dieser Anzahl als Anteil ist möglich, die Situation vollständig zu erschließen auf die Menge aller kontrollierten Fahrräder sowie dem Anteil der Fahrräder ohne Mängel zu schließen. Vor diesem Hintergrund konnten in den dargestellten Bearbeitungsprozessen charakteristische Fehler dokumentiert werden:

- Die direkte Anwendung des Verfahrens auf die im Aufgabentext angegebenen Zahlenwerte ohne Reflexion der Aufgabenstellung: $\frac{2}{7}$ von 34.
- Die Interpretation von 34 Fahrrädern als $\frac{1}{7}$ des Ganzen und Multiplikation mit 5 zur Berechnung von $\frac{5}{7}$.

Allgemein kann das zentrale Fehlermuster in der Anwendung der Teiloperatoren $:7$ und $\cdot 2$ auf die falsche Bezugsgröße zusammengefasst werden. Diese Fehler sind somit vor allem auf eine mangelnde Interpretation der Aufgabensituation auf Grundlage der Anteilvorstellung zurückzuführen, sodass die Schülerinnen und Schüler falsche Auswahlen für den Anteil, einen Teil oder das Ganze getroffen haben und fehlerhafte Bezüge zwischen diesen hergestellt haben.

Die direkte Anwendung des Operators „$\frac{2}{7}$ von“ auf die Zahl 34 kann als Übergeneralisierung des Verfahrens zur Anteilberechnung interpretiert werden. Die *Fokussierung auf die Anwendung dieses Handlungsschemas* beschränkt in vielen Fällen den Blick auf die Aufgabensituation, sodass diese nicht vollständig erfasst und fehlerhafte Zuordnungen vorgenommen werden. Eine Anpassung des Verfahrens wurde in vielen Fällen erst dann in Betracht gezogen, als die Schülerinnen und Schüler festgestellt haben, dass die vorgegebene Anzahl von 34 Fahrrädern nicht durch sieben teilbar ist. Erst dadurch wurde in vielen Fällen erkannt, dass die 34 Fahrräder zwei von insgesamt sieben Teilen der Fahrräder darstellen. Sofern diese Verknüpfung erfolgreich hergestellt wurde, konnte beobachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler in der Folge einen korrekten Lösungsweg finden und die notwendigen Rechenoperationen ableiten konnten.

Die Bestimmung des gesuchten Anteils erfolgte dann in den meisten Fällen nicht über die Bestimmung des Ganzen bzw. der Menge aller kontrollierten Fahrräder, sondern über den Teil $\frac{1}{7}$ bzw. 17 Fahrräder. Nur im Fall von Bennet und Julius wurde das Ganze bestimmt, wobei Bennet zunächst angenommen hat, dass das Ziel der Aufgabe die Bestimmung des Ganzen ist. In nahezu allen anderen Fällen wurde ein Teil mit fünf multipliziert, um $\frac{5}{7}$ zu erhalten, was als Kennzeichen für eine flexible Anwendung und Anpassung des Verfahrens interpretiert werden kann.

In den Bearbeitungsprozessen dieser komplexen Transferaufgabe konnten auch fehlerhafte Denkmuster bzw. grundlegende Fehlvorstellungen dokumentiert werden. Im Fall von Can und Philip führte die Beobachtung, dass 34 nicht durch sieben teilbar ist, nicht dazu, dass die Schüler ihren Lösungsansatz noch einmal reflektiert und auf die Aufgabenstellung bezogen haben. Stattdessen versuchten sie die Teiloperatoren $:7$ und $\cdot 2$ auf willkürlich anmutende Weise anzuwenden, um ein *plausibles* Ergebnis zu erhalten. Dieses Vorgehen kann dem verbreiteten Befund der „komponentenweisen Betrachtung von Brüchen als Kombination von zwei natürlichen Zahlen“ zugeordnet werden, da die Schüler den Zähler und Nenner von $\frac{2}{7}$ nicht ganzheitlich, sondern als voneinander getrennte Objekte betrachten, die mit einer Rechenoperation verknüpft und unabhängig voneinander angewendet werden.

Im Fall von Julia und Marie konnte beobachtet werden, dass Julia vom Anteil $\frac{2}{7}$ auf den komplementären Anteil $\frac{5}{7}$ aller kontrollierten Fahrräder geschlossen hat. Sie interpretierte den Bruch $\frac{5}{7}$ in der Folge jedoch nicht als Bruchoperator, der auf eine Größe angewendet wird, sondern als absoluten Anteil. Entsprechend der verbreiteten Fehlvorstellung schloss sie aus dem Bruch $\frac{5}{7}$ darauf, dass fünf Fahrräder ohne Mängel waren. Sie bezieht den Bruch nicht als relativen Anteil auf eine Größe, sondern interpretiert den Zähler 5 im Sinne einer Übergeneralisierung des Quasikardinalzahlaspekts von Brüchen als absoluten Anteil bzw. als Anzahl von Fahrrädern. Dieser Fehler deutet auf einen Rückgriff auf die Abzählbarkeit der natürlichen Zahlen aufgrund der Ermangelung adäquater anschaulicher Vorstellungen von Brüchen als relative Anteile hin.

### 5.2.3 Vergleich der Bearbeitungsprozesse in den beiden Transferaufgaben

Die Analysen der Bearbeitungsprozesse zum Transfer des Verfahrens zum Berechnen von Anteilen beliebiger Größen in diesem Abschnitt können unter drei wesentlichen Aspekten von Transferprozessen zusammengeführt und diskutiert werden: Der Ausbildung eines Handlungsschemas, der Übertragung dieses Handlungsschemas auf eine neue Sachsituation und der Verallgemeinerung dieses Handlungsschemas.

**Ausbildung eines Handlungsschemas:** Bereits in den Bearbeitungsprozessen der unvollständigen Beispiele ist zu erkennen, dass die Lernenden ein Handlungsschema zu dem Ausdruck $\frac{m}{n}$ *von einer Größe* ausgebildet haben, das ein Teilen des Ganzen in $n$ gleiche Teile und ein $m$-faches Vervielfachen eines Teils vorsieht. In den Bearbeitungsprozessen ist deutlich zu erkennen, dass die Lernenden stets versuchen dieses Handlungsschema auf die vorgegebenen Größen anzuwenden. Die Ausbildung dieses Handlungsschemas kann als fortschreitende Schematisierung und Erweiterung der Bruchherstellungshandlung zur Anteilbildung betrachtet werden. Bereits seit der ersten Sitzung der Unterrichtseinheit wurde diese Handlungen an Repräsentanten von konkreten Gegenständen (Kreise, Rechtecke, Strecken) eingeführt und durch die Übertragung auf Maßzahlen und unterschiedliche Größenbereite erweitert.

Die Übertragung und Anwendung dieses Handlungsschemas ist in allen in diesem Abschnitt dargestellten Bearbeitungsprozessen dokumentiert. Dabei scheint die Beschaffenheit des Ganzen in keinem Fall von Bedeutung zu sein und es macht für die Lernenden scheinbar keinen Unterschied, ob das Ganze eine ikonische Figur, eine Maßzahl oder abstrakte Größe ist.

Während die Anwendung dieses Handlungsschemas auf vorgegebene Zahlen und Größen, wie z. B. $\frac{4}{7}$ von 21000 €, allen Lernenden in den dargestellten Bearbeitungsprozessen gelingt, so stellt die Auswahl der Zahlen und Größen in einem Sachkontext die zentrale Schwierigkeit bei der Übertragung und Anwendung des Handlungsschemas auf neue Anforderungssituationen dar.

**Übertragung des Handlungsschemas auf eine neue Sachsituation:** In den Analysen der Bearbeitungsprozesse hinsichtlich der Übertragung und Anwendung des

Verfahrens zur Anteilberechnung ist zu erkennen, dass die Lernenden keine Probleme bei der Übertragung und Anwendung des Verfahrens als solches auf neue Zahlen und Größen hatten. Schwieriger stellte sich diese Übertragung und Anwendung in Situationen dar, in denen die Lernenden zunächst eigenständig die entsprechenden Anteile und Bezugsgrößen einer Situationsbeschreibung entnehmen mussten. So konnten bereits in den Bearbeitungen des ersten unvollständigen Beispiels, das sich vom Lösungsbeispiel nur in den Zahlenwerten unterscheidet, Schwierigkeiten bei der Übertragung des Lösungsweges beobachtet werden. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse der Lernenden wurden dahingehend interpretiert, dass insbesondere die äußere Gestaltung der Aufgabenstellung die Analogiebildung zum Lösungsbeispiel beeinträchtigt.

Die Schwierigkeiten der Lernenden betreffen nicht das Berechnen von Anteilen, sondern in allen Fällen die Identifizierung der Anteile als Grundlage für die Berechnung. Ungeachtet der isomorphen Analogie zwischen dem Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel stellte es sich als Schwierigkeit heraus, die veränderte Anzahl an Familienmitgliedern als Grundlage für die Aufteilung des Geldbetrags zu identifizieren. Es konnte wiederholt beobachtet werden, dass die Lernenden die Möglichkeit in Betracht zogen, den Geldbetrag zu gleichen Teilen auf die Familien aufzuteilen.

Im zweiten unvollständigen Beispiel sollte ein Geldbetrag auf zwei Jugendliche aufgeteilt werden, die unterschiedlich viele Stunden gearbeitet haben. Anders als zuvor sollte ein Geldbetrag nicht entsprechend der Anzahl von Personen, sondern entsprechend der Anzahl von Arbeitsstunden zweier Personen aufgeteilt werden. Hier zeigte sich erneut, dass die Lernenden keine Schwierigkeiten bei der Berechnung der Anteile hatten, sondern ihre Schwierigkeiten ausschließlich in der Bestimmung der Anteile zur Aufteilung des Ganzen zu verorten waren.

Die Analysen der Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele deuten darauf hin, dass die Schwierigkeiten der Lernenden bei der Anteilbildung vor allem auf zwei situationsbezogene Aspekte zurückgeführt werden können: Einerseits die abstrakte äußere Gestaltung des ersten unvollständigen Beispiels, in dem im Unterschied zum Lösungsbeispiel keine Personen abgebildet sind, auf die der Geldbetrag in gleichen Teilen aufgeteilt werden soll. Zum anderen ist anzunehmen, dass die Vertrautheit mit der Sachsituation, insbesondere im Fall des zweiten unvollständigen Beispiels zu Schwierigkeiten geführt hat. Hier ist anzunehmen, dass das Aufteilen eines Arbeitslohns ein den Lernenden eher unvertrauter Erfahrungsbereich ist und sie somit nicht unmittelbar die Anzahl der Arbeitsstunden als Aufteilungsgrundlage identifiziert haben.

Im Gegensatz zu den unvollständigen Beispielen war in den Bearbeitungsprozessen der mehrschrittigen Transferaufgabe „Fahrradkontrolle“ eine Anpassung des

Verfahrens bzw. eine Interpretation der Situation auf Grundlage des Verfahrens zur Anteilberechnung erforderlich. In den Analysen konnte rekonstruiert werden, dass die Lernenden auch hier keine Schwierigkeiten bei der Berechnung von Anteilen hatten, sondern ihre Schwierigkeiten erneut ausschließlich in der Bestimmung der Anteile lagen. Die in den Analysen herausgestellten charakteristischen Fehler zeigen auf, dass die Lernenden versuchen das Verfahren auf die Zahlenwerte im Aufgabentext anzuwenden, dabei jedoch nicht erkennen, dass der vorgegebene Anteil von 34 Fahrrädern $\frac{2}{7}$ und nicht $\frac{1}{7}$ des Ganzen entspricht, und entsprechend in ihren Berechnungen die falschen Bezugsgrößen wählten. Die Analysen dokumentieren, dass die Lernenden in den meisten Fällen den Rechenweg fokussierten, ohne einen Bezug zum Aufgabenkontext herzustellen.

**Verallgemeinerung des Handlungsschemas:** Die Schwierigkeiten der Lernenden bei der Bestimmung von Anteilen kann im Rahmen der Verallgemeinerung des Verfahrens zur Anteilberechnung bzw. in der Verallgemeinerung des zugehörigen Handlungsschemas interpretiert werden. Im Vergleich der Bearbeitungen der unterschiedlichen Aufgaben konnte beobachtet werden, dass die Lernenden direkt nach dem Lesen der Aufgabenstellung versuchen eine Rechnung aufzustellen, ohne die Aufgabensituation in ihre Überlegungen einzubeziehen. In der Folge werden fehlerhafte Zuordnungen der Bezugsgrößen vorgenommen und die Notwendigkeit der Anpassung des Verfahrens wird in vielen Fällen erst erkannt oder in Betracht gezogen, wenn die naheliegenden Rechnungen nicht aufgehen. In den Argumentationen der Lernenden wird wiederholt geäußert, dass „man das doch immer so“ rechne, weshalb dieses Fehlermuster als *Fokussierung auf die Anwendung eines Handlungsschemas* beschrieben werden kann. Diese Fokussierung auf die Anwendung eines Handlungsschemas führt dazu, dass das Hauptaugenmerk der Lernenden nicht auf der Verarbeitung der Aufgabensituation liegt, weshalb sie fehlerhafte Bezüge zwischen den im Aufgabentext enthaltenen Zahlenwerten und Größen herstellen.

Im Hinblick auf die Verallgemeinerung des Verfahrens konnten in den dargestellten Bearbeitungsprozessen verschiedene Fehlvorstellungen bzw. fehlerhafte Denkmuster dokumentiert werden. Diese umfassen im Allgemeinen eine komponentenweise Betrachtung von Zähler und Nenner eines Bruchs $\frac{m}{n}$, die in einem Fall dazu führte, dass die Teiloperatoren $: n$ und $\cdot m$ auf die falschen Bezugsgrößen angewendet wurde und das Ergebnis soweit korrigiert wurde, dass es *plausibel* erscheint. In einem anderen Fall wurde der Zähler des Bruchs $\frac{m}{n}$ nicht als Anzahl von Teilen eines Ganzen, sondern als absolute Anzahl von Fahrrädern interpretiert.

Die Ergebnisse der Analysen können im Allgemeinen so zusammengefasst werden, dass die Lernenden das Verfahren zur Anteilberechnung als *Kalkül* verstehen, das auf die vorgegebenen Zahlen und Größen angewendet wird. Es werden zunehmend weniger anschauliche Vorstellungen zu Anteilen aktiviert, auf deren Grundlage der Sachkontext strukturiert werden könnte. Diese Annahme wird insbesondere dadurch gestützt, dass die Lernenden zunehmend bis ausschließlich auf symbolischer Ebene argumentieren und arbeiten.

## 5.3 Kürzen von Brüchen als Vergröbern der Einteilung

In diesem Abschnitt werden ausgewählte Analysen der Daten aus der dritten und letzten videographierten Unterrichtssitzung dargestellt. In Folge auf die Thematisierung des Erweiterns von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung wird in dieser Doppelstunde das Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung eingeführt. Im Folgenden werden zunächst die Lernmaterialien auf sachanalytischer Ebene dargestellt, die den Ausgangspunkt für die Übertragung des Verfahrens auf nachfolgende Transferaufgaben bilden.

Es ist zu bemerken, dass das Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung in der letzten Unterrichtsstunde vor der Datenerhebung eingeführt wurde. Die Einführung des Erweiterns wurde dabei im Klassenverbund anhand von strukturgleichen Lösungsbeispielen durch die Lehrperson vorgenommen. In dieser Stunde wurde lediglich das Verfahren eingeführt und an wenigen Aufgaben im Arbeitsbuch eingeübt.

Als Umkehrung zum Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung wird das Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung von ikonischen Bruchdarstellungen eingeführt. Den gemeinsamen Kern des Erweiterns und Kürzens von Brüchen stellt das Verständnis, dass ein Bruch $\frac{m}{n}$ durch Erweitern und Kürzen in unendlich viele äquivalente Bruchdarstellungen umgewandelt werden kann und somit unendlich viele Repräsentanten hat. Dieses Verständnis ist eine wesentliche Komponente von Grundvorstellungen und mentalen Modellen des Bruchzahlbegriffs (vgl. Ni, 2001, S. 412).

**Lösungsbeispiel:** Das Lösungsbeispiel besteht in drei analogen Teilen, in denen die Einteilung des Bruchs $\frac{12}{30}$ so verändert wird, dass *halb so viele* (Teil a), *ein drittel so viele* (Teil b) und *ein sechstel so viele* (Teil c) Teile entstehen. Der Ablauf der drei Teile des Lösungsbeispiels ist jeweils der gleiche (vgl. Abb. 5.36): Zunächst wird eine Rechteckdarstellung des Ausgangsbruchs $\frac{12}{30}$ aufgebaut und die Arbeitsanweisung „Zeichne die neue Einteilung ein und gib einen Bruch dazu an. Überlege dann, wie man den neuen Bruch auch rechnerisch erhält“ eingeblendet.

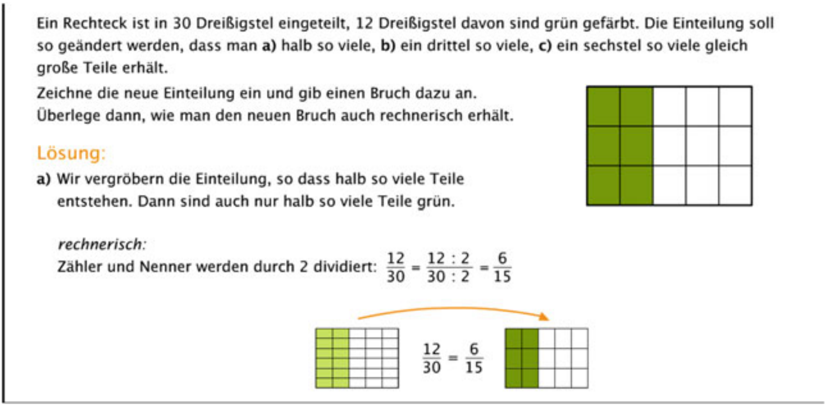



**Abbildung 5.36** Endzustand des ersten Teils des animierten Lösungsbeispiels

Zur Lösung der Aufgabenstellung(en) wird zunächst beschrieben, dass die Einteilung der Bruchdarstellung so vergröbert wird, dass halb so viele Teile entstehen, wodurch in der neuen Darstellung des Bruchs auch nur halb so viele Teile grün markiert sind (vgl. 5.36). In der anschließenden Animation werden sukzessive zwei Teile der Einteilung zu einem Teil zusammengefasst, so dass die 30 Teile der Einteilung in 15 doppelt so großen Teilen zusammengefasst werden. Die abgeschlossene Animation wird schließlich durch eine Beschreibung des Rechenweges ergänzt, in der erläutert wird, dass das dargestellte Vergröbern der Einteilung rechnerisch dem Dividieren von Zähler und Nenner durch den Divisor 2 entspricht: $\frac{12}{30} = \frac{12:2}{30:2} = \frac{6}{15}$.

Der erste Teile des Lösungsbeispiels wird durch eine Gegenüberstellung der alten und neuen Einteilung des Bruches mitsamt der entsprechenden symbolischen Repräsentanten beendet, wobei ein Pfeil von der Anfangseinteilung zur Endeinteilung die Umwandlung herausstellt und ein Gleichheitszeichen zwischen den symbolischen Repräsentationen $\frac{12}{30} = \frac{6}{15}$ die Äquivalenz der beiden Brüche betont.

In den Arbeitsheften der Lernenden werden die statischen Abbildungen der Lösungsbeispiele durch jeweils eine fokussierende Fragestellung ergänzt:

*Lösungsbeispiel Teil a):* Was bedeutet es, eine Einteilung zu vergröbern? Was verändert sich, was bleibt gleich?

*Lösungsbeispiel Teil b):* Warum wird der Bruch nicht kleiner, obwohl man Zähler und Nenner durch 3 teilt?

*Lösungsbeispiel Teil c):* Zähler und Nenner werden durch 6 geteilt. Was verändert sich im Rechteck, was bleibt gleich?

Die erste Frage fokussiert die Vergröberungshandlung auf ikonischer Ebene: Die Einteilung wird so verändert, dass je zwei Teile zu einem größeren Teil zusammengefasst werden. Dies führt dazu, dass die Anzahl der Teile halbiert, ihre Größe jedoch verdoppelt wird. Somit bleibt der Anteil der markierten Fläche an der ganzen Fläche invariant. Die fokussierende Fragestellung zum zweiten Teil des Lösungsbeispiels soll die Aufmerksamkeit auf die symbolische Handlung der Division von Zähler und Nenner mit demselben Faktor (Divisor) lenken. Es soll erläutert werden, dass bei der Division von Zähler und Nenner durch 3 der Anteil bzw. das Verhältnis von Zähler und Nenner nicht verändert wird. Die dritte fokussierende Fragestellung dient der Verknüpfung der Handlungen auf ikonischer und symbolischer Ebene. Es wird gefragt, was sich in der ikonischen Darstellung verändert, wenn der Zähler und der Nenner eines Bruchs durch denselben Faktor (Divisor) geteilt werden. Die Lernenden sollen dabei die Änderungen und Invarianzen auf den beiden Darstellungsebenen miteinander in Beziehung setzen. Auf ikonischer Ebene bewirkt die Division ein Zusammenfassen von sechs Teilen zu einem Teil, sodass die Anzahl der Teile gesechstelt wird. Der Anteil der gefärbten Fläche bleibt dabei jedoch unverändert, ebenso wie das Verhältnis von Zähler und Nenner.

**Ausgewählte Transferaufgaben:** Im Anschluss an die interaktiven animierten Lösungsbeispiele folgt eine Serie von Übungs- und Transferaufgaben (siehe Tab. 5.4). Detaillierte Aufgabenbeschreibungen und Erläuterungen der Transferprozesse erfolgen an den entsprechenden Stellen in diesem Abschnitt.

**Tabelle 5.4** Aufgabensequenz – Anteile von beliebigen Größen

| Aufgabe | Transferprozesse |
|---|---|
| **3.1 & 3.2** | Übertragung der Vergröberungshandlung und des Verfahrens zum Kürzen von Brüchen aus dem Lösungsbeispiel auf unvollständige Beispiele mit anderen Brüchen und anderen Repräsentationsobjekten |
| **3.3** | Übertragung der Vergröberungshandlung von Rechteck- und Kreisrepräsentationen auf eine Streckenrepräsentation |

### 5.3.1 Unvollständige Beispiele

Im ersten unvollständigen Beispiel ist der Bruch $\frac{6}{18}$ in einer Rechteckrepräsentation dargestellt und die Einteilung soll so vergröbert werden, dass die neue Einteilung in Aufgabenteil a) halb so viele und in Aufgabenteil b) ein sechstel so viele Teile enthalten. In der ersten Teilaufgabe ist die Vergröberung der Einteilung bereits vorgegeben, sodass die Lernenden nur den gekürzten Bruch auf symbolischer Ebene ergänzen müssen: $\frac{6}{18} = \frac{3}{9}$. In Aufgabenteil b) sollen die Lernenden auch eine neue Einteilung in der Rechteckrepräsentation einzeichnen. Hierzu müssen sechs Teile des Ganzen zu einem Teil zusammengefasst werden, was zu einer Einteilung des Rechtecks in drei Teile führt, von denen ein Teil markiert wird. Auf symbolischer Ebene sollen die Lernenden sowohl den gekürzten Bruch $\frac{1}{3}$ ergänzen als auch die Beschreibung des Vorgehens „Man dividiert den Zähler und den Nenner des Bruchs durch 6" und „Man nennt dies: Kürzen mit 6" ergänzen. Als Hilfestellung markieren Sprechblasen die Arbeitsschritte, die von den Lernenden ergänzt bzw. durchgeführt werden sollen, z. B. „Ergänze die Rechnung" in Teilaufgabe a) und „Zeichne eine neue Einteilung" in Aufgabenteil b) (Abb. 5.37).

Das Vorgehen im zweiten unvollständigen Beispiel orientiert sich erneut an den Bearbeitungsschritten des Lösungsbeispiels, nur ist hier der zu kürzende Bruch $\frac{6}{12}$ nicht in einem Rechteck, sondern in einem Kreis dargestellt. Analog zum Lösungsbeispiel soll die Einteilung so verändert werden, dass die neue Einteilung in Teilaufgabe a) halb so viele und in Teilaufgabe b) ein drittel so viele Teile hat als die Ausgangsdarstellung. Anders als im ersten unvollständigen Beispiel sind im zweiten Lösungsbeispiel keine Lösungsansätze vorgegeben, die von den Lernenden ergänzt werden sollen. Stattdessen sollen die Lernenden in beiden Teilaufgaben sowohl die neue Einteilung einzeichnen als auch den gekürzten Bruch angeben und das Vorgehen auf symbolischer Ebene jeweils in einem Satz beschreiben. Als Hilfestellung zur eigenständigen Durchführung des zeichnerischen Vergröberns der Einteilung und rechnerischen Kürzens des Bruchs werden in Sprechblasen Hinweise zum Vorgehen gegeben (Abb. 5.38).

**Transferprozesse in den unvollständigen Beispielen:** Die Transferprozesse zur Bearbeitung der unvollständigen Beispiele bestehen in der Übertragung und Anwendung des Verfahrens zum Vergröbern einer Einteilung auf ikonischer Ebene und des rechnerischen Verfahrens zum Kürzen von Brüchen auf symbolischer Ebene. Die Lernenden sind gefordert zunehmend selbstständig die beiden Verfahren auf neue Brüche und Bruchdarstellungen anzuwenden. Obwohl sich die Ausgangsbrüche jeweils von dem Bruch im Lösungsbeispiel unterscheiden, sind die Kürzungsfaktoren bzw. die Vorgaben zum Vergröbern der Einteilung im Lösungsbeispiel enthalten.

**AUFGABE 1**

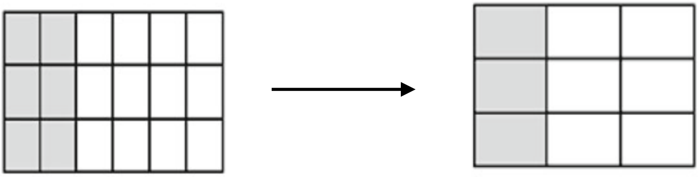
In einem Rechteck, in dem 6 Achtzehntel markiert sind, soll die Einteilung vergröbert werden.

Die neue Einteilung soll a) halb b) ein sechstel so viele Teile enthalten.

Teile das Rechteck neu ein. Gib außerdem einen Bruch für die neue Einteilung des Rechtecks an. Überlege dir auch, wie man rechnerisch auf den neuen Bruch kommt.

**Lösung:**

a) Man vergröbert die Einteilung des Rechtecks, so dass immer zwei Teile zusammengefasst werden und halb so viele Teile vorhanden sind.
Dann sind auch halb so viele Teile markiert.



Rechnerisch:
Man dividiert Zähler und Nenner durch 2:
Man nennt dies: Kürzen durch 2.


b) Wir vergröbern die Einteilung, so dass ein sechstel so viele Teile entstehen.
Somit sind auch nur ein sechstel so viele Teile markiert.


Rechnerisch:

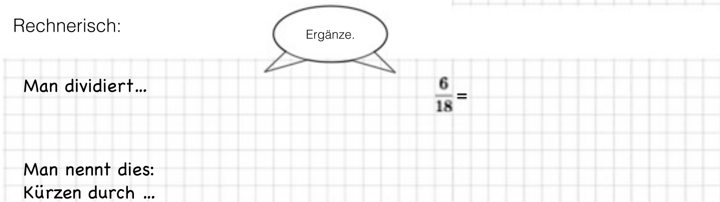



**Abbildung 5.37** Erstes unvollständiges Beispiel

**AUFGABE 2**

Ein Kreis ist in Zwölftel eingeteilt, davon sind 6 Zwölftel markiert.

Die neue Einteilung soll a) halb b) ein drittel so viele Teile haben wie vorher.

Zeichne eine neue Einteilung in den Kreis und gib den Bruch für die neue Einteilung an. Wie erhält man den Bruch rechnerisch?

**Lösung:**

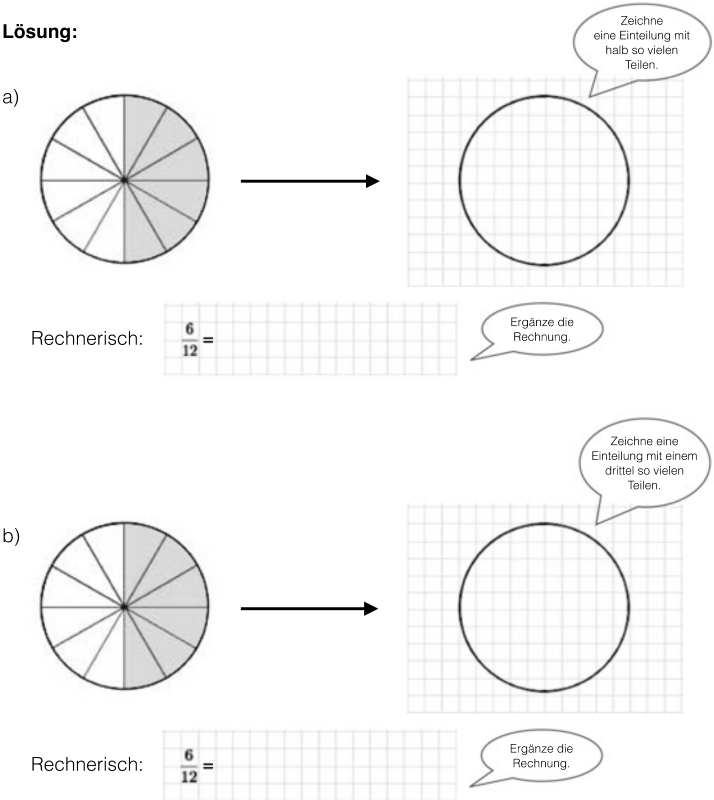



**Abbildung 5.38** Zweites unvollständiges Beispiel

Das zweite unvollständige Beispiel enthält zudem einen Repräsentationstransfer. Im Gegensatz zum Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel ist der Anteil in einer Kreisrepräsentation und nicht wie zuvor in einem Rechteck dargestellt.

Neben der Übertragung und Anwendung der Verfahren auf anschaulicher und symbolischer Ebene soll durch die Bearbeitung der unvollständigen Beispielen insbesondere die Verknüpfung der Handlungen auf anschaulicher und symbolischer Ebene mit dem Ziel der Ausbildung der Grundvorstellung vom Kürzen als Vergröbern einer Einteilung unterstützt werden. Vor diesem Hintergrund wird die Anwendung der Verfahren durch Bearbeitungshinweise in Sprechblasen angeleitet, um die kognitive Belastung der Lernenden möglichst gering zu halten.

**Bennet & Julius – Übertragung des rechnerischen Verfahrens**

Bennet und Julius lesen alle Teile des Lösungsbeispiels eingehend und diskutieren ausführlich die Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen. In ihren Erklärungen sind die zentralen Aspekte des Vergröberns einer Einteilung deutlich zu erkennen. Auf die erste fokussierende Fragestellung, in der gefragt wird, was es bedeutet, eine Einteilung zu vergröbern, notieren sie: „Man macht größere Stücke aus den kleineren. Die Stücke werden größer, dafür sind es weniger. Das grüne [farbig markierte] Feld bleibt gleich groß" (vgl. Abb. 5.39). Die folgenden Transkriptsequenzen dokumentieren ihre Bearbeitung der unvollständigen Beispiele.

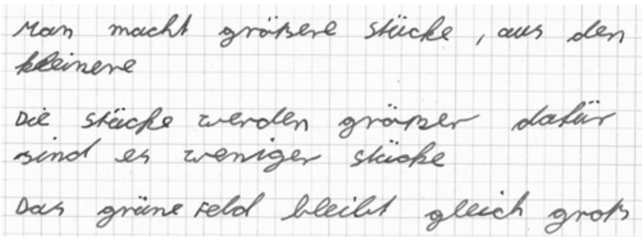



**Abbildung 5.39** Julius Antwort auf die erste fokussierende Fragestellung nach der Bedeutung des Vergröberns einer Einteilung

### Transkript B3A1 – Bennet & Julius – Szene 1 – Aufgabe 1 a)

**Bennet:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*)
**Julius:** 3.
**Bennet:** 6 Achtzehntel durch 2 ... 3... 3, 3 Neuntel.
**Julius:** Nein, 3 Viertel.
**Bennet:** 9 Drittel.
**Julius:** Wieso denn 3 Neuntel?
**Bennet:** Weil's 9 Kästchen sind.
**Julius:** Achso, ich dachte durch 2.
**beide:** (*schreiben individuell*)

In der Bearbeitung von Teilaufgabe a) ist zu erkennen, dass Bennet und Julius unterschiedlich vorgehen. Bennet betrachtet die vorgegebene Rechteckdarstellung mit der neuen Einteilung, zählt die Kästchen in Dreierschritten und liest schließlich den neuen Bruch $\frac{3}{9}$ ab (3). Anders als sein Partner Bennet nutzt Julius die Darstellung nicht, sondern versucht auf Zahlenebene den Zähler und Nenner von $\frac{6}{18}$ durch 2 zu teilen. Dabei passiert ihm ein Fehler beim Teilen des Nenners und statt $18 : 2$ rechnet er $8 : 2$ und kommt so auf den neuen Bruch $\frac{3}{4}$ (2, 4). Aufgrund der unterschiedlichen Ergebnisse widerspricht Julius seinem Partner und fragt ihn, „wieso denn 3 Neuntel" (6) richtig sei, worauf Bennet ihm antwortet, dass die neue Einteilung aus „9 Kästchen bestehe" (7).

Julius erkennt seinen Rechenfehler nicht und kommt schließlich zu dem Schluss, dass die beiden Lösungswege nicht mit einander zusammenhängen. Die Begründung von Bennet kommentiert er mit „Achso, ich dachte durch 2" (8) und scheint die Richtigkeit seines Lösungsweges, der Division von Zähler und Nenner durch 2, in Frage zu stellen.

Die unterschiedlichen Lösungswege von Bennet und Julius können so interpretiert werden, dass sie jeweils die für sie vertrauteren Zugänge zur Bearbeitung wählen. Bennet wählt einen Lösungsweg auf anschaulicher Ebene und liest den neuen Bruch aus der vorgegebenen Darstellung ab. Im Gegensatz dazu wählt Julius einen Lösungsweg auf Zahlenebene und scheint die ikonischen Bruchdarstellungen nicht für seine Lösung zu nutzen.

**Transkript B3A1 – Bennet & Julius – Szene 2 – Aufgabe 1 b)**

**Bennet:** Also, wir sollen jetzt eine Einteilung zeichnen. ... Da müssen wir das geteilt durch 6 rechnen. Wir können ja erstmal 18 geteilt durch 6.
**Julius:** Warte, lass mich doch erstmal.. (*liest Aufgabenstellung laut vor*)
**Bennet:** 3 gleich große Stücke müssen wir machen.
**Julius:** Oder?
**Bennet:** Wenn man's doch durch.. 18 muss man doch jetzt durch 6 rechnen.
**Julius:** Das sind 4. ... Äh, 3.
**Bennet:** 3, also drei gleich große Stücke.
**Julius:** Ja, wie denn? So oder so? (*zeigt mit seinem Lineal eine horizontale und eine vertikale Einteilung*)
**beide:** (*zeichnen*)
**Julius:** Rechnerisch: Man dividiert ...
**Bennet:** Wir müssen das jetzt auch noch anmalen.
**Julius:** (*guckt bei Bennet*) Was muss ich denn anmalen? Nur eins?

**Bennet:** Ja, weil wir können ja die 6 teilen, 1 Drittel muss man nehmen.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

In der Bearbeitung von Teilaufgabe b) soll die Einteilung so vergröbert werden, dass ein sechstel so viele Teile entstehen wie zuvor. Bennet sagt, dass sie der Aufgabenstellung entsprechend „jetzt eine Einteilung zeichnen" (10) sollen. Er erklärt, dass man dazu „geteilt durch 6 rechnen" (11) und in der Folge „drei gleich große Stücke" (15) einzeichnen müsse. Julius bittet Bennet zu Beginn kurz zu warten, da er „doch erstmal" (13) die Aufgabenstellung lesen möchte. Nachdem er die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat, nimmt er den Lösungsweg von Bennet auf, dividiert 18 durch sechs: „Das sind 4. … Äh 3" (19). Bennet stimmt ihm zu und übersetzt das Ergebnis dieser Rechnung in die ikonische Ebene: „3, also drei gleich große Stücke" (20).

Bennet und Julius bestimmen die neue Einteilung des Ganzen rechnerisch. Dazu wechseln sie auf die symbolische Ebene und berechnen die neue Einteilung über die Division 18 : 6, deren Ergebnis sie auf ikonischer Ebene als drei Teile interpretieren. In ihrer Lösung wechseln sie mehrfach zwischen der ikonischen und symbolischen Darstellungsebene. Es ist jedoch nicht zu erkennen, dass sie mit ihrem Vorgehen das Handlungskonzept des Vergröberns der Einteilung als Zusammenfassen von Teilen verbinden. Stattdessen berechnen sie eine neue Einteilung und zeichnen diese ein, ohne dabei einen direkten Zusammenhang zu der ursprünglichen Einteilung bzw. Darstellung herzustellen. Diese Annahme wird durch die Nachfrage von Julius unterstützt, der seinen Partner fragt, ob sie die neue Einteilung horizontal oder vertikal einzeichnen sollen (21–22). Ihr Lösungsweg beschreibt somit *keine Transformation der ursprünglichen Darstellung*, sondern *das Herstellen einer neuen Darstellung*.

In der Interaktion von Bennet und Julius fällt auf, dass die Übersetzungen zwischen der ikonischen und symbolischen Darstellungsebene alle von Bennet ausgehen und alle Beiträge von Julius die symbolischer Ebene betreffen. Zudem wirkt er überrascht davon, dass Bennet nur einen der drei Teile gefärbt hat: „Was muss ich denn anmalen? Nur eins?" (26). Diese Beobachtungen sprechen dafür, dass er vordergründig die symbolische Handlung überträgt und diese nicht mit der Handlung auf ikonischer Ebene verbindet. Auch Bennets Erklärung bezieht sich allein auf die symbolische Handlung des Kürzens und er erklärt, dass sie „ja die 6 teilen" und „1 Drittel […] nehmen" (27–28) müssen.

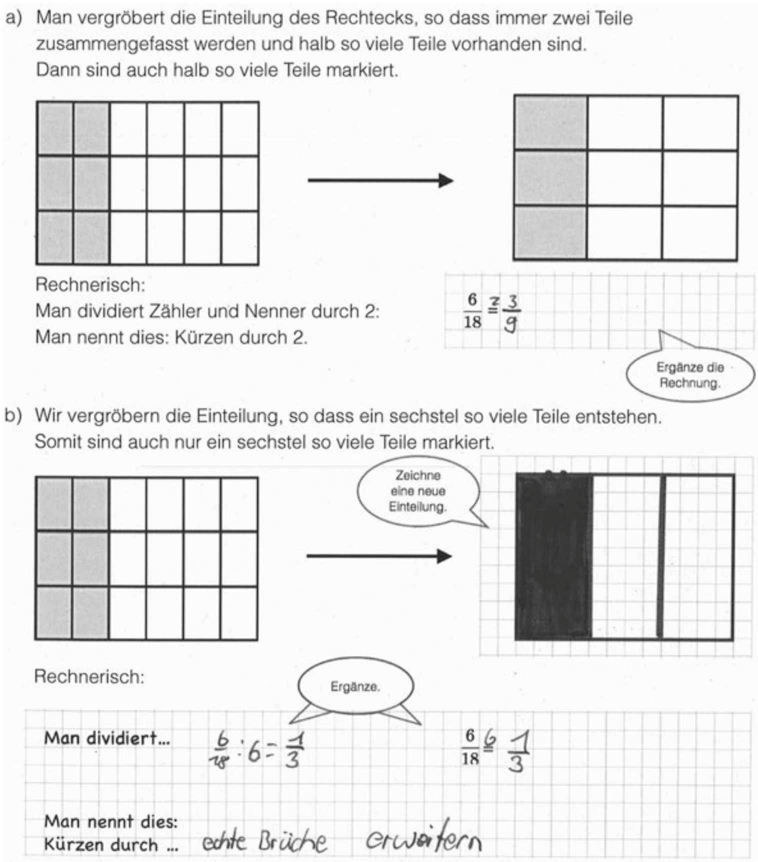



**Abbildung 5.40** Bennets Lösung von Aufgabe 3.1

## Transkript B3A1 – Bennet & Julius – Szene 3 – Aufgabe 1 b)

**Julius:** Also, rechnerisch. Man dividiert ... man dividiert ... 6 Achtel durch 2.
**Bennet:** Ja.
**Julius:** Durch 2.
**Bennet:** Nein, durch 6.
**Julius:** Nicht durch 2? Warum denn nicht?
**Bennet:** Das ist doch geteilt durch 6.
**Julius:** Aber man kann doch auch durch 2 rechnen, oder nicht?
**Bennet:** Ja nö.

**Julius:** Warum nicht? Ja, warum denn nicht?
**Bennet:** Ja, weil's doch durch 6 ist.
**Julius:** Ja, aber durch 2 geht's doch auch.
**Bennet:** Durch 6 und durch 2, das ist was anderes.
**Julius:** Oder muss ich 1 Drittel rauskriegen?
**Bennet:** Ja, weil da steht doch b) ein sechstel, du musst davon 1 Sechstel nehmen.
**Julius:** Hä? Was heißt das denn jetzt? 6 Achtzehntel gleich? ... Man nennt dies Kürzen durch ... hä?
**Bennet:** Man nennt dies Kürzen durch ... 6 Achtzehntel.
**Julius:** Nein.
**Bennet:** Durch Brüche.
**Julius:** Nein.
**Bennet:** Klar, durch Brüche. Durch echte Brüche.
**Julius:** Das ist doch vollkommen egal, ob's echte Brüche oder unechte Brüche sind, oder nicht?
**Bennet:** Schreib's einfach da hin. Das ist ein echter Bruch.

Die dritte Szene der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels dokumentiert die Formulierung des rechnerischen Vorgehens zum Kürzen von $\frac{6}{18}$. Hiebei sind deutlich die Verständnisschwierigkeiten von Julius zu erkennen. Er greift die Formulierung aus Aufgabenteil a) auf und schlägt vor zu schreiben „man dividiert … 6 Achtel durch 2" (38–39). Den Widerspruch von Bennet (42) scheint er nicht nachvollziehen zu können und er erwidert, dass man „doch auch durch 2 rechnen" (45 und 49) könne. Auf die Erklärung von Bennet, dass „durch 6 und durch 2 […] was anderes" (50) sei, fragt Julius, ob man „1 Drittel rauskriegen" müsse (51). Scheinbar versteht Julius nicht, dass ein Bruch mit verschiedenen Faktoren gekürzt werden kann. Es ist anzunehmen, dass diese Verständnisschwierigkeit von Julius darauf zurückgeführt werden kann, dass er das rechnerische Kürzen von Brüchen nicht mit der Handlung des Vergröberns einer Einteilung verbindet und entsprechend keine anschaulichen Vorstellungen aktivieren kann. Alternativ ist es möglich, dass er das Kürzen von Brüchen mit 2 übergeneralisiert und annimmt, dass das Kürzen von Brüchen immer mit dem Faktor 2 durchgeführt wird. Zudem erkennt er scheinbar keinen Unterschied zwischen dem Kürzen mit 2 und dem Kürzen mit 6.

Auch Bennet hat Schwierigkeiten mit der Formulierung einer Beschreibung des rechnerischen Vorgehens und weiß nicht, was sie an der entsprechenden Stelle im Arbeitsheft notieren sollen. Ohne sich an der vorgegebenen Formulierung in Aufgabenteil a) zu orientieren notiert er schließlich zwei Gleichungen: „$\frac{6}{18} : 6 = \frac{1}{3}$" (siehe Abb. 5.40), womit er vermutlich ausdrücken will, dass der Zähler und der Nenner durch 6 geteilt werden sollen. Als zweite symbolische Beschreibung überträgt er die beim Erweitern von Brüchen durch den Lehrer eingeführte Schreibweise und notiert „$\frac{6}{18} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{3}$“ (vgl. Abb. 5.40). Direkt im Anschluss gehen Bennet und Julius zur Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels über.

**Transkript B3A2 – Bennet & Julius – Szene 4 – Aufgabe 2 a)**

**Bennet:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*)
**Julius:** Hä? Ja, aber du brauchst doch den Kreis mehrmals, wenn du’s doch..
**Bennet:** (*unterbricht Julius*) Da steht a) und b).
**Julius:** Achso, ... Ja, 6 Teile dann.
**Bennet:** Nö.
**Julius:** Natürlich.
**Bennet:** Du hast wie immer Recht.
**beide:** (*zeichnen individuell*)
**Bennet:** Junge, wir müssen das noch markieren.
**Julius:** Ja, ich muss doch hier 1 Drittel einzeichnen.
**Bennet:** Nee, du musst 3 Sechstel einzeichnen.
**Julius:** Was?
**Bennet:** 3 Sechstel.
**Julius:** Aber wir sind doch bei a). ... Ich verstehe nicht, was wir machen sollen. Wir sind doch bei a).
**Bennet:** Ja, sind wir auch. Du musst das anmalen.
**Julius:** Die soll ich anmalen? Das ist doch schon angemalt (*zeigt auf die Ausgangsrepräsentation*).
**Bennet:** Das da.
**Julius:** Was soll ich denn da anmalen? Das ist doch b) oder nicht?
**Bennet:** Das ist a). ... Wir müssen das anmalen, damit wir wissen, was wieder die Hälfte ist.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

Nachdem Bennet und Julius Unstimmigkeiten bezüglich des Aufgabenlayouts geklärt haben, sagt Julius, dass die neue Einteilung aus „6 Teile[n]“ (5) bestehen muss, und die beiden Partner zeichnen die neue Einteilung individuell ein. Im Anschluss an das Zeichnen der neuen Einteilung bemerkt Bennet, dass sie noch den Anteil markieren müssen, worauf Julius erwidert, dass man „doch hier 1 Drittel einzeichnen“ (11) müsse. Bennet widerspricht diesem Vorschlag und korrigiert, dass „3 Sechstel“ (12) markiert werden müssen. Seinem Vorschlag zu Folge versteht Julius das Einzeichnen des Anteils als Einzeichnen eines neuen Bruchs. Anstatt den äquivalenten Anteil zur Ausgangsdarstellung einzuzeichnen, möchte er $\frac{1}{3}$ einzeichnen, da eine Einteilung mit einem drittel so vielen Teilen eingezeichnet werden soll. Somit steht die neue Darstellung für ihn in keinem Zusammenhang zu der Ausgangsdarstellung und er interpretiert das Vorgehen entsprechend nicht als Vergröbern der Einteilung und Markieren desselben Anteils, sondern als Einzeichnen einer *neuen* Einteilung und Einzeichnen eines *neuen* Anteils.

Julius’ Verständnisschwierigkeiten zeigen sich insbesondere in seiner Reaktion auf die Erwiderung von Bennet, dass sie nicht $\frac{1}{3}$, sondern „3 Sechstel einzeichnen“ (12, 14) sollen. Er sagt zunächst, dass er nicht verstehe, was sie machen sollen und ist zudem davon irritiert, dass sie denselben Anteil erneut einzeichnen sollen, da dieser in der Ausgangsdarstellung „doch schon angemalt“ (18) sei. Bennet erklärt: „Wir müssen das anmalen, damit wir wissen, was wieder die Hälfte ist“ (23–24), was darauf hindeutet, dass er im Gegensatz zu Julius bereits verstanden hat, dass beide Darstellungen denselben Anteil in unterschiedlichen Darstellungen repräsentieren. Insbesondere spricht er dabei von „der Hälfte“ (24), womit er den vollständigen gekürzten Bruch für seine Erklärung nutzt, der im Aufgabenmaterial nicht benannt wird.

**Transkript B3A2 – Bennet & Julius – Szene 5 – Aufgabe 2 a)**

**Julius:** Rechnerisch 6 durch ... 6 durch 2.
**Bennet:** Was ist?
**Julius:** Rechnerisch doch 6 durch 2, oder?
**Bennet:** Rechnerisch, gleich steht da schon. 6 Zwölftel gleich 3 Sechstel.
**Julius:** Ja, aber wir können doch auch, das haben wir überall gemacht, über das Gleichheitszeichen durch 2 schreiben. Hatten wir doch letztens.
**Bennet:** Genau, du hast Recht. Eine 2 da drüber. Erweitert mit 2.
**Julius:** Das sind dann doch 3 Sechstel?

Nach dem Einzeichnen der vergröberten Bruchdarstellung notieren Bennet und Julius den gekürzten Bruch. Dabei orientiert sich Julius an ihrer Notation im ersten unvollständigen Beispiel (Abb. 5.41), in dem auch die Rechnung zum Kürzen des Bruchs notiert werden sollte. Er schlägt demnach vor aufzuschreiben, dass „6 durch 2“ (26, 28) gerechnet werden müsse. Bennet erwidert, dass bereits ein Gleichheitszeichen vorgegeben sei und sie daher nur den gekürzten Bruch notieren sollen: „6 Zwölftel gleich 3 Sechstel“ (29–30). Julius ergänzt, dass sie in Anlehnung an ihre Notation beim Erweitern von Brüchen „über das Gleichheitszeichen durch 2 schreiben“ (31–33) sollten, da sie das „überall gemacht“ (ebd.) hätten. Es ist zu erkennen, dass die Schreibweise des Erweiterns auf das Kürzen von Brüchen übertragen wird, wobei Bennet sogar die Bezeichnung des Verfahrens überträgt und die Notation mit „erweitert mit 2“ (34–35) übersetzt.

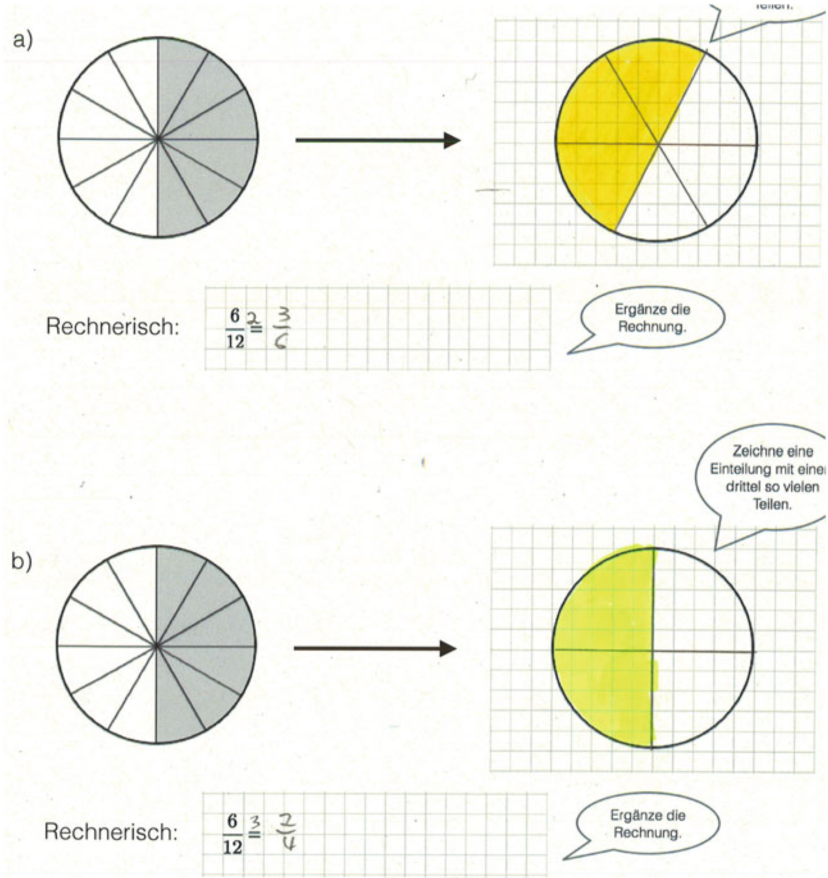



**Abbildung 5.41** Julius Lösung von Aufgabe 3.2

## Transkript B3A2 – Bennet & Julius – Szene 6 – Aufgabe 2 b)

**Bennet:** So, jetzt müssen wir das da einzeichnen. Geteilt durch 3.
**Julius:** Das sind schon wieder 12.
**Bennet:** Jetzt müssen wir das so teilen.
**Julius:** Nein, 4 ist falsch.
**Bennet:** Warum denn? 12 geteilt durch 3 gleich (*schnalzt mit der Zunge*).

**Julius:** Durch 3 müssen wir doch machen?
**Bennet:** Ja, 12 durch 3 gleich 4.
**Julius:** Ja, stimmt, aber ...
**beide:** (*zeichnen individuell*)
**Julius:** Durch 3 sind dann 2 .. 2 Viertel .. Bennet, wir müssen doch 2 Teile anmalen, oder?
**beide:** (*schreiben individuell*)

Unmittelbar zu Beginn der Bearbeitung von Aufgabenteil b), in dem die Einteilung des Bruchs $\frac{6}{12}$ so vergröbert werden soll, dass die neue Einteilung ein drittel so viele Teile hat wie die ursprüngliche Einteilung, äußert Julius sein Unverständnis, dass die ursprüngliche Einteilung erneut aus zwölf Teilen besteht (39). Seine geäußerten Verständnisschwierigkeiten stützen die zuvor beschriebene Vermutung, dass er nicht erkennt, dass ein Bruch durch Kürzen in verschiedene wertgleiche Brüche umgewandelt werden kann.

Julius widerspricht neben dem anfänglichen Vorschlag von Bennet, dass sie für die neue Einteilung bzw. den neuen Bruch „geteilt durch 3" (37–38) rechnen müssen, auch der Zeichnung von Bennet, der die vorgegebene Kreisrepräsentation unterdessen in vier gleiche Teile eingeteilt hat. Er sagt: „Nein, 4 ist falsch" (41), da sie durch 3 rechnen müssten (44). Bennet erklärt ihm, dass sie „12 geteilt durch 3" (42–43) rechnen müssen, was schließlich vier sei und die neue Einteilung entsprechend aus vier Teilen bestehe. Julius erkennt seinen Rechenfehler, stimmt Bennet zu (46) und die beiden Schüler beginnen eine neue Einteilung zu zeichnen. Zuletzt sucht Julius Bestätigung bei seinem Partner, dass er alles richtig gemacht hat und erklärt: „Durch 3 sind dann 2 … 2 Viertel […] wir müssen doch 2 Teile anmalen, oder?" (48–49). Diese Erklärung deutet darauf hin, dass er wie in den vorherigen Bearbeitungen zunächst den Bruch rechnerisch gekürzt hat und sein Ergebnis als neuen Bruch interpretiert, den er in der vorgegebenen Kreisrepräsentation einzeichnen soll.

Insgesamt wird in Bennet und Julius' Bearbeitung der unvollständigen Beispiele deutlich, dass sie ausschließlich das Verfahren des Kürzens von Brüchen auf symbolischer Ebene übertragen und anwenden. Den rechnerisch erhaltenen gekürzten Bruch stellen sie in der Folge zeichnerisch dar. Es ist nicht zu erkennen, dass sie das rechnerische Kürzen als Transformation der Einteilung einer Bruchdarstellung interpretieren und diese entsprechend nicht als eine dynamische Handlung des Zusammenfassens von Teilen bzw. Vergröberns der Einteilung verstehen.

Insgesamt kann die Analyse der Bearbeitungsprozesse von Bennet und Julius in folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Das Kürzen von Brüchen wird nicht mit dem Vergröbern einer Einteilung verbunden. Bennet und Julius übertragen vorwiegend das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen als Division von Zähler und Nenner durch denselben Kürzungsfaktor. Das Handlungsschema des Vergröberns einer Einteilung wird nicht übertragen und angewendet. In der Folge besteht ihr Vorgehen in zwei Schritten: Im ersten Schritt berechnen sie auf symbolischer Ebene den neuen Bruch, den sie im zweiten Schritt ikonisch darstellen. In ihren Bearbeitungsprozessen ist nicht zu erkennen, dass sie die rechnerische Handlung des Kürzens mit der anschaulichen Vorstellung des Vergröberns einer Einteilung verbinden.

- Die Bruchdarstellungen von Ausgangsbruch und gekürztem Bruch werden als getrennte Entitäten aufgefasst. Obgleich Bennet und Julius erkennen, dass in beiden Bruchdarstellungen der gleiche Anteile gefärbt wird, stellen sie keinen dynamischen Zusammenhang – im Sinne einer Transformation der Einteilung – zwischen den beiden Bruchdarstellungen her. Es ist möglich, dass die getrennte Betrachtung der beiden Bruchdarstellungen durch die Formulierung in der Aufgabenstellung „zeichne eine neue Einteilung“ unterstützt wird, da diese möglicherweise als Einzeichnen eines „neuen“ Bruchs interpretiert werden könnte.
- Aufgrund mangelnder anschaulicher Vorstellungen werden fehlerhafte Assoziationen hergestellt. In der Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels interpretiert Julius die Aufgabenstellung eine neue Einteilung mit einem drittel so vielen Teilen einzuzeichnen mit dem Einzeichnen des Bruchs $\frac{1}{3}$. Hierbei wird deutlich, dass die Formulierung in der Aufgabenstellung nicht auf die Einteilung, sondern auf den Bruch bezogen wird, was wiederum darauf zurückgeführt werden kann, dass mit dem Kürzen von Brüchen keine dynamische Handlung als Vergröbern der Einteilung verbunden wird.

**Anita & Ann-Katrin – Trennung von ikonischer und symbolischer Ebene**
Anita und Ann-Katrin arbeiten harmonisch und gewissenhaft zusammen. In ihrer Partnerarbeit sprechen sie ausführlich über ihre Lösungswege und klären Verständnisschwierigkeiten gemeinsam auf. Unabhängig von ihren heterogenen Vortestergebnissen von 30 % (Ann-Katrin) und 70 % (Anita) konnten sie bisher alle Aufgaben korrekt lösen. Der Vergleich der Vor- und Nachtestergebnisse dokumentiert, dass Ann-Katrin über den Verlauf der Unterrichtseinheit einen weit überdurchschnittlichen Leistungszuwachs erzielt und im Posttest ein Ergebnis von 85 % erreicht.

Im Einstieg in diese Unterrichtsstunde war zu beobachten, dass sie alle Teile des Lösungsbeispiels eingehend gelesen und sich die jeweiligen Lösungsschritte gegenseitig erklärt haben. Auch ihre Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel deuten darauf hin, dass sie die wesentlichen Aspekte des Kürzens von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung erfasst haben (vgl. Abb. 5.42). Die folgenden Transkripte dokumentieren ihre Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele.

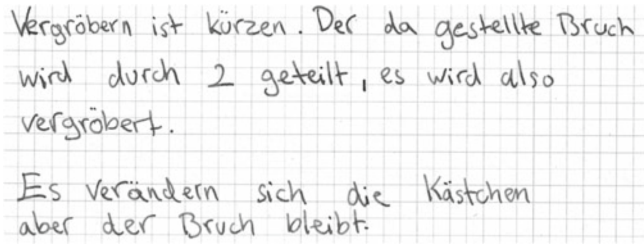



**Abbildung 5.42** Anitas Antwort auf die fokussierende Fragestellung zum ersten Teil des Lösungsbeispiels

### Transkript B3A1 – Anita & Ann-Katrin – Szene 1 – Aufgabe 1 a)

**beide:** (*lesen Aufgabenstellung*)
**Anita:** (*beginnt zu schreiben*)
**Ann-Katrin:** (*schaut mehrfach zwischen ihrem Arbeitsblatt und dem Bildschirm hin und her*)
**Anita:** (*schreibt und liest laut mit*) 6 durch 2, geteilt durch 6 ... 3 Neuntel.
**Ann-Katrin:** Also dieses hier, ne? (*zeigt auf das LSB 3c am Bildschirm*) ... Also 6 Zwölftel ... (*guckt auf Anitas Arbeitsheft*) Du musst das anders herum machen. Hier kommt die 2 hin und hier kommt die Zahl, die du durch nimmst.
**Anita:** Aber..
**Ann-Katrin:** (*zeigt auf den Bildschirm*) Hier.
**Anita:** 3 ... 3 Neuntel.
**Ann-Katrin:** Du rechnest dann ja einfach (*schaut bei Anita*) Ach, du hast das schon.

Die beiden Schülerinnen lesen die Aufgabenstellung still für sich selbst. Unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung beginnt Anita zu schreiben, während Ann-Katrin mehrfach zwischen dem Endzustand des dritten Teils des Lösungsbeispiels auf dem Bildschirm und der Aufgabenstellung hin und her schaut (3–4). Augenscheinlich vergleicht sie die Aufgabenstellungen und versucht die einzelnen Lösungsschritte zu übertragen.

Währenddessen schreibt Anita in ihrem Arbeitsheft und liest laut mit: „6 durch 2, geteilt durch 6 … 3 Neuntel“ (5–6). Ihre schriftlichen Dokumente (vgl. Abb. 5.43) bestätigen, dass sie schreibt: „$\frac{6}{18} = \frac{2:6}{6:18} = \frac{3}{9}$“ und demnach das Verfahren zum Kürzen von Brüchen, unabhängig von ihren Vertauschungen von Dividenden und Divisoren, auf den neuen Bruch überträgt und anwendet.

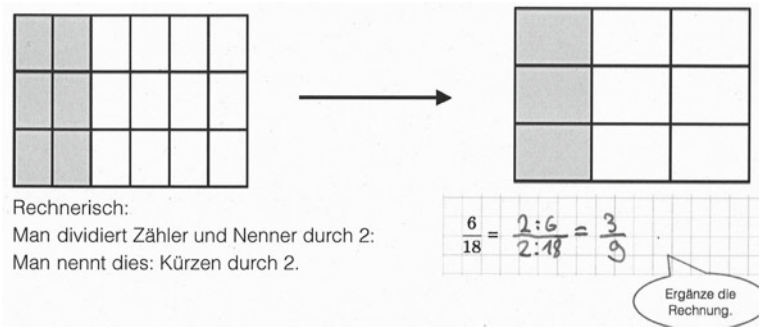



**Abbildung 5.43** Anitas Lösung von Aufgabe 3.1 a)

Ann-Katrin korrigiert den aufgeschriebenen Term ihrer Partnerin mit Verweis auf die Rechnung im Lösungsbeispiel am Bildschirm und setzt schließlich zu einer eigenen Formulierung der Rechnung an. Diese führt sie jedoch nicht zu Ende, da sie feststellt, dass Anita bereits mit der Teilaufgabe fertig ist. Die ikonische Darstellung der neuen Einteilung wird in der Kommunikation der beiden Schülerinnen nicht angesprochen.

**Transkript B3A1 – Anita & Ann-Katrin – Szene 2 – Aufgabe 1 b)**

**Anita:** (*liest Aufgabenstellung b) laut vor*)
**Ann-Katrin:** Ok, in Sechstel?
**Anita:** Wir können einfach hier abgucken (*zeigt auf Aufgabenteil a)*) 1, 2, 3, ..., 9.
**Ann-Katrin:** Nein. (*zeigt auf Anitas Arbeitsheft*) 6, 6, 6. Alles 6.
**Anita:** 6 sind angemalt und das sind 18.
**Ann-Katrin:** Guck mal hier, 6, 6, 6, immer 6. .. 6 von diesen Stücken zu einem Ganzen. .. Also nicht zu einem Ganzen, aber..
**Anita:** Ja, das hab ich mir auch gedacht.
**beide:** (*arbeiten individuell*)

Für die Bearbeitung von Aufgabenteil b) liest Anita die Aufgabenstellung zunächst laut vor und macht dann den Vorschlag, dass sie ja „einfach hier abgucken" (18) könnten, wobei sie auf den Aufgabenteil a) zeigt und die Anzahl der Teile der Einteilung auszählt (19). Es ist anzunehmen, dass sie weiß, dass sie das Verfahren im Allgemeinen übertragen kann, dabei jedoch nicht bedenkt, dass in der Aufgabenstellung das Zeichnen einer neuen Einteilung mit einem sechstel so vielen Teilen und nicht mit halb so vielen Teilen wie in Teilaufgabe a) gefordert wird.

Ann-Katrin widerspricht diesem Vorschlag umgehend, beschreibt die Ausgangsrepräsentation: „6, 6, 6. Alles 6“ (20–21) und erklärt im Weiteren: „Guck mal hier, 6, 6, 6, immer 6. … 6 von diesen Stücke zu einem Ganzen“ (23–24), wobei sie deutlich macht, dass sie jeweils sechs Teile der Einteilung zu einem Teil zusammenfassen möchte. Sie präzisiert weiter, dass sie die sechs Teile „nicht zu einem Ganzen, aber“ (24–25) zu einem Teil zusammenfassen möchte. Anita stimmt ihr zu sagt, dass sie sich das „auch gedacht“ (26) habe. In der Folge zeichnen die beiden Schülerinnen individuell eine neue Einteilung und schreiben den Rechenweg auf, wobei Anita die Vertauschung von Dividend und Divisor aus Aufgabenteil a) wiederholt schreibt: „$\frac{6}{18} = \frac{6:6}{6:18} = \frac{1}{3}$“ (siehe Abb. 5.44).

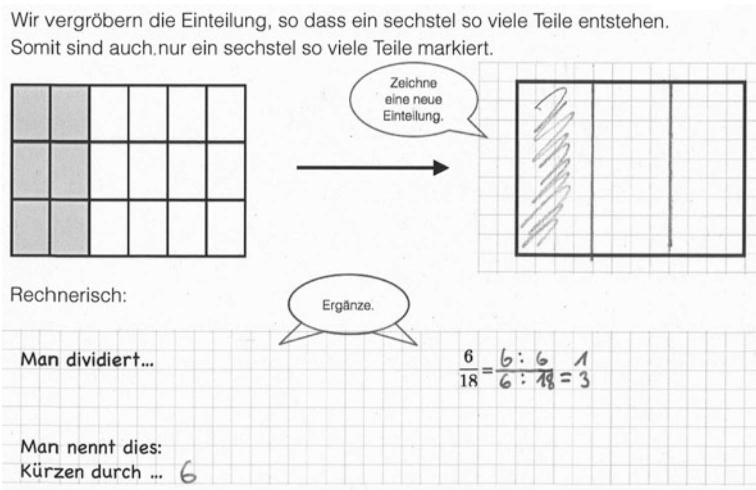



**Abbildung 5.44** Anitas Lösung von Aufgabe 3.1 b)

In dieser Bearbeitung wird deutlich, dass Ann-Katrin das Vergröbern einer Einteilung auf ikonischer Ebene mit dem Zusammenfassen von Teilen interpretiert und entsprechend das Handlungsmuster aus dem Lösungsbeispiel auf eine neue Bruchdarstellung übertragen und anwenden kann. Ihre Erklärung deutet zudem darauf hin, dass sie sich das Zusammenfassen von Teilen dynamisch vorstellt. Sie korrigiert sogar ihre Formulierung, dass „6 von diesen Stücken zu einem Ganzen“ (23–24) zusammengefasst werden und erklärt, dass die Teile nicht zu einem Ganzen, sondern einem neuen Teil zusammengefasst werden.

### Transkript B3A2 – Anita & Ann-Katrin – Szene 3 – Aufgabe 2 a)

**Anita:** Geteilt durch 2. (*beginnt zu schreiben*)
**Ann-Katrin:** (*blättert in ihrem Arbeitsheft zurück*) Ah, halb so viele. Also das jetzt noch mal halb machen. Das hier alles nochmal durch 2 teilen.
**beide:** (*zeichnen individuell*)
**Ann-Katrin:** Aah, 3 Sechstel. (*schaut bei Anita*) Stopp, 3 Sechstel hier. 1, 2, 3, 3, 3, dann sind as aber ...
**Anita:** 1, 2, 3, ..., 12.
**Ann-Katrin:** Ich verstehe das gerade alles nicht.
**Anita:** Ich schon. (*beginnt zu zeichnen*)
**Ann-Katrin:** Ich weiß nicht, wie man das machen soll. (*guckt bei Anita*) Ich verstehe das nicht. ... (*klickt die LSBe am Bildschirm durch*) Gibt's da einen Kreis? (*guckt erneut bei Anita*) Warte, wo ist da der Nenner und wo ist der Zähler?
**Anita:** Zähler ist oben, Nenner ist unten.
**Ann-Katrin:** Ok, also das dann in 6 Teile teilen, oder wie?
**Anita:** 3 davon.
**Ann-Katrin:** Boah ey, ich verstehe echt nichts mehr. Das ist echt das schwierigste. Die anderen Aufgaben waren besser.
**beide:** (*schreiben/zeichnen individuell*)
**Anita:** 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ich hab gerade 6 Stücke gemacht. ... Fertig.
**Ann-Katrin:** Ich verstehe überhaupt nichts. Wie hast du das geschafft?
**Anita:** Ich hab von hier hin, bis da wo es ist.
**Ann-Katrin:** (*beginnt zu zeichnen*)
**beide:** (*schreiben/zeichnen individuell*)
**Anita:** Ich hab's richtig. ... 2 Viertel, das ist ganz einfach. (*guckt bei Ann-Katrin*) Du hast das ja perfekter gemacht als ich.
**Ann-Katrin:** Ja, ich hab das vorher schon berechnet. So, los komm, mach 2 Stücke.
**beide:** (*schreiben/zeichnen individuell*)

Die Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels erfordert einen Repräsentationstransfer. Im Gegensatz zu den ikonischen Bruchdarstellungen im Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel, in denen Brüche ausschließlich in einem Rechteck repräsentiert werden, ist der Bruch $\frac{6}{12}$ in einer Kreisrepräsentation vorgegeben. Obwohl Ann-Katrin in der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels das Vergröbern einer Einteilung als Zusammenfassen von Teilen zu einem größeren Teil beschrieben hat und auch das Verfahren zum Kürzen von Brüchen auf symbolischer Repräsentationsebene übertragen und angewendet hat, bereitet ihr die Anwendung des Verfahrens auf eine Kreisrepräsentation Schwierigkeiten. Sie erkennt genau wie Anita, dass sie für eine Einteilung mit halb so vielen Teilen „geteilt durch 2" (1) rechnen müssen und erklärt: „Ah, halb so viele. Also das jetzt noch mal halb machen. Das hier alles nochmal durch 2 teilen" (2–4). Anhand der Videoaufzeichnung ist nicht eindeutig zu erkennen, ob sie sich mit ihrer Beschreibung des Vorgehens auf die ikonische oder die symbolische Bruchdarstellung bezieht. Ihre Formulierung „also das jetzt nochmal halb machen" stützt jedoch die Annahme, dass sie sich auf die ikonische Bruchdarstellung im Kreis bezieht. Im Gegensatz zur Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels scheint sie das Vergröbern der Einteilung in diesem Fall nicht als Zusammenfassen von Teilen zu verstehen, sondern nimmt an, dass sie die Teile des Ganzen „noch mal halb machen" (3), bzw. noch einmal halbieren müsse. Es ist möglich, dass sie hierbei das Vorgehen mit dem Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung verwechselt und Handlungselemente dieses Verfahrens überträgt. Die beiden Schülerinnen beginnen zu zeichnen.

Ann-Katrin hält inne und stellt fest, dass der gekürzte Bruch „3 Sechstel" ist. Sie schaut auf das Arbeitsheft von Anita, beginnt die Teile in der Darstellung des Bruchs $\frac{6}{12}$ zu zählen und wirkt verwundert über die Anzahl der Teile in der ursprünglichen Einteilung. Ihre Verwunderung kann damit erklärt werden, dass sie entsprechend des Zählers des gekürzten Bruchs annimmt, in der ikonischen Darstellung drei Teile zu einem Teil zusammenfassen zu müssen (Perseverationsfehler), dann aber erkennt, dass dieses Vorgehen ausgehend von 12 Teilen nicht zu sechs gleichen Teilen führt. Sie sagt, dass sie „das gerade alles nicht" (9) versteht und beginnt im Lösungsbeispiel am Bildschirm nach einer Kreisdarstellung zu suchen, die sie nicht findet und erneut bei ihrer Partnerin schaut. Da Ann-Katrin weiterhin Schwierigkeiten bei der Anwendung des Verfahrens zum Vergröbern auf die Kreisrepräsentation hat, kürzt sie den Bruch nun auf symbolischer Ebene und möchte den gekürzten Bruch nun zeichnerisch darstellen. Für die ikonische Darstellung versichert sie sich noch einmal bei Anita „wo da [in einem Bruch] der Nenner und wo […] der Zähler [ist]" (14–15). Anita antwortet ihr, dass der Zähler eines Bruchs oben und der Nenner eines Bruchs unten steht (16), worauf hin Ann-Katrin feststellt, dass sie den Kreis

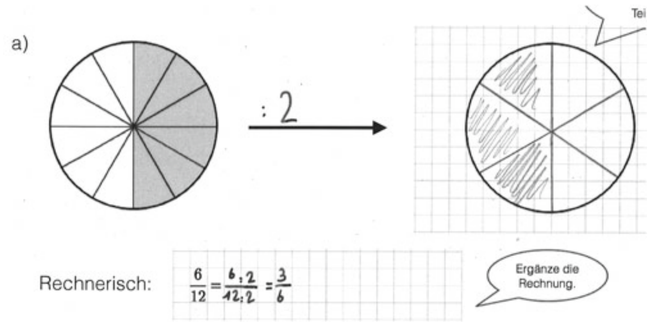



**Abbildung 5.45** Ann-Katrins Lösung von Aufgabe 3.2 a)

„dann in 6 Teile teilen“ (17) müssen. Anita ergänzt, dass sie von den sechs Teilen „3 davon“ (18) markieren müssen.

Nachdem Ann-Katrin noch einmal äußert, dass sie „gar nichts mehr“ (19) verstehe und sagt, dass diese Aufgabe für sie die „schwierigste“ sei und die anderen Aufgaben „besser“ (20–21) bzw. einfacher gewesen seien, beginnen die beiden Schülerinnen erneut zu zeichnen. Dabei stellt sich die Einteilung des Kreises in sechs gleich große Teile schwierig dar. Anita gelingt es letztendlich die neue Einteilung zu zeichnen und Anita und Ann-Katrin setzen ihre Bearbeitung in Einzelarbeit fort (Abb. 5.45).

Nach einiger Zeit des individuellen Arbeitens wendet sich Anita an ihre Partnerin und sagt, dass sie Aufgabenteil b) „richtig“ habe und der gekürzte Bruch „2 Viertel“ sei (30–31). Sie blickt auf das Arbeitsheft von Ann-Katrin und stellt fest, dass sie nicht nur bereits mit der Bearbeitung von Teilaufgabe b) fertig ist, sondern es zudem „perfekter gemacht“ habe als sie (31–32). In der Folge beschreibt Ann-Katrin ihr Vorgehen, dass die „das vorher schon berechnet“ (33) habe bevor sie die neue Einteilung eingezeichnet habe. Ihre Erklärung deutet darauf hin, dass sie ihr Vorgehen angepasst hat und nicht mehr wie zu Beginn zunächst versucht hat auf ikonischer Ebene die neue Einteilung herzuleiten und getrennt davon den gekürzten Bruch zu berechnen, sondern nun zuerst auf symbolischer Ebene den Bruch gekürzt hat und diesen gekürzten Bruch schließlich zeichnerisch dargestellt hat. Während sie zuvor von der ikonischen Bruchdarstellung ausgegangen ist und auf ikonischer Ebene versucht hat, die Einteilung zu vergröbern, betrachtet sie nunmehr zunächst die symbolische Darstellung und zeichnet den gekürzten Bruch ein, ohne die Vergröberungshandlung nachzuvollziehen.

Insgesamt können die Analysen der Bearbeitungsprozesse von Anita und Ann-Katrin in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Ann-Katrin und Anita übertragen sowohl das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen sowie die Handlung des Vergröberns einer Einteilung auf ikonischer Ebene und wenden beide Verfahren auf einen neuen Bruch im ersten unvollständigen Beispiel an. Dabei interpretieren sie das Vergröbern einer Einteilung auf ikonischer Ebene als Zusammenfassen von Teilen zu einem größeren Teil.
- Der Repräsentationswechsel im zweiten unvollständigen Beispiel führt bei Ann-Katrin dazu, dass sie die Verfahren nicht wie zuvor überträgt und anwendet. Ihre Schwierigkeiten bei der Übertragung äußern sich

  - im Verwechseln des Kürzens von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung mit dem Erweitern als Verfeinern einer Einteilung,
  - in ihren Schwierigkeiten Teile in einer Kreisrepräsentation zusammenzufassen und allgemein einen Kreis in Sechstel einzuteilen, sowie
  - in einem Perseverationsfehler, bei dem sie den Zähler des gekürzten Bruchs als Anzahl der Teile interpretiert, die zu einem Teil der Einteilung zusammen gefasst werden.

- Diese Schwierigkeiten führen im Fall von Ann-Katrin dazu, dass sie ihr Vorgehen ändert. Während sie zunächst stets von der ikonischen Bruchdarstellung ausgeht und die Einteilung vergröbert, indem sie die entsprechende Anzahl von Teilen zu einem Teil zusammenfasst, geht sie dazu über, zunächst den Bruch auf symbolischer Ebene rechnerisch zu kürzen und den gekürzten Bruch ikonisch darzustellen. Im Gegensatz zu ihrem Vorgehen im ersten unvollständigen Beispiel ist die Handlung des Vergröberns der Einteilung nicht mehr in ihrem Vorgehen zu erkennen, was als eine *Trennung der Handlung auf ikonischer und symbolischer Ebene* interpretiert werden kann. Es ist anzunehmen, dass die Schwierigkeiten, die sie bei der Anwendung des Verfahrens auf eine Bruchdarstellung in einem Kreis erfährt, dazu führt, dass sie ihren Fokus auf das rechnerische Vorgehen und die vertraute Darstellung von Brüchen in einer Kreisrepräsentation legt.

**Vergleich der Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele**

Die Analysen der dargestellten Bearbeitungsprozesse zeigen, dass das Verfahren zum Kürzen von Brüchen von den Lernenden weitgehend fehlerfrei übertragen und angewendet wurde. Mit Bezug auf die Verknüpfung des rechnerischen Verfahrens mit der anschaulichen Vorstellung des Vergröberns einer Einteilung sind vor allem zwei Aspekte herauszustellen. In den Bearbeitungsprozessen ist eine *Trennung der Verfahren auf ikonischer und symbolischer Ebene* zu beobachten, die mit einer zunehmenden *Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens* einhergeht.

**Trennung der Handlungen auf symbolischer und ikonischer Ebene:** In den schriftlichen Produkten und den Bearbeitungsprozessen der Paare ist dokumentiert, dass die Schülerinnen und Schüler nach dem Lesen der animierten Lösungsbeispiele das rechnerische Kürzen von Brüchen mit dem Vergröbern einer Einteilung auf ikonischer Ebene in Verbindung gebracht haben.

Im Fall von Bennet und Julius konnte herausgearbeitet werden, dass obgleich zunächst eine Verbindung zwischen der rechnerischen Handlung und der anschaulichen Darstellung hergestellt wird, bereits in der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels voneinander getrennt werden. Dies äußert sich zum einen darin, dass ihre Lösungswege in zwei Teilen bestehen: Zuerst kürzen sie die Brüche auf symbolischer Ebene und stellen den gekürzten Bruch im zweiten Schritt anschaulich dar. Zum anderen sind Anzeichen dafür zu erkennen, dass sie die Bruchdarstellungen des ungekürzten und des gekürzten Bruchs als getrennte Entitäten betrachten. Sie erkennen zwar, dass in beiden Darstellungen der gleiche Anteil markiert ist, sie stellen dennoch keinen dynamischen Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen im Sinne einer Transformation der Einteilung her. Vor diesem Hintergrund interpretieren sie den gekürzten Bruch als „neuen“ Bruch, wobei es möglich ist, dass diese Betrachtung durch die Formulierung im Lernmaterial unterstützt wird, in dem wiederholt gefordert wird, eine „neue Einteilung“ einzuzeichnen, was als Darstellung eines „neuen Bruchs“ interpretiert werden könnte.

Im Fall von Anita und Ann-Katrin weisen die Analysen darauf hin, dass insbesondere Ann-Katrin in der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels das Kürzen von Brüchen auf anschaulicher Ebene mit dem „Zusammenfassen von Teilen“ interpretiert und entsprechend die Idee des Vergröberns einer Einteilung überträgt und anwendet. Der Repräsentationswechsel von einer Bruchdarstellung im Rechteck zu einer Bruchdarstellung in einer Kreisrepräsentation führt in ihrem Fall zu einer großen Irritation, die zur Folge hat, dass sie ihr Vorgehen im Vergleich zum ersten unvollständigen Beispiel ändert. Während sie in der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels vor allem die Handlung auf ikonischer Ebene fokussiert und zunächst die Einteilung vergröbert, indem sie die entsprechende Anzahl von Teilen in der Ausgangsdarstellung zusammenfasst, berechnet sie nach einigen fehlerhaften Ansätzen im zweiten unvollständigen Beispiel zunächst die gekürzten Brüche auf symbolischer Ebene und zeichnet im Anschluss die ikonischen Repräsentationen dieser Brüche. In ihrer Lösung und in ihrer Argumentation ist das Vergröbern der Einteilung als Zusammenfassen von Teilen nicht mehr enthalten.

**Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens:** Die beiden dargestellten Fälle eint, dass das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen zunächst mit der Handlung des Vergröberns einer Einteilung auf anschaulicher Ebene verbunden wird, diese Verbindung jedoch in der Übertragung und Anwendung auf neue Anforderungssituationen zunehmend ausgeblendet wird und der Fokus auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens gelenkt wird. Während diese Fokussierung im Fall von Bennet und Julius bereits in der Bearbeitung des ersten unvollständigen Beispiels sichtbar wird, kann im Fall von Anita und Ann-Katrin die Entkopplung von symbolischer und anschaulicher Ebene auf den Repräsentationswechsel der Bruchdarstellungen in den Aufgaben zurückgeführt werden. Aufgrund von Schwierigkeiten in der Visualisierung von Anteilen in einer Kreisrepräsentation geht Ann-Katrin dazu über, nicht zunächst die Einteilung der ikonischen Bruchdarstellung zu vergröbern, sondern zuerst den Bruch auf symbolischer Ebene zu kürzen und dann den gekürzten Bruch einzuzeichnen.

Es ist anzunehmen, dass die Anforderungen der Übertragung und Anwendung der Verfahren in einer neuen Aufgabe dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler eher auf *vertraute Handlungskonzepte* zurückgreifen. In diesem Fall ist dies die Durchführung einer Division und die Darstellung von Brüchen in einer Kreis- oder Rechteckrepräsentation. Dabei tritt die Verknüpfung der Handlungen auf symbolischer und anschaulicher Ebene in den Hintergrund und führt möglicherweise dazu, dass diese Verknüpfung nicht weiter entwickelt und gestärkt wird, sodass es zu einer Entkopplung zwischen symbolischer und anschaulicher Ebene kommt. Diese Entwicklung könnte dazu führen, dass die Lernenden das Kürzen von Brüchen als Kalkül anwenden, ohne damit eine anschauliche Vorstellung zu verknüpfen.

**Weitere Schwierigkeiten und fehlerhafte Übertragungen:** Die dargestellten Analysen dokumentieren verschiedene Schwierigkeiten bei der Übertragung und Anwendung der Verfahren.

In beiden Bearbeitungen sind fehlerhafte Assoziationen im Sinne eines Perseverationsfehlers zu beobachten, bei denen einzelne Ziffern im Zähler nachwirken und zu falschen Lösungsansätzen führen. In diesem Zusammenhang interpretiert Julius die Formulierung „eine Einteilung, die ein drittel so viele Teile hat“ mit dem Einzeichnen des Bruchs $\frac{1}{3}$ und Ann-Katrin interpretiert den Zähler des gekürzten Bruchs als Anzahl der Teile, die zu einem Teil zusammengefasst werden. Beide Fälle deuten jedoch nicht auf ein robustes Fehlkonzept hin, sondern können als Anzeichen einer hohen kognitiven Belastung in der Transfersituation gedeutet werden.

Besonders im Fall von Ann-Katrin ist zu beobachten, dass die Darstellung von Brüchen in einer Kreisrepräsentation zu Schwierigkeiten führt. Zunächst führt der Repräsentationstransfer von einer Darstellung der Brüche in einem Rechteck zu einer Bruchdarstellung im Kreis dazu, dass sie die Verfahren des Vergröberns und Verfeinerns einer Einteilung miteinander verwechselt und zum anderen fällt es ihr augenscheinlich schwer den gekürzten Bruch in einer Kreisrepräsentation einzuzeichnen und den Kreis in Sechstel einzuteilen. Es ist begründet anzunehmen, dass sie Probleme hat, sich Bruchteile in einer Kreisdarstellung vorzustellen, was eine Anpassung des Verfahrens an die veränderte Repräsentation zusätzlich erschwert.

### 5.3.2 Vergröbern der Einteilung einer Strecke

Unmittelbar auf die unvollständigen Beispiele folgt eine Aufgabe, die einen Repräsentationstransfer zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke erfordert.

In der Aufgabe sind zwei identische Streckenabbildungen des Bruchs $\frac{8}{12}$ vorgegeben, deren Einteilung so verändert werden soll, dass die neue Einteilung halb so viele (Teilaufgabe a) und ein viertel so viele (Teilaufgabe b) hat als zuvor. Dazu sollen die Lernenden jeweils die neue Einteilung in die vorgegebenen Strecken einzeichnen und die dargestellten Brüche angeben. Zudem sollen die Lernenden angeben, wie man den Bruch in der neuen Einteilung rechnerisch erhält (vgl. Abb. 5.46).

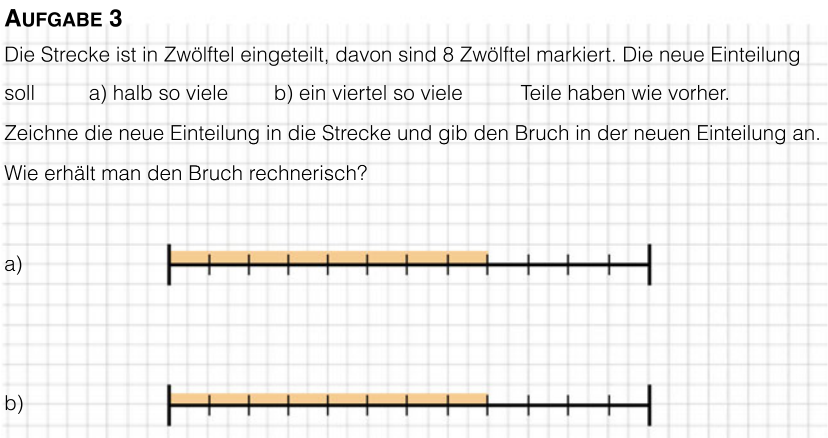



**Abbildung 5.46** Aufgabe zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke

Für die Bearbeitung von Teilaufgabe a) wird somit erwartet, dass die Lernenden je zwei Teile der Strecke zu einem neuen Teil zusammenfassen, sodass die neue Einteilung der Strecke aus sechs Teilen besteht, von denen vier Teile markiert sind und entsprechend den Anteil $\frac{4}{6}$ darstellen. Rechnerisch entspricht diese Vergröberung der Einteilung der Division von Zähler und Nenner mit 2. Analog wird für die Bearbeitung von Teilaufgabe b) erwartet, dass die Lernenden eine neue Einteilung mit drei Teilen einzeichnen, wobei ein Teil der neuen Einteilung vier Teilen der ursprünglichen Einteilung entspricht. Die neue Einteilung der Strecke stellt somit den Bruch $\frac{2}{3}$ dar, den man rechnerisch durch die Division von Zähler und Nenner mit 4 erhält.

**Transferprozesse:** Der zentrale Transferprozess in dieser Aufgabe ist die Übertragung des Vergröberns einer Einteilung auf die Repräsentation von Brüchen an einer Strecke. Wohingegen im Lösungsbeispiel und in den unvollständigen Beispielen das Verfahren ausschließlich auf Rechteck- und Kreisrepräsentationen von Brüchen angewendet wurde, ist der Anteil am Ganzen einer Strecke eine Länge und kein Flächeninhalt. Das Verfahren zum Vergröbern einer Einteilung muss somit an die Eigenschaften einer Strecke angepasst werden.

Ein weiterer Transferprozess betrifft den in Aufgabenteil b) erstmals auftretenden Kürzungsfaktor 4. Im Lösungsbeispiel sowie in den unvollständigen Beispielen wurden ausschließlich die Kürzungsfaktoren 2, 3, und 6 thematisiert, womit das Vierteln der Teile der Anteile bzw. das Kürzen durch 4 eine neue Anforderung darstellt.

**Bennet & Julius – Herleitung des Verfahrens zum Vergröbern einer Einteilung**

Die Bearbeitung beginnt mit einer hier nicht abgebildeten Diskussion über die Aufgabenstellung. Nachdem Julius die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat, diskutieren die beiden Partner, ob sie eine neue Strecke zeichnen müssen, oder ob die vorgegebene Ausgangsdarstellung für die Bearbeitung genutzt werden kann. Sie rufen die Lehrkraft hinzu, die ihnen erklärt, dass sie sowohl eine neue Darstellung anfertigen, aber auch die Ausgangsdarstellung nutzen können. Nach dieser Klärung beginnen Bennet und Julius die eigentliche Bearbeitung.

## Transkript B3A3 – Bennet & Julius – Szene 1 – Aufgabe 3

**Julius:** Das sind (*zählt mit dem Finger:*) 1, 2, ..., 12, dann nehmen wir (*zählt mit dem Finger die ersten sechs Segmente der Strecke von links nach rechts*) 1, 2, ..., 6 und dann malen wir die hier alle an (*fährt mit dem Finger über die halbe Strecke*). Und dann haben wir's doch schon.

**Bennet:** Nein, von der ganzen Strecke doch, oder nicht?
**Julius:** Was?
**Bennet:** Von der Strecke doch. (*liest:*) Die Strecke ist in Zwölftel eingeteilt, davon sind 8 Zwölftel markiert. Die neue Strecke soll halb so viele Teile haben wie vorher. ... Hä? Man soll doch hier die Teile wegnehmen irgendwie.
**Julius:** Warum? Das steht da doch gar nicht.
**Bennet:** Ja klar.
**Julius:** Wo denn?
**Bennet:** Halb so viele Teile haben wie vorher. Halb so viele Teile. Es soll halb so viele Teile haben wie vorher.
**Julius:** Ja sollen wir die da wegmachen, oder wie?

Obwohl der dargestellte Bruch angegeben ist, beginnt Julius die Bearbeitung damit die Anzahl der Teilsegmente der Strecke zu zählen. Er zählt zwölf Teile und schlägt vor, dass sie die ersten sechs Teile von links markieren (1–5), wobei er mit dem Finger die linke Hälfte der Strecke abfährt. Demnach interpretiert Julius das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit halb so vielen Teilen als Markieren der halben Strecke ohne die Einteilung zu verändern.

Bennet widerspricht dem Vorschlag von Julius damit, dass $\frac{8}{12}$ „von der ganzen Strecke“ (6) markiert werden sollen. Was genau Bennet meint, lässt sich nicht direkt erschließen. Es ist jedoch anzunehmen, dass er entweder meint, dass die ganze Strecke neu eingeteilt werden soll, oder dass Julius den markierten Anteil „von der ganzen Strecke“ verändert hat. Bennet liest die Aufgabenstellung noch einmal laut vor und ist irritiert von der Formulierung, dass die Strecke „halb so viele Teile wie vorher“ haben soll, die er so versteht, dass man „hier die Teile wegnehmen“ (8–11) soll. Er stellt scheinbar keinen Zusammenhang zum Lösungsbeispiel und den unvollständigen Beispielen her, in denen Aufgabenstellung in gleicher Weise formuliert ist.

Julius kann die Irritation von Bennet nur bedingt nachvollziehen und merkt an, dass in der Aufgabenstellung nicht steht, dass sie Teile wegnehmen sollen (12). Er nimmt dann jedoch den Einwand von Bennet auf und stellt selber in Frage, inwieweit sie Teile der Einteilung „wegmachen“ (17) sollen.

## Transkript B3A3 – Bennet & Julius – Szene 2 – Aufgabe 3

**Bennet:** Hä? (*meldet sich, dann zur Lehrkraft:*) Soll man hier dann welche Dinger wegmachen?
**Lehrkraft:** Was steht denn in der Aufgabe?
**Bennet:** Halb so viele Teile wie vorher soll das haben.
**Julius:** Ja, dann müssen wir welche wegmachen.
**Bennet:** Ja, und wie soll man die wegmachen?

**Lehrkraft:** Sonst zeichnet ihr die Strecke noch mal mit derselben Länge da drunter.
**Bennet:** Ja, aber das geht doch gar nicht.
**Julius:** Doch, hier drunter, Bennet.
**Bennet:** Ja, aber dann muss ich ja wieder welche wegmachen.
**Julius:** Nein, du kannst einfach halb so viele malen. Ich mal da jetzt eine drunter.
**Bennet:** Aber es soll doch derselbe Bruch nachher sein.
**Lehrkraft:** Ja, kann es ja auch.
**Julius:** Das ist doch genau wie eben.
**Lehrkraft:** Das kriegt ihr zusammen schon hin. (*geht weiter*)
**Bennet:** Mach du das mal. (*guckt bei Julius*) Achso, wir sollen eine neue Strecke zeichnen?
**Julius:** Ja, ich mache das schon.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

Bennet ruft die Lehrperson zu Hilfe und fragt, ob sie „Dinger" bzw. Teile der Einteilung „wegmachen" (16–17) sollen. Die Lehrperson verweist auf die Aufgabenstellung und bittet sie diese noch einmal zu lesen (18). Auch nach wiederholtem lesen, erkennen Bennet und Julius keinen Zusammenhang zu den vorhergehenden Aufgaben und fragen erneut, wie sie die Teile der Einteilung „wegmachen" (20, 21) sollen, woraufhin die Lehrperson vorschlägt, dass sie „die Strecke noch mal mit derselben Länge da drunter" (22–23) zeichnen. Bennet ist weiterhin irritiert und erwidert, dass das nicht gehe (24), da man so „ja wieder welche wegmachen" (26) solle.

Julius nimmt den Vorschlag der Lehrperson auf und bemerkt, dass er „einfach halb so viele [Teile] malen" (27–28) könne, was Bennet damit kommentiert, dass es nachher „doch derselbe Bruch" (29) sein muss, womit er meint, dass der markierte Anteil der neuen Darstellung wertgleich zum Bruch der Ausgangsdarstellung sein muss. Es ist zudem möglich, dass Bennet annimmt, eine neue Einteilung mit halb so vielen Teilen einzeichnen zu müssen, die jedoch denselben Bruch, also wieder $\frac{8}{12}$, darstellt und er entsprechend nicht erkennt, dass auch eine Einteilung mit halb so vielen Teilen denselben Anteil repräsentieren kann.

Bennets Schwierigkeiten lassen sich auf die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele zurückführen, in denen er jeweils zuerst die Brüche auf symbolischer Ebene gekürzt hat und in der Folge den gekürzten Bruch in die vorgegebene Repräsentationsvorlage eingezeichnet hat. Dabei hat er vermutlich keinen Zusammenhang zwischen den beiden Bruchdarstellungen hergestellt und das Vorgehen entsprechend auch nicht als Vergröbern der Einteilung wahrgenommen, sondern als „Kürzen" und „Einzeichnen". Da die vorliegende Aufgabenstellung jedoch explizit zum Verändern der Einteilung der Strecke auffordert, sieht er scheinbar keine Anwendungsbedingungen für sein vorhergehendes Vorgehen.

**Abbildung 5.47** Rekonstruktion von Julius' Zeichnung in Teilaufgabe a)

Julius erkennt scheinbar den Zusammenhang zum Lösungsbeispiel und den unvollständigen Beispielen und erklärt, dass die Aufgabe „doch genau wie eben“ (31) sei und beginnt eine neue Strecke zu zeichnen. In den Videoaufzeichnungen ist deutlich zu erkennen, dass er in seiner Zeichnung seinem anfänglichen Lösungsvorschlag folgt (siehe Abb. 5.47): Er zeichnet eine Strecke mit der Länge der vorgegebenen Strecke und übernimmt die Einteilung der Strecke in zwölf Teile, von denen er von links beginnend sechs Streckensegmente, also die halbe Strecke, färbt. Seine Zeichnung lässt darauf schließen, dass er das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit halb so vielen Teilen mit dem Markieren der halben Strecke übersetzt. Auch er überträgt demnach nicht das Verfahren des Vergröberns einer Einteilung, da er die Einteilung unverändert lässt und einen veränderten Anteil des Ganzen markiert.

**Transkript B3A3 – Bennet & Julius – Szene 3 – Aufgabe 3**

**Bennet:** Was machst du gerade? (*guckt bei Julius*) ... Hier, ich zeig's dir wie man's richtig macht. So muss man das machen.
**Julius:** (*guckt bei Bennet*) Hä?
**Bennet:** Warum nicht? Weil es soll doch halb so viel. Ich zeig dir's an dem. (*blättert zurück zu Aufgabe 3.2*) Wir haben das doch durch 2 geteilt und dann waren nicht mehr ganz so viele Teile da, sondern halt weniger Stücke, aber größer.
**Julius:** Ja.
**Bennet:** Weniger und größer. Größer und weniger. (*blättert zu Aufgabe 3.3*) Hier müssen wir die größer, aber dafür weniger, oder?
**Julius:** Keine Ahnung.
**Bennet:** Ja, ich denk das jetzt so. Ich glaub, dass das jetzt so ist.
**Julius:** Ist doch egal. Und wenn's falsch ist.
**Bennet:** Ja, stimmt, aber ich würde mir das jetzt nicht anders erklären können. ... Also, ich kann mir das jetzt nicht anders vorstellen.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

Nachdem beide Schüler ein Zeit lang selbstständig gearbeitet haben, vergleicht Bennet seine Zeichnung mit der seines Partners. Er erkennt den Fehler von Julius und sagt, dass er ihm zeigen möchte, „wie man's richtig macht“ (37–38). Julius schaut auf Bennets Zeichnung und scheint diese nicht zu verstehen (39). Zur Erklärung seiner Zeichnung blättert Bennet in seinem Arbeitsheft zurück zum zweiten unvollständigen Beispiel und erklärt, dass sie dort „doch durch 2 geteilt“ haben und „dann […] nicht mehr ganz so viele Teile da [waren], sondern halt weniger Stücke, aber größer[e]“ (40–43). Er überträgt diese Beobachtung auf die Bruchdarstellung in der vorliegenden Aufgabe und erklärt weiter: „Weniger und größer. Größer und weniger. Hier müssen wir die größer, aber dafür weniger [machen]“ (45–47), anders könne er sich das nicht vorstellen (51–53).

**Transkript B3A3 – Bennet & Julius – Szene 4 – Aufgabe 3**

**Bennet:** Jetzt muss man das in.. Ja, ich versuche mir das jetzt gerade vorzustellen.
**beide:** (*arbeiten individuell weiter*)
**Julius:** (*guckt bei Bennet*) Wie geht das jetzt? [Teilaufgabe b)]
**Bennet:** So hab ich das jetzt gemacht.
**Julius:** (*guckt bei Bennet*) Wie viele Stücke? 5, ne?
**Bennet:** Hä? Wieso 5?
**Julius:** Hä? Aber du hast doch jetzt schon wieder die gleichen Stücke angemalt. Aber wir sollten halb so viele haben.
**Bennet:** Also, man muss das so machen. Gleich ist ja richtig, gleich so viel muss man machen. Nur, man muss das in andere Teile, in größere Stücke einteilen.
**Julius:** (*zeichnet/schreibt bei Bennet ab*)

Während Bennet bereits mit dem Zeichnen einer neuen Einteilung für Aufgabenteil b) beginnt, korrigiert Julius seine Lösung für Teilaufgabe a). Er radiert seine erste Zeichnung aus und zeichnet eine neue Strecke (Abb. 5.48). Nach dem Zeichnen einer neuen Strecke möchte er sich zunächst bei Bennet versichern, dass die Strecke in fünf Teile eingeteilt werden muss. Hierbei ist zu vermuten, dass er jedoch nicht meint, dass die Strecke in fünf Teile eingeteilt werden muss, sondern dass die Strecke mit fünf Markierungen (Teilstrichen) eingeteilt werden muss. Er schaut erneut bei Bennet und stellt fest, dass dieser „jetzt schon wieder die gleichen Stücke angemalt hat“ obwohl die neue Einteilung „halb so viele Teile haben“ (65–66) sollte wie zuvor. Er scheint folglich weiterhin davon überzeugt zu sein, dass nur die Hälfte des anfänglichen Anteils der Strecke markiert werden müsse und kann vermutlich nicht nachvollziehen, warum Bennet denselben Anteil wie zuvor markiert hat.

Bennet begründet seine Lösung schließlich noch einmal detailliert: „Gleich ist ja richtig, gleich so viel muss man machen. Nur, man muss das in andere Teile, in größere Stücke einteilen“ (67–69). Er erklärt somit, dass der markierte Anteil der Strecke beibehalten werden und lediglich die Größe der Stücke verändert wer-

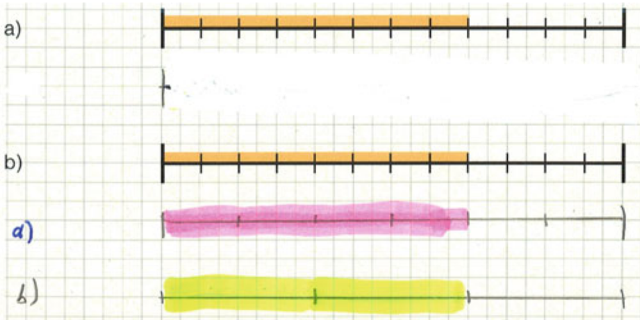



**Abbildung 5.48** Julius Bearbeitung von Aufgabe 3.3

den muss. Julius kommentiert die Erklärung von Bennet nicht und übernimmt die Lösungen von seinem Partner.

In der Bearbeitung von Bennet und Julius fällt auf, dass sowohl der Ausgangsbruch sowie die gekürzten Brüche weder in der Kommunikation der beiden Schüler noch in den schriftlichen Dokumenten ihrer Bearbeitung auftauchen. Sie sprechen allein über die Anzahl und die Größe der Teile, stellen aber keinen erkennbaren Bezug zu den symbolischen Bruchrepräsentationen her.

Insgesamt wird in der Bearbeitung von Bennet und Julius deutlich, dass sie die unvollständigen Beispiele ohne die Anwendung der Handlung des Vergröberns der Einteilung gelöst haben. Da sie zuvor stets erst rechnerisch den gekürzten Bruch bestimmt haben, den sie danach ikonisch dargestellt haben, stellen sie keinen direkten Zusammenhang zwischen der ursprünglichen und vergröberten Einteilung her. Da in dieser Aufgabe jedoch vor allem das Vergröbern der Einteilung im Vordergrund steht, können sie ihr Vorgehen nicht direkt übertragen und erst durch die Reflexion der unvollständigen Beispiele scheint Bennet zu erkennen, was es bedeutet die Einteilung zu vergröbern.

Im Gegensatz zu seinem Partner äußert Julius gleich zu Beginn, dass sie lediglich die Hälfte der Strecke markieren müssen ohne die Einteilung zu verändern. Er verbindet demnach mit dem Vergröbern einer Einteilung keine Transformation bzw. Änderung der Einteilung des Ganzen, sondern eine Veränderung des Anteils im Sinne einer Verminderung.

Es ist zu anzumerken, dass beide Schüler in den fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel eingangs der Unterrichtsstunde die wesentlichen Aspekte des

Vergröberns einer Einteilung auf ikonischer Ebene und dem rechnerischen Kürzen von Brüchen herausgestellt und notiert haben. Da sie die unvollständigen Beispiele auch ohne Anwendung der ikonischen Vergröberungshandlung lösen konnten, scheinen sie diese Beobachtungen in der Transfersituation nicht zu erinnern bzw. den entsprechenden Erfahrungsbereich nicht zu aktivieren. Dies führt im Fall von Bennet dazu, dass er zunächst nicht weiß, was er machen soll, und im Fall von Julius führt die ausbleibende Aktivierung dieses Erfahrungsbereichs zu einer individuellen und fehlerhaften Interpretation des Vorgehens.

Die nachfolgenden Beschreibungen und Argumentationen von Bennet deuten darauf hin, dass er das Verfahren zum Vergröbern einer Einteilung tatsächlich erst in dieser Aufgabe erstmalig anwendet und sich dieses – ungeachtet des Lesens des Lösungsbeispiels, der Beantwortung der fokussierenden Fragestellungen und der Bearbeitung der unvollständigen Beispiele – dazu zunächst neu herleiten muss, um es übertragen zu können.

Julius' Äußerungen legen nahe, dass er das Konzept des Vergröberns einer Einteilung zur Herstellung von äquivalenten Bruchrepräsentationen nicht so erfasst hat, wie es aus didaktischer Sicht intendiert wurde. Die Tatsache, dass er seinen Partner darauf hinweist, dass das Vorgehen dasselbe sei wie in den unvollständigen Beispielen und seine Lösung einer fehlerhaften Konzeptualisierung des Verfahrens folgt, zeigt, dass es für die Bearbeitung der unvollständigen Beispiele nicht unbedingt erforderlich war, einen Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Bruchrepräsentation und der Repräsentation des gekürzten Bruchs herzustellen. Stattdessen genügte es, das rechnerische Verfahren als Kalkül zu übertragen und anzuwenden und den gekürzten Bruch durch Anwenden des Verfahrens zur Darstellung von Bruchteilen einzuzeichnen.

Zuletzt ist in der Bearbeitung von Bennet und Julius zu erkennen, dass sie die markierten Anteile nicht aus den vergröberten Darstellungen ablesen und auch keine Beschreibung des entsprechenden rechnerischen Verfahrens angeben. Es ist anzunehmen, dass sie diesen Teil der Aufgabe schlichtweg übersehen. Andererseits kann diese Beobachtung als Anzeichen dafür gedeutet werden, dass Bennet und Julius weiterhin keine Verknüpfung zwischen den Handlungen auf anschaulicher und symbolischer Repräsentationsebene herstellen.

Insgesamt kann die Bearbeitung von Bennet und Julius in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Das Verfahren zum Vergröbern einer Einteilung wird zunächst nicht übertragen und angewendet, da es zu Beginn der Bearbeitung noch nicht als solches erkannt und in Form eines Handlungsschemas konzeptualisiert wurde. Obwohl Bennet und Julius das Lösungsbeispiel eingehend lesen und alle wesentlichen Aspekte

des Verfahrens in ihren Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen herausstellen, konnte bereits in ihrer Bearbeitung der unvollständigen Beispiele eine Entkopplung des rechnerischen Verfahrens von der anschaulichen Handlung angenommen werden. Die Übertragung und Anwendung der anschaulichen Handlung war in ihren Lösungen nicht erforderlich, da sie die Brüche zunächst rechnerisch gekürzt haben und die gekürzten Brüche ohne einen direkten Bezug zur ursprünglichen Bruchdarstellung auf Grundlage des Bruchherstellungsverfahrens eingezeichnet haben. In der Folge ist anzunehmen, dass sie kein entsprechendes Handlungsschema zum Vergröbern einer Einteilung ausgebildet haben, das sie somit auch nicht auf die vorliegende Transferaufgabe übertragen können.
- Bennet leitet das Verfahren zum Vergröbern einer Einteilung in einem reflektierenden Rückgriff auf die vorhergehenden Lern- und Aufgabenmaterialien neu her. Dazu schaut er sich noch einmal genau an, was sie zuvor gemacht haben und es ist anzunehmen, dass er erst dadurch eine Beziehung zwischen den ursprünglichen Bruchdarstellungen und den Darstellungen der zugehörigen gekürzten Brüche herstellt und aus diesen die Vergröberungshandlung ableitet.
- Julius' Beschreibungen und Argumentationen dokumentieren ein Fehlkonzept, bei dem er das Vergröbern der Einteilung als Reduktion des Anteils interpretiert. Er deutet das Einzeichnen einer Einteilung mit halb so vielen Teilen als Reproduktion der ursprünglichen Strecke mit der ursprünglichen Einteilung und markiert dann jedoch unabhängig vom ursprünglichen Anteil die halbe Strecke. Dies deutet darauf hin, dass er das Konzept von äquivalenten Brüchen nicht aufgebaut bzw. erfasst hat und eine individuelle Deutung für die anschauliche Handlung des Vergröberns (einer Einteilung) entwickelt, die jedoch keine Veränderung der Einteilung des Ganzen beinhaltet. Auch diese Beobachtung kann als Anzeichen für Trennung der rechnerischen und anschaulichen Handlung interpretiert werden.
- Es wird ausschließlich die anschauliche Handlung des Vergröberns einer Einteilung durchgeführt und kein Bezug zur symbolischen Darstellungsebene durch Angabe der Anteile und Beschreibung des rechnerischen Vorgehens beim Kürzen von Brüchen hergestellt. Dies kann einerseits mit der hohen kognitiven Belastung durch die Transferanforderung begründet werden, stützt jedoch zusätzlich die Annahme einer getrennten Verarbeitung der rechnerischen und anschaulichen Handlung.

**Julia & Marie – Veränderung des Ganzen**

Die Partnerarbeit von Julia und Marie ist dadurch charakterisiert, dass Marie im Wesentlichen allein die Aufgaben bearbeitet und Julia versucht die Lösungswege nachzuvollziehen. Dabei äußert Julia an mehreren Stellen Verständnisschwierigkeiten, die Marie stets versucht mit ausführlichen Erklärungen aufzuklären. Julia kann den Erklärungen ihrer Partnerin in vielen Fällen jedoch nicht folgen und übernimmt in den meisten Fällen die Lösungen von ihrer Partnerin.

### Transkript B3A3 – Julia & Marie – Szene 1 – Aufgabe 3

**Julia:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*)
**Marie:** Da müssen wir das mit einer anderen Farbe einteilen. Aber erstmal machen wir das rechnerisch, ok?
**Julia:** Ok, wo soll man das hinschreiben?
**Marie:** Das würd' ich da drüber machen. 8 Zwölftel geteilt durch ... Nee, warte ...
**Julia:** Geteilt durch 2.
**Marie:** Kann man da nicht eine neue Strecke zeichnen? Ich mach' eine neue Strecke.
**Julia:** Ich mache das einfach mit einer anderen Farbe, das ist weniger Arbeit. ... Hä? Ich kapier das nicht. Marie, erklär mir das mal.
**Marie:** Ja, ok. Die Strecke ist ja in Zwölftel eingeteilt..
**Julia:** Ja, aber warum ist das hier angemalt?
**Marie:** Was?
**Julia:** Ja, das.
**Marie:** Weil es 8 Zwölftel sind. Das sind 8 Zwölftel, wie bei dem Rechteck oder einem Kreis.
**Julia:** Dann muss ich hier einfach einen Strich machen, weil da 6 sind?
**Marie:** Ja.
**Julia:** Und 4 anmalen?
**Marie:** Ja, genau.
**Julia:** Aha, das ist ja einfach.
**beide:** (*arbeiten individuell*)

Unmittelbar nachdem Julia die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat, sagt Marie, dass sie die Bruchdarstellung „mit einer anderen Farbe einteilen" (2) sollen und schlägt vor zunächst die Brüche „rechnerisch" (3) zu kürzen. Marie beginnt eine Rechnung zu formulieren und sagt „8 Zwölftel geteilt durch …" (5–6), zögert dann jedoch und scheint einen Widerspruch zu entdecken: „Nee, warte …" (6). Julia nimmt die Rechnung ihrer Partnerin sofort auf und ergänzt, dass $\frac{8}{12}$ „geteilt durch 2" (7) werden müssen. Die beiden Schülerinnen übertragen somit das Verfahren zum Kürzen von Brüchen und wenden es auf den vorgegebenen Bruch an.

Anstelle die Rechnung jedoch weiter auszuführen, nimmt Marie die zeichnerische Darstellung des neuen Bruchs in den Fokus: „Kann man da nicht eine neue Strecke zeichnen? Ich mach' eine neue Strecke" (8–10). Julia ist mit diesem Vorschlag nicht einverstanden und erklärt, dass sie „das einfach mit einer anderen Farbe“ mache, da es so „weniger Arbeit“ (10–11) sei. Nach kurzem Überlegen stutzt sie jedoch und sagt, dass sie „das nicht [kapiert]“ (11) und bittet ihre Partnerin es ihr zu erklären.

In ihren Rückfragen zu der Erklärung von Marie wird deutlich, was genau Julia nicht versteht. Sie fragt, „warum […] das hier [der Anteil $\frac{8}{12}$] angemalt“ (14) sei. Sie wundert sich, dass in der Strecke bereits ein Anteil farbig markiert ist, obwohl sie doch einen Anteil einzeichnen sollen. Julia interpretiert die Aufgabenstellung demnach nicht als Vergröbern der Einteilung des dargestellten Bruchteils, sondern als Einzeichnen eines neuen Bruchs, den sie zuvor berechnet haben. Ihre Nachfragen deuten darauf hin, dass sie das rechnerische Verfahren zum Kürzen mit keinen anschaulichen Vorstellungen verbindet und entsprechend auch keinen Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Bruchdarstellung und der Darstellung des „neu berechneten“ Bruchs sieht.

Marie erklärt, dass es genauso sei, „wie bei dem Rechteck oder einem Kreis“ (17–18), womit sie sich auf die Darstellungen in den unvollständigen Beispielen bezieht und deutlich macht, dass sie dasselbe Vorgehen auch hier anwenden müssen.

Aus dieser Erklärung schließt Julia, dass sie folglich „hier einfach einen Strich machen“ muss, „weil da 6 sind“ (19–20). Damit meint sie, dass sie die Strecke halbieren, die Einteilung beibehalten und schließlich „4 [Teile] anmalen“ (22) möchte. Marie stimmt ihr zu und die beiden Schülerinnen setzen die Aufgabenbearbeitung individuell fort.

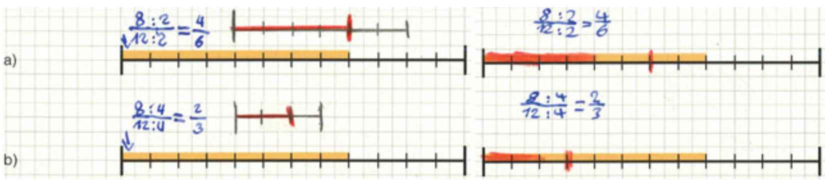


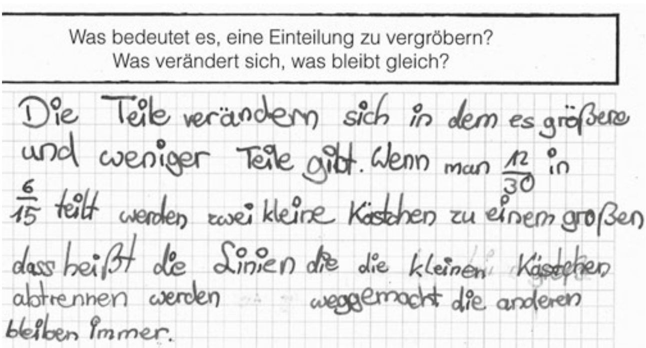

**Abbildung 5.49** Maries (links) und Julias (rechts) Bearbeitung von Aufgabe 3.3

In den schriftlichen Dokumenten (vgl. Abb. 5.49) von Marie und Julia ist zu erkennen, dass beide Schülerinnen keine Schwierigkeiten beim rechnerischen Kürzen des Bruchs durch die Faktoren 2 und 4 haben. Ebenso teilen sie ihre Ansichten darüber, wie die neue Einteilung einzuzeichnen sei, wobei sie diese jedoch unterschiedlich umsetzen.

Marie zeichnet für beide Teilaufgaben jeweils eine neue Strecke, für Teilaufgabe a) eine Strecke, die halb so lang wie die Ausgangsdarstellung ist, und für Aufgabenteil b) eine Strecke, die ein Viertel der Länge der Ausgangsdarstellung hat. Die Einteilung der Strecken verändert sie im Vergleich zur Ausgangsdarstellung nicht, und markiert somit in der ersten Strecke vier von sechs Teilen und in der zweiten Strecke zwei von drei Teilen.

Julia zeichnet dieselben Strecken in die Ausgangsdarstellung ein. Dazu trennt sie in Aufgabenteil a) die Hälfte der Strecke durch einen farbigen Strich ab und in Aufgabenteil b) ein Viertel der Strecke. Auch sie ändert die Einteilung der Strecke nicht und färbt in Teilaufgabe a) vier Streckensegmente und in Teilaufgabe b) zwei Streckensegmente farbig ein.

Obgleich die Bruchdarstellungen von Julia und Marie die korrekt gekürzten Anteile darstellen, zeichnen sie die Anteile ohne Bezug zur ursprünglichen Länge der Strecke neu ein, wobei sie die Länge der Strecke bzw. die Länge des Ganzen verändern. Die Größe der Teile der Einteilung verändern sie nicht, sondern übernehmen diese aus der ursprünglichen Darstellung (Abb. 5.49).


Was bedeutet es, eine Einteilung zu vergröbern?
Was verändert sich, was bleibt gleich?

Die Teile verändern sich in dem es größere und weniger Teile gibt. Wenn man $\frac{12}{30}$ in $\frac{6}{15}$ teilt werden zwei kleine Kästchen zu einem großen dass heißt die Linien die die kleinen Kästchen abtrennen werden weggemacht die anderen bleiben immer.

**Abbildung 5.50** Maries Antwort auf die erste fokussierende Fragestellung zum Lösungsbeispiel

Vor dem Hintergrund, dass beide Schülerinnen in ihren Antworten auf die fokussierenden Fragen zum Lösungsbeispiel ausführlich das Verfahren zum Vergröbern einer Einteilung in eigenen Worten beschrieben haben (Abb. 5.50) und erklärt haben, dass ein Kürzen mit 2 auf anschaulicher Ebene dem Zusammenfassen von zwei Teilen zu einem großen entspricht, ist festzustellen, dass sie dieses Handlungsschema nicht auf die Darstellung an einer Strecke übertragen. Sie belassen die Teile der Einteilung so wie in der ursprünglichen Darstellung und halbieren bzw. vierteln dafür die Länge der ganzen Strecke.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass auch Julia und Marie keine Vorstellung vom Vergröbern einer Einteilung aktivieren und auf die Bruchdarstellung an einer Strecke anwenden. Stattdessen übertragen sie das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen und stellen die berechneten neuen Bruchteile auf Grundlage des Bruchherstellungsverfahrens als neue Brüche dar. In ihren Lösungen ist kein Hinweis auf ein Verständnis dieses Vorgehens als Transformation der Einteilung zu erkennen.

Insgesamt kann die Bearbeitung von Julia und Marie in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Das Verfahren zum Kürzen von Brüchen wird nicht mit der anschaulichen Handlung des Vergröberns einer Einteilung verbunden. Marie und Julia kürzen den vorgegebenen Bruch rechnerisch und stellen den gekürzten Bruch anschließend auf Grundlage des Bruchherstellungsverfahrens dar. Für ihre Darstellung des gekürzten Bruchs nutzen sie die gleiche Größe der Teile wie in der ursprünglichen Darstellung und verkürzen dafür die Länge der Strecke. Somit vergröbern sie nicht die Einteilung, sondern verändern die Größe des Ganzen und beachten dabei nicht die Äquivalenz der Bruchdarstellungen.
- Auch in der Bearbeitung von Julia und Marie ist eine Trennung des rechnerischen Verfahrens und der anschaulichen Handlung des Vergröberns zu erkennen. Anstatt die Einteilung der Bruchdarstellungen zu verändern, kürzen sie den vorgegebenen Bruch auf ikonischer Ebene und stellen diesen im Anschluss ikonisch dar.

**Glen & Johanna – Vergröbern des markierten Anteils**

Die Partnerarbeit von Glen und Johanna ist sehr harmonisch und sie arbeiten sehr gewissenhaft und kooperativ. Sie haben das Lösungsbeispiel zu Beginn der Unterrichtsstunde ausführlich gelesen und auch grundlegende Eigenschaften des Verfahrens zum Kürzen von Brüchen und dem Vergröbern einer Einteilung in ihren Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel notiert, wenn auch nicht sehr detailliert (vgl. Abb. 5.51). Sie beschreiben, dass beim Vergröbern, die Teile des Ganzen verändert werden, aber Wert des Bruches nicht verändert wird.

Glen und Johanna haben die unvollständigen Beispiele vollständig und korrekt gelöst, indem sie zunächst die Brüche entsprechend der Vorgaben rechnerisch gekürzt und die ikonischen Repräsentationen der gekürzten Brüche in den vorgegebenen Figuren eingezeichnet haben. In den Bearbeitungsprozessen der unvollständigen Beispiele ist zu erkennen, dass sie das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen korrekt anwenden und die ikonischen Bruchrepräsentationen auf Grundlage des Bruchherstellungsverfahrens zeichnen. Eine Anwendung der Grundvorstel-

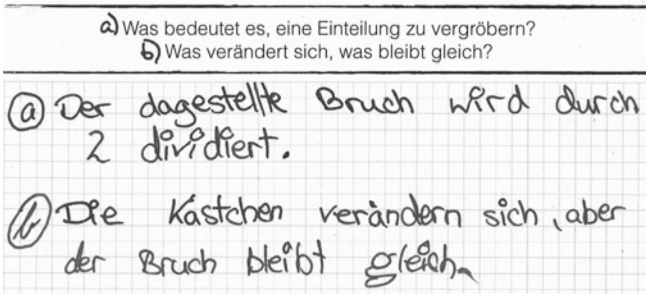



**Abbildung 5.51** Johannas Antwort auf die erste fokussierende Fragestellung zum Lösungsbeispiel

lung vom Vergröbern einer Einteilung ist in der Interaktion von Glen und Johanna nicht festzustellen. Das nachfolgende Transkript dokumentiert ihre Bearbeitung zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke.

**Transkript B3A3 – Glen & Johanna – Szene 1 – Aufgabe 3**

**Johanna:** (*liest die Aufgabenstellung laut vor*)
**Glen:** Ich weiß es.
**Johanna:** Das erste ist ja leicht. Das sind ja halb so viele. Da muss man die Hälfte rechnen.
**Glen:** Hä? Wie? Die Hälfte rechnen?
**Johanna:** Die Strecke ist in Zwölftel eingeteilt. Davon sind 8 Zwölftel markiert und davon soll man *halb* so viele haben. Verstanden? So, das sind 8 geteilt durch 2 sind 4. Du hast das bei Sechsteln gemacht.
**Glen:** Oh, sorry.
**beide:** (*arbeiten individuell*)
**Johanna:** So, jetzt schreib ich dahinter ... Das sind 4 Zwölftel.
**Glen:** Nein, 4 Sechstel.
**Johanna:** Wie kommst du auf 4 Sechstel?
**Glen:** So müsste das eigentlich sein. Du musst ja eigentlich die Hälfte von allem nehmen. 12 geteilt durch 2 gleich 6.
**Johanna:** Hä? Und wie kommst du auf 12 geteilt durch 6? Äh, geteilt durch 2?
**Glen:** Halb so viele. ... Achso, vom orangenen nur? Ach ja ... Ein viertel so viele.
**Johanna:** Ein viertel so viele, ähm ... 8 geteilt durch 4 sind 2.
**Glen:** Achso ... Ach, das ging ja einfach.
**Johanna:** Sind 2 Zwölftel.

Unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung äußern Glen und Johanna, dass sie wissen, was zu tun ist und das die erste (Teil-) Aufgabe „ja leicht“ sei (2, 3–4). Johanna erklärt, dass „man die Hälfte rechnen“ müsse, da es „ja halb so viele“ sein sollen (3–4). Sie erklärt weiter, dass die Strecke in „Zwölftel eingeteilt“ sei und acht Zwölftel markiert seien, von denen sie „halb so viele“ haben wollen (6–8). Aus diesem Grund müssen sie „8 geteilt durch 2 sind 4“ rechnen müssen (8). Zudem stellt Johanna einen Bezug zu den Lösungsbeispielen her, indem sie sagt, dass Glen dasselbe im zweiten unvollständigen Beispiel gemacht habe (9). Obwohl Glen Johannas Vorschlag zunächst nicht einordnen konnte oder womöglich nicht verstanden hat, was sie mit „die Hälfte rechnen“ (5) meint, scheint er ihrer Erklärung zuzustimmen und die beiden beginnen jeder für sich zu zeichnen.

In dieser Szene ist zu erkennen, dass Johanna das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen überträgt und auf den vorgegebenen Bruch anwendet. Dazu bezieht sie sich allein auf den Aufgabentext und stellt zunächst keine Beziehung zu der vorgegebenen Streckendarstellung her. Ihr Fokus liegt allein auf dem Kürzen des Bruchs und es ist anzunehmen, dass sie dasselbe Vorgehen wie in ihren Lösungen der unvollständigen Beispiele anwendet, in denen Glen und Johanna auch zunächst auf symbolischer Ebene den neuen Bruch berechnet haben und diesen dann eingezeichnet haben.

Für Glens anfängliche Irritation können zwei Ursachen angenommen werden. Zum einen ist es möglich, dass er Johannas Formulierung „Das sind ja halb so viele. Da muss man die Hälfte rechnen“ nicht versteht und entsprechend nachfragt, was sie damit meint. Es ist jedoch auch möglich, dass er anders als Johanna, die ihren Lösungsansatz zunächst allein auf dem Aufgabentext aufbaut, seinen Fokus auf die Bruchdarstellung in der Strecke richtet und Johannas Lösungsvorschlag aus der ikonischen Perspektive nicht nachvollziehen kann. Da er nach Johannas ausführlicheren Erklärung jedoch keine weiteren Nachfragen stellt und umgehend zum selbstständigen Zeichnen und Schreiben übergeht, kann seine Reaktion „oh sorry“ (10) so gedeutet werden, dass seine Missverständnisse bezüglich Johannas Lösungsvorschlag aufgeklärt worden sind und dieses Vorgehen auch seinem ungeäußerten Lösungsansatz (2) entspricht.

In ihrer Zeichnung markiert Johanna (vgl. Abb. 5.52) den Anfangs- und den Endpunkt des markierten Streckenanteils mit einer längeren Teilmarkierung und markiert zudem die Mitte des markierten Anteils mit einem weiteren kleineren Teilstrich. Sie kommentiert ihre Zeichnung mit „das sind 4 Zwölftel“ (12–13). Es wird deutlich, dass sie nicht die ganze Strecke neu einteilt, sondern den markierten Anteil als Ganzes deutet und diesen in zwei gleich große Teile teilt. Sie interpretiert somit das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit halb so vielen Teilen als Halbieren des Anteils, ohne die Einteilung des Ganzen zu verändern. Das rechnerische Verfahren

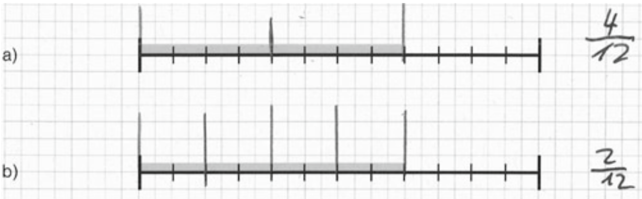



**Abbildung 5.52** Johannas Bearbeitung von Aufgabe 3.3

zum Kürzen von Brüchen wendet sie zudem nur auf den Zähler des vorgegebenen Bruchs an und teilt diesen durch 2. Dass sie damit den Wert des Bruchs und somit den Anteil am Ganzen verändert, scheint sie nicht wahrzunehmen. Es ist möglich, dass es sich bei dieser Lösung um eine Übergeneralisierung der Aufgabenstellung handelt, die sie zunächst rezitiert: „Die Strecke ist in Zwölftel eingeteilt. Davon sind 8 Zwölftel markiert und *davon* [Hervorhebung des Autors] soll man halb so viele haben" (6–8). Es ist somit denkbar, dass sie die Aufgabenstellung nicht auf die ganze Darstellung, sondern ausschließlich auf den markierten Teil der Strecke bezieht. Aber auch in diesem Falle zeigt ihre Lösung auch keine Veränderung der Einteilung, sondern ein Halbieren des markierten Teils der Strecke. Es kann somit angenommen werden, dass sie das Handlungskonzept des Vergröberns einer Einteilung nicht überträgt, sondern ein individuelles Erklärungsmodell entwickelt, dass aus ihrer Sicht zur Aufgabenstellung passt.

Im Gegensatz zu Johanna überträgt Glen das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen korrekt auf den Bruch $\frac{8}{12}$, denn er widerspricht Johannas Lösung und erklärt, dass der neue Bruch „4 Sechstel" (14) sein müsste. Er erklärt: „Du musst ja eigentlich die Hälfte von allem nehmen. 12 geteilt durch 2 gleich 6" (15–16).

Johannas Missverständnis zeigt sich in ihrer Nachfrage, wie Glen auf die Rechnung „12 geteilt durch […] 2" komme (17–18). Dies ist insbesondere vor dem Hintergrund ihrer korrekten Anwendung des Kürzens von Brüchen in den unvollständigen Beispielen bemerkenswert und ihren Partner auch zuvor auf das dort angewendete Vorgehen erinnert (9). Diese Divergenz ihres Vorgehens kann über die geänderten Handlungsmöglichkeiten und -Einschränkungen sowie den Repräsentationstransfer in dieser Aufgabe erklärt werden.

Im Gegensatz zu der Darstellung von Brüchen in einem Kreis oder Rechteck wird das Ganze durch die Fläche der zweidimensionalen Figur repräsentiert, was eine gesonderte Betrachtung eines Anteils als Ganzes sehr komplex gestaltet, da der markierte Anteil aus der Figur herausgelöst werden müsste und insbesondere ausgehend von einer Kreisrepräsentation eine abstrakte Fläche ergeben würde. Die

Strecke als Ganzes wird hingegen nur eindimensional durch ihre Länge definiert. Das Loslösen des markierten Anteils von der ganzen Strecke ist somit allein durch ein Abtrennen des nicht markierten Streckenteils möglich.

Zudem unterscheidet sich die äußere Gestaltung der Streckenaufgabe deutlich von der Gestaltung der unvollständigen Beispiele. Während in den unvollständigen Beispielen die Rechnung zum Kürzen der Brüche notiert werden sollte und zum Einzeichnen der Bruchteile eine freie Repräsentation vorgegeben war, ist dies in dieser Aufgabe nicht der Fall. Es ist keine freie Repräsentation vorgegeben und in der äußeren Gestaltung der Aufgabe ist keine Fläche zum Notieren der Rechnung vorgesehen. Die veränderte äußere Gestaltung der Aufgabe trägt somit zur Vergrößerung der Transferdistanz zu den unvollständigen Beispielen bei und kann als eine Ursache für Johannas Änderung des Vorgehens verstanden werden. Johannas Abweichung vom Vorgehen in den Lösungsbeispielen deutet zudem darauf hin, dass sie über die Bearbeitung von diesen kein stabiles Handlungsschema ausgebildet hat, dass sie auf die neue Anforderung übertragen kann. Stattdessen entwickelt sie in der neuen Anforderung ein neues Vorgehen.

Glen erkennt, dass Johanna sich allein auf den markierten Anteil in der Streckendarstellung bezieht und hält ihre Lösung für plausibel. Er bemerkt „achso, vom orangenen nur“ (19) und übernimmt den Lösungsweg seiner Partnerin, sodass sich die beiden darüber einig werden, dass der neue Anteil in Teilaufgabe b) „2 Zwölftel“ heißen muss, und sie entsprechend ihres Vorgehens in Teilaufgabe a) den markierten Teil der Strecke in vier gleiche Teile einteilen, von denen sie einen Teil als den neuen Bruch interpretieren.

Die Bearbeitung von Glen und Johanna kann somit in den folgenden Deutungshypothesen zusammengefasst werden:

- Das Vorgehen aus der Bearbeitung der unvollständigen Beispiele wird nicht auf die neue Anforderung übertragen. Glen und Johannas Lösungen der unvollständigen Beispiele dokumentieren, dass sie das Verfahren zum Kürzen als Division von Zähler und Nenner durch denselben Divisor korrekt auf neue Brüche angewendet, und die gekürzten Bruchteile auch korrekt ikonisch dargestellt haben. In dieser Aufgabe ändern sie jedoch ihr Vorgehen in folgenden Aspekten:

    – Sie lösen den markierten Anteil von der ganzen Strecke und interpretieren diesen als *neues* Ganzes,
    – sie teilen ausschließlich den markierten Anteil der Strecke neu in zwei und in vier gleiche Teile ein und belassen den nicht markierten Anteil unverändert, und

– sie teilen nur den Zähler des Bruchs und behalten den Nenner des ursprünglichen Bruchs bei.

Obwohl Glens Äußerungen zeigen, dass er das rechnerische Verfahren zum Kürzen zunächst korrekt anwendet, übernimmt er Johannas Änderung des Vorgehens. Ihre Anwendung der Division allein auf den Zähler des Ausgangsbruchs kann als Anpassung des rechnerischen Verfahrens an ihre anschauliche Handlung verstanden werden, da sie lediglich den markierten Anteil als Repräsentation des Zählers neu einteilt. Das Beibehalten des ursprünglichen Nenners kann in diesem Zusammenhang mit dem Beibehalten der ursprünglichen Einteilung der ganzen Strecke in zwölf Teile interpretiert werden.

**Can & Philip – Übertragen und Beibehalten von Fehlkonzepten**

Can und Philip arbeiten weiterhin sehr unkonzentriert und lesen das Lösungsbeispiel nur flüchtig. Bereits in ihren Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen ist zu erkennen, dass sie sowohl das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen, wie auch das anschauliche Vergröbern der Einteilung nicht erfassen. So formuliert Philip als Antwort auf die dritte fokussierende Fragestellung, was das Teilen von Zähler und Nenner durch 6 auf anschaulicher Ebene in der Rechteckdarstellung des Bruchs $\frac{12}{30}$ ändert, dass der Anteil gleich bleibt und nur die Stücke kleiner werden. Als Veranschaulichung zeichnet er ein Rechteck, dass er in 30 Teile unterteilt, von denen er fünf Teile farbig markiert. Seine Zeichnung folgt dem folgenden Denkmuster: Er wendet die Division durch 6 nur auf den Nenner des Bruchs und nicht auf den Zähler an und rechnet $30 : 6 = 5$. Das Ergebnis dieser Rechnung interpretiert er als Zähler des gekürzten Bruchs, für dessen Nenner der Nenner des Ausgangsbruchs übernommen wird. Er kürzt den Bruch $\frac{12}{30}$ demnach zu $\frac{5}{30}$, den er ikonisch neben seiner Antwort darstellt (siehe Abb. 5.53).

In den Bearbeitungen der unvollständigen Beispielen wird dieses fehlerhafte Vorgehen abgewandelt. So lautet seine Rechnung zum Kürzen des Bruchs $\frac{6}{18}$ mit dem Faktor 6: „$\frac{6}{18} : \frac{1}{6} = 3$“ (siehe Abb. 5.54). Wie in seiner Antwort auf die fokussierende Fragestellung teilt er lediglich den Nenner des Bruchs durch den Kürzungsfaktor und interpretiert diesmal jedoch das Ergebnis dieser Division als Ergebnis der Kürzung bzw. als natürliche Zahl 3. Dieses Ergebnis interpretiert er auf anschaulicher Ebene als Anzahl der zu markierenden Teile in einer unveränderten Ausgangsrepräsentation.

In der Bearbeitung des zweiten unvollständigen Beispiels wird das Verfahren erneut angepasst. Philip „kürzt“ den Bruch $\frac{6}{12}$ wie zuvor, indem er lediglich den Nenner des Bruchs durch 6 dividiert und das Ergebnis dieser Division als Ergebnis interpretiert. Auf anschaulicher Ebene übernimmt er nunmehr jedoch nicht

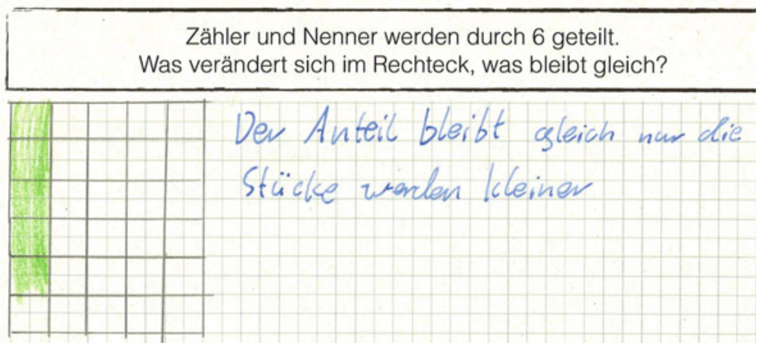



**Abbildung 5.53** Philips Antwort auf die dritte fokussierende Frage zum Lösungsbeispiel

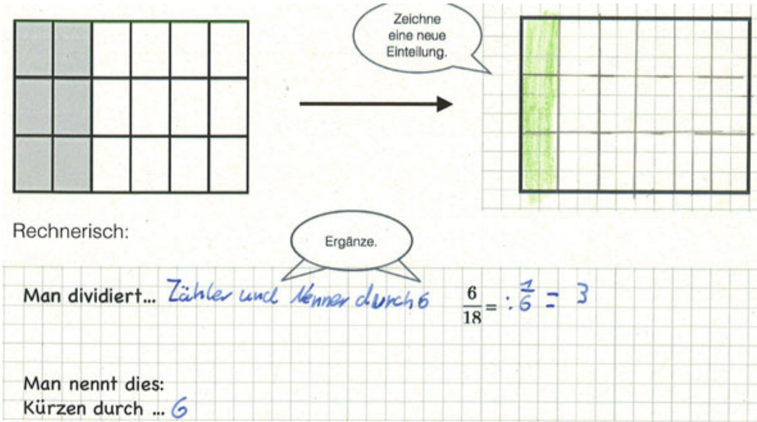



**Abbildung 5.54** Philips Lösung von Aufgabenteil b) des ersten unvollständigen Beispiels

die Einteilung der ursprünglichen Bruchdarstellung, sondern deutet das Ergebnis der Division als Anzahl der Teile der neuen Einteilung. Einen Anteil markiert er nicht, sondern betrachtet das Vergröbern mit diesem Schritt als abgeschlossen (siehe Abb. 5.55). Sein Partner Can übernimmt alle Lösungen seines Partners. Das folgende Transkript dokumentiert ihre Übertragung dieses Vorgehens auf das Vergröbern von Anteilen in einer Streckendarstellung.

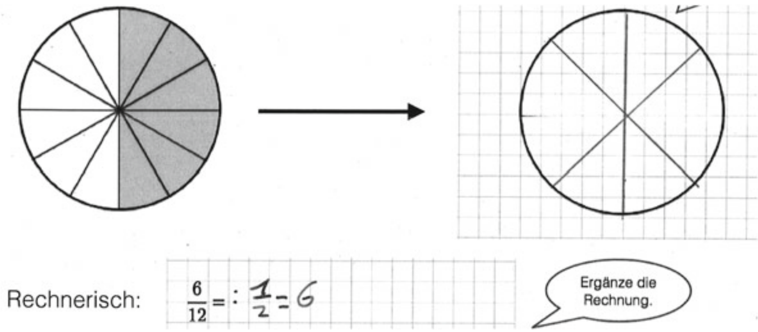



**Abbildung 5.55** Philips Lösung von Aufgabenteil a) des zweiten unvollständigen Beispiels

### Transkript B3A3 – Can & Philip – Szene 1 – Aufgabe 3 a)

**Can:** Halb so viele von 12 ... Die Hälfte von 12 ist 6.
**Philip:** Warte.
**Can:** Machst du da noch so'n Strich hin? Ein Viertel? Da drunter, ne? (*zur Lehrkraft:*) Wo sollen wir diese Strecke hinzeichnen?
**Lehrkraft:** Die könnt ihr da drunter zeichnen.
**Can:** Ja, aber wie machen wir das denn?
**Philip:** Das muss da ja hin. Da muss 1 Viertel hin und da muss 1 Halb.
**Can:** Also müssen wir da gar nicht a) und b) vorschreiben? 2 Kästchen für den Strich am Anfang. Was für eine Platzverschwendung.
**beide:** (*zeichnen kurz individuell – Ablenkung*)

Die Bearbeitung von Can und Philip beginnt mit einer Klärung der Aufgabenstellung. Can berechnet „die Hälfte von 12" (1), weiß jedoch nicht, wo er „diese Strecke hinzeichnen" (4–5) soll und wendet sich mit dieser Frage an die Lehrkraft, die ihnen rät unter der Ausgangsdarstellung eine neue Strecke zu zeichnen. Can erklärt jedoch, dass er nicht wisse, „wie" (7) er das tun soll. Philip kommentiert, dass sie unter die Darstellung von a) „1 Halb" und unter die Darstellung von b) „1 Viertel" (8–9) zeichnen müssen, bevor die beiden Partner zunächst individuell zu zeichnen beginnen und sich schließlich ablenken (13).

### Transkript B3A3 – Can & Philip – Szene 2 – Aufgabe 3 a)

**Can:** Ich mach jetzt einfach wieder diese ganze Strecke mit gleich so vielen Strichen, oder?

**Philip:** Mit halb so vielen Strichen.
**Can:** Was?
**Philip:** Bei jedem vierten Kästchen musst du jetzt einen Strich machen.
**Can:** Was? (*guckt bei Philip*) Nein, das ist falsch. Einhalb!
**Philip:** Ja.
**Can:** Die Hälfte von der Strecke muss ich anmalen.
**Philip:** Nein.
**Can:** Doch, das ist doch da auch so. Die Hälfte von der Strecke muss ich anmalen.
**Philip:** Nein, die meinen damit, dass man die Hälfte des Anteils nehmen soll.
**Can:** Nein, das meinen die nicht. Wir müssen die Hälfte einfach anmalen.
**Philip:** Ich frag mal.
**Can:** Nein, frag nicht.
**beide:** (*zeichnen individuell*)

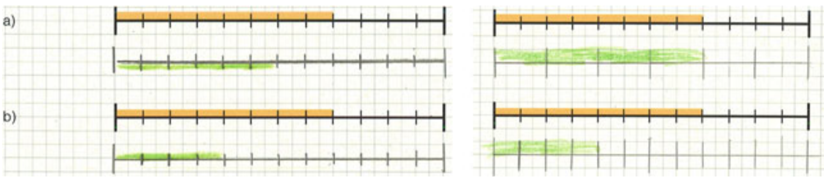



**Abbildung 5.56** Can (links) und Philips (rechts) Bearbeitung von Aufgabe 3.3

Als sich Can und Philip wieder der Bearbeitung zuwenden erklärt Can, dass er „jetzt einfach wieder diese ganze Strecke mit gleich so vielen Strichen“ (14–15) zeichnet. Philip widerspricht diesem Vorschlag und merkt an, dass sie eine neue Strecke „mit halb so vielen Strichen“ (16) zeichnen sollen, indem sie „bei jedem vierten Kästchen […] einen Strich machen“ (18–19). Dieser Beschreibung nach fasst Philip je zwei Teile der Ausgangsstrecke zu einem neuen Teil zusammen und zeichnet eine neue Einteilung der Strecke in sechs Teile (vgl. Abb. 5.56), von denen er vier Teile färbt.

Can ist mit diesem Vorgehen jedoch nicht einverstanden und erklärt Philips Zeichnung für falsch (20). Stattdessen müsse „die Hälfte von der Strecke“ (22; 24–25; 28–29) angemalt werden, weil „das […] doch da [in den unvollständigen Beispielen] auch so“ (24) sei. Obgleich er einen Bezug auf ihre Lösungen der unvollständigen Beispiele herstellt, folgen seine Erklärungen einem anderen Denkmuster. Im Gegensatz zu ihren Deutungen im Lösungsbeispiel interpretiert er das Vergröbern der Einteilung der Strecke, sodass die neue Einteilung halb so viele Teile hat wie zuvor, als Markieren der Hälfte der Strecke. Er überträgt ihr Vorgehen aus den unvollständigen Beispielen demnach nicht, sondern interpretiert das Verfahren erneut auf eine andere Weise. Es ist jedoch anzunehmen, dass die Lösungen der unvollständigen Beispiele lediglich bei Philip abgeschrieben hat, ohne die dahinterliegende(n) Argumentation(en) nachzuvollziehen. Vor diesem Hintergrund kann angenommen werden, dass diese Sichtweise seinem individuellen Verständnis des Verfahrens entspricht, die er an dieser Stelle zum ersten mal äußert.

Anstatt sein Vorgehen aus den vorhergehenden Bearbeitungen zu übertragen deutet auch Philip die Aufgabenstellung bzw. die Handlungsanweisung eine neue Einteilung für die Strecke mit halb so vielen Teilen zu zeichnen neu. Gemäß der Aufgabenstellung fasst er je zwei Teile der ursprünglichen Darstellung zu einem Teil zusammen und zeichnet eine neue Strecke mit der korrekten Einteilung in nunmehr sechs Teile. Er markiert vier dieser Teile und somit den äquivalenten Anteil zur ursprünglichen Darstellung und begründet dies damit, dass „man die Hälfte des Anteils nehmen soll“ (26–27), was jedoch seiner Zeichnung widerspricht, da er denselben Anteil der Strecke farbig markiert.

**Transkript B3A3 – Can & Philip – Szene 3 – Aufgabe 3 b)**

**Can:** Wie viel sind 1 Drittel denn von 12? ... 2.
**Philip:** 2? 2 mal 3 sind doch..
**Can:** Das sind 6.
**Philip:** Ja.
**Can:** Ja, doch 3, die Hälfte davon ist...
**Philip:** 3 ist 1 Viertel.
**Can:** Dann 4 halt. 1 Viertel? Also 4 Stück anmalen? Mach du erst.
**beide:** (*zeichnen individuell – Philip zeichnet – Can zeichnet bei Philip ab*)

In ihrer Lösung des zweiten Aufgabenteils, in dem die neue Einteilung nur noch ein viertel so viele Teile wie zuvor haben soll, ändert Philip erneut sein Vorgehen und orientiert sich nun an der Argumentation von Can, der zunächst ohne erkennbaren Grund „1 Drittel von 12“ berechnen will (34). Can kommt für diese Rechnung zu dem Ergebnis „2“ (34). Philip scheint Cans Rechnung nicht nachvollziehen zu können und erwidert, dass „2 mal 3“ 6 seien (35), woraufhin Can ergänzt, dass „doch 3 die Hälfte davon [vom markierten Teil der Strecke]“ (38) sei. Philip erwidert, dass „3“ (39) einem Viertel entspricht, womit er vermutlich meint, dass drei Teile einem Viertel der ganzen Strecke bzw. einem Viertel von zwölf Teilen entsprechen. Daraufhin erwidert Can, dass sie somit vier Teile bzw. „4 Stück anmalen“ (40) müssen, was Philip dann auch in seiner Zeichnung umsetzt. Es fällt auf, dass Can und

Philip in beiden Teilaufgaben keinerlei Rechnungen oder Brüche notieren, sondern ihre Handlungen ausschließlich auf die ikonische Ebene beschränkt sind.

Insgesamt wird in der Bearbeitung von Can und Philip deutlich, dass sie das Verfahren im Lösungsbeispiel von Beginn der Unterrichtsstunde an nicht erfasst und verstanden haben. Entsprechend interpretieren sie in jeder der nachfolgenden Aufgaben das Vorgehen zum Kürzen von Brüchen auf symbolischer Ebene sowie das Vergröbern der Einteilung neu. In allen Bearbeitungen ist dabei kein stabiles Denkmuster auszumachen, außer dass sie ausschließlich den Nenner des Ausgangsbruch durch den Kürzungsfaktor dividieren. Vor diesem Hintergrund wirkt Philips korrekte Lösung von Aufgabenteil a) augenscheinlich eher zufällig. In seinen Beschreibungen und Erklärungen wird jedoch deutlich, dass diese korrekte Lösung nicht willkürlich oder zufällig zustande kommt, sondern dadurch erklärt werden kann, dass Philip den Vorgaben in der Aufgabenstellung folgt, und genau wie dort formuliert eine neue Einteilung für die Strecke mit halb so vielen Teilen zeichnet, und somit die Einteilung der Strecke korrekt vergröbert. Sein Einzeichnen des korrekten Anteils kann als Anzeichen dafür verstanden werden, dass er das Verfahren nun verstanden hat. Diese Annahme kann jedoch aufgrund seiner Erklärung, dass die Hälfte des Anteils markiert werden müsse, nicht gestützt werden.

Die Bearbeitung von Can und Philip lässt sich in der folgenden Deutungshypothese zusammenfassen:

- Die Verfahren zum Kürzen von Brüchen auf symbolischer Ebene und zum Vergröbern der Einteilung auf anschaulicher Ebene werden nicht übertragen und angewendet. Begonnen mit ihren Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel über die Bearbeitung des ersten und zweiten unvollständigen Beispiels bis hin zur dargestellten Bearbeitung der Aufgabe zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke ist festzustellen, dass Can und Philip jede Aufgabe auf Grundlage eines neuen Deutungsmusters bearbeiten. Mit Ausnahme, dass sie auf rechnerischer Ebene die Division durch den Kürzungsfaktor nur auf den Nenner des Ausgangsbruchs anwenden, lässt sich in ihren Bearbeitungen und Argumentationen kein stabiles Deutungsmuster rekonstruieren. Ihre Bearbeitungen folgen in allen Fällen spontanen Assoziationen und weisen auf eine Orientierung am Umgang mit natürlichen Zahlen hin, was sich insbesondere darin äußert, dass die Ergebnisse ihrer Kürzungen stets natürliche Zahlen sind, die sie als Anzahl der zu markierenden Teile deuten.

**Vergleich der Bearbeitungen zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke**

Zusammenfassend zeigen die Analysen der Bearbeitungsprozesse, dass der Repräsentationstransfer des Verfahrens des Vergröberns der Einteilung auf die Darstellung in einer Strecke eine besondere Schwierigkeit für die Lernenden darstellt. In keiner Bearbeitung konnte die intendierte Übertragung des anschaulichen Handlungsschemas vollständig rekonstruiert werden. Obgleich der Transfer in dieser Aufgabe im Wesentlichen die anschauliche Ebene betrifft, konnte beobachtet werden, dass dieser auch die Übertragung des rechnerischen Verfahrens zum Kürzen von Brüchen beeinflusst. Vor diesem Hintergrund werden in den dargestellten Bearbeitungsprozessen verschiedene Fehlkonzepte dokumentiert, die auf die fehlerhafte Übertragung des rechnerischen Verfahrens sowie der anschaulichen Handlung zurückgeführt werden können.

**Fehlkonzepte in der Übertragung des anschaulichen Vergröberns einer Einteilung:** Im Kern der Aufgabe steht die Übertragung des Vergröberns der Einteilung einer Bruchdarstellung, dass zuvor ausschließlich anhand der Flächenrepräsentationen eines Rechtecks und Kreises angewendet wurde auf die lineare Darstellung von Brüchen in einer Strecke. Es fällt auf, dass in keiner der dargestellten Bearbeitungen dieses Verfahren entsprechend der Erläuterung im Lösungsbeispiel und der Beschreibung in den unvollständigen Beispielen fehlerfrei übertragen wurde. Die Fehler der Lernenden bei der Übertragung der anschaulichen Handlung des Vergröberns der Einteilung stellen sich dabei wie folgt dar:

- Das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit halb so vielen Teilen wird als Markieren der halben Strecke ohne Veränderung der Einteilung interpretiert (vgl. z. B. Julius, Can).
- Die Länge der ganzen Strecke verändert wird, sodass diese nur noch die halbe bzw. ein Viertel der Länge der ursprünglichen Strecke hat, wobei die Länge der Streckensegmente (der Teile) beibehalten wird (vgl. Marie und Julia).
- Der markierte Anteil der ursprünglichen Darstellung wird in zwei bzw. vier Teile eingeteilt und somit getrennt vom Ganzen betrachtet (vgl. Glen und Johanna).
- Das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit einem viertel so viele Teilen wird als Markieren von vier Teilen der ursprünglichen Darstellung interpretiert (vgl. Can und Philip).

Die dokumentierten Fehler können als Fehlkonzepte zum Vergröbern einer Einteilung gesehen werden, da sie ein grundlegendes Missverständnis der wesentlichen Aspekte des Verfahrens suggerieren, *(i)* dass das Ganze nicht verändert wird, *(ii)* dass Teile der Einteilung zu einem neuen größeren Teil zusammengefasst werden, und *(iii)* dass der betrachtete Anteil unverändert bleibt. Alle diese Fehler betreffen fehlerhafte anschauliche Deutungen des Verfahrens.

Die einzige korrekte Lösung ist in der Bearbeitung von Bennet und Julius dokumentiert. Doch auch hier kann beobachtet werden, dass Bennet das Verfahren nicht direkt aus dem Lesen des Lösungsbeispiels zu Beginn der Unterrichtsstunde oder aus der Bearbeitung der unvollständigen Beispiele überträgt. Da er zunächst keinen Lösungsansatz findet, blättert er zurück zu ihren Lösungen der unvollständigen Beispiele und liest erneut den dritten Teil des Lösungsbeispiels am Computerbildschirm. Erst nach dieser erneuten Reflexion des Vorgehens erkennt stellt er einen Zusammenhang zwischen diesen und der vorliegenden Aufgabe her und überträgt das anschauliche Verfahren durch die Bildung einer Analogie.

**Fehler in der Übertragung des rechnerischen Kürzens von Brüchen:** Neben den Fehlkonzepten, die bei der Übertragung des anschaulichen Verfahrens rekonstruiert werden konnten, ist zu beobachten, dass auch das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen in vielen Fällen nicht fehlerfrei übertragen wurde.

- Glen und Johanna wenden das Verfahren nur auf den Zähler des ursprünglichen Bruchs an und passen das Rechenverfahren somit an ihre Handlung auf ikonischer Ebene an, indem sie den Nenner des Bruchs beim Kürzen unverändert belassen.
- Philip und Can übertragen ein Fehlkonzept, das bereits in ihren Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele dokumentiert ist, und bei dem sie das Ergebnis der Division des Nenners durch den Kürzungsfaktor als Anzahl der zu markierenden Teile des Ganzen interpretieren.
- Bennet und Julius stellen keinen Bezug zum rechnerischen Verfahren her.

Julia und Marie übertragen das rechnerische Verfahren zum Kürzen von Brüchen ohne Fehler. Sie verbinden dieses Verfahren jedoch nicht mit einem Vergröbern der Einteilung, sondern zeichnen eine neue Darstellung, in der die ganze Strecke nur noch halb bzw. ein viertel so lang ist wie in der ursprünglichen Darstellung.

Es sind verschiedene Ursachen für die Schwierigkeiten der Lernenden bei der Übertragung der Verfahren auf symbolischer und anschaulicher Ebene denkbar, die vor allem auf die veränderten Handlungsmöglichkeiten und -Einschränkungen in Bezug auf die Repräsentation in einer Strecke zurückgeführt werden können: Die isolierte Betrachtung des markierten Teils der Strecke liegt bei der eindimensionalen Darstellung von Brüchen in einer Strecke näher als bei der zweidimensionalen Darstellung von Brüchen als Flächeninhalte in einem Rechteck oder einem Kreis. Zudem ist die Transferdistanz zum Lösungsbeispiel und zu den unvollständigen Beispielen durch die grundlegend unterschiedliche äußere Gestaltung der Transferaufgabe besonders groß. Zum einen sind für die einzelnen Lösungsschritte keine gesonderten Arbeitsflächen vorgegeben und zum anderen sind keine Hinweise auf die einzelnen Lösungsschritte vorgegeben, wie dies in den Sprechblasen der unvollständigen Beispielen der Fall war.

### 5.3.3 Vergleich der Bearbeitungsprozesse in den Transferaufgaben

Im Vergleich zu den ersten beiden Untersuchungsteilen besteht der Gegenstand des Transfers nicht darin Anteile von verschiedenen Ganzen und Größen zu bestimmen und zu berechnen, sondern darin Brüche durch Kürzen in äquivalente Brüche umzuwandeln und auf anschaulicher Ebene die Einteilung eines Bruchs zu vergröbern. Die intendierte anschauliche Deutung des Rechenverfahrens als Vergröbern der Einteilung baut dabei im Wesentlichen auf der Grundvorstellung von Brüchen als Anteil auf, da das anschauliche Verfahren schließlich auf Anteile angewendet wird. Die Grundidee der Veränderung der Einteilung eines Bruches ist den Lernenden nicht völlig unbekannt, da im vorbereitenden Klassenunterricht das Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung eingeführt wurde.

Die Analysen der Bearbeitungsprozesse beschreiben deutliche Unterschiede zwischen den intendierten Transferprozessen und den Lösungswegen der Lernenden. Dabei können bereits in der Anwendung des rechnerischen und anschaulichen Verfahrens in den unvollständigen Beispielen zwei Muster in den Bearbeitungen der Lernenden identifiziert werden, die als ursächlich für eine Vielzahl von Schwierigkeiten angenommen werden können, die beim Repräsentationstransfer zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke dokumentiert sind. Dabei handelt es sich zum einen um eine *Trennung bzw. Entkopplung des rechnerischen Verfahrens und der anschaulichen Handlung* und die damit zusammenhängende *Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens*.

**Entkopplung von rechnerischer und anschaulicher Handlung und Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens:** Die Entkopplung der rechnerischen und anschaulichen Handlung wird vor allem in dem Bearbeitungsmuster „Kürzen und Darstellen" deutlich, dass in nahezu allen Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele dokumentiert ist. Hierbei kürzen die Lernenden den vorgegebenen Bruchteil zunächst rechnerisch und zeichnen den gekürzten Bruch anschließend in die vorgegebene Repräsentation ein. Für die Repräsentation des gekürzten Bruchteils wird dabei keine Verbindung zu der Darstellung des ungekürzten Bruchteils hergestellt, indem sich die Lernenden an der ursprünglichen Einteilung orientieren und die entsprechende Anzahl von Teilen zu einem neuen Teil zusammenfassen. Stattdessen dokumentieren die Analysen der Bearbeitungsprozesse, dass die Lernenden das Bruchherstellungsverfahren anwenden, um einen „neuen“ Bruchteil einzuzeichnen. Die anschauliche Deutung als Vergröbern der Einteilung wird nicht übertragen und angewendet.

Im Gegensatz zu der anschaulichen Deutung beschreiben die Analysen die Bearbeitungsprozesse der Lernenden eine Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens, das in allen Fällen – wenn auch in einigen Fällen fehlerhaft – übertragen wird. In diesem Zusammenhang ist anzunehmen, dass die Division von Zähler und Nenner bzw. die Division natürlicher Zahlen für die Lernenden ein vertrautes Handlungskonzept darstellt, wohingegen die Transformation einer Darstellung zunächst sehr abstrakt und eine mentale Simulation der Vergröberungshandlung eine besondere Anforderung darstellen. Obwohl die Lernenden mit wenigen Ausnahmen die zentralen Aspekte des anschaulichen Handlungskonzepts in ihren Antworten auf die fokussierenden Fragestellungen zum Lösungsbeispiel formuliert haben, dokumentieren die Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele einen ausbleibenden Transfer. Da die Lernenden zur Beantwortung der fokussierenden Fragestellungen sich an den Darstellungen und Erläuterungen im Lösungsbeispiel orientieren konnten, ist diese „Vorlage“ in den unvollständigen Beispielen nicht gegeben, sodass sie sich das Vergröbern der Einteilung zunächst vorstellen müssten. Aus diesem Grund ist anzunehmen, dass sie sich in ihren Lösungen an dem ihnen vertrauten Handlungskonzepten „Division von natürlichen Zahlen“ und „Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens“ orientieren.

Die beobachtete Fokussierung auf die Übertragung des rechnerischen Verfahrens und die Entkopplung der Handlungen auf rechnerischer und anschaulicher Ebene stellt einen plausiblen Erklärungsansatz für die vielfältigen Fehlkonzepte, die in den Bearbeitungsprozessen zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke dokumentiert sind.

**Entwicklung von Fehlkonzepten zum anschaulichen und rechnerischen Verfahren:** Die Bearbeitungen der Lernenden zum Vergröbern der Einteilung einer Strecke sind durch eine Vielfalt verschiedener fehlerhafter Deutungen des anschaulichen Verfahrens charakterisiert. In den Bearbeitungen der Lernenden ist dokumentiert, dass

- das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit halb so vielen Teilen als Markieren der halben Strecke ohne Veränderung der Einteilung interpretiert wird (vgl. z. B. Julius, Can),
- die Länge der ganzen Strecke verändert wird, sodass diese nur noch die halbe bzw. ein Viertel der Länge der ursprünglichen Strecke hat, wobei die Länge der Streckensegmente (der Teile) beibehalten wird (vgl. Marie und Julia),

- der markierte Anteil der ursprünglichen Darstellung in zwei bzw. vier Teile eingeteilt und somit getrennt vom Ganzen betrachtet wird (vgl. Glen und Johanna) und
- das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit einem viertel so viele Teilen als Markieren von vier Teilen der ursprünglichen Darstellung interpretiert wird (vgl. Can und Philip).

Da diese fehlerhaften Lösungen und Lösungsansätze ein grundlegendes Missverständnis der wesentlichen Aspekte des anschaulichen Verfahrens suggerieren, können sie als Fehlkonzepte bezeichnet werden. Die Lernenden übertragen nicht ihre Beobachtungen aus dem Lösungsbeispiel, *(i)* dass das Ganze nicht verändert wird, *(ii)* dass Teile der Einteilung zu einem neuen größeren Teil zusammengefasst werden, und *(iii)* dass der betrachtete Anteil unverändert bleibt, sondern deuten das Verfahren in der Transfersituation neu. Vor dem Hintergrund der Beobachtungen aus den Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele kann diese neue Deutungsaushandlung der Lernenden auf eine unzureichende Verknüpfung des rechnerischen und des anschaulichen Verfahrens zurückgeführt werden. Das Hervortreten von Fehlkonzepten des anschaulichen Verfahrens wird insbesondere dadurch bestärkt, dass die Formulierung der Aufgabenstellung den Schwerpunkt auf die Anwendung des anschaulichen Verfahrens setzt. Anders als in den unvollständigen Beispielen soll hier zunächst eine neue Einteilung eingezeichnet werden und erst im Anschluss daran das Vorgehen auf die symbolische Ebene übersetzt werden. Dies hat zur Folge, dass die Lernenden nicht das Bearbeitungsmuster „Kürzen und Darstellen“ anwenden, sondern ihren Fokus auf die Veränderung der Einteilung der Strecke legen.

In einigen Fällen konnte zudem beobachtet werden, dass die Lernenden zur Beschreibung des Vergröberns auf symbolischer Ebene nicht das Verfahren zum Kürzen übertragen, sondern ihre fehlerhafte anschauliche Handlung auf die symbolische Ebene übersetzen. Zu nennen ist hierbei insbesondere die Lösung von Glen und Johanna, die in ihrer anschaulichen Darstellung die Einteilung der Strecke beibehalten und lediglich den markierten Anteil neu einteilen. Sie übersetzen dieses Verfahren entsprechend so, dass sie nur den Zähler des Bruchs dividieren und den Nenner beibehalten. Ihre Lösung dokumentiert, wie das rechnerische Verfahren, dass sie zuvor wiederholt korrekt angewendet haben, auf Grundlage eines Fehlkonzepts auf anschaulicher Ebene verändert wird.

**Weitere Schwierigkeiten beim Transfer des Verfahrens auf eine neue Repräsentation:** Neben der Entwicklung von Fehlkonzepten dokumentieren die Bearbeitungen der Lernenden zudem die besonderen Schwierigkeiten, die beim

Transfer des Verfahrens auf eine neue Repräsentation auftreten können. Diese sind nicht nur auf den Transfer auf die Strecke beschränkt, sondern sind auch beim Repräsentationswechsel im zweiten unvollständigen Beispiel zu erkennen. Diese umfassen:

- *Fehlerhafte Assoziationen*, wie zum Beispiel, dass das Einzeichnen einer neuen Einteilung mit halb so vielen Teilen als Markieren von halb so vielen Teilen gedeutet wird,
- die *Verwechslung von Vergröbern und Verfeinern* einer Einteilung und
- Schwierigkeiten beim *Darstellen von Bruchteilen in einer Kreisrepräsentation*.

Auch diese Fehler und Schwierigkeiten der Lernenden betreffen vorwiegend die anschauliche Deutung des Verfahrens.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die beobachtete Entkopplung des rechnerischen Verfahrens und der anschaulichen Deutung des Verfahrens beim Transfer im Rahmen der Anwendung der Verfahren auf neue Brüche und neue Repräsentationen dazu führt, dass das Verfahren auf anschaulicher Ebene neu gedeutet wird. Dabei kommt es in vielen Fällen zu Fehldeutungen des Verfahrens, die das Potenzial haben sich zu stabilen Fehlkonzepten und Fehlvorstellungen zu entwickeln. Es konnte zudem beobachtet werden, dass die Möglichkeit besteht, dass diese Fehlkonzepte und -Vorstellungen des anschaulichen Verfahrens auf das rechnerische Verfahren übertragen werden, und dieses entsprechend in einem negativen Transfer angepasst wird.

## 5.4 Vergleich und Diskussion der deskriptiven Analysen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Analysen der Bearbeitungsprozesse zusammengeführt. Im Vordergrund dieser Zusammenführung steht der Vergleich der Ergebnisse der Analysen der drei videographierten Unterrichtsstunden mit dem Ziel Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten und vor dem Hintergrund der formulierten Forschungsfragen zu diskutieren.

### 5.4.1 Zusammenführung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Bearbeitungsprozesse zusammengefasst und miteinander in Beziehung gesetzt, um Gemeinsamkeiten und

Unterschiede der Analysen der Bearbeitungen zu den drei inhaltlichen Schwerpunkten herauszustellen.

**Intendierte Transferprozesse**

In Vorbereitung der deskriptiven Analysen der Bearbeitungsprozesse der Lernenden wurden auf sachanalytischer Ebene die Aufgaben auf intendierte Transferprozesse und notwendige Grundvorstellungen hin untersucht. Im Fokus stand hierbei, dass der Hauptgegenstand der Transferprozesse in allen Fällen ein *Verfahren* ist, das auf neue Zahlenwerte, eine neue Repräsentation oder einen neuen Sachkontext angewendet werden soll:

- Das Bruchherstellungsverfahren: Teilen eines Ganzen in $n$ gleiche Teile und $m$-faches Vervielfachen eines Teils,
- Berechnen von Anteilen beliebiger Größen: Teilen einer Größe in $n$ gleiche Teile und $m$-faches Vervielfachen eines Teils,
- Kürzen von Brüchen: Division von Zähler und Nenner eines Bruchs $\frac{m}{n}$ durch den gleichen Divisor $k$.

Beim Transfer eines Verfahrens oder Handlungskonzepts auf eine neue Repräsentation bestehen die zentralen Transferschritte im Anpassen des Handlungskonzepts an die Eigenschaften des neuen Repräsentationsobjekts. Mit Bezug auf den Transfer eines Verfahrens auf eine neue Sachsituation stellt insbesondere die Identifizierung der Bezugsgrößen und die Analogiebildung zwischen den einzelnen Handlungsschritten die wichtigsten Transferschritte dar.

Aus der Sicht des Grundvorstellungskonzepts ist jedes rechnerische Verfahren mit einem anschaulichen Handlungskonzept verbunden, das in den für die Analysen der Bearbeitungsprozesse ausgewählten Aufgaben ebenfalls als Gegenstand von Transferprozessen übertragen werden sollte. Der Transfer besteht dabei in der Übertragung und Anwendung der anschaulichen Handlungskonzepte auf neue Repräsentationen und Sachkontexte:

- Bruchherstellungsverfahren und Berechnen von Anteilen beliebiger Größen: Teilen eines Ganzen (Figur, Repräsentant einer Größe) in $n$ kongruente Teile und Markieren von $m$ Teilen,
- Kürzen von Brüchen: Vergröbern der Einteilung einer Bruchdarstellung.

In Hinsicht auf die Ausbildung und Entwicklung von Grundvorstellungen besteht ein wesentlicher Transferprozess in der Verknüpfung der rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepte, d. h. der Verknüpfung der Grundvorstellung Bruch als

Anteil mit der Grundvorstellung Bruch als Operator sowie die Verknüpfung des Kürzens von Brüchen mit dem Vergröbern einer Einteilung auf anschaulicher Ebene.

**Vergleich der intendierten Transferprozesse mit den in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden dokumentierten Transferprozesse**
In den deskriptiven Analysen der Bearbeitungsprozesse können in allen Fällen Transferprozesse rekonstruiert werden. Während eine überwiegende Mehrheit der rekonstruierten Transferprozesse den intendierten Transferprozessen entspricht, sind in vielen Fällen deutliche Divergenzen zu intendierten Transferprozessen zu erkennen.

**Transferprozesse bei der Übertragung und Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens:** Die Analysen der Bearbeitungsprozesse dokumentieren, dass das Operatorschema zur Herstellung von Brüchen in vielen Fällen übertragen und auf neue Brüche und Repräsentationen angewendet werden konnte. Hierbei zeigte sich, dass die Lernenden vor allem das rechnerische Handlungsmuster : $n \cdot m$ auf symbolischer Ebene übertragen und anwenden. Auf anschaulicher Ebene hingegen konnten deutliche Divergenzen zwischen den intendierten und dokumentierten Transferprozessen festgestellt werden. Diese betreffen insbesondere die anschauliche Deutung der Herstellungsoperatoren. Es konnte beobachtet werden, dass vor allem der Herstellungsoperator $\cdot m$ nicht als $m$-faches Vervielfachen, sondern als Subtraktion zum *Wegnehmen* von $m$ Teilen oder als Addition zum *Hinzufügen* von $m$ Teilen gedeutet wurde. In den Bearbeitungen der Lernenden führten diese fehlerhaften Deutungen insbesondere zu Schwierigkeiten und Fehlern bei der ikonischen Darstellung von Brüchen. In einem Fall, indem das rechnerische Handlungsschema nicht übertragen und angewendet wurde, konnte beobachtet werden, wie die Lernenden anhand der vorgegebenen Darstellungen der anschaulichen Bruchherstellung die Herstellungsoperatoren neu hergeleitet haben (vgl. 5.1, Can, Philip & Glen). Auch in diesem Fall kamen fehlerhafte Operationsvorstellungen zum Tragen, die in den Lösungen der Lernenden durch die Wahl der falschen Rechenoperationen deutlich wurden.

Beim Repräsentationstransfer des Herstellungsverfahrens bzw. der anschaulichen Herstellungshandlung auf neue Repräsentationsobjekte, konnte beobachtet werden, dass die Teiloperatoren der Herstellung in den meisten Fällen übertragen und an die Eigenschaften des neuen Repräsentationsobjekts angepasst werden konnten. In zwei Fällen konnte hierbei ein Ausbleiben des Transfers der Herstellungshandlung beobachtet werden. In einem dieser Fälle wurde der darzustellende Bruch $\frac{m}{n}$ zwar korrekt als Anteil $m$ von $n$ Teilen gedeutet, konnte jedoch nicht in eine Herstellungshandlung übersetzt werden, bei der das Ganze zunächst in $n$ Teile geteilt wird, von denen $m$ Teile markiert werden. Es wurde eine statisch-abbildhafte Vorstellung übertragen, die nicht mit einer dynamischen Vorstellung der Herstellung verknüpft wurde und somit zu einem fehlerhaften Lösungsansatz führte (vgl. 5.1, Aliya & Aisha). In einem zweiten Fall konnte beobachtet werden, dass nur der erste Teiloperator zum Einteilen des Ganzen auf die Darstellung von Brüchen an einer Strecke übertragen wurde. Hierbei vernachlässigten die Lernenden die Zähler der darzustellenden Brüche $\frac{m}{n}$ und interpretierten diese als $\frac{1}{n}$, das $n$-mal in das Ganze hinein passen muss (vgl. 5.1, Luca & Miguel). Auch in diesem Fall wurde keine dynamische Vorstellung der Herstellung, sondern eine statisch-abbildhafte Vorstellung übertragen und angewendet.

**Transferprozesse beim Berechnen von Anteilen beliebiger Größen:** In den Analysen der Bearbeitungsprozesse zum Transfer des Operatorschemas zur Berechnung von Anteilen beliebiger Größen ist festzustellen, dass die Lernenden das Verfahren in allen Fällen übertragen und anwenden. Dabei scheint die Beschaffenheit des Ganzen in keinem Fall von Bedeutung zu sein. Unabhängig davon, ob das Ganze eine Figur, eine Maßzahl oder eine diskrete Menge von Objekten ist, versuchen sie das Operatorschema anzuwenden. In den Aufgaben, in denen die Anteile in der Form $\frac{m}{n}$ von $G$, z. B. $\frac{4}{7}$ von 21000 €, vorgegeben sind, wenden die Lernenden das Verfahren zumeist spontan und ohne erkennbare Schwierigkeiten an.

Die Hauptfehlerquelle und größte Schwierigkeit der Lernenden beim Transfer der Anteilberechnung von beliebigen Größen betrifft die Anwendung in einem geänderten oder neuen Sachzusammenhang. Bereits in sehr nahen Transferaufgaben, in denen der Sachkontext unverändert ist und die Aufgabe sich lediglich in den Zahlenwerten vom Lösungsbeispiel unterscheidet, sind deutliche Schwierigkeiten bezüglich der Analogiebildung zwischen dem Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Lösungsbeispiel zu erkennen. Diese betreffen jedoch nicht das rechnerische Verfahren, sondern das Identifizieren der zu berechnenden Anteile im Sachkontext.

In Aufgaben mit geänderten Bezugsgrößen und einem anderen bzw. neuen Sachkontext ist in vielen Fällen zu beobachten, dass die Analogiebildung nicht gelingt, weil die Lernenden fehlerhafte Aufteilungen des Ganzen vornehmen. Der Transfer des Lösungsweges aus dem Lösungsbeispiel scheitert dabei zumeist an der Identifizierung des Ganzen und der Grundlage für die Anteilbildung, sodass sie den notwendigen Transfer des Lösungswegs nicht oder nur fehlerhaft vornehmen können.

Auch in den Bearbeitungen der mehrschrittigen Transferaufgabe sind keine Schwierigkeiten beim Transfer des Operatorschemas zu erkennen und es gelingt allen Lernenden Anteile einer diskreten Menge zu berechnen. Es gelingt vielen

Lernenden jedoch nicht, die vorgegebenen Größen und Anteile im Sachzusammenhang einzuordnen und die Beziehungen zwischen Anteil, Teil und Ganzem herzustellen, sodass ihre Berechnungen in vielen Fällen auf falschen Werten beruhen. Die Hauptschwierigkeit und Fehlerquelle in dieser Aufgabe ist die Strukturierung der Situation und die korrekte Bestimmung der zu berechnenden Anteile.

Im Lösungsbeispiel sowie im ersten unvollständigen Beispiel wird die Berechnung des Anteils in einem Pfeilschema dargestellt, in der die Rechnung strukturiert veranschaulicht wird. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse der Lernenden zeigen, dass die Darstellung der Rechnung in einem Pfeilschema von vielen Lernenden übertragen wird. Dies betrifft auch Fälle, in denen die Lernenden das Pfeilschema nicht für die Notation ihrer Rechnung nutzen, sondern lediglich feststellen, dass sie „wie in diesem Pfeilschema rechnen“ müssen. Obgleich dieses in vielen Fällen erkannt wird, wird es nicht benutzt.

**Transfer beim Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung:** In den Bearbeitungen der Aufgaben zum Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung ist festzustellen, dass die Lernenden vor allem das rechnerische Verfahren der Division von Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Faktor übertragen und anwenden. Der Transfer des rechnerischen Verfahrens – wenn auch in einigen Fällen fehlerhaft – ist in allen dargestellten Bearbeitungen dokumentiert.

Im Gegensatz zum Transfer des rechnerischen Verfahrens ist mit Blick auf den Transfer der anschaulichen Deutung als Vergröbern der Einteilung festzustellen, dass diese nur selten und in den meisten Fällen fehlerhaft übertragen wird. Insbesondere in den Bearbeitungen der unvollständigen Beispielen konnte rekonstruiert werden, dass die Lernenden nicht die Einteilung der vorgegebenen Bruchdarstellung verfeinern, sondern den Bruch auf symbolischer Ebene kürzen und zur Darstellung des neuen Bruchs das Bruchherstellungsverfahren übertragen und anwenden und somit eine „neue“ Darstellung des gekürzten Bruchs anfertigen ohne eine Beziehung zur Darstellung des Ausgangsbruchs herzustellen.

In den Aufgaben zum Repräsentationstransfer des anschaulichen Verfahrens sind zahlreiche Fehler dokumentiert. Diese bestehen vor allem in fehlerhaften Assoziationen, bei denen zum Beispiel das Einzeichnen einer Einteilung mit halb so vielen Teilen als Markieren der Hälfte der Teile interpretiert wird, der Verwechslung mit dem Erweitern von Brüchen als Verfeinern einer Einteilung sowie Schwierigkeiten bei der Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens bei der ikonischen Darstellung von Brüchen. Alle diese Fehler betreffen die anschauliche Deutung des Verfahrens.

## 5.4.2 Vergleich und Diskussion der Ergebnisse der deskriptiven Analysen

Ungeachtet der unterschiedlichen inhaltlichen Schwerpunkte der drei Datenerhebungen lassen sich im Vergleich der Analysen der Bearbeitungsprozesse der Lernenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede identifizieren, die eine Erklärungsgrundlage für die dokumentierten Divergenzen zwischen den intendierten und den deskriptiv erfassten Transferprozessen bieten. Diese betreffen insbesondere die Entwicklung sachadäquater Vorstellungen und Handlungskonzepte zu den behandelten Inhalten.

**1. Entkopplung der rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepte**
Die zentrale Gemeinsamkeit kann als Entkopplung der rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepte beschrieben werden. In den Transferprozessen ist diese Entkopplung vor allem darin zu sehen, dass die Lernenden in fast allen Fällen die rechnerischen Verfahren auf neue Aufgaben übertragen, während der Transfer des entsprechenden anschaulichen Handlungskonzepts in vielen Fällen ausbleibt oder fehlerbehaftet ist.

In der ersten Datenerhebung zum Transfer des Bruchherstellungsverfahrens ist festzustellen, dass die Verknüpfung der rechnerischen und anschaulichen Herstellungshandlung stark von individuellen Operationsvorstellungen sowie von individuellen Deutungen der anschaulichen Herstellungshandlung zur Darstellung von Brüchen beeinflusst wird. In den Bearbeitungen von einigen Lernenden konnte rekonstruiert werden, dass sie, ungeachtet einer korrekten Übertragung des rechnerischen Verfahrens, die anschaulichen Herstellungsschritte isoliert betrachten und mit fehlerhaften Rechenoperationen verbinden. Diese äußern sich explizit in den Übersetzungen der Teiloperatoren als Subtraktion oder Addition anstelle der Übersetzung als Division und Multiplikation.

In den Analysen der zweiten und dritten Datenerhebung zum Berechnen von Anteilen beliebiger Größen und zum Kürzen von Brüchen als Vergröbern einer Einteilung treten die Kennzeichen für eine Trennung der rechnerischen Verfahren deutlicher hervor. In den Bearbeitungen der Lernenden ist eine zunehmende *Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens* festzustellen. Diese äußert sich in den Bearbeitungen zur Berechnung von Anteilen beliebiger Größen insbesondere darin, dass die Lernenden die in den Aufgabenstellungen geschilderten Sachsituationen in einigen Fällen nicht hinreichend verarbeiten und strukturieren, sondern anhand der enthaltenen Zahlenwerte direkt eine Rechnung aufstellen, ohne einen inhaltlichen Bezug zur Sachsituation herzustellen. In diesem Zusammenhang beschränken sich die Argumentationen der Lernenden auf die symbolische bzw. rechnerische Ebene und es werden nur selten anschauliche Bezüge hergestellt.

In den Bearbeitungen zum Transfer des Kürzens von Brüchen tritt die Entkopplung des rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepts besonders deutlich in Erscheinung. Nur in wenigen Fällen ist zu erkennen, dass die Lernenden mit dem Kürzen von Brüchen das anschauliche Verfahren des Vergröberns einer Einteilung verbinden und übertragen. Stattdessen ist in nahezu allen Bearbeitungen der Lernenden das Bearbeitungsmuster „Kürzen und Darstellen“ zu beobachten, bei dem die Lernenden den ursprünglichen Bruch zunächst auf rechnerischer Ebene kürzen und den gekürzten Bruch anschließend auf Grundlage des Bruchherstellungsverfahrens ikonisch darstellen. Weiterhin ist festzustellen, dass in vielen Fällen keine Beziehung zwischen den ikonischen Bruchdarstellungen des ungekürzten und des gekürzten Bruchs hergestellt wird, die ikonischen Bruchdarstellungen als Darstellungen unterschiedlicher Brüche betrachtet werden, und somit die Äquivalenz der beiden Brüche nicht erkannt wird. Die Fokussierung auf die Anwendung des rechnerischen Verfahrens und der damit verbundene ausbleibende Transfer des anschaulichen Handlungskonzepts führt besonders beim Repräsentationstransfer auf ikonischer Ebene zu neuen und in vielen Fällen fehlerhaften Deutungen des anschaulichen Handlungskonzepts. In den Bearbeitungen der Lernenden zum Transfer auf das Vergröbern der Einteilung einer Strecke konnten in diesem Zusammenhang eine Vielfalt fehlerhafter Deutungen der Lernenden rekonstruiert werden, die das Potenzial haben zu robusten Fehlvorstellungen entwickelt zu werden. Mit Bezug auf die Entkopplung der symbolischen und anschaulichen Ebene fällt insbesondere beim Repräsentationstransfer auf die Strecke auf, dass die Lernenden in Situationen, in denen sie das anschauliche Verfahren nicht übertragen und keinen spontanen Lösungsansatz haben, nicht in Betracht ziehen, die dargestellten Brüche auf rechnerischer Ebene zu kürzen und die gekürzten Brüche einzeichnen.

Über den Verlauf der Datenerhebungen stellt sich die Entkopplung der symbolischen und anschaulichen Handlungskonzepte als Entwicklung dar, die mit fortschreitendem Verlauf der Unterrichtseinheit deutlicher in Erscheinung tritt. Während zu Beginn der Unterrichtseinheit nur in wenigen Fällen eine getrennte Verarbeitung der rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepte dokumentiert sind, ist dieses Phänomen am Ende der Unterrichtseinheit in nahezu allen Bearbeitungen der Lernenden zu identifizieren. Diese Entwicklung kann durch die Fokussierung auf die Anwendung von Rechenverfahren begründet werden, die für die Lernenden in den meisten Fällen einen wesentlich geringeren Aufwand bedeuten und im Fall von gering entwickelten anschaulichen Vorstellungen zunächst weniger fehleranfällig sind. Mit zunehmendem Verlauf der Unterrichtseinheit und zunehmender Komplexität und Abstraktion der Handlungskonzepte sowie beim Transfer auf neue

Repräsentationen und Sachkontexte führt der fehlende anschauliche Bezug jedoch zunehmend zu Fehlern, die in Beziehung zu verschiedenen in der Literatur beschriebenen Fehlermustern und Fehlkonzepten stehen.

**2. Entwicklung von Fehlkonzepten aufgrund von ausbleibendem und negativem Transfer**

Die in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden identifizierten Fehlkonzepte und Fehlvorstellungen können in vielen Fällen auf die Entkopplung der symbolischen und anschaulichen Handlungskonzepte zurückgeführt werden. Entsprechend der zuvor beschriebenen Fokussierung auf die Anwendung rechnerischer Verfahren bleibt ein Transfer des anschaulichen Handlungskonzepts in vielen dieser Fälle aus und die Lernenden entwickeln neue individuelle anschauliche Deutungen der rechnerischen Verfahren.

In den Analysen der Bearbeitungen der ersten Datenerhebung erweist sich die *Verbindung der Grundvorstellung Bruch als Anteil mit dem Bruchherstellungsverfahren* als zentraler Transferprozess. Es wird erwartet, dass die Lernenden die statische Vorstellung von Brüchen als Teile eines Ganzen mit der dynamischen Vorstellung der Bruchherstellung verbinden. Die Verknüpfung dieser Grundvorstellungen ist besonders beim Wechsel innerhalb und zwischen Repräsentationsebenen und Bruchdarstellungen (Repräsentationstransfer) erforderlich und steht somit in einem engen Zusammenhang mit dem Aufbau tragfähiger und flexibler Bruchzahlvorstellungen (vgl. Abschnitt 2.2.3). Vor diesem Hintergrund konnte insbesondere in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden zum Transfer des Bruchherstellungsverfahrens auf die Darstellung in einer Strecke festgestellt werden, dass die Dominanz der Anteilvorstellung eher fehlerführend ist und eine komponentenweise Betrachtung von Brüchen unterstützen kann.

Die *Orientierung am Umgang mit natürlichen Zahlen* konnte überdies in weiteren Bearbeitungsprozessen festgestellt werden. In diesen Fällen konnte insbesondere eine komponentenweise Betrachtung von Zähler und Nenner beim Transfer der Anteilberechnung auf einen neuen Sachkontext sowie beim Transfer des Verfahrens zum Vergröbern einer Einteilung dokumentiert werden. In diesen Fällen ist der Hintergrund der Orientierung am Umgang mit natürlichen Zahlen jedoch nicht auf eine unzureichende Verknüpfung der Anteil- und Operatorvorstellung, sondern im ausbleibenden Transfer von anschaulichen Handlungskonzepten und der Fokussierung auf die Anwendung von rechnerischen Verfahren zu vermuten.

Beim Transfer des Verfahrens zur Berechnung von Anteilen in einem komplexen Sachkontext konnte in einem Fall beobachtet werden, dass der Bruch nicht als relativer Anteil eines Ganzen, sondern als absoluter Anteil im Sinne der Anzahl der

Objekte einer diskreten Menge interpretiert wurde (vgl. 5.2, Aufgabe 9, Bearbeitung von Julia & Marie).

Wesentlich deutlicher und zahlreicher ist die Orientierung an der Ordnungsstruktur der natürlichen Zahlen in den fehlerhaften anschaulichen Deutungen des Kürzens von Brüchen beschrieben. In all diesen Fällen bleibt der Transfer des anschaulichen Verfahrens aus und es wird eine neue Deutung des Einzeichnens einer neuen Einteilung mit einem $n$-tel so vielen Teilen entwickelt. Der Hintergrund dieses ausbleibenden Transfers ist in der getrennten Verarbeitung des rechnerischen und anschaulichen Verfahrens zu vermuten, wobei in den meisten Fällen anzunehmen ist, dass durch das Lesen eines dreiteiligen Lösungsbeispiels und der Bearbeitung zweier unvollständiger Beispiele kein entsprechendes Handlungskonzept aufgebaut wurde (vgl. Bearbeitungsmuster „Kürzen und Darstellen").

Des Weiteren konnte in den Bearbeitungen der ersten Datenerhebung sowie in vereinzelten Fällen der zweiten und dritten Datenerhebung die *wörtliche Übertragung sprachlicher Formulierungen* identifiziert werden. Hierbei wird die wörtliche Beschreibung einer Handlung mit konkreten Gegenständen auf die symbolische Ebene übersetzt und entsprechend mit Rechenoperationen verbunden, die bezogen auf den Umgang mit realen Gegenständen durchaus adäquat sind (Subtraktion als Wegnehmen und Addition als Hinzufügen), jedoch nicht den intendierten Deutungen der Division als Teilen eines Ganzen und der Multiplikation als Vervielfachen eines Teils entsprechen.

**3. Aktivierung und Koordination von Vorwissen**

Ausbleibende und fehlerhafte Übertragungen konnten insbesondere in Aufgaben beschrieben werden, in denen ein Verfahren auf neue Darstellungen und Sachkontexte übertragen werden sollte, wodurch eine Anpassung der entsprechenden Handlungskonzepte an die Eigenschaften der neuen Repräsentation oder der neuen Sachsituation notwendig ist. In diesen Situationen ist von besonderer Bedeutung über welches Vorwissen die Lernenden verfügen und inwieweit sie dieses aktivieren können.

Vor diesem Hintergrund können in den Bearbeitungen der Lernenden drei Transfersituationen unterschieden werden, in denen die Aktivierung von Vorwissen von Bedeutung ist: Der *Analogiebildung*, dem *Transfer zwischen Darstellungen* und dem *Transfer zwischen Sachkontexten*.

**Transfer durch Analogiebildung:** Die unvollständigen Beispiele der drei Datenerhebung sind jeweils strukturgleich zum Lösungsbeispiel konzipiert. Das erste unvollständige Beispiel unterscheidet sich in allen Fällen allein in den Zahlenwerten vom Lösungsbeispiel, wohingegen im zweiten Lösungsbeispiel neben einer Änderung der Zahlenwerte auch eine Variation der enthaltenen ikonischen Repräsentationen oder des Sachkontexts zu berücksichtigen ist. Somit erfordert die Lösung der unvollständigen Beispielen in allen Fällen die Bildung einer Analogie zum Lösungsbeispiel, die als Voraussetzung für einen Transfer der einzelnen Bearbeitungsschritte betrachtet werden kann. Der Transfer der Lösungsschritte aus dem Lösungsbeispiel wird in beiden unvollständigen Beispielen durch Hinweise in Sprechblasen unterstützt.

In den Analysen der Bearbeitungsprozesse lassen sich drei Aspekte charakterisieren, die einen deutlichen Einfluss auf die Analogiebildung zum Lösungsbeispiel haben: *(i)* Die Verarbeitung des Lösungsbeispiels, *(ii)* die äußere Gestaltung des unvollständigen Beispiels und *(iii)* Unterschiede auf Ebene der ikonischen Darstellung und des Sachkontexts.

Während die meisten Schülerpaare sich eingehend mit dem Lösungsbeispiel beschäftigt haben, indem sie sich gegenseitig die einzelnen Lösungsschritte erklärt und aufkommende Fragen beim Lesen des Lösungsbeispiels und der fokussierenden Fragen zum Lösungsbeispiel gemeinsam beantwortet haben, konnte in einigen Fällen auch beobachtet werden, dass die Lernenden das Lösungsbeispiel lediglich überflogen und kurz „durchgeklickt" haben, ohne darüber zu sprechen. In diesen Fällen wurden die Verfahren und Handlungskonzepte aus dem Lösungsbeispiel nicht in der Bearbeitung der unvollständigen Beispiele angewendet. Womöglich aufgrund eines fehlenden Ausgangspunkts für die Abbildung der Lösungsschritte versuchten die Lernenden die einzelnen Lösungsschritte anhand der Lösungshinweise im unvollständigen Beispiel herzuleiten. Die intendierten Transferprozesse blieben hierbei zumeist aus und es konnten wiederholt fehlerhafte Deutungen der rechnerischen sowie insbesondere der anschaulichen Handlungskonzepte rekonstruiert werden.

Jedoch auch in den Fällen, in denen die Lernenden die einführenden Lösungsbeispiele eingehend gelesen und die fokussierenden Fragestellungen korrekt beantwortet und dabei die zentralen inhaltlichen Aspekte der Aufgabenlösung notiert haben, konnte festgestellt werden, dass bereits der Transfer des Lösungsverfahrens auf das strukturell isomorphe erste unvollständigen Beispiel zu Schwierigkeiten führte und der intendierte Transfer zunächst ausblieb, da keine Verbindung zum Lösungsbeispiel hergestellt wurde. Die Ursache dafür kann in den Unterschieden der Oberflächenmerkmale der ersten unvollständigen Beispiele und der Lösungsbeispiele vermutet werden. Während die Lösungen in den Lösungsbeispielen zumeist verschiedene Abbildungen und Visualisierungen zur Veranschaulichung, wie zum Beispiel schematische Zeichnungen von Familien mit allen Familienmitgliedern, enthielten, wurden diese in der Gestaltung der unvollständigen Beispiele nicht übernommen. Der ausbleibende Transfer kann in diesen Fällen über die Orientierung an den Oberflächenmerkmalen der Aufgaben begründet werden. Dieses Phänomen ist vor allem in den Bearbeitungen der zweiten Datenhebung dokumentiert, in dem die Aufgaben in einen Sachkontext eingebunden waren, der in diesem Zusammenhang eine Analogiebildung zwischen den strukturellen Merkmalen der Aufgaben erschwert. Während nur in vereinzelten Bearbeitungen Schwierigkeiten bei der Analogiebildung zwischen dem Lösungsbeispiel und dem ersten unvollständigen Beispiel beobachtet werden konnten, treten diese in den Bearbeitungen der zweiten unvollständigen Beispiele deutlicher hervor, da diese zudem eine Änderung auf Ebene des Repräsentationsobjekts oder des Sachkontexts enthielten. Dies führte in vielen Fällen dazu, dass die Lernenden Schwierigkeiten bei der Wahl der Bezugsgröße zur Bestimmung der Anteile hatten.

Insgesamt ist in den Bearbeitungen der unvollständigen Beispiele festzustellen, dass die äußere Gestaltung der unvollständigen Beispiele sowie Änderungen der Darstellungen und des Sachkontexts in vielen Fällen dazu führen, dass die Lernenden keine Verbindung zum Lösungsbeispiel herstellen und die Struktur der Aufgabenlösung nicht korrekt abbilden. Es können entsprechend nicht die erforderlichen Erfahrungsbereiche aktiviert und miteinander koordiniert werden. Dies kann somit einerseits damit erklärt werden, dass kein entsprechender Erfahrungsbereich aufgebaut wurde, oder dass aufgrund unterschiedlicher Oberflächen- und Strukturmerkmale der Aufgaben keine Verbindung zwischen diesen hergestellt werden kann.

**Transfer zwischen Darstellungen:** In vielen Fällen bestand der intendierte Transfer in den dargestellten Bearbeitungen von Transferaufgaben in der Übertragung eines anschaulichen Verfahrens auf ein neues Repräsentationsobjekt. Hierbei konnte beobachtet werden, dass ein zentrales Kriterium für einen erfolgreichen Transfer auf eine neue Repräsentation die Aktivierung der *Handlungskonzepte zum Umgang mit dem neuen Repräsentationsobjekt* ist. Diese hängen im Wesentlichen davon ab, welche Größen sie repräsentieren und welche Handlungskonzepte mit diesen Repräsentationsobjekten verbunden sind. Dies betrifft vor allem die Bruchdarstellung in einem Kreis oder einem Rechteck.

In den Analysen der Bearbeitungsprozesse fällt auf, dass die Schwierigkeiten bei der Darstellung von Brüchen auf die Repräsentationsobjekte Kreis und Strecke beschränkt sind. Die Schwierigkeiten der Lernenden äußern sich dabei bei Kreisrepräsentationen in fehlenden Strategien zum Aufteilen des Ganzen und bei Strecken in fehlerhaften Bezügen zwischen Teil und Ganzem. Mit Bezug auf die repräsentierten Größen ist dabei festzustellen, dass die Einteilung eines Kreises in gleiche Teile das Ziel hat kongruente Kreissegmente mit dem gleichen Flächeninhalt herzustellen, während eine Strecke der Länge nach in gleich lange Abschnitte unterteilt wird.

Auch für die Darstellung von Brüchen in einem Rechteck ist es erforderlich das ganze Rechteck in Teile mit gleichem Flächeninhalt zu teilen. Anders als für die Darstellung in einem Kreis können die Lernenden bei Rechtecken jedoch auf Handlungskonzepte aus der Behandlung von Flächeninhalten zurückgreifen, die in vielen Fällen über das Auslegen von rechteckigen Figuren eingeführt werden. In diesem Zusammenhang ist es sehr wahrscheinlich, dass das Unterteilen in gleiche Flächen in einem Rechteck für die Lernenden ein vertrautes Handlungskonzept ist. Die Darstellung in einer Kreisrepräsentation erfolgt dagegen über die Unterteilung des Vollwinkels in gleiche Teile. Dies ist für Brüche, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, über die Strategie des fortgesetzten Halbierens zumeist problemlos möglich. Zudem sind die Darstellungen dieser „Alltagsbrüche" vielen Lernenden bereits bekannt, sodass sie eine Vorstellung davon haben, wie eine Darstellung aussehen sollte. Für andere Nenner, wie zum Beispiel Vielfache von 3, 5 und 7 verfügen die Lernenden über kein Handlungskonzept zum Einteilen des Ganzen. Aus diesem Grund bleibt ihnen in vielen Fällen nichts anderes übrig, als durch Ausprobieren (zeichnerisch oder durch mentale Simulation) eine Einteilung herzustellen, die den Anforderungen der Kongruenz der Teile entspricht. Dieser Prozess ist in hohem Maße fehleranfällig.

In den Bearbeitungen zum Repräsentationstransfer auf die Repräsentation in einer Strecke ist festzustellen, dass die Lernenden häufig nicht die ganze Strecke als Ganzes betrachten, sondern die Verfahren nur auf Teile der Strecke anwenden oder falsche Bezugsgrößen nutzen. In diesen Situationen ist zu erkennen, dass häufig Strukturelemente der natürlichen Zahlen, z. B. in Form einer komponentenweisen Betrachtung von Zähler und Nenner, übertragen werden. Eine mögliche Erklärung für diese Fehler und Fehlerstrategien beim Transfer auf eine Strecke ist, dass das Vorwissen der Lernenden im Umgang mit Strecken sich vor allem auf das Messen von Längen beschränkt, wobei ausgezählt wird, aus wie vielen Längeneinheiten eine Strecke besteht. Das Konzept des Einteilens einer Strecke in gleich lange Abschnitte ist für die Lernenden vermutlich in vielen Fällen neu, sodass sie eher auf vertraute Handlungskonzepte zurückgreifen, die Strecken in einen engen Zusammenhang mit natürlichen Zahlen setzen.

Es kann angenommen werden, dass die vorhandenen Handlungskonzepte für den Umgang mit verschiedenen Darstellungen dazu führen, dass die neuen anschaulichen Handlungskonzepte des Teilens in gleiche Teile und Markierens einer bestimmten Anzahl von Teilen sowie das Vergröbern einer Einteilung als Zusammenfassen einer bestimmten Anzahl von Teilen zu einem neuen größeren Teil nicht übertragen werden.

**Transfer zwischen Sachkontexten:** Ähnlich wie beim Transfer zwischen Repräsentationsobjekten sind auch Sachkontexte mit bestimmten Handlungskonzepten verbunden. Diese Handlungskonzepte haben einen weitreichenden Einfluss auf die inhaltlichen Deutungen und Bezüge, die die Lernenden während der Bearbeitung aushandeln und herstellen. Bereits in der ersten Datenerhebung mit dem inhaltlichen Schwerpunkt der Bruchherstellung und ikonischen Darstellung von Brüchen war zu erkennen, dass selbst in Aufgaben, in denen ein möglicher Sachkontext angedeutet wurde und die eigentlichen Darstellungen und Lösungsverfahren auf einer innermathematischen Ebene dargestellt wurden, die Deutungen der Lernenden beeinflusst wurden. So reichte es aus, dass bei der Darstellung von Brüchen in einem Kreis oder einem Rechteck, die mit dem Teilen eines Kuchens oder einer Pizza verbunden wurden, gegenständliche Handlungskonzepte, wie Schneiden und vor allem Wegnehmen, die Übersetzung zwischen rechnerischen Verfahren und ikonischen Veranschaulichungen dieser Handlungen beeinträchtigte und zu fehlerhaften Schlüssen der Lernenden führten, sodass ein Transfer ausblieb, unvollständig oder fehlerhaft war.

Wesentlich deutlicher kam der Einfluss von mit einem Sachkontext verbundenen Handlungskonzepten bei der Bestimmung und Berechnung von Anteilen beliebiger Größen zum Tragen. In den Bearbeitungen der Lernenden ist zu erkennen, dass ein Transfer zwischen Sachkontexten vor allem vom Herstellen von Bezügen zwischen zwei Situationen abhängt. Kann zu einer der beiden Sachsituationen kein Handlungskonzept aktiviert werden oder ist das Handlungskonzept fehlerhaft, werden falsche Bezüge zwischen den Situationen hergestellt, was in den Bearbeitungen vor allem in der Wahl der falschen Bezugsgröße bei der Bildung von Anteilen dokumentiert ist.

Hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang die Bearbeitungen des zweiten unvollständigen Beispiels der zweiten Datenerhebung, in der ein gemeinsamer Lohn auf zwei Jugendliche aufgeteilt werden sollte, die unterschiedlich lange gearbeitet haben. In dieser Sachsituation sind drei unterschiedliche Größen enthalten, die für eine Strukturierung der Sachsituation miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen: Die zwei Jugendlichen, der Lohn als Geldbetrag und die Anzahlen an geleisteten Arbeitsstunden. Ohne ein hinreichendes Verständnis des Sachkontexts wurde von vielen Lernenden nicht erkannt, dass der Geldbetrag gemäß der Summe der Arbeitsstunden aufgeteilt werden musste, um gerecht auf die zwei Jugendlichen aufgeteilt werden zu können. Hierzu ist es jedoch notwendig zu wissen, dass Lohn im allgemeinen in Einheiten für eine geleistete Arbeitsstunde ausgezahlt wird. Es konnte beobachtet werden, dass dieses Konzept vielen Lernenden nicht vertraut war und so zu Schwierigkeiten bei der Strukturierung der Sachsituation, der Analogiebildung zum Lösungsbeispiel und letztendlich zum Ausbleiben des Transfers führen konnte.

Ähnliche Beobachtungen konnten auch in der Transferaufgabe zur Fahrradkontrolle dokumentiert werden. Hier zeigte sich jedoch weniger der Einfluss der Handlungskonzepte des Sachkontexts als Schwierigkeit, sondern vielmehr die Mehrschrittigkeit des Lösungsweges als unvertrautes Handlungskonzept. Aus einem vorgegebenen Anteil, sollte auf einen anderen Anteil geschlossen werden. Dazu war es notwendig von dem vorgegeben Anteil zunächst auf einen Teil zu schließen, um das Ganze oder den gesuchten Anteil berechnen zu können. Diese Mehrschrittigkeit des Lösungswegs war für viele Lernende neu und führte zu Schwierigkeiten und fehlerhaften Lösungen.

Die Analysen der Bearbeitungsprozesse deuten darauf hin, dass neben den Handlungskonzepten, die mit einem Sachkontext verbunden werden, auch die Aufgabenstruktur bzw. die Struktur eines Lösungswegs ein Handlungskonzept darstellt, das sofern es für die Lernenden neu ist, zunächst erschlossen werden muss, bevor bekannte Verfahren übertragen und angewendet werden können.

# Zusammenfassung und Perspektiven 6

Das Ziel der Arbeit war es Transfer im Rahmen von alltäglichen schulischen Lernprozessen zu beschreiben und zu analysieren. Dazu wurde auf theoretischer Ebene zunächst den Fragen nachgegangen, was Transfer bedeutet, welche allgemeinen Erklärungsmodelle es für Transfer beim Mathematiklernen gibt und wie Transfer im Rahmen des schulischen Mathematiklernens konzeptualisiert werden kann.

Da Untersuchungen zum Transfer beim Mathematiklernen häufig mit fortgeschrittenen Lernenden unter Laborbedingungen durchgeführt werden und sich inhaltlich auf den Transfer von eng umgrenzten schematischen Verfahren oder Problemlösungen beschränken, wurde eine Studie vorbereitet und durchgeführt, die auf Grundlage bisheriger Forschungsergebnisse konzipiert wurde und Forschungsdefiziten und -desiderata bisheriger Untersuchungen begegnet. Mit Blick auf das schulische Mathematiklernen wurde im Rahmen der breit erforschten Entwicklung des Bruchzahlbegriffs den Fragen nachgegangen, welche Transferprozesse in der Einführung von Bruchzahlen didaktisch intendiert sind, inwieweit die intendierten Transferprozesse in den individuellen Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler rekonstruiert werden können und inwieweit Defizite in der Entwicklung eines tragfähigen Verständnisses von Bruchzahlen durch ausbleibende oder fehlerhafte Transferprozesse erklärt werden können.

## 6.1 Ergebnisse der Arbeit

Die Ergebnisse der Arbeit lassen sich in zwei Bereiche gliedern. Zum einen wurde der Forschungsstand zum Transfer beim Lernen aufgearbeitet, im Rahmen mathematikdidaktischer Theorien diskutiert und ein didaktisches Modell für die Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs entwickelt. Zum anderen wurden in der empirischen Studie Bearbeitungsprozesse von Schülerin-



S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs,* Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4_6

nen und Schülern analysiert, um Transferprozesse deskriptiv zu beschreiben und Beziehungen zwischen Transferprozessen und der Entwicklung eines tragfähigen Verständnisses von Bruchzahlen aufzudecken.

### 6.1.1 Ergebnisse des Theorieteils

Im Theorieteil der Arbeit wurden verschiedene theoretische Perspektiven und Modelle zum Transfer aus unterschiedlichen Perspektiven einander gegenüber gestellt und diskutiert. Dabei wurde dargestellt, dass kognitionspsychologische Theorien Transfer auf Grundlage von Modellen der Informationsverarbeitung als *Abruf und Anwendung von Wissensstrukturen* konzeptualisieren, die in abstrakten Schemata im Langzeitgedächtnis gespeichert sind. Eine zentrale Grundannahme ist, dass der Grad der Abstraktion bzw. der Loslösung vom Lernkontext einen wesentlichen Einfluss auf die Anwendbarkeit einer Wissensstruktur in neuen und unbekannten Sachsituationen hat. Wissen ist zunächst bereichsspezifisch, d. h. an die spezifischen Situationsmerkmale und -eigenschaften der Lernsituation gebunden, sodass es zunächst nur im Rahmen eines nahen Transfers auf Anforderungen übertragen werden kann, die der Lernsituation sehr ähnlich sind. Mit zunehmender Verallgemeinerung und Dekontextualisierung der Anwendungsbedingungen und grundlegender Beziehungsstrukturen wird erwartet, dass diese flexibel im Rahmen von weiten Transferanforderungen angewendet werden können. Ein wichtiger Transfermechanismus in diesem Erklärungsmodell ist die Bildung von Analogien. Das Herausarbeiten von analogen Strukturen verschiedener Situationen soll einerseits die Abstraktion von Handlungswissen fördern und gleichzeitig durch die Identifizierung gemeinsamer Strukturelemente die Anwendung von Wissen auf neue Anforderungssituationen ermöglichen.

Die theoretische Perspektive der Situierten Kognition stellt den Modellen der Kognitionspsychologie entgegen, dass Wissen immer in einem sozialen Kontext in Interaktion zwischen einem Lernenden und seiner Umwelt ausgehandelt wird, und lehnt vor diesem Hintergrund die Annahme der Speicherung abstrakter Wissensstrukturen und der Loslösung einer Wissensstruktur von ihrem Kontext ab. Es wird argumentiert, dass Wissen immer untrennbar an die Gegebenheiten einer Lernsituation gebunden ist. Der abstrakten Repräsentation von Wissen wird ein Modell der dynamischen mentalen Repräsentation von Handlungen gegenüber gestellt. Demnach sind Handlungen bzw. Handlungskonzepte stets in einen Kontext eingebunden, der den Rahmen für die Möglichkeiten und Einschränkungen für die Handlung einer Person definiert. Für die Übertragung einer Handlung auf eine neue Anforderungssituation ist es somit erforderlich diese an die Eigenschaften der neuen Situation anzupassen. Durch diese Transformation verändert sich nicht nur die Handlung selbst, sondern auch die zugrundeliegenden Handlungsrepräsentationen der Lernenden. Transfer bedeutet in diesem Zusammenhang die *Anpassung einer Handlung und ihrer mentalen Repräsentation* an die situativen Eigenschaften einer neuen Anforderung.

Die Kernaspekte dieser ganzheitlichen und inhaltsübergreifenden Erklärungen von Transfer bilden auch die Grundlage für integrierende Theorien und empirische Modelle zum Transfer beim Mathematiklernen. Auch diese gründen den Transfer von mathematischen Inhalten auf der Entwicklung mentaler Wissensrepräsentationen, die im Gegensatz nicht als symbolisch und schematisch-abstrakt, sondern als bereichs- und situationsspezifisch in Form individueller Erfahrungsbereiche konzeptualisiert werden. Sie gründen sich als *Handlungserfahrungen* in bestimmten Situationen und bilden zu Beginn zumeist keine abstrakte inhaltliche Struktur ab, sondern subjektiv wahrgenommene Situationseigenschaften. Durch die Aktivierung in verschiedenen Situationen werden individuelle Erfahrungsbereiche koordiniert und miteinander verbunden, wodurch sie ein dynamisches Netzwerk bilden, das einer ständigen Weiterentwicklung unterliegt. Transfer kann vor diesem Hintergrund als *Koordinierung von Erfahrungsbereichen* beschrieben werden, wodurch bestehende Wissensstrukturen aktiviert und weiterentwickelt werden.

Im Gegensatz zu den Modellen der kognitiven Psychologie, vermitteln die Perspektiven der Situierten Kognition und integrierender Modelle des Mathematiklernens eine dynamische Sichtweise auf Transfer als Prozess, der einer Entwicklung unterliegt, in einen sozialen Kontext eingebunden ist und in hohem Maße individuell verläuft. Vor diesem Hintergrund wurde ein *Transferprozess* von einer abgeschlossenen Transferleistung abgegrenzt und als Prozess der Übertragung einer vorhandenen Wissensstruktur auf ein neues Anwendungsgebiet definiert, wobei die Art der Wissensstruktur sowie der Ursprung und das Ziel des Transfers eindeutig identifiziert werden können.

Mit Blick auf die herausgearbeiteten Forschungsdefizite und -desiderata von empirischen Studien zum Transfer von mathematischen Inhalten, wurde die Frage aufgeworfen, inwieweit die Befunde, die vor allem punktuell in experimentellen Settings unter Laborbedingungen mit Studierenden gewonnen wurden, sich auf den alltäglichen Mathematikunterricht in der Schule und eine längerfristige Begriffsentwicklung übertragen lassen.

Vor diesem Hintergrund wurden die theoretischen Perspektiven und empirischen Befunde der Transferforschung im Rahmen des didaktischen Konzepts der Ausbildung von *Grundvorstellungen* diskutiert, das aus einer stoffdidaktischen Grundposition den mathematischen Inhalt als Kern didaktischen Handelns in den Vordergrund stellt, und die Integration verschiedener psychologischer und didaktischer Modelle und Perspektiven ermöglicht. Das Ziel der Ausbildung von Grundvorstellungen ist es, vom mathematischen Inhalt ausgehend normative Grundvorstellungen als prototypische mentale Modelle zu entwickeln, die den Kern des mathematischen Inhalts sachadäquat repräsentieren.

Auf Grundlage des Grundvorstellungskonzepts wurde die Definition von Transfer in Hinsicht auf das Mathematiklernen präzisiert:

> Ein Transferprozess ist der Prozess der Anwendung oder Übertragung mathematischer Begriffe, Verfahren und Strukturen auf eine neue Anwendungssituation
>
> - zum Transfer zwischen Sach- und Anwendungskontexten,
> - zum Transfer zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen sowie
> - zum Herstellen und Begründen von mathematischen Zusammenhängen.

Die zentrale Grundannahme ist hierbei, dass die Anwendung oder die Übertragung mathematischer Begriffe, Verfahren und Strukturen die Aktivierung von Grundvorstellungen erfordert, und dadurch wechselseitig zum Aufbau, zur Entwicklung und zur Verknüpfung von Grundvorstellungen beiträgt. Auf Grundlage sachanalytischer Überlegungen ist es möglich einen intendierten Transfer dahingehend zu beschreiben,

- worin der konzeptuelle Kern als Gegenstand eines Transfers besteht, d.h. welche Begriffsaspekte, Verfahren oder Strukturen übertragen werden sollen,
- welche Übersetzungen auf Ebene des Sachkontexts und der mit ihnen verbundenen situativen Handlungskonzepte sowie zwischen Darstellungen und Repräsentationsebenen für einen Transfer erforderlich sind und
- welche möglichen Schwierigkeiten, Übergeneralisierungen und allgemein fehlerhafte Übertragungen zu erwarten sind.

Dieser sachanalytischen Betrachtung von Transferprozessen wird eine deskriptive Ebene der Analyse von Schülerbearbeitungen gegenübergestellt:

- Welche Transferprozesse sind zur Lösung einer neuen Anforderung erforderlich und welche Grundvorstellungen werden dafür benötigt? *(Normativer Aspekt)*
- Welche individuellen Transferprozesse lassen sich in den Bearbeitungen der Lernenden erkennen und welche individuellen Vorstellungen liegen diesen zugrunde? *(Deskriptiver Aspekt)*

- Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen und wie lassen sich diese beheben? *(Konstruktiver Aspekt)*

Vor diesem theoretischen Hintergrund wurde eine empirische Studie zur Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung elementarer Bruchzahlvorstellungen aufbauend auf aktuellen fachdidaktischen und instruktionspsychologischen Ergebnissen konzipiert und in einer fünften Klasse eines städtischen Gymnasiums durchgeführt. Dieser Inhalt der Studie wurde gewählt, da für die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs auf einen umfassenden Forschungsstand zurückgegriffen werden kann und häufige Verständnisschwierigkeiten und Fehlerstrategien in diesem Inhaltsbereich mit dem fehlerhaften Transfer von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen erklärt werden („Natural Number Bias"). Zudem kann die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs auf normativer Ebene im Aufbau und der sukzessiven Weiterentwicklung von Grundvorstellungen beschrieben werden, wobei insbesondere der Vernetzung von verschiedenen Bruchzahlaspekten, Anwendungsbezügen sowie Darstellungen und Repräsentationsebenen eine besondere Bedeutung zukommt.

### 6.1.2 Ergebnisse der empirischen Studie

In der Studie wurden die Partnerarbeiten von heterogen zusammengesetzten Lernendenpaaren aufgezeichnet und in der Durchführung versucht, einen möglichst authentischen schulischen Lernkontext zu erzeugen, der den Partner- und Gruppenarbeiten im regulären Mathematikunterricht so nah wie möglich kommt. Zur Kontrolle der eingesetzten Lernmaterialien wurde den Lernenden und der unterrichtenden Lehrperson ein Arbeitsbuch zur Verfügung gestellt, mit dem über die gesamte Dauer der Unterrichtseinheit unterrichtet und gelernt wurde. Auf Grundlage der Materialien im Arbeitsbuch wurden in den Videodatenerhebungen Arbeitshefte erstellt, in denen die schriftlichen Bearbeitungen der Lernenden festgehalten wurden. Für die Einführung neuer Verfahren wurden interaktive animierte Lösungsbeispiele mit fokussierenden Fragestellungen und zugehörige, nach dem fading-example Prinzip konzipierte, unvollständige Beispiele eingesetzt. Die Wahl dieser Instruktionsmethode erfolgte auf Grundlage der empirischen Ergebnisse der Instruktionspsychologie, dass das Arbeiten mit Lösungsbeispielen als effiziente Methode zum Aufbau robuster und transferfähiger Wissensstrukturen darstellt (vgl. Abschnitt 1.2.2) und im Rahmen der Arbeit in Paaren die Lernenden zu „anspruchsvolle[n] Argumentationsprozessen" (Salle, 2015, S. 309) anregt, anhand derer die individuellen Bearbeitungsprozesse und Erklärungsmodelle rekonstruiert werden können. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse wurden mit rekonstruktiven und interpretativen

Methoden durchgeführt und auf mehreren Ebenen vergleichenden Analysen unterzogen. Die zentralen Fragestellungen waren dabei, *(i)* welche Transferprozesse in den individuellen Bearbeitungsprozessen der Lernenden dokumentiert werden können und welche transferrelevanten individuellen Deutungen und Erklärungsmodelle von Brüchen und dem Umgang mit Brüchen in den Bearbeitungen der Lernenden rekonstruiert werden können, *(ii)* inwieweit die individuellen Transferprozesse der Lernenden den intendierten Transferprozessen entsprechen und welche Zusammenhänge zwischen den Transferprozessen und den individuellen Deutungs- und Erklärungsmodellen der Lernenden hergestellt werden können sowie *(iii)* worauf etwaige Divergenzen zwischen den intendierten Transferprozessen und den in den Bearbeitungen der Lernenden dokumentierten Transferprozessen zurückzuführen sind.

In den Analysen konnten in allen Bearbeitungen der Lernenden Transferprozesse rekonstruiert werden. Diese Transferprozesse beschränken sich nicht auf sogenannte „Aha-Effekte", in denen die Lernenden bewusst inhaltliche Zusammenhänge erkennen und herstellen, sondern bestehen vor allem in der Übertragung von zum Teil unbewusst wirksamen Deutungs- und Erklärungsmodellen. Diese äußern sich insbesondere in anschaulichen Deutungen von rechnerischen Verfahren und Handlungskonzepten, wie dem Bruchherstellungsverfahren, dem Operatorschema zum Berechnen von Anteilen beliebiger Größen sowie dem Kürzen von Brüchen.

Entgegen den intendierten anschaulichen Deutungen wurden verschiedene zum Teil sehr individuelle Bedeutungszuschreibungen rekonstruiert, wie z.B. die Übersetzung der Herstellungsoperatoren eines Bruchs $\frac{m}{n}$ gemäß der Handlungen mit einem gegenständlichen Repräsentationsobjekt, bei der das „Nehmen" von Teilen mit einer Subtraktion verbunden wurde.

Im Vergleich der Analysen der Daten aller Erhebungszeitpunkte konnten über die unterschiedlichen inhaltlichen Schwerpunkte hinweg drei Muster identifiziert werden, die einen besonderen Einfluss auf den Transfer der behandelten Verfahren sowie auf den Aufbau und die Entwicklung von Grundvorstellungen nehmen:

- Die Entkopplung von rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepten,
- die Entwicklung von Fehlkonzepten aufgrund von ausbleibendem und negativem Transfer und
- der Transfer durch die Aktivierung und Koordinierung von Erfahrungsbereichen und Handlungskonzepten

Die Entkopplung der rechnerischen Verfahren und der anschaulichen Handlungskonzepte äußert sich insbesondere darin, dass der Transfer der rechnerischen Verfahren in nahezu allen Fällen identifiziert werden kann, während der Transfer des entsprechenden anschaulichen Handlungskonzepts in vielen Fällen ausbleibt oder fehlerbehaftet ist. Ein weiteres Merkmal ist in der zunehmenden *Fokussierung der Lernenden auf die Anwendung der rechnerischen Verfahren* zu sehen. Über den Verlauf der Unterrichtseinheit stellt sich diese Entkopplung als Entwicklung dar, die mit fortschreitendem Verlauf der Unterrichtseinheit deutlicher zum Tragen kommt. Während zu Beginn der Unterrichtseinheit nur in wenigen Fällen eine getrennte Verarbeitung der rechnerischen Verfahren und anschaulichen Handlungskonzepte rekonstruiert wurde, ist dieses Phänomen gegen Ende der Unterrichtseinheit in der Mehrzahl der Bearbeitungen der Lernenden zu erkennen (vgl. z. B. Bearbeitungsmuster „Kürzen und Darstellen"). Im Verlauf der Unterrichtseinheit und mit zunehmender Komplexität der Aufgaben und Abstraktion der Handlungskonzepte sowie beim Transfer auf neue Darstellungen und Sachkontexte führt der fehlende anschauliche Bezug in vielen Fällen zu Fehlern, die in Beziehung zu verschiedenen Fehlkonzepten und Fehlvorstellungen stehen.

Bereits zu Beginn der Unterrichtseinheit konnten fehlerhafte Deutungen und Erklärungsmodelle in den Bearbeitungen der Lernenden identifiziert und ihre Entwicklung nachgezeichnet werden. Dabei stellten sich die unvollständige Ausbildung des Anteilsbegriffs bzw. des Bruchherstellungsverfahrens als eine zentrale Quelle für fehlerhafte Deutungen dar. Insbesondere beim Transfer des Bruchherstellungsverfahrens sowie des Vergröberns einer Einteilung auf die Darstellung von Brüchen an einer Strecke konnte beschrieben werden, dass die *unvollständige Ausbildung der Anteilvorstellung* die Entwicklung von Fehlkonzepten und Fehlvorstellungen unterstützen kann. Die unvollständige Ausprägung der Anteilvorstellung äußert sich zum Beispiel darin, dass die Lernenden aufgrund der Fokussierung auf die natürlichen Zahlen im Zähler und Nenner eines Bruchs $\frac{m}{n}$, diesen zwar statisch als Anteil $m$ von $n$ Teilen deuten, jedoch keinen Bezug zu dessen Herstellungshandlung als Teilen des Ganzen in $n$ gleich große Teile und $m$-faches Vervielfachen eines Teils herstellen.

Diese Beobachtung kann als eine weitere Ausprägung der Entkopplung der rechnerischen Verfahren und anschaulichen Handlungskonzepte betrachtet werden. Anhand einer unzureichenden Verbindung von Brüchen als Anteile mit ihrer Herstellungshandlung, der Fokussierung auf die Anwendung der rechnerischen Verfahren sowie vereinzelter fehlerhafter Übertragungen (negativer Transfer), wie zum Beispiel Übergeneralisierungen von Handlungskonzepten des Umgangs mit gegenständlichen Repräsentationsobjekten und fehlerhaften Operationsvorstellungen, konnten nahezu alle Abweichungen von den intendierten Deutungen auf den ausbleibenden Transfer der anschaulichen Handlungskonzepte zurückgeführt werden.

Als dritter wesentlicher Einfluss auf die Transferprozesse der Lernenden kann die Aktivierung und Koordinierung von individuellen Vorwissensstrukturen bzw. Erfahrungsbereichen und Handlungskonzepten herausgestellt werden. In den Bearbeitungen der zum jeweiligen Lösungsbeispiel analogen unvollständigen Beispiele konnte festgestellt werden, dass die Aktivierung von Vorwissen als Grundlage für die Bildung der entsprechenden Analogien vor allem durch die Intensität der Verarbeitung des Lösungsbeispiels, die äußere Gestaltung bzw. Oberflächenmerkmale der unvollständigen Beispiele und Unterschieden auf der Ebene der Darstellung und des Sachkontexts beeinflusst wurde. So führte ein „Überfliegen" der Lösungsbeispiele, eine Orientierung an den Oberflächenmerkmalen der Aufgaben sowie eine Änderung der Darstellung oder des Sachkontexts in vielen Fällen dazu, dass die Lernenden keine Verbindung zum Lösungsbeispiel hergestellt haben und die Struktur der Aufgabenlösung nicht korrekt übertragen haben.

Beim Repräsentationstransfer zwischen verschiedenen Darstellungen konnte beobachtet werden, dass vor allem die mit den jeweiligen Darstellungen verbundenen Handlungskonzepte eine wesentliche Ursache dafür darstellen können, dass die intendierte Übertragung der anschaulichen Bruchherstellungshandlung sowie des Vergröberns einer Einteilung als Zusammenfassen von Teilen zu einem neuen größeren Teil nicht übertragen werden konnten. In diesem Zusammenhang konnten in fast allen Bearbeitungen der Lernenden Schwierigkeiten bei der Darstellung von Brüchen in einer Kreisdarstellung und beim Transfer von anschaulichen Handlungskonzepten auf die Streckendarstellung rekonstruiert werden. Es kann angenommen werden, dass die Lernenden noch keine hinreichenden Erfahrungen zur Einteilung eines Kreises in gleiche Teile aktivieren können und mit einer Strecke vor allem das Handlungskonzept des Messens von Längeneinheiten verbinden. Bei der Darstellung von Brüchen in einem Kreis wurde besonders bei Brüchen, deren Nenner keine Potenz von 2 ist, beobachtet, dass die Lernenden keine Strategie zur Einteilung hatten und lediglich durch Probieren eine Einteilung vornehmen konnten. Beim Transfer der Verfahren und anschaulichen Handlungskonzepte konnte vermehrt eine Orientierung am Umgang mit natürlichen Zahlen nachgewiesen werden, die in den meisten Fällen damit erklärt werden konnte, dass die Lernenden die Unterteilung einer Strecke als ganzzahlige Vielfache von Längeneinheiten deuten und nicht als Vielfache von Teilen eines Ganzen.

Eine häufige Fehlerquelle beim Transfer zwischen Sachkontexten in den Bearbeitungen der Lernenden war die Wahl der falschen Bezugsgrößen für das Ganze und die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten bei der Anteilbildung. Diese Schwierigkeiten und Fehler können in vielen Fällen mit einer unzureichenden Vertrautheit mit Handlungskonzepten erklärt werden, die mit dem Sachkontext verbunden sind. Hierbei konnte festgestellt werden, dass auch eine Aufgabenstruktur oder Struktur eines Lösungswegs für die Lernenden ein zunächst unvertrautes Handlungskonzept darstellt, dass zunächst erschlossen werden muss, bevor bekannte Verfahren übertragen und angewendet werden können.

Insgesamt ist festzustellen, dass in allen Bearbeitungen der Lernenden Transferprozesse verschiedener Art rekonstruiert werden konnten. Obgleich sich im Vergleich der Bearbeitungsprozesse der Lernenden im Verlauf der Unterrichtseinheit bestimmte Muster und Entwicklungen nachzeichnen lassen, sind die Transferprozesse in hohem Maße individuell und abhängig von den individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodellen der Lernenden. Der Vergleich der Rekonstruktionen individueller Transferprozesse mit den intendierten Transferprozessen ermöglicht es in vielen Fällen etwaige Divergenzen und ihre Hintergründe zu identifizieren.

Zusammenfassend können Transferprozesse als integrale Bestandteile von Lernprozessen und der Begriffsbildung beschrieben werden, die sehr individuell verlaufen und deren Funktion im Lernprozess sich im Zusammenhang mit langfristigen Lernprozessen erschließt. Transferprozesse sind unmittelbar vom individuellen Vorwissen der Lernenden sowie ihren subjektiven Deutungen der Lern- und Transfersituation abhängig. Sie hängen von der Ausprägung, Vernetzung und Tragfähigkeit (bzw. Anschlussfähigkeit) von Grundvorstellungen ab und nehmen wechselseitig Einfluss auf ihre Entwicklung. Transferprozesse können in differenzierten Detailanalysen von Lernprozessen erfasst und analysiert werden.

## 6.2 Konzeptuelle Reflexion und offene Fragen

Die Schwerpunkte in der Konzeption der empirischen Studie lagen zum einen in der Erfassung möglichst authentischer interaktiver Bearbeitungsprozesse der Lernenden sowie ihrer deskriptiven Analyse. Dadurch wurden einige Einschränkungen bezüglich der Aussagekraft der Ergebnisse in Kauf genommen. Zum anderen wurden aufgrund der Ergebnisse des theoretischen Teils Annahmen getroffen, die einen maßgeblichen Einfluss auf den Fokus der Datenauswertung zur Folge hatten.

**Die Konzeption von Transfer als Prozess:** Im theoretischen Teil dieser Arbeit wurden verschiedene theoretische Modelle und Perspektiven von Transfer diskutiert. Die Modelle der Kognitions- und Instruktionspsychologie konzeptualisieren einen Transfer vor allem im Rahmen der Kompetenz- und Leistungsmessung als *Maß des Lernerfolgs* und somit als ein *Produkt von Lernen*. Diese Sicht auf Transfer ist in Hinsicht auf das Ziel der Vergleichbarkeit, Replizierbarkeit und Generalisierbarkeit von Untersuchungsergebnissen unbestritten. Diese Sicht schränkt jedoch den Blick auf den Mathematikunterricht bedeutend ein, da sie lediglich das Ergebnis eines Lernprozesses betrachtet, ohne der Individualität der Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern Rechnung zu tragen. Im Mathematikunterricht lernen Schülerinnen und Schüler nur selten unter Laborbedingungen, sondern in sozialen, kooperativen und interaktiven Settings. Zudem zeichnet sich der Mathematikunterricht dadurch aus, dass Lerninhalte sukzessive weiterentwickelt und miteinander verknüpft werden. Dies gilt vor allem für den Inhaltsbereich der Bruchrechnung. Zu Beginn werden Brüche in alltäglichen Zusammenhängen eingeführt. Diese Alltagserfahrungen mit Brüchen werden im weiteren Verlauf des Unterrichts stetig weiterentwickelt, abstrahiert und mit anderen Konzepten in Beziehung gesetzt: Die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs kann in diesem Zusammenhang durch verschiedene Transferprozesse beschrieben werden.

Die Forschungsliteratur zur Bruchrechnung dokumentiert eine Vielzahl von Produkten dieser Entwicklung, insbesondere einer längsschnittlichen Kompetenzentwicklung (vgl.Wartha, 2007) oder der Entwicklung von Fehlkonzepten und Fehlerstrategien (vgl. Ni & Zhou, 2005; Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012). Studien zur Wirksamkeit von spezifischen Instruktionsmethoden (vgl. z. B. Reinhold, 2019, S. 293 f.) erlauben nur selten einen Einblick in den natürlichen Unterrichtsalltag einer Lerngruppe und die im Unterricht ablaufenden Prozesse.

Vor diesem Hintergrund eröffnet die Konzeption von Transfer als Transferprozess, der über einen längerfristigen Zeitraum verläuft, eine alternative Sichtweise auf die individuellen Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern. Die Suche richtet sich nicht auf Muster in den Ergebnissen der Bearbeitungsprodukte, sondern auf Muster in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden über den Verlauf einer Unterrichtseinheit. Dadurch ergeben sich Erklärungsansätze für Ergebnisse von Leistungsmessungen und Hinweise für Unterstützungsmöglichkeiten im Unterricht.

**Vergleich von intendierten und dokumentierten Transferprozessen:** Mit dem Einsatz von Aufgaben im Mathematikunterricht ist in den meisten Fällen ein didaktisches Ziel verbunden. Das didaktische Ziel einer Aufgabe kann auf sachanalytischer Ebene in Form von intendierten Transferprozessen beschrieben werden, die zur Lösung einer Aufgabe erforderlich sind. Dies kann die Anwendung eines bestimmten Verfahrens, das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen und Repräsentationsebenen oder das Herstellen von Zusammenhängen sein.

Durch die detaillierten Analysen der deskriptiv rekonstruierten Transferprozesse der Lernenden ist es möglich, die tatsächlichen Transferprozesse der Lernenden mit den intendierten Transferprozessen auf normativer Ebene zu vergleichen. Die dadurch feststellbaren etwaigen Divergenzen liefern Anhaltspunkte für

Hintergründe von Schwierigkeiten der Lernenden und somit eine Grundlage für Maßnahmen zur konstruktiven Behebung.

Die Anwendbarkeit bestimmter Verfahren und Handlungskonzepte ist eng an die Ausprägung und Vernetzung individueller Vorstellungen bzw. Erfahrungsbereiche gebunden. Die Analyse einer Anwendungssituation in Hinsicht auf den konzeptuellen Kern des erforderlichen Transfers, die geforderten Übersetzungen zwischen Darstellungen und Analogiebildungen zwischen Sachkontexten sowie die herzustellenden Beziehungen ermöglicht in diesem Zusammenhang eine detaillierte Einschätzung des Anforderungsprofils einer Aufgabe.

Die deskriptiven Analysen im empirischen Teil dieser Arbeit zeigen im Vergleich mit den intendierten Transferprozessen, dass es in allen Bearbeitungen zu einem Transfer kommt, dieser jedoch in vielen Fällen nicht mit den auf normativer Ebene erwarteten Transferprozessen übereinstimmt. Transferprozesse beschränken sich nicht allein auf sogenannte „Aha-Momente“, in denen Lernende grundlegende Zusammenhänge herstellen, sondern sind vielfach in der zum Teil unbewussten Übertragung subjektiver Deutungs- und Erklärungsmodelle zu identifizieren. Die Analyse dieser Transferprozesse eröffnet einen hochauflösenden Blick auf diese sehr individuellen Übertragungen.

**Einschränkungen und offene Fragen:** Für die deskriptive Analyse der Bearbeitungsprozesse der Lernenden wurden rekonstruktive und interpretative Verfahren angewendet. Die Anwendung dieser Methoden beschränkt die Ergebnisse der Analysen auf die Betrachtung einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Einzelfällen. Die hierbei gewonnenen Erkenntnisse sind als lokale Theorien auf einen kleinen Rahmen beschränkt und erheben keinen Anspruch auf allgemeine Gültigkeit. Dieser Rahmen bezieht sich jedoch nicht nur auf die Anzahl der Fälle, sondern auch auf den zeitlichen Rahmen der Untersuchung, die Beschränkung auf eine Lerngruppe einer bestimmten Jahrgangsstufe und einer bestimmten Schulform. In diesem Zusammenhang ist offen, inwieweit die Ergebnisse der deskriptiven Analysen im empirischen Teil dieser Arbeit auch unter anderen Rahmenbedingungen dokumentiert werden können und welches Potenzial sie für eine Verallgemeinerung bieten.

Aufgrund des Untersuchungsschwerpunkts der Arbeit lagen zuweilen mehrere Unterrichtsstunden zwischen den einzelnen Datenerhebungen. Die Analysen der Transferprozesse der Lernenden zeigen jedoch, dass in nahezu allen Bearbeitungen neuer Aufgaben Transferprozesse zu identifizieren sind, die potenziell auf die Entwicklung von individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodellen Einfluss nehmen. Aus diesem Grund ist anzunehmen, dass die Bearbeitungsprozesse der Lernenden durch weitere Einflüsse charakterisiert werden können.

Die Einführung der inhaltlichen Schwerpunkte in den Unterrichtsstunden, in denen Videodaten erhoben wurden, erfolgte anhand von interaktiven animierten Lösungsbeispielen und unvollständigen Beispielen nach dem fading-out Prinzip. Die Forschung zum Mathematiklernen mit Lösungsbeispielen (vgl. Renkl, 2017; Salle, 2015) legt nahe, dass die Effizienz dieser Instruktionsmethode durch ein vorbereitendes Selbsterklärungstraining erhöht werden kann. Die Lernenden in der Untersuchung in dieser Arbeit erhielten kein vorbereitendes Training zum Umgang mit Lösungsbeispielen und es wurde auch nicht kontrolliert über welche Erfahrungen zum Lernen mit Lösungsbeispielen sie grundsätzlich verfügen. Wenngleich Lösungsbeispiele zur Normalität von Schulbüchern gehören, kann vor diesem Hintergrund nicht ausgeschlossen werden, dass der ausbleibende oder fehlerhafte Transfer in einigen Fällen der unzureichenden Verarbeitung der Lösungsbeispiele geschuldet ist.

Die Lernenden wurden während der Bearbeitung nicht zum lauten Denken aufgefordert, sondern lediglich zu Beginn jeder Unterrichtsstunde und in regelmäßigen Abständen dazu aufgefordert mit ihren Partnerinnen und Partnern ihre Lösungen zu besprechen und diese einander zu erklären. In einigen Fällen konnte diesbezüglich beobachtet werden, dass eine eingehende Diskussion der Aufgabenbearbeitungen ausblieb oder eine Person den Großteil der Bearbeitungen übernommen hat, ohne die Ergebnisse mit der Partnerin oder dem Partner zu besprechen. In diesen Fällen konnten nur geringfügige Einblicke in die Bearbeitungsprozesse aufgrund der nicht ausreichenden Daten zur Analyse von Transferprozessen gewonnen werden.

Zuletzt ist anzumerken, dass im begrenzten Rahmen der Darstellung in dieser Arbeit eine Auswahl an Bearbeitungsprozessen getroffen werden musste. Diese Auswahl erfolgte nicht in Hinsicht auf die vollständige Darstellung des Spektrums von Transferprozessen, sondern wurde in Hinsicht auf möglichst kontrastreiche Bearbeitungen von ausgewählten Transferaufgaben getroffen. Es ist daher anzunehmen, dass anhand der vorliegenden und dargestellten Daten, nur ein Teil der charakteristischen Aspekte von Transferprozessen in der Bruchrechnung dokumentiert werden konnte.

## 6.3 Perspektiven

In diesem Abschnitt werden Perspektiven für die weiterführende Forschung und die Praxis im Mathematikunterricht aufgezeigt, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben.

### 6.3.1 Forschungsperspektiven

Auf Grundlage der vorliegenden Arbeit können die folgenden Forschungsperspektiven entwickelt werden.

**Transfer von Bruchzahlvorstellung auf das Rechnen mit Brüchen und weiterführende Inhalte:** Die Untersuchung in dieser Arbeit ist weitgehend auf die Entwicklung von Grundvorstellungen zu Brüchen fokussiert. Das Rechnen mit Brüchen wurde nicht betrachtet. Die unzureichende Entwicklung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (vgl. Wartha, 2007; Wartha, 2009), Probleme beim Übersetzen zwischen Darstellungsformen (vgl. Wartha & Wittmann, 2009) sowie das vorschnelle Zurücklassen anschaulicher Vorstellungen zugunsten eines kalkülorientierten Handelns (vgl. Prediger, 2009) gelten als Hauptursache für Fehler in der Bruchrechnung und es wird angenommen, dass die „Nichtaktivierung adäquater Grundvorstellungen" (Wartha, 2007, S. 237) zur Entwicklung robuster Fehlerstrategien beim Rechnen mit Bruchzahlen führt. Die theoretischen und empirischen Ergebnisse dieser Arbeit bieten eine Grundlage zu untersuchen, welche individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle auf das Rechnen mit Bruchzahlen in Transferprozessen übertragen werden und wie diese zur Entwicklung von Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen beitragen oder die Entwicklung von Fehlkonzepten und Fehlerstrategien unterstützen.

Ein tragfähiges Verständnis von Brüchen und Bruchzahlen ist grundlegend, um viele weitere elementare mathematische Inhalte zu verstehen (vgl. Padberg & Wartha, 2017, S. 8 f.), wie zum Beispiel das Rechnen mit Dezimalzahlen (vgl. Isotani et al., 2011; Bikner-Ahsbahs, Schäfer & Dygas, 2017), die Prozentrechnung (vgl. Hafner, 2012), lineare Gleichungen und Funktionen sowie relative Häufigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. Krauss, Weber, Binder & Bruckmaier, 2020). Die Anwendung des Wissens über Bruchzahlen in diesen Inhaltsbereichen kann als Transfer charakterisiert werden, bei dem vorhandenes Wissen über Bruchzahlen und die Bruchrechnung auf einen neuen inhaltlichen Kontext übertragen und in diesem angewendet werden muss. Die Analyse der Transferprozesse von Lernenden in der Erarbeitung dieser Inhalte könnte Hinweise auf inhaltsspezifische Hürden liefern, die einen Transfer adäquater Grundvorstellungen von Brüchen beeinflussen.

In dieser Arbeit wurden Transferprozesse im Rahmen des didaktischen Konzepts der Ausbildung von Grundvorstellungen konzeptualisiert und im Rahmen von deskriptiven und rekonstruktiven Analysen untersucht, inwieweit die auf normativer Ebene intendierten Transferprozesse sich in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden widerspiegeln. In Hinsicht auf die Anwendung in quantitativen Untersuchungen erscheint es hilfreich Transferprozesse in der Bruchrechnung weiter zu typisieren und zu charakterisieren.

**Transferverstehen und Transfererwartungen von Lehrkräften:** In Analogie zu den verschiedenen Transferbegriffen in der Pädagogischen Psychologie, die im Wesentlichen mit unterschiedlichen Blickwinkeln und Forschungsschwerpunkten erklärt werden können, kann angenommen werden, dass auch unter Lehrenden verschiedene Verständnisse von Transfer vorherrschen. Individuelle und subjektive Wirksamkeitserwartungen haben einen großen Einfluss auf das didaktische Handeln von Lehrkräften (vgl. Eichler & Erens, 2014; Schulz, 2014). Diese sind in vielen Fällen von persönlichen Erfahrungen sowie der professionellen Ausbildung geprägt (Whitacre, Atabas & Findley, 2019), die sie erfahren haben. Schulz (2014) beschreibt in seiner Arbeit zum fachdidaktischen Wissen von Grundschullehrkräften, dass Lehrende unterschiedliche Perspektiven auf Rechenstörungen und ihre Ursachen haben, die sich auf ihre „handlungsleitende[n] Kognitionen“ (Schulz, 2014, S. 409) auswirken. Es kann angenommen werden, dass Lehrende auch zu Transfer unterschiedliche Verständnisse aufweisen, mit denen unterschiedliche Erwartungshaltungen verbunden sind, die ihr didaktisches Handeln bezüglich der Konzeption von Unterricht, der Bewertung von Schülerleistungen, sowie der Ableitung von Hilfestellungen leiten.

Vor diesem Hintergrund wäre ein weiterführendes Forschungsinteresse zu untersuchen, was Lehrkräfte unter Transfer verstehen, welche Erwartungen an dieses Verständnis geknüpft sind und inwieweit diese ihr didaktisches Handeln beeinflussen.

**Untersuchung von Arbeitsverhalten und Interaktionsstrukturen:** In den Analysen der Bearbeitungsprozesse in dieser Arbeit konnte beobachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler sehr unterschiedlich miteinander gearbeitet haben. Wie in der Untersuchung von Salle (2015) zum selbstgesteuerten Lernen mit Lösungsbeispielen beschrieben, konnten auch in den Interaktionen der Schülerinnen und Schüler in dieser Arbeit unterschiedliche Argumentationsprozesse festgestellt werden. Zudem konnte beobachtet werden, dass die Lernenden sich unterschiedlich in die Partnerarbeiten eingebracht haben.

Auf Grundlage des ICAP Modells (vgl. Chi, 2009; Chi & Wylie, 2014; Chi, & Menekse, 2015) untersuchen verschiedene Studien den Zusammenhang zwischen dem Interaktionsverhalten der Lernenden und ihrem Lernerfolg in Partner- und Gruppenarbeiten. Dabei werden die Interaktionsaktivitäten der Lernenden in vier Kategorien eingeteilt: Passiv, aktiv, konstruktiv und interaktiv. Mit dieser Einteilung ist die Hypothese verbunden, dass die sichtbaren Interaktionsaktivitäten der Lernenden ihre kognitiven Aktivitäten widerspiegeln und in diesem Zusammenhang aktive, konstruktive und interaktive Aktivitäten in Beziehung mit erfolgreichem Lernen und erfolgreichem Transfer stehen. Dabei werden konstruktive und interaktive Aktivitäten dadurch charakterisiert, dass die Lernenden neue Ideen generieren und Zusammenhänge erschließen, die über die im Lernmaterial präsenten Informationen hinausgehen. Im Speziellen wird von diesen Aktivitäten erwartet, dass Lernende ihr Vorwissen aktivieren, im Hinblick auf neue Anforderungssituationen erweitern und umstrukturieren und somit explizit Transferprozesse identifiziert werden können, die bei den Lernenden bereits stattgefunden haben oder in diesen Sequenzen stattfinden. Die verschiedenen Studien, in denen dieses Modell zur quantitativen Analyse des Interaktionsverhaltens der Lernenden eingesetzt wurde, berichten einen deutlichen Einfluss von konstruktiven und interaktiven Interaktionsaktivitäten auf den erfolgreichen Transfer der erarbeiteten Inhalte.

Eine Klassifizierung der Interaktionshandlungen in den Partnerarbeiten bzw. den Daten dieser Arbeit könnte im Rahmen einer quantitativen Interaktionsanalyse Aufschluss über Faktoren erfolgreicher Partnerarbeiten geben und helfen, Verhaltensweisen und Interaktionsmuster zu identifizieren, die Transferprozesse unterstützen.

### 6.3.2 Perspektiven für die Unterrichtspraxis

Die Ergebnisse des theoretischen und empirischen Teils dieser Arbeit ergeben verschiedene Hinweise für die Förderung von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs sowie im allgemeinen Mathematikunterricht:

**Begriffsbildung planen und analysieren:** In dieser Arbeit wurde auf theoretischer und empirischer Ebene argumentiert, dass Transferprozesse unmittelbar von den Vorstellungen und Erklärungsmodellen der Lernenden abhängen. Vor diesem Hintergrund wurde in dieser Arbeit ein Rahmen zur normativen Analyse von Transferprozessen dargelegt. Die didaktisch intendierten Transferprozesse treten selten spontan auf, sondern sind das Ergebnis der Ausbildung sachadäquater und tragfähiger Handlungskonzepte von mathematischen Inhalten. Aus diesem Grund ist es wichtig, Transferprozesse in der Erarbeitung neuer Begriffe und der Begriffsentwicklung mitzudenken, um so einerseits Transferprozesse in der Unterrichtsplanung zu strukturieren und vorzubereiten (vgl. Frohn, 2020; Salle & vom Hofe, 2020) und andererseits auf Ebene der Unterrichtsbeobachtungen zu analysieren, um konstruktive Unterstützungsmaßnahmen abzuleiten.

**Vernetzungen zwischen rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepten fördern:** Die Ergebnisse der empirischen Studie in dieser Arbeit zeigen auf, dass eine häufige Ursache für ausbleibende oder negative Transferprozesse die getrennte Betrachtung von Rechenverfahren und ihren anschaulichen Deutungen ist. Vor diesem Hintergrund sollte im Unterricht stets der Schwerpunkt auf die Vernetzung rechnerischer und anschaulicher Handlungskonzepte gelegt werden. Auch mit zunehmendem Übergang auf die symbolische Ebene sollten immer Bezüge zu den anschaulichen Handlungskonzepten hergestellt werden, sodass Lernende robuste Vorstellungen zu diesen aufbauen können. Die Ergebnisse der Analysen der Bearbeitungsprozesse in dieser Arbeit weisen darauf hin, dass die Lernenden in vielen Fällen ohne Schwierigkeiten die rechnerischen Verfahren auf neue Aufgaben übertragen können, ohne dabei einen anschaulichen Handlungsbezug herzustellen. Beim Transfer der Verfahren auf komplexe Sachkontexte oder mehrschrittige Aufgabensituationen führt diese Dominanz der rechnerischen Verfahren jedoch häufig zu Fehlern in der Wahl der Bezugsgrößen und Schwierigkeiten bei der Strukturierung der Anforderungssituation. Aus diesem Grund sollte stets ein anschaulicher Handlungsbezug hergestellt und gefördert werden, um einer Entkopplung der rechnerischen und anschaulichen Handlungskonzepte frühzeitig entgegen zu wirken.

**Transfer explizit machen und Verallgemeinerungen thematisieren:** Eine zentrale Funktion von Transfer ist die Verallgemeinerung und das Herausarbeiten von Kernideen und -konzepten, insbesondere durch das Erarbeiten und Vergleichen unterschiedlicher Anwendungssituationen. In vielen Fällen ist jedoch nicht zu erwarten, dass Lernende selbstständig die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Anwendungssituationen erkennen und entsprechende Verallgemeinerungen und Abstraktionen vornehmen. Daher ist es hilfreich, diesen Prozess durch leitende und fokussierende Aufgaben- und Hilfestellungen zu unterstützen (vgl. Salle & Frohn, 2020).

**Analogiebildung begleiten und unterstützen:** In vielen Fällen erfordern Transferprozesse die Bildung von Analogien bzw. das Erkennen von Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Aufgaben, um bekannte Lösungsstrategien und Denkmuster zu übertragen. Die Bildung von Analogien besteht in der Abbildung mathematischer Strukturen und Operationen zwischen unterschiedlichen Anforderungssituationen. Diese Abbildungsprozesse können durch geeignete Arbeitsaufträge angeregt und als Aufbau von Analogiebildungsfähigkeiten im Unterricht trainiert werden (vgl. Ruppert, 2020).

**Wie anschaulich und hilfreich sind intendierte anschauliche Hilfen?** Die Divergenzen zwischen den intendierten und den in den Bearbeitungsprozessen der Lernenden rekonstruierten Transferprozessen können Hinweise geben, inwieweit sich anschauliche Hilfen bewähren oder zusätzliche Belastungen für den Lernprozess darstellen. Vor dem Hintergrund der beschriebenen Schwierigkeiten der Lernenden beim Darstellen von Brüchen in einer Kreisrepräsentation, der häufigen Wahl der falschen Rechenoperation bei der Berechnung von Anteilen im Pfeilschema und der zahlreichen Fehlinterpretationen zum Vergröbern einer Einteilung können diese intendierten anschaulichen Hilfen in Frage gestellt werden. Während das Einteilen von Kreisen in gleichgroße Kreissegmente die Lernenden in vielen Fällen vor technische Schwierigkeiten stellt und das Pfeilschema zur Anteilberechnung eine Änderung der Darstellungsform erfordert, scheint die Vorstellung vom Vergröbern einer Einteilung als anschauliche Deutung des Kürzens von Brüchen zu komplex zu sein, als dass sie zum Verständnis des rechnerischen Verfahrens beiträgt. Für das Vergröbern einer Einteilung müssen sowohl das Ganze als auch der Anteil betrachtet und gleichermaßen verändert werden. Zudem ist die Vorstellung, dass ein Verändern der Einteilung den Wert eines Bruchs nicht verändert, vor allem zu Beginn der Begriffsentwicklung mit einer grundlegenden Anpassung der zuvor aufgebauten Vorstellungen verbunden und bedarf einer intensiven Thematisierung. In diesem Sinne sollte der Einsatz von anschaulichen Hilfen stets eingehend reflektiert werden, da diese das Potenzial haben, Lernprozesse zu verkomplizieren anstatt sie wie intendiert zugänglicher zu gestalten.

# Literatur


Alfieri, L. A., Nokes-Malach, T. J. & Schunn, C. D. (2013). Learning Through Case Comparisons: A Meta-Analytic Review. *Educational Psychologist*, *48*(2), 87–113.

Anderson, J. R. (1982). Acquisition of Cognitive Skill. *Psychological Review*, *89*(4), 369–406.

Anderson, J. R. (1983). *The Architecture of Cognition*. Cambridge, MA: Harvard University.

Anderson, J. R. (1987). Skill acquisition: Compilation of weak-method problem solution. *Psychological Review*, *94*, 192–210.

Anderson, J. R. (1993). *Rules of the Mind*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Anderson, J. R. & Fincham, J. M. (1994). Acquisition of procedural skills from examples. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *20*(6), 1322–1340.

Atkinson, R. C. & Shiffrin, R. M. (1968). Human memory: A proposed system and its control mechanisms. In K. Spence (Hrsg.), *The psychology of learning and motivation* (Bd. 2, S. 89–195). New York: Academic.

Atkinson, R. K., Derry, S., Renkl, A. & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, *70*, 181–214.

Atkinson, R. K., Renkl, A. & Merrill, M. M. (2003). Transitioning From Studying Examples to Solving Problems: Effects of Self-Explanation Prompts and Fading Worked-Out Steps. *Journal of Educational Psychology*, *95*(4), 774–783.

Baddeley, A. D. (1992). Working memory. *Science*, *255*, 556–559.

Baddeley, A. D. (1997). *Human memory*. Hove: Psychology Press.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L. & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*, 447–455.

Barnett, S. M. & Ceci, S. J. (2002). When and Where Do We Apply What We Learn? A Taxonomy for Far Transfer. *Psychological Bulletin*, *128*(4), 612–637.

Bartlett, F. C. (1932). *Remembering: A Study in Experimental and Social Psychology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -Lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1–56). IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6. Köln: Aulis-Verlag Deubner.




S. Kollhoff, *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*, Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik 6,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4

Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen vonMathematik. Beiträge zum 4. internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik* (S. 7–25). Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurth, Band 10. Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky, Teubner.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. & Voigt, J. (1986). *Interaktionsanalyse von Mathematikunterricht. Methodische Annahmen und methodisches Verfahren. Unveröffentlichtes Arbeitspapier*.

Beck, C. & Jungwirth, H. (1999). Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *20*(4), 231–259.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (S. 91–125). New York, NY: Academic.

Behr, M. J., Post, T. R., Harel, G. & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis – Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Hrsg.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (S. 13–47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323–341.

Berthold, K. & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology*, *101*, 70–87.

Bikner-Ahsbahs, A. (2001). Eine Interaktionsanalyse zur Entwicklung von Bruchvorstellungen im Rahmen einer Unterrichtssequenz. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *22*(3/4), 179–206.

Bikner-Ahsbahs, A., Schäfer, I. & Dygas, R. (2017). Lernschwierigkeiten im Umgang mit Dezimalbrüchen: Ein situativer Blick. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(2), 239–262.

Blöte, A. W., der Burg, E. V. & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 627–638.

Blum, W. (1979). Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *3*(42–50).

Bohnsack, R. (2007). *Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in qualitative Methoden* (6. Auflage). Opladen: Budrich.

Bohnsack, R. (2010). *Rekonstruktive Sozialforschung: Einführung in qualitative Methoden* (8., durchges. Auflage). Opladen (u. a.): Budrich.

Bovair, S. & Kieras, D. E. (1991). Toward a model of acquiring procedures from text. In R. Barr, M. L. Kamil, P. Mosenthal & P. D. Pearson (Hrsg.), *Handbook of Reading Research* (Bd. 2, S. 206–229). New York: Longman.

Bovair, S., Kieras, D. E. & Polson, P. (1990). The acquisition and performance of text-editing skill: A cognitive complexity analysis. *Human Computer Interaction*, *5*, 1–48.

Bower, G. H. (1968). Cognitive psychology: An introduction. In W. K. Estes (Hrsg.), *Handbook of learning and cognitive processes. Introduction to concepts and issues* (Bd. 1, S. 25–80). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bransford, J. D., Goldman, S. R. & Vye, N. J. (1991). Making a difference in people's ability to think: Reflections on a decade work and some hopes for the future. In R. J. Sternberg & L. Okagaki (Hrsg.), *Influences on children* (S. 147–180). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bransford, J. D. & Schwartz, D. L. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. In A. Iran-Nejad & P. D. Pearson (Hrsg.), *Review of Research in Education* (Bd. 24, S. 1–100). American Education Research Association.

Brown, J. D., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, *18*, 32–42.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 3–20.

Carraher, D. & Schliemann, A. D. (2002). The transfer dilemma. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 1–24.

Catrambone, R. & Holyoak, K. J. (1989). Overcoming contextual limitations on problem-solving transfer. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *15*(6), 1147–1156.

Chi, M. T. H. (2009). Active-Constructive-Interactive: A Conceptual Framework for Differentiating Learning Acitivities. *Topics in Cognitive Science*, *1*, 73–105.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. & Glaser, R. (1989). Self-Explanations: How Students Study and Use Examples in Learning to Solve Problems. *Cognitive Science*, *13*, 145–182.

Chi, M. T. H., Glaser, R. & Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. In R. Sternberg (Hrsg.), *Advances in the psychology of human intelligence* (S. 7–75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chi, M. T. H. & Menekse, M. (2015). Dialogue Patterns in Peer Collaboration That Promote Learning. In L. B. Resnick, C. Asterhan & S. Clarke (Hrsg.), *Socializing Intelligence Through Academic Talk and Dialogue* (S. 263–274). American Education Research Association.

Chi, M. T. H. & VanLehn, K. (2012). Seeing Deep Structure From Interactions of Surface Features. *Educational Psychologist*, *43*(3), 177–188.

Chi, M. T. H. & Wylie, R. (2014). The ICAP Framework: Linking Cognitive Engagement to Active Learning Outcomes. *Educational Psychologist*, *49*(4), 219–243.

Chow, A. F. & Van Haneghan, J. P. (2016). Transfer of solutions to conditional probability problems: effects of example problem format, solution format, and problem context. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 67–85.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127–138.

Cooper, G. A. & Sweller, J. (1987). Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology*, *79*, 347–362.

Corbin, J. & Strauss, A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, Canons and Evaluative Criteria. *Zeitschrift für Soziologie*, *19*(6), 418–427.

Cowan, N. (2000). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, *24*, 87–114.

Cramer, K. A., Post, T. R. & delMas, R. C. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth- Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111–144.

Cummins, D. D. (1992). Role of analogical reasoning in the induction of problem categories. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *18*(5), 1103–1124.

Day, S., Goldstone, R. L. & Hills, T. (2010). The effects of similarity and individual differences on comparison and transfer. In S. Ohlsson & R. Catrambone (Hrsg.), *Cognition in flux: Proceedings of the 32nd annual meeting of the cognitive science society* (S. 465–470). Austin, TX: Cognitive Science Society.

de Groot, A. (1965). *Thought and choice in chess*. The Hague: Mouton.

DeBock, D., Deprez, J., Van Dooren, W., Roelens, M. & Verschaffel, L. (2011). Abstract or Concrete Examples in Learning Mathematics? A Replication and Elaboration of Kaminski, Sloutsky, and Heckler's Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(2), 109–126.

Dettermann, D. K. (1993). The case for prosecution: Transfer as an epiphenomenon. In D. K. Dettermann & R. J. Sternberg (Hrsg.), *Transfer on Trial: Intelligence, cognition, and instruction* (S. 1–24). Norwood, NJ.: Ablex.

Dosher, B. A. (2003). Working memory. In L. Nadel (Hrsg.), *Encyclopedia of Cognitive Science* (S. 569–577). London: Nature Publishing Group.

Dresing, T. & Pehl, T. (2020). Transkription. In G. Mey & M. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie*. Springer Reference Psychologie. Wiesbaden: Springer.

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 55–92.

Duncker, K. (1945). On problem solving. *Phsychological Monographs*, *58*, i–113.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 29–57.

Eichler, A. & Erens, R. (2014). Teacher's beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, *46*, 647–659.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*, 221–262.

Ericsson, K. A. & Kintsch, W. (1995). Long-term working memory. *Psychological Review*, *102*(2), 211–245.

Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1993). *Protocol Analysis*. Cambridge, MA: MIT Press.

Fetzer, M. (2007). *Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Fischbein, E. (1983). Intuition and Analytical Thinking in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *15*(2), 68–74.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematic Reasoning. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 9–14.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, *14*(1), 31–50.

Fischbein, E., Tirosch, D., Stavy, R. & Oster, A. (1990). The Autonomy of Mental Models. *For the Learning of Mathematics*, *10*(1), 23–30.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Frohn, D. (2020). Mehr als Orthogonalität. Das Skalarprodukt beziehungsreich anwenden – mit Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, *218*, 33–38.

Gentner, D. (1983). Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy. *Cognitive Science*, *7*, 155–170.

Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vosniadou & A. Ortony (Hrsg.), *Similarity and analogical reasoning* (S. 199–241). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Gentner, D. & Markman, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist*, *52*, 45–56.

Gibson, J. J. (1986). The theory of affordances. In J. J. Gibson (Hrsg.), *The ecological approach to visual perception* (S. 127–143). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gick, M. L. & Holyoak, K. J. (1980). Analogical Problem Solving. *Cognitive Psychology*, *12*, 306–355.

Gick, M. L. & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, *15*(1), 1–38.

Goldwater, M. C. & Schalk, L. (2016). Relational Categories as a Bridge Between Cognitive and Educational Research. *Psychological Bulletin*, *142*(7), 729–757.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Greeno, J. G. (1991). Mathematical cognition: Accomplishments and challenges in research. In R. R. Hoffmann & D. S. Palermo (Hrsg.), *Cognition and the symbolic processes: Applied and ecological perspectives* (S. 255–279). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Greeno, J. G. (1997). Response: On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, *26*(1), 5–17.

Greeno, J. G. (1998). The Situativity of Knowing, Learning, and Research. *American Psychologist*, *53*(1), 5–26.

Greeno, J. G., Smith, D. R. & Moore, J. L. (1993). Transfer of Situated Learning. In D. K. Dettermann & R. J. Sternberg (Hrsg.), *Transfer on Trial: Intelligence, Cognition, and Instruction* (Kap. 5, S. 99–168). Norwood, NJ.: Ablex.

Greiffenhagen, C. & Sharrock, W. (2008). School mathematics and its everyday other? Revisiting Lave's 'Cognition in Practice'. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 1–21.

Griesel, H. (1968). Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, *15*(1), 48–68.

Griesel, H. (1970). Der wissenschaftliche Hintergrund der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *16*(2), 5–29.

Griesel, H. (1973). *Größen, Bruchzahlen, Sachrechnen*. Hannover: Schroedel.

Griesel, H. (1981a). 20 Jahre moderne Didaktik der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *27*(4), 5–15.

Griesel, H. (1981b). Der quasikardinale Aspekt in der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *27*(4), 87–95.

Griesel, H. (1981c). Einige Anmerkungen zur Verwendung von Operatoren in der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *27*(4), 80–86.

Grosse, C. S. (2005). *Lernen mit multiplen Lösungswegen*. Münster; New York; München; Berlin: Waxmann.

Gruber, H., Law, L., Mandl, H. & Renkl, A. (1996). Situated Learning and Transfer. In P. Reimann & H. Spada (Hrsg.), *Learning in humans and machines: Towards an interdisciplinary learning science* (S. 168–188). Oxford: Pergamon.

Hackenberg, A. J. & Lee, M. Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 245–263.

Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Hart, K. (1987). Children's Mathematical Frameworks: Part Two. What are Equivalent Fractions? *Mathematics in School*, *16*(4), 5–7.

Hartnett, P. & Gelman, R. (1998). Early understandings of number. Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *8*(4), 341–374.

Harvey, L. & Anderson, J. R. (1996). Transfer of declarative knowledge in complex information processing domains. *Human-Computer Interaction*, *11*, 69–96.

Hasemann, K. (1997). Verständnis und Rechenfertigkeiten. Ist die Bruchrechnung angesichts von Computeralgebrasystemen noch zeitgemäß? *Mathematik in der Schule*, *35*(1), 7–18.

Haskell, E. H. (2001). *Transfer of learning: Cognition, instruction, and reasoning*. New York, NY: Academic Press.

Hasselhorn, M. & Gold, A. (2013). *Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren* (3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage). Stuttgart: Kohlhammer.

Hattermann, M. & vom Hofe, R. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren*, *183*, 2–7.

Hattikudur, S. & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(1), 15–30.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *mathematik lehren*, *78*, 20–22, 47–48.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl- Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–116). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Heinze, A. (2007). Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(1), 3–30.

Herden, G. & Pallack, A. (2000). Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. Empirische Erhebung über 244 SchülerInnen der Klassen sieben von Gymnasien. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(3/4), 259–279.

Hierbert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Human, P., Murray, H., ... Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, *25*(4), 12–21.

Hohensee, C. (2014). Backward Transfer: An Investigation of the Influence of Quadratic Functions Instruction on Students' Prior Ways of Reasoning about Linear Functions. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(2), 135–174.

Holyoak, K. J. (2012). Analogy and relational reasoning. In K. J. Holyoak & R. G. Morrison (Hrsg.), *The Oxford handbook of thinking and reasoning* (S. 234–259). New York, NY.: Oxford University Press.

Holyoak, K. J. & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory and Cognition*, *15*(4), 332–340.

Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1989). Analogical Mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science*, *13*, 295–355.

Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1997). The analogical mind. *American Psychologist*, *52*(1), 35–44.

Hunting, R. P. (1984). Understanding Equivalent Fractions. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *7*(1), 26–33.

Isotani, S., Adams, D., Mayer, R. E., Durkin, K., Rittle-Johnson, B. & McLaren, B. M. (2011). Can erroneous examples help middle-school students learn decimals? In C. D. Kloos, D. Gillet, R. M. C. Garcia, F. Wild & M. Wolpers (Hrsg.), *Towards ubiquitous learning: 6th European Conference of Technology Enhanced Learning, EC-TEL 2011. Proceedings* (S. 181–195). Berlin, Heidelberg: Springer.

Johnson, H. L., McClintock, E. & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education*, *49*(6), 851–864.

Jones, M. G. (2009a). Examining Surface Features in Context. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 94–96.

Jones, M. G. (2009b). Transfer, Abstraction, and Context. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 80–89.

Judd, C. H. (1908). The relation of special training to general intelligence. *Educational Review*, *36*, 28–42.

Judd, C. H. (1939). *Educational Psychology*. New York: Houghton Mifflin.

Jungwirth, H. & Krummheuer, G. (2008). Interpretative Forschung als Prozess: Zu den Denkfiguren einer Forschungsrichtung von ihrem Beginn bis heute. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Hrsg.), *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt im Mathematikunterricht*. (Bd. 2, S. 145–173). Münster; New York; München; Berlin: Waxmann.

Kalyuga, S. (2011). Cognitive Load Theory: How Many Types of Load Does It Really Need? *Educational Psychology Review*, *23*(1), 1–19.

Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P. & Sweller, J. (2003). The Expertise Reversal Effect. *Educational Psychology Review*, *38*(1), 21–31.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. & Heckler, A. F. (2008). The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. *Science*, *320*(5875), 454–455.

Katona, G. (1940). *Organizing and Memorizing*. New York: Columbia University Press.

Katz, I. R. (1991). Assessing transfer of a complex skill. In *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Keane, M. T. (1987). On retrieving analogues when solving problems. *Quaterly Journal of Experimental Psychology*, *39A*, 29–41.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Hrsg.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (S. 49–84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kirsch, A. (1969). Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, *16*(1), 41–55.
Kirsch, A. (1970). *Elementare Zahlen- und Größenbereiche*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Kirsch, A. (1987). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis Verlag.
Kirschner, P. A. (2002). Cognitive load theory: implications of cognitive load theory on the design of learning. *Learning and Instruction*, *12*, 1–10.
Klauer, K. J. (2011). *Transfer des Lernens. Warum wir oft mehr lernen als gelehrt wird*. Stuttgart: Kohlhammer.
Kowal, S. & O'Connell, D. C. (2007). Zur Transkription von Gesprächen. In U. Flick, E. von Kardorff & I. Steinke (Hrsg.), *Qualitative Forschung. Ein Handbuch* (5. Auflage, S. 437–447). Reinbeck: Rowohlt.
Krauss, S.,Weber, P., Binder, K. & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *41*(2), 485–521.
Krummheuer, G. (2012). Interaktionsanalyse. In F. Heinzel (Hrsg.), *Methoden der Kindheitsforschung* (S. 234–247). Weinheim (u. a.): Juventa.
Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim, Basel: Beltz.
Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten – Verstehen – Gestalten*. München: Spektrum.
Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Opladen: Leske + Budrich.
Kubricht, J. R., Lu, H. & Holyoak, K. J. (2017). Individual differences in spontaneous analogical transfer. *Memory and Cognition*, *45*, 576–588.
Kurtz, K., Miao, C.-H. & Gentner, D. (2001). Learning by analogical bootstrapping. *The Journal of the Learning Sciences*, *10*, 417–446.
Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29–63.
Larkin, J. H. (1989). What kind of knowledge transfers? In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, Learning and Instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (S. 283–305). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics, and Culture in Everyday Life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripheral particitpation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
Law, L.-C. (1994). *Transfer of Learning: Situated Cognition Perspectives*. Research report No. 32. München: Ludwig-Maximilians-Universität, Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie und Empirische Pädagogik.
Lawler, R. W. (1981). The Progressive Construction of Mind. *Cognitive Science*, *5*(1), 1–30.
Lobato, J. (1996). *Transfer Reconceived: How „Samenes“ is Produced in Mathematical Activity* (Diss., University of California, Berkley).
Lobato, J. (2006). Alternative Perspectives on the Transfer of Learning: History, Issues, and Challenges for Future Research. *Journal of the Learning Sciences*, *15*(4), 431–449.

Lobato, J. (2012). The Actor-Oriented Transfer Perspective and Its Contributions to Educational Research and Practice. *Educational Psychologist*, *47*(3), 232–247.
Lobato, J., Ellis, A. B. & Muñoz, R. (2003). How "Focusing Phenomena" in the Instructional Environment Support Individual Students' Generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 1–36.
Lobato, J. & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 87–116.
Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78*, 307–322.
Loewenstein, J., Thompson, L. & Gentner, D. (2003). Analogical learning in negotiation teams: Comparing cases promotes learning and transfer. *Academy of Management Learning and Education*, *2*, 119–127.
Luhmann, N. (1984). *Soziale Systeme: Grundriß einer allgemeinen Theorie*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
Mack, N. K. (1993). Learning Rational Numbers with Understanding: The Case of Informal Knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Hrsg.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (S. 85–105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building an informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 422–441.
MacKay, D. M. (1969). *Information, mechanism, and meaning*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology Press.
Mähler, C. & Stern, E. (2010). Transfer. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogisch Psychologie* (4., überarbeitete und erweiterte Auflage, S. 859–869). Weinheim, Basel: Beltz.
Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, *123*, 4–8.
Marcus, N., Cooper, M. & Sweller, J. (1996). Understanding Instructions. *Journal of Educational Psychology*, *88*(1), 295–312.
McNeil, N. M. (2008). Limitations to teaching children $2+2=4$: Typical arithmetic problems can hinder learning of mathematical equivalence. *Child Development*, *79*, 1524–1537.
Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*, 81–97.
Moss, J. & Case, R. (1999). Developing childrens's understanding of the rational numbers: A new model and experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122–147.
Murtaugh, M. (1985a). *A hierarchical decision process model of American grocery shopping* (Diss., University of California, Irvine).
Murtaugh, M. (1985b). The practice of arithmetic by American grocery shoppers. *Anthropology and Education Quarterly*, *16*(3), 186–192.
Naujok, N. (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht – Analyse von Unterrichtsausschnitten aus der Grundschule*. Weinheim: Beltz.
Ni, Y. (2001). Semantic Domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence. *Comtemporary Educational Psychology*, *26*(3), 400–417.
Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.
Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(1), 1–24.

Nokes-Malach, T. J., VanLehn, K., Belenky, D. M., Lichtenstein, M. & Cox, G. (2013). Coordinating principles and examples through analogy and self-explanation. *European Journal of Psychology of Education*, *28*(4), 1237–1263.

Nokes, T. J. (2009). Mechanisms of knowledge transfer. *Thinking & Reasoning*, *15*(1), 1–36.

Novick, L. R. (1988). Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *14*(3), 510–520.

Novick, L. R. & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical Problem Solving by Analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *17*(3), 398–415.

Novick, L. R., Hurley, S. M. & Francis, M. (1999). Evidence of abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory and Cognition*, *27*(2), 288–308.

Obersteiner, A. & Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. *ZDM Mathematics Education*, *48*(3), 255–266.

Obersteiner, A., Van Dooren,W., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, *28*, 64–72.

Oehl, W. (1970). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule* (4. Auflage). Hannover: Schroedel.

Paas, F., van Gog, T. & Sweller, J. (2010). Cognitive Load Theory: New Conceptualizations, Specifications, and Integrated Research Perspectives. *Educational Psychology Review*, *22*(2), 115–121.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4., erw. Auflage). Heidelberg: Spektrum.

Padberg, F. & Krüger, H. (1997). Ordnen von Brüchen – Lösungsstrategien und typische Fehler. *Mathematische Unterrichtspraxis*, *18*(2), 35–41.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Auflage). Springer Spektrum.

Pallack, A., vom Hofe, R. & Salle, A. (2013). Individuelle Förderung im Mathematikunterricht: So geht's. In *Sinus.NRW – Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht, Handreichung* (S. 31–44). Düsseldorf: Ritterbach Verlag.

Payne, J. N. (1986). Über Schülerschwierigkeiten beim Bruchzahlbegriff, beim Erweitern, Kürzen und Ordnen von Brüchen. *Der Mathematikunterricht*, *3*, 53–57.

Pea, R. D. (1990). Inspecting Everyday Mathematics: Reexamining Culture-Cognition Relations. *Educational Researcher*, *19*(4), 28–31.

Pekrun, R., vom Hofe, R., Blum, W., Götz, T.,Wartha, S., Frenzel, A. & Jullien, S. (2006). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA). Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 21–53). Münster: Waxmann.

Pennington, N., Nicolich, R. & Rahm, I. (1995). Transfer of training between cognitive subskills: Is knowledge use specific? *Cognitive Psychology*, *28*, 175–224.

Pennington, N. & Rehder, R. (1995). Looking for Transfer and Interference. *Psychology of Learning and Motivation – Advances in Research and Theory*, *33*(100), 223–289.

Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*. Etudes d'épistémologie génétique. Presses universitaires de France.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. J. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 18–36.

Postel, H. (1981). Größen- oder Operatorkonzept in der Bruchrechnung? *Der Mathematikunterricht*, *27*(4), 16–46.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *mathematik lehren*, *123*, 10–13.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactical categories for analysing obstacles in conceptual change. Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*(1), 3–17.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 213–234). Weinheim, Basel: Beltz.

Prenzel, M. & Mandl, H. (1992). *Transfer of learning from a constructivist perspective*. Research report No. 6. München: Ludwig-Maximilians-Universität, Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie und Empirische Pädagogik.

Ramful, A. (2014). Reversible reasoning in fractional situations: Theoremes-in-action and constraints. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 119–130.

Rau, M. A. & Matthews, P. G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM Mathematics Education*, *49*(4), 531–544.

Reed, S. K. (1989). Constraints on the abstraction of solutions. *Journal of Educational Psychology*, *81*, 532–540.

Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Renkl, A. (1996). Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau*, *47*, 78–92.

Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. *Cognitive Science*, *21*(1), 1–29.

Renkl, A. (2005). The Worked-Out Examples Principle in Multimedia Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 229–245). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Renkl, A. (2017). Learning from worked-examples in mathematics: students relate procedures to principles. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 571–584.

Renkl, A., Atkinson, R. K., Maier, U. H. & Staley, R. (2002). From Example Study to Problem Solving: Smooth Transitions Help Learning. *The Journal of Experimental Education*, *70*(4), 293–315.

Renkl, A., Gruber, H., Weber, S., Lerche, T. & Schweizer, K. (2003). Cognitive Load beim Lernen aus Lösungsbeispielen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *17*(2), 93–101.

Renkl, A., Schworm, S. & vom Hofe, R. (2001). Lernen mit Lösungsbeispielen. *mathematik lehren*, *109*, 14–18.

Resnick, L. B. (1989). Introduction. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, Learning and Instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (S. 1–24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Richey, J. E. & Nokes-Malach, T. J. (2015). Comparing Four Instructional Techniques for Promoting Robust Knowledge. *Educational Psychology Review*, *27*, 181–218.

Richland, L. E., Zur, O. & Holyoak, K. J. (2007). Cognitive supports for analogies in the mathematics classroom. *Science*, *316*, 1128–1129.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 561–574.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 529–544.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2011). The power of comparison in learning and instruction: Learning outcomes supported by different types of comparisons. In J. P. Mestre & B. H. Ross (Hrsg.), *Psychology of learning and motivation: Cognition in education* (Bd. 55, S. 199–225). Waltham, MA: Elsevier.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context*. New York, NY: Oxford University Press.

Rogoff, B. (1991). The Joint Socialization of Development by Young Children and Adults. In M. Lewis & S. Feinman (Hrsg.), *Social Influences and Socialization in Infancy* (Bd. 6, S. 253–280). Genesis of Behavior. New York, NY.: Springer.

Rogoff, B. (1995). Observing sociocultural activity on three planes: participatory appropriation, guided participation, and apprenticeship. In J. V. Wertsch, P. del Rio & A. Alvarez (Hrsg.), *Sociocultural studies of mind* (S. 139–164). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Rogoff, B., Baker-Sennett, J., Lacasa, P. & Goldsmith, D. (1995). Development Through Participation in Sociocultural Activity. *New Directions for Child Development*, *67*, 45–65.

Ross, B. H. (1987). This is like that: The use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *13*, 629–639.

Ruppert, M. (2017). *Wege der Analogiebildung. Eine qualitative Studie über den Prozess der Analogiebildung beim Lösen von Aufgaben*. Münster: WTM.

Ruppert, M. (2020). Vormachen – Nachmachen?! Analogiebildung mithilfe gelöster Aufgabenbeispiele. *mathematik lehren*, *218*, 12–17.

Salden, R., Aleven, V., Renkl, A. & Schwonke, R. (2009). Worked examples and tutored problem solving: Redundant or synergistic forms of support? *Topics in Cognitive Science*, *1*, 203–213.

Salle, A. (2015). *Selbstgesteuertes Lernen mit neuen Medien. Arbeitsverhalten und Argumentationsprozesse beim Lernen mit interaktiven und animierten Lösungsbeispielen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Salle, A. & Frohn, D. (2020). Alternative Sinus- und Kosinusfunktionen. *mathematik lehren*, *218*, 27–32.

Salle, A. & vom Hofe, R. (2020). Graphisch in die Analysis. Transferprozesse bei der Entwicklung des Ableitungs- und Integralbegriffs. *mathematik lehren*, *218*, 39–43.

Salomon, G. & Perkins, D. N. (1989). Rocky Roads to Transfer: Rethinking Mechanisms of a Neglected Phenomenon. *Educational Psychologist*, *24*(2), 113–142.

Schaffrath, J. F. (1961). Gedanken zur Psychologie der Rechenfehler. *Schweizer Schule*, *48*, 15–20.

Scheiter, K. & Gerjets, P. (2006). When less is sometimes more: Optimal learning conditions are required for schema acquisition from multiple examples. In *In Proceedings of the 27th annual conference of the cognitive science society* (S. 1943–1948). Mahwah: Erlbaum.

Scheiter, K., Gerjets, P. & Schuh, J. (2010). The acquisition of problem-solving skills in mathematics: How animations can aid understanding of structural problem features and solution procedures. *Instructional Science*, *38*(5), 487–502.

Schink, A. (2013). *Flexibler Umgang mit Brüchen. Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schneider, W. & Shiffrin, R. M. (1977). Controlled and automatic human information processing: I. Detection, search and attention. *Psychological Review*, *84*(1), 1–66.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften*. Wiesbaden: Springer.

Schütte, M. (2009). *Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule*. Münster; New York; München; Berlin: Waxmann.

Schwartz, D. L., Chase, C. C. & Bransford, J. D. (2012). Resisting Overzealous Transfer: Coordinating Previously Successful Routines With Needs for New Learning. *Educational Psychologist*, *47*(3), 204–214.

Seiler, T. B. (1973). Die Bereichsspezifität formaler Denkstrukturen – Konsequenzen für den pädagogischen Prozeß. In K. Frey & M. Lang (Hrsg.), *Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht* (S. 249–285). Bern: Huber.

Seyfferth, S. (1975). Bruchrechnung und natürliche Sprache. *Der Mathematikunterricht*, *1*, 35–47.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematical Achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691–697.

Simon, H. A. (1974). How big is a chunk? *Science*, *183*, 482–488.

Singley, M. K. & Anderson, J. R. (1989). *The Transfer of Cognitive Skill*. London: Harvard University Press.

Stafyladou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503–518.

Stark, R. (1999). *Lernen mit Lösungsbeispielen: Einfluss unvollständiger Lösungsbeispiele auf Beispielelaboration, Lernerfolg und Motivation*. Göttingen: Hogrefe.

Steffe, L. & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer.

Steiner, G. (2006). Lernen und Wissenserwerb. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Anwendung Psychologie. Pädagogische Psychologie* (S. 137–201). Weinheim: Beltz.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst Science Publishers.

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Reasearch. Grounded Theory Procedures and Techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

Superfine, A. C., Canty, R. S. & Marshall, A. M. (2009). Translation between external representation systems in mathematics: All-or-none or skill comglomerate. *Journal of Mathematical Behavior*, *28*, 217–236.

Sweller, J. (1994). Cognitive Load Theory, Learning Difficulty, And Instructional Design. *Learning and Instruction*, *4*, 295–312.

Sweller, J. (2004). Instructional Design Consequences of an Analogy between Evolution by Natural Selection and Human Cognitive Architecture. *Instructional Science*, *32*, 9–31.

Sweller, J. (2005). Implications of Cognitive Load Theory for Multimedia Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 19–30). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sweller, J. & Cooper, G. A. (1985). The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *Cognition and Instruction*, *2*(1), 59–89.

Thibadeau, R. H., Just, M. A. & Carpenter, P. A. (1982). A model of time course and content in reading. *Cognitive Science*, *6*, 157–203.

Thorndike, E. L. (1906). *Principles of teaching*. New York: A.G. Seiler.

Thorndike, E. L. (1914). *Educational Psychology, Volume II: The Psychology of learning*. New York: Teacher's College.

Thorndike, E. L. & Woodworth, R. S. (1901a). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions, Part I. *The Psychological Review*, *8*, 246–261.

Thorndike, E. L. & Woodworth, R. S. (1901b). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions, Part II: The estimation of magnitudes. *The Psychological Review*, *8*, 384–395.

Thorndike, E. L. & Woodworth, R. S. (1901c). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions, Part III: Functions involving attention, observation and discrimination. *The Psychological Review*, *8*, 553–564.

Tiedemann, K. (2012). *Mathematik in der Familie. Zur familialen Unterstützung früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen*. Münster: Waxmann.

Tillmann, H., Künsting, J., Wirth, J. & Leutner, D. (2009). Is it Merely a Question of 'What' to Prompt or also 'When' to Prompt? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *23*(2), 105–115.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (2014). Intuition in Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 325–329). Dordrecht: Springer.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, M. & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5–13.

Tunc-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*, 419–441.

Tuomi-Gröhn, T. & Engeström, Y. (2003). Conceptualizing transfer: From standard notions to developmental perspectives. In T. Tuomi-Gröhn & Y. Engeström (Hrsg.), *Between School and Work: New Perspectives on Transfer and Boundary-crossing* (S. 19–38). Amsterdam: Pergamon Press.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344–355.

Van Hoof, J., Vanderwalle, J., Verschaffel, L. & Van Dooren,W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30–38.

Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren,W. (2015). Inappropriate applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number

bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39–56.
VanderStoep, S. W. & Seifert, C. M. (1993). Learning "how" versus learning "when": Improving transfer of problem-solving principles. *The Journal of the Learning Sciences*, *3*(1), 93–111.
Vaterrodt-Plünnecke, B. & Bredenkamp, J. (2006). Gedächtnis: Definitionen, Konzeptionen, Methoden. In J. Funke & P. A. Frensch (Hrsg.), *Handbuch der Allgemeinen Psychologie – Kognition* (S. 297–306). Göttingen: Hogrefe Verlag.
Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Hrsg.), *Number Concepts and Operations in the Middle Class* (S. 141–161). Reston: NCTM.
Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359.
Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim, Basel: Beltz.
Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *10*(1), 3–37.
Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik – Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 112–125). Friedrich Verlag.
vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(4), 345–364.
vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford UK: Spektrum Akademischer Verlag.
vom Hofe, R. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. *mathematik lehren*, *78*, 4–8.
vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(4), 257–291.
vom Hofe, R. (1999). Explorativer Umgang mit Funktionen – Interaktion und Kommunikation in selbstorganisierten Arbeitsphasen. Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *20*(2/3), 186–221.
vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, 4–8.
vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). Grundvorstellungen as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, Supplement 1*, 225–254.
vom Hofe, R. & Fast, V. (2015). Geometrische Darstellungen als Vorstellungsgrundlage für algebraische Operationen am Beispiel der negativen Zahlen. In A. Filler, A. Lambert & M. Ludwig (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 43–55). Heidelberg: Springer.
vom Hofe, R., Humpert, B., Griesel, H. & Postel, H. (2012a). *Mathematik heute 5*. Braunschweig: Bildungshaus Schulverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.
vom Hofe, R., Humpert, B., Griesel, H. & Postel, H. (2012b). *Mathematik heute 6*. Braunschweig: Bildungshaus Schulverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

vom Hofe, R., Humpert, B., Griesel, H. & Postel, H. (Hrsg.). (2015). *Mathematik heute 9*. Braunschweig: Bildungshaus Schulverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

Wagner, J. F. (2006). Transfer in Pieces. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 1–71.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim [u. a.]: Franzbecker.

Wartha, S. (2009). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs – Didaktische Analysen und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 55–79.

Wartha, S. & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(3/4), 256–280.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen* (1. Auflage). Lehrbücherei Grundschule. Berlin: Cornelsen.

Wartha, S. & vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *mathematik lehren*, *128*, 10–15.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 73–108). Weinheim, Basel: Beltz.

Weinert, F. E. (2002). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessung in Schulen* (2. Auflage, Kap. 1, S. 17–31). Weinheim, Basel: Beltz.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking (enlarged edition)*. New York: Harper & Brothers.

Whitacre, I., Atabas, S. & Findley, K. (2019). Exploring unfamiliar paths through familiar mathematical territory: Constraints and affordances in a preservide teacher's reasoning about fraction comparisons. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*(1), 148–163.

Whitehead, A. N. (1929). *The aims of education*. New York: Macmillan.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Zugriff unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf