Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51

Gerhard Heinzmann
Gereon Wolters *Editors*

Paul Lorenzen – Mathematician and Logician

OPEN ACCESS

Springer

Logic, Epistemology, and the Unity of Science

Volume 51

Logic, Epistemology, and the Unity of Science aims to reconsider the question of the unity of science in light of recent developments in logic. At present, no single logical, semantical or methodological framework dominates the philosophy of science. However, the editors of this series believe that formal frameworks, for example, constructive type theory, deontic logics, dialogical logics, epistemic logics, modal logics, and proof-theoretical semantics, have the potential to cast new light on basic issues in the discussion of the unity of science.

This series provides a venue where philosophers and logicians can apply specific systematic and historic insights to fundamental philosophical problems. While the series is open to a wide variety of perspectives, including the study and analysis of argumentation and the critical discussion of the relationship between logic and philosophy of science, the aim is to provide an integrated picture of the scientific enterprise in all its diversity.

This book series is indexed in SCOPUS.

For inquiries and submissions of proposals, authors can contact Christi Lue at christi.lue@springer.com

More information about this series at http://www.springer.com/series/6936

Gerhard Heinzmann · Gereon Wolters
Editors

Paul Lorenzen – Mathematician and Logician

Springer

Editors

Gerhard Heinzmann
Archives Henri-Poincaré (UMR 7117)
Université de Lorraine/Université de Strasbourg/CNRS
Nancy, France

Gereon Wolters
Fachbereich Philosophie
Universitat Konstanz
Konstanz, Baden-Württemberg, Germany

ISSN 2214-9775 ISSN 2214-9783 (electronic)
Logic, Epistemology, and the Unity of Science
ISBN 978-3-030-65823-6 ISBN 978-3-030-65824-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3

This Springer imprint is published by the registered company Springer Nature Switzerland AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

For Dr. Brigitte Parakenings,
Archivist of the Philosophical Archive
at the University of Konstanz (1991–2019),
in gratitude for her dedicated work

Preface

This volume assembles contributions presented at the workshop “Paul Lorenzen: Mathematician and Logician” (8–9 March 2018) at the University of Konstanz. It was organized by the Philosophical Archive of this university, which holds the papers of Lorenzen.

Paul Lorenzen (1915–1994) was an outstanding philosopher of the latter half of the twentieth century. His name is associated with the Erlangen School of Methodical Constructivism, whose approach in linguistic philosophy and philosophy of science determined philosophical discussions especially in Germany in the 1960s and 1970s.

At that time, Lorenzen already had an international reputation as a brilliant mind in mathematics and logic. Focussing at first on abstract algebra, Lorenzen later turned his attention to foundational issues in logic and mathematics. His studies in this field are still highly regarded today and finally led to his concept of operative logic and mathematics, which in turn were the base for his philosophy later on.

The contributions in this volume focus on integrating Lorenzen’s original approach into the history of logic and mathematics. Furthermore, they explore the options of how Lorenzen’s systematical ideas can be implemented in today’s debates on the philosophy of mathematics and proof-theoretic semantics. The volume opens with memories of Kuno Lorenz, Paul Lorenzen’s first student.

The editors would like to thank Brigitte Parakenings (former Archivist of the Philosophical Archive) for her careful organization of the conference and Christopher von Bülow for his splendid editing of the contributions. We are also very grateful to Paul Lorenzen-Stiftung for their generous financial support for both the workshop and the production of this volume.

Nancy, France — Gerhard Heinzmann
Konstanz, Germany — Gereon Wolters
May 2020

Contents

List of Contributors

Carolin Antos
Department of Philosophy, University of Konstanz, Universitätsstr. 10, DE-78464 Konstanz, Germany, e-mail: carolin.antos-kuby@uni-konstanz.de

Thierry Coquand
Computer Science and Engineering Department, University of Gothenburg, Vasaparken, SE-405 30 Göteborg, Sweden, e-mail: thierry.coquand@cse.gu.se

Christian Fermüller
Department of Computer Science, Institute for Logic and Computation, TU Wien, Favoritenstr. 9–11, AT-1040 Wien, Austria, e-mail: chrisf@logic.at

Gerhard Heinzmann
Archives Henri-Poincaré (UMR 7117), Université de Lorraine/Université de Strasbourg, CNRS-PReST, 1 av. De la Libération, FR-54001 Nancy CEDEX, France, e-mail: gerhard.heinzmann@univ-lorraine.fr

Reinhard Kahle
Theorie und Geschichte der Wissenschaften, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Keplerstr. 2, D-72074 Tübingen, Germany, and Center for Mathematics and Applications, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, P-2829-516 Caparica, Portugal, e-mail: kahle@mat.uc.pt

Henri Lombardi
Laboratoire de mathématiques de Besançon (UMR 6623), Université Bourgogne Franche-Comté, CNRS, 16 route de Gray, FR-25030 Besançon CEDEX, France, e-mail: henri.lombardi@univ-fcomte.fr

Kuno Lorenz
Philosophical Institute, Saarland University, Campus, DE-66123 Saarbrücken, Germany, e-mail: klorenz@mx.uni-saarland.de

Stefan Neuwirth
Laboratoire de mathématiques de Besançon (UMR 6623), Université Bourgogne Franche-Comté, CNRS, 16 route de Gray, FR-25030 Besançon CEDEX, France, e-mail: stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr

Isabel Oitavem
Department of Mathematics and Center for Mathematics and Applications, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, P-2829-516 Caparica, Portugal, e-mail: oitavem@fct.unl.pt

Peter Schuster
Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona, Strada le Grazie 15, IT-37134 Verona, Italy, e-mail: peter.schuster@univr.it

Daniel Wessel
Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona, Strada le Grazie 15, IT-37134 Verona, Italy, e-mail: daniel.wessel@univr.it

Gereon Wolters
Department of Philosophy, University of Konstanz, Universitätsstr. 10, DE-78464 Konstanz, Germany, e-mail: gereon.wolters@uni-konstanz.de

Paul Lorenzens Weg von der Mathematik zur Philosophie – Persönliche Erinnerungen

Kuno Lorenz

Es gibt mittlerweile schon zahlreiche, auf gründlichen Recherchen und großenteils auch auf persönlichen Begegnungen beruhende Arbeiten zu den Stadien im Lebensweg Paul Lorenzens.[1] Ergänzend dazu möchte ich im Folgenden einige unsystematische persönliche Erinnerungen vortragen, die vielleicht noch mehr Licht auf den in seiner Person verkörperten besonderen Zusammenhang von Mathematik und Philosophie werfen.

Ich hatte mein Studium in den Fächern Mathematik und Physik in Tübingen begonnen (SS 1951 – WS 1952/53) und zum Ende des Wintersemesters 1953/54 an der Universität Hamburg den ersten Studienabschnitt mit dem Vordiplom in beiden Fächern (theoretische Mathematik bei Helmut Hasse und praktische Mathematik bei Lothar Collatz) abgeschlossen. Nach dieser von einer Studienunterbrechung begleiteten Zäsur schrieb ich mich mit denselben Fächern zum WS 1954/55 an der Universität Bonn ein. Was war der Grund? Ein Ferienkurs im Oktober 1954 in Villigst bei Schwerte/Ruhr (heute Ortsteil von Schwerte), dem Sitz des Evangelischen Studienwerks.

Ich hatte mein Abitur 1950 in der DDR abgelegt und verdankte ›Villigst‹ die Förderung meines Studiums in der BRD durch ein Stipendium und andere Angebote, zu denen auch Ferienkurse gehörten. Der Kurs, um den es hier ging, war von einem schon fortgeschritteneren Villigster Studenten der Mathematik vorbereitet worden, und ich wurde darauf im Vorfeld aufmerksam. Das Thema: die von Paul Lorenzen an der Universität Bonn in dieser Zeit neu entwickelte operative Logik im Zusammenhang einer grundsätzlich auf den Strichkalkül des Zählens gegründeten operativen Arithmetik.

Kuno Lorenz
Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Deutschland, E-mail: klorenz@mx.uni-saarland.de

[1] Vgl. stellvertretend für viele weitere: C. Thiel, „Paul Lorenzen (1915–1994)“, *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie* 27 (1996), 1–13; sowie ders., „Paul Lorenzen“, in: *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* (ed. J. Mittelstraß), Band 5, Stuttgart/Weimar: J. B. Metzler, ²2013, 112–115.

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_1

Lorenzen hatte zugesagt, diesen Kurs selbst zu leiten. Ich meldete mich an und begegnete ihm dort zum ersten Mal.

Im Vergleich mit der Art, wie ich zuvor mit einigen mathematischen Gebieten in Vorlesungen und Übungen vertraut gemacht worden war, wurde mir schon damals in Villigst deutlich, daß Lorenzen uns, die Teilnehmer des Ferienkurses, mit einem für uns neuen Denken über mathematische Gegenstände zu konfrontieren suchte. Nicht um Versuche, etwas schon Bereitliegendes zu entdecken, das es anschließend durch Beweise in seiner Existenz unter einer Beschreibung zu sichern gelte, sollte es gehen. Vielmehr handelte es sich darum, diese mathematischen Gegenstände allererst zu konstruieren, um dann daraus die für sie eigentümlichen Eigenschaften zu ermitteln. Aber natürlich standen keine handwerklichen Konstruktionen zur Debatte, sondern gedankliche, allein durch symbolische Zeichen vermittelte; es ging nicht um reale Konstruktionen, sondern um ideale. Viel später erst begriff ich, daß mit Lorenzen verfahrensbezogen ein moderner Platon hinter dem Vorlesungspult stand und kein moderner Aristoteles.

Die Entscheidung, an der Universität Bonn das Studium fortzusetzen, um insbesondere bei Lorenzen zu lernen, war gefallen. Damals wußte ich manches noch nicht, z. B. daß Lorenzen 1939 – nach der im Jahr zuvor abgelegten Promotion bei Helmut Hasse in Göttingen – als Wissenschaftlicher Assistent bei Wolfgang Krull in Bonn seine Hochschullaufbahn begonnen hatte. Oder daß nach der kriegsbedingt verspäteten Habilitation für Mathematik 1946 in Bonn seine im Jahr 1952 erfolgte Ernennung zum außerplanmäßigen Professor die Kennzeichnung ‚für Mathematik und Geschichte der Mathematik' trug. Ich wußte auch nicht, daß die Habilitationsschrift ‚Über halbgeordnete Gruppen' ihm schon 1948/49, nur dreieinhalb Jahre nach Kriegsende, eine Gastdozentur an der Universität in Cambridge eingetragen hatte. Diese Einladung war auch eine Antwort auf die große internationale Anerkennung gewesen, die sich Lorenzen mit dem 1951 vorgelegten Beweis der Widerspruchsfreiheit der verzweigten Typenlogik in den *Principia Mathematica* von Alfred North Whitehead und Bertrand Russell erworben hatte. Dieser Beweis beruhte auf der Verwendung der in der Habilitationsschrift erstmals eingesetzten Halbformalismen als entscheidendem Beweismittel. Mit dem derart öffentlich dokumentierten Schritt heraus aus der bloß innerfachlichen mathematischen Arbeit hin zu einer die Grundlagen der Mathematik sowohl systematisch als auch historisch ausdrücklich thematisierenden Forschung wurde der erste Schritt Lorenzens auf dem Wege von der Mathematik zur Philosophie sichtbar. Wichtig sind in diesem Zusammenhang die bedeutenden Arbeiten zur antiken griechischen Mathematik des ebenfalls an der Universität Bonn tätigen Phänomenologen Oskar Becker. Ihnen galt Lorenzens andauerndes, von intensivem Gedankenaustausch begleitetes wissenschaftliches Interesse.

Diese Zusammenhänge waren dem Studenten der Mathematik im zweiten Studienabschnitt, der ich zu Beginn des WS 1954/55 gewesen war, noch verborgen geblieben. Sie kamen auch nicht zur Sprache, als unter der Leitung von Lorenzen in einem Hauptseminar, an dem ich teilnahm, die zentralen Ideen der *Principia Mathematica* erarbeitet werden sollten. Allein das Projekt eines operativen Aufbaus von Arithmetik und Logik faszinierte mich. Es war in der damals gerade im Druck befindlichen Monographie *Einführung in die operative Logik und Mathematik* von Lorenzen vorgestellt und ein erhebliches Stück weit ausgeführt worden. Diese Faszination galt auch der in einer Vorlesung angebotenen Version einer Einführung in die Differentialgeometrie mit den Mitteln von Tullio Levi-Civitas Tensordarstellung, von der ich eine von Lorenzen durchgesehene und damit approbierte Vorlesungsnachschrift erstellt habe. Doch erst mit der für die Zulassung zum Staatsexamen im WS 1956/57 bei Krull angefertigten Arbeit „Über Strukturverbände von Verbandsgruppen" begab ich mich auf ein einst von Lorenzen betretenes Gebiet, um bei der Einarbeitung in dieses Gebiet zu erfahren, daß es Lorenzen gewesen war, der dort bereits wichtige Wege gebahnt hatte.

Aber noch etwas anderes ereignete sich gleich zu Beginn des WS 1954/55 in Bonn, dessen Bedeutung erst im Laufe der Jahre sichtbar wurde: die Begegnung von Lorenzen mit dem um fast genau zehn Jahre älteren philosophischen Kollegen Wilhelm Kamlah. Kamlah hielt einen auch von mir besuchten Gastvortrag über das Thema „Was ist Wahrheit?" Zwar gehörte ich nicht zu den Zeugen des vermutlich ersten philosophischen Gesprächs zwischen den beiden Männern – ich weiß nicht einmal, ob es solche Zeugen überhaupt gegeben hat –, wohl aber läßt die nachfolgende Entwicklung einer Übereinstimmung des Interesses an einer grundsätzlichen, von Komplementarität geprägten Gemeinsamkeit bei der Neubestimmung philosophischer Arbeit diese erste Begegnung als folgenreich für den Weg Lorenzens von der Mathematik zur Philosophie erscheinen.

Es ist die Grundverschiedenheit des wissenschaftlichen Hintergrundes bei Kamlah und Lorenzen, der Theologie mit ihrem Methodenschwerpunkt (linguistischer) Hermeneutik bei Kamlah und der Mathematik mit ihrem Methodenschwerpunkt (logischer) Grammatik bei Lorenzen, die zu einer besonderen Herausforderung für die künftige philosophische Arbeit beider Gelehrter werden wird.

Zunächst jedoch erging an Lorenzen der Ruf auf einen Lehrstuhl für Philosophie an der Universität Kiel (1956), den er annahm. Diese institutionelle Wende zur Philosophie wurde für ihn, nach seiner von Kamlah betriebenen Berufung nach Erlangen (1962), zum Sprungbrett für den Aufbau des unter der Bezeichnung „Erlanger Schule" bekannt gewordenen Zentrums für konstruktive Philosophie und Wissenschaftstheorie. Damit wiederholt sich auf eigentümliche Weise im Abstand etwa einer Generation die Rolle eines philosophischen Lehrstuhls der Universität Kiel als Sprungbrett für den Aufbau einer besonderen logisch-philosophischen Schule an einer anderen Universität Deutschlands. Ich denke dabei an Heinrich Scholz (1884–1956), der von einem theologischen Lehrstuhl für Religionsphilosophie und systematische Theologie an der Universität Breslau auf einen philosophischen Lehrstuhl an der Universität Kiel berufen worden war (1921), um schließlich binnen weniger Jahre im Zuge eines Rufs an die Universität Münster in Westfalen dort das erste deutsche Zentrum für Mathematische Logik und Grundlagenforschung aufzubauen (1928). Der Rolle von Platon als Vorbild für die paradigmatisch zu verstehende wissenschaftstheoretische Arbeit von Lorenzen im Rahmen der Erlanger Schule korrespondiert die Rolle von Aristoteles als Vorbild für die kumulativ zu verstehende formallogische Arbeit von Scholz im Rahmen des Zentrums für logische Grundlagenforschung.

Schon im ersten Kieler Jahr erreichte Lorenzen die ehrenvolle Einladung, für ein Studienjahr (1957/58) als *Visiting Member* nach Princeton (New Jersey) an das Institute for Advanced Study zu kommen. Ich wiederum hatte 1957 mein Staatsexamen in den Fächern Mathematik und Physik an der Universität Bonn abgelegt und mich zugleich erfolgreich um ein DAAD-Stipendium für das Studienjahr 1957/58 an der Universität Princeton beworben, wobei ich die Zulassung als *Visiting Fellow* am Graduate College für das Department of Mathematics ebendort bereits vorher bekommen hatte. Mein Ziel war, neben meinem Interesse an gründlicher Weiterbildung auf dem Feld der abstrakten Algebra, insbesondere bei Emil Artin, vor allem einem intensiven Studium der mathematischen Logik bei Alonzo Church nachzugehen. Ich konnte also zur selben Zeit in Princeton arbeiten wie Lorenzen und hatte dank eines Fulbright Travel Grant sogar das Glück, auf demselben Schiff wie er im Frühherbst 1957 nach den USA überzusetzen.

Während einiger Gespräche, die ich mit Lorenzen über Probleme konstruktiver Beweisführungen dort, wo sonst der Wohlordnungssatz oder das mit ihm grundsätzlich gleichwertige Zornsche Lemma in Anspruch genommen wird, führen konnte, festigte sich mein Entschluß, nach dem Ende des Studienjahres in Princeton zu ihm nach Kiel zu gehen, um an einer Dissertation über Konstruktivitätsprobleme in der Idealtheorie zu arbeiten. Lorenzen hatte im übrigen schon angefangen, in Zusammenarbeit mit John Myhill einen Aufsatz zu verfassen, mit dem sich das mögliche Zusammenspiel von axiomatischer und konstruktiver Methode sinnfällig demonstrieren ließ.[2] Der möglichen Alternative, zu versuchen, unter der Supervision von Artin an einer Dissertation im Anschluß an meine Staatsexamensarbeit über Verbandsgruppen zu arbeiten, ließ sich damals nicht weiter nachgehen, weil Artin gerade einen Ruf von Princeton zurück an die Universität Hamburg erhalten hatte, dem er dann auch gefolgt war. Dieser Ruf gehört zu den selten gebliebenen Akten versuchter ›Wiedergutmachung‹ für die gleich nach dem Beginn der Naziherrschaft in Deutschland beginnende Entrechtung der Juden, zunächst ›bloß‹ durch Entfernung aus dem Staatsdienst, wie im Falle Artins.

In einem der genannten Gespräche mit Lorenzen berichtete er auch von einer während eines internationalen Kolloquiums zur axiomatischen Methode am Jahresende 1957/58 in Berkeley[3] geführten intensiven Ausein-

---

[2] P. Lorenzen & J. Myhill, „Constructive Definition of Certain Analytic Sets of Numbers", *Journal of Symbolic Logic* 24 (1959), 37–49.

[3] Vgl. L. Henkin/P. Suppes/A. Tarski (eds.), *The Axiomatic Method with Special Reference*

andersetzung mit Alfred Tarski über den Begriff der Definitheit prädikativer Ausdrücke, der in Lorenzens damals vieldiskutierter *Einführung in die operative Logik und Mathematik* eine Schlüsselrolle spielt. Lorenzen ließ sich davon überzeugen, daß dieser der Absicht nach im Vergleich zum Begriff der Entscheidbarkeit logisch schwächere Begriff der Definitheit seinerseits nicht in dem Sinne einwandfrei definiert ist, daß eine Kontrollmöglichkeit existierte, ob eine behauptete Definitheit einer Begriffsbildung tatsächlich vorliegt oder nicht. Genau diese Lücke weist auch der allein auf dem Nachweis der Eliminierbarkeit von Regelanwendungen fußende Grundbegriff der Zulässigkeit von Kalkülregeln auf, wenn, wie in der operativen Logik notwendig, den strengen Begriff eines Kalküls sprengende Metakalküle, noch dazu beliebiger Stufe, in Betracht gezogen werden müssen. Irgendwelche sinnvollen Vollständigkeitsbeweise lassen sich deshalb für die operative Logik nicht führen.

Damit wurde Lorenzen für seinen nächsten Schritt auf dem Weg von der Mathematik zur Philosophie bestärkt: einer Verankerung mathematischer Begriffsbildungen in der anthropologischen Fähigkeit zur Vernunft durch von ihr geleitete Auseinandersetzungen, also Dialoge. Definitheit soll durch Dialogdefinitheit präzisiert werden. Aussagen, besonders sinnfällig in der Mathematik, werden nicht mehr für durch Wahr- oder Falschsein charakterisiert gehalten, und auch nicht durch Beweis- oder Widerlegbarkeit; vielmehr sollen sie dadurch charakterisiert sein, daß sich um sie eine strukturell präzisierte Auseinandersetzung, d.h. ein Dialog, führen läßt. All das wurde mir erst viel später bewußt, während meiner eigenen, unter seiner Betreuung stehenden Arbeit an einem spieltheoretischen Zugang zur formalen Logik. Schon im September 1958 wird Lorenzen in seinem Beitrag „Logik und Agon“ auf einem Philosophie-Kongreß in Venedig diesen Schritt öffentlich machen.[4]

Ebenfalls 1958, im Frühjahr, noch vor der Rückkehr nach Kiel, waren Lorenzen – und ich mit ihm – zu einer Arbeitstagung bei Haskell B. Curry am Department of Mathematics der Pennsylvania State University in State College eingeladen, während der es unter anderem um die Differenz zwischen einem axiomatischen und einem konstruktiven Aufbau mathematischer Theorien, bei Curry einer ›théorie des obs‹, ging.[5] So ließ sich noch einmal deutlich machen, welch wichtige Rolle der Unterschied zwischen einem ontologischen und einem pragmatistischen Verständnis mathematischer Theoriebildung spielt, wenn es den vermeintlichen Gegensatz von axiomatischem und konstruktivem Vorgehen aufzulösen gilt. Das blieb auch der Hintergrund für die zentrale Fragestellung bei der Behandlung des

---

to Geometry and Physics: Proceedings of an International Symposium Held at the University of California, Berkeley, Dec. 26, 1957 – Jan. 4, 1958, Amsterdam 1959.

4 In den *Atti del* XII *Congresso Internazionale di Filosofia (Venezia, 12–18 Settembre 1958)* IV (Logica, linguaggio e communicazione), Florenz 1960, 187–194.

5 Vgl. H. B. Curry, *Leçons de logique algébrique*, Paris 1952 – „obs“ steht für „unspecified objects“.

1960 erschienenen Buches *Word and Object* von Willard Van Orman Quine in einem Oberseminar in Kiel. Lorenzen hatte bereits in einem Gespräch mit Quine in Harvard noch im Jahr 1958 von der bevorstehenden Publikation erfahren und sich für das geplante Oberseminar in Kiel entsprechend gut vorbereiten können. In ihm sollte geklärt werden, welchen Sinn es haben kann, sich beim Aufbau einer Wissenschaftssprache auf die traditionelle Alternative einzulassen, es sei entweder ›die Welt‹ – man ergänze: des Geistes oder der Natur – oder der sie erforschende Mensch, die das Vorgehen bestimmten.

Schon bald nach den im WS 1958/59 begonnenen Vorbereitungen zu meiner geplanten Dissertation stellte sich heraus, daß die logischen Grundlagen zur Behandlung von Konstruktivitätsproblemen in der Mathematik gerade dort, wo keine Beschränkung auf allgemeinrekursive Mathematik beabsichtigt ist, noch nicht standsicher sind. Das lag vor allem daran, daß der zunächst noch weitgehend anschaulich durch Angreifbarkeit seitens eines Opponenten und Verteidigbarkeit seitens eines Proponenten erläuterte Begriff der Dialogdefinitheit einer Aussage noch einer genauen begrifflichen Bestimmung entbehrte. Die Idee eines nach präzisen Regeln ablaufenden Dialogspiels um eine Aussage, einer Folge von Angriffen gegen sie und Verteidigungen von Aussagen auf solche Angriffe, als Grundlage für eine Ermittlung ihrer Geltung (definiert als Existenz einer Gewinnstrategie für den Proponenten) bedurfte noch einer zuverlässigen Realisierung. Dabei standen zunächst ausschließlich logisch zusammengesetzte und nicht logisch einfache Aussagen, und damit die Rolle der Logik innerhalb der Mathematik, im Fokus. Ich ließ daher nach der Rückkehr von einer mit Lorenzen und seinem mathematischen Kollegen Friedrich Bachmann gemeinsam unternommenen Fahrt nach Budapest zum 2. Ungarischen Mathematiker-Kongreß (*Második Magyar Matematikai Kongresszus*, 24.–31. August 1960) meinen ursprünglichen Dissertationsplan fallen und entschloß mich, im Einverständnis mit Lorenzen, nach einem spieltheoretischen Fundament von Logikkalkülen und damit zugleich von der als methodisch für nicht hinreichend fundiert erkannten operativen Logik zu suchen. Darüber hinaus stellte sich heraus, daß so auch die Fessel einer Anwendbarkeit auf nur aus Ableitbarkeitsaussagen logisch zusammengesetzte Aussagen, wie sie bei der operativen Logik der Fall ist, gesprengt werden konnte. Es ging um den Begriff der Wahrheit in voller Allgemeinheit und damit um den Begriff einer Aussage im allgemeinen, natürlich unter Einschluß des Wahrheitsbegriffs in den Wissenschaften; es waren nicht nur die Mathematik, und über sie hinaus die Logik als bloßes Werkzeug für diese, betroffen.

Damit war Lorenzen den ganzen Weg von der Mathematik zur Philosophie gegangen, auch wenn diese zunächst nur in Gestalt konstruktiver Wissenschaftstheorie unter Einschluß der Geschichte wissenschaftlichen Denkens konzipiert schien und die normativen Aspekte der Wissenschaften ebenso wie die der Ethik und der Politik erst Jahre später ebenfalls ins

Zentrum von Lorenzens wissenschaftlicher Tätigkeit rückten.[6] Gleichwohl gehörte zu den Zeichen für die Dringlichkeit kritischer Reflexion auf die Zusammengehörigkeit von wissenschaftlich fundierter Weltauffassung und vernünftig orientierter Lebensführung – so jedenfalls sehe ich es heute – schon die damals, 1961, vom Promotionsausschuß an mich gestellte Frage, ob ich, als erster Promovend Lorenzens, einen Dr. phil. oder einen Dr. rer. nat. zu tragen wünsche. Das seit der Antike nie verlorengegangene Wissen um die Zugehörigkeit der Logik sowohl zur Philosophie als auch zu den Wissenschaften, und unter diesen besonders den exakten Wissenschaften, hatte eine zeitgemäße Gestalt gefunden.

Zum SS 1962 begann Lorenzens Lehr- und Forschungstätigkeit an der Universität Erlangen, geprägt von der Kooperation mit seinem Kollegen Kamlah – zu den sichtbaren Zeichen dafür gehörte das legendäre stets von beiden gemeinsam geplante und geleitete Oberseminar –, und ich konnte ihm als sein Wissenschaftlicher Assistent, von dem er stetige Arbeit an einer Habilitationsschrift erwartete, folgen.[7] Dabei entwickelte sich schnell eine ganz ähnlich auf Komplementarität des akademischen Hintergrundes gegründete ›dialogische‹ Zusammenarbeit von Jürgen Mittelstraß, damals Wissenschaftlicher Assistent von Kamlah, und mir. In den Folgejahren bis zu unserer beinahe gleichzeitig erfolgten Habilitation im WS 1968/69 führte sie nicht nur zu einer Reihe gemeinsam geschriebener Aufsätze,[8] sondern dauert bis heute an, vor allem in Gestalt meiner Beteiligung an dem von Mittelstraß initiierten Langzeitprojekt einer *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, die seit Ende 2018 in einer zweiten, gründlich überarbeiteten und erweiterten Auflage abgeschlossen vorliegt.

Bis zu meiner Berufung auf einen philosophischen Lehrstuhl an der Universität Hamburg 1970 gab es in Erlangen unter meiner Beteiligung eine Fülle von Unternehmungen Lorenzens mit dem Ziel, ein breiteres Verständnis für die Vorgehensweisen konstruktiver Logik und Wissenschaftstheorie als Formen wissenschaftlich sich äußernder Vernunft zu erreichen. Einige davon aus dem Jahr 1964 möchte ich herausgreifen. Sie lassen das immer weiter ausgreifende, von fachlichen Grenzen unbeeindruckte Interesse Lorenzens an einem dialogisch kontrollierten Denken besonders deutlich hervortreten.

---

6 Dokumentiert u.a. durch den in Kiel entstandenen Band *Die Entstehung der exakten Wissenschaften* (Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960); hingegen erst 1967/68 in den in Oxford gehaltenen John Locke Lectures – veröffentlicht unter dem Titel *Normative Logic and Ethics* (Mannheim/Zürich 1969) – die auch öffentlich sichtbar gewordene Konzentration auf Art und Rolle normativer Fragestellungen.

7 Zu den erstmals einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich gemachten Ergebnissen gehört die von Lorenzen und Kamlah in mehrjährigen Diskussionen und Gesprächen mit Studierenden und Assistenten erarbeitete und von beiden gemeinsam verfaßte, mittlerweile als Gründungsschrift der ›Erlanger Schule‹ geltende *Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens* (Mannheim 1967).

8 Einige dieser Aufsätze sind mittlerweile zugänglich in: K. Lorenz, *Philosophische Variationen: Gesammelte Aufsätze unter Einschluß gemeinsam mit Jürgen Mittelstraß geschriebener Arbeiten zu Platon und Leibniz*, Berlin/New York 2011.

Da sind zum einen die von der Deutschen Vereinigung für Mathematische Logik und Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften – damals unter dem Vorsitz von Hans Hermes (Münster/Westf.) und Arnold Schmidt (Marburg) – organisierten Kolloquien in Oberwolfach. Am ersten dieser Kolloquien (14. 4. – 17. 4. 1964), zu dem auch ich eingeladen war, trug Lorenzen im Kontext seiner Arbeit an der Monographie *Differential und Integral* (Frankfurt/M. 1965) zum Thema „Konstruktive Grundlagen der klassischen Analysis“ vor. Zum anderen fand gleich anschließend (19. 4. – 22. 4. 1964) ein von Lorenzen initiiertes und von ihm geleitetes Kolloquium über Philosophie, Logik und Mathematik in Gestalt einer von der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Stipendiaten und andere jüngere Wissenschaftler organisierten Veranstaltung im Waldhotel Glashütten/Taunus statt. Im Spätsommer schließlich reisten Lorenzen und ich gemeinsam zum International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science nach Jerusalem (26. 8. – 2. 9. 1964). Zwischenlandung in Athen, dort Besuch der Akropolis, auf der Agora mit einem imaginierten Zeitsprung ins Athen Platons, und Lorenzen bereit zu einer Rede, Platon zu ehren – ein unvergeßlicher Moment. Der für die Kongreßplanung in Israel verantwortliche Kollege Yehoshua Bar-Hillel hatte Lorenzen eingeladen, die Leitung einer Sektion zu übernehmen, in der es um einen Disput gehen sollte: Axiomatisches versus konstruktives Vorgehen in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen. Als Kontrahenten hatte Lorenzen Abraham Robinson als Verteidiger axiomatischen Vorgehens und Friedrich Kambartel als Verteidiger konstruktiven Vorgehens gewinnen können. Die Teilnehmer wurden Zeugen eines modernen Paradigmas für vernünftige philosophische Auseinandersetzung.[9]

In meiner Einleitung zur Festschrift anläßlich des 60. Geburtstages von Paul Lorenzen am 24. März 1975 habe ich den damaligen Stand dieses Typs von Auseinandersetzungen auf der Seite der Verteidiger konstruktiven Vorgehens mit Worten zusammengefaßt, die ich noch immer für im wesentlichen zutreffend halte: „Die Zurückführung des theoretischen Geltungsproblems (die Frage nach dem ›Sein‹ *und* dem ›Sollen‹) auf technisches Können und praktisches Wollen ist für die Behandlung wissenschaftstheoretischer Fragestellungen in der konstruktiven Wissenschaftstheorie charakteristisch und verweist damit zugleich auf die große Nähe zum Pragmatismus in der ursprünglichen, an Kant und dem Common-Sensism orientierten Fassung bei C. S. Peirce.“[10]

[9] Vgl. Y. Bar-Hillel (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1964 International Congress (Held at the Hebrew University of Jerusalem, Aug. 26–Sept. 2, under the Joint Auspices of the Division of Logic, Methodology and Philosophy of Science of the International Union of History and Philosophy of Science)*, Amsterdam 1965.

[10] K. Lorenz (ed.), *Konstruktionen versus Positionen: Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie* I–II, Berlin/New York 1979, p. XIV.

Operation and Predicativity: Lorenzen's Approach to Arithmetic

Gerhard Heinzmann

Abstract In this article we give an overview, from a philosophical point of view, of Lorenzen's construction of the natural and the real numbers. Particular emphasis is placed on Lorenzen's classification in the tradition of predicative approaches that stretches from Poincaré to Feferman.

1 Introduction

German philosophy of science (*Wissenschaftstheorie*) in the second half of the 20th century was dominated by two outstanding personalities: Paul Lorenzen and Wolfgang Stegmüller. Both are witnesses to a common yet very differently interpreted heritage of logical empiricism: Stegmüller situates the project of a formal semantics in the tradition following Carnap; Lorenzen "takes over" only the insight to understand philosophy of science as the theory of the language of science, and develops a constructive philosophy characterized by a phenomenological-operative approach to mathematics (cf. Gethmann 1991 and Thiel 2014): "Constructive philosophy is phenomenology after the linguistic turn" (Gethmann and Siegwart 1994, 228).

In 1962, Lorenzen joined his friend Wilhelm Kamlah at the University of Erlangen, and together they wrote the textbook *Logische Propädeutik: Eine Vorschule des vernünftigen Denkens* ("Logical propaedeutic: A pre-school of reasonable thinking"; 1967), which became a kind of manifesto of the "Erlangen School" (cf. Mittelstraß 2008; 2016). The first members of this school were Kuno Lorenz, Jürgen Mittelstraß, Christian Thiel, Peter Janich, Hans-Jürgen Schneider, Friedrich Kambartel and Carl Friedrich Gethmann.

Gerhard Heinzmann
Archives Henri-Poincaré (UMR 7117), Université de Lorraine/Université de Strasbourg, CNRS-PReST, F–54000 Nancy, France, e-mail: gerhard.heinzmann@univ-lorraine.fr

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_2

The monumental *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, published by Mittelstraß, is an application of the "Erlangen Program", originally developed in logic and mathematics, to all areas of philosophy and philosophy of science.

The operative mathematics of Paul Lorenzen is an attempt to understand and "rescue" the results of classical mathematics by using a predicative approach.[1] Thanks to the distinction between "definite" and "indefinite" concept formation, the classical results – except those requiring large cardinals – can be conserved without substantial modification (see Lorenzen 1965, 4).

Shortly before his death, Hermann Weyl praised Lorenzen's famous *Einführung in die operative Logik und Mathematik* ("Introduction to operative logic and mathematics"; 1955a), and in turn Lorenzen dedicated to Weyl his work *Differential und Integral* (Lorenzen 1965). Weyl (1985, 38) not only affirmed that his "heart draws onto the side of constructivism", but he also noted that Lorenzen's book 1955a is a big step forward and the best way to understand mathematics:

> Today it seems to me that Paul Lorenzen's operative approach opens the most viable way out of the difficulties. ... The operations of the formal calculus are here intertwined in a fruitful and unconstrained way with substantive considerations about their products; Gödel's discovery loses everything that disturbs us. (Weyl 1968, 180)

Lorenzen was one of the first to explicitly develop predicative analysis as an extension of Weyl's 1918 approach. In fact, Weyl introduced a narrower iteration method (Weyl 1918, 21, 23), according to which he refrained from quantifying over set variables in the definition of sets of natural numbers, limiting the range of variability to natural numbers, and only accepted "objects" introduced by definition, so that he obtained as results predicative sets *modulo* natural numbers. From this it follows that the definition of a supremum (or "least upper bound", l. u. b.) in the real numbers $\mathbb{R}$ is circular (not predicative) and the completeness assertion for $\mathbb{R}$, that every non-empty but bounded set of real numbers has an l. u. b., is not valid, and therefore the theory revisionist.[2] To get the completeness of $\mathbb{R}$ in Weyl's approach, one must define the bounds not in terms of sets but in terms of sequences of real numbers.[3]

The idea of the general approach of Lorenzen's operative mathematics is far less known than the dialogical logic developed by Lorenzen and Kuno

---

[1] A definition is called "predicative" if, in the *definiens*, the *definiendum* does not occur and no reference is made to it; otherwise it is impredicative.

[2] In other words, it deviates from a majority practice.

[3] "We say that a sequence S_n of real numbers is given if we have a set T such that for each n, $x \in S_n \leftrightarrow \langle x, n \rangle \in T$. Then the l. u. b. of the S_n, which we identified earlier with $\bigcup S_n [n \in \omega]$, is defined arithmetically in terms of T by $\forall y (\langle x, y \rangle \in T)$" (Feferman 1964, 7).

Lorenz.[4] Not only influenced by Weyl, but also by Hugo Dingler (1913; 1931)[5] and Haskell B. Curry (1951),[6] Lorenzen devoted himself primarily to the reconstruction of analysis, while the application to geometry found a much lesser impact.[7]

2 The main philosophical considerations

The starting point of Lorenzen's philosophical idea can be found in his introduction to *Differential und Integral*: The axiomatized systems of analysis formulated in set theory, according to which "every assertion of classical analysis ... can be transformed into the assertion of the derivability of a certain formula in a certain calculus, has the ... disadvantage that the choice of the calculus can only be pragmatically justified". That this pragmatic justification is "the only possibility of justification", if considered at all, is "an unfounded assertion". On the other hand, according to Lorenzen, "neither the metaphysics of pragmatism" nor Platonist speculations on mathematical objects are necessary for the foundation of classical analysis (Lorenzen 1965, 1–2).

As a positive solution, Lorenzen proposes an operative-constructive approach to mathematics that includes the entire *justified* heritage of mathematics. In a substantial deviation from Hilbert's contentual (finitary) standpoint, justification is intended to fulfill two very large criteria:

1. Constructive Mathematics has to be shown as a possible human activity.
2. Constructive Mathematics has to be shown as a *good* possibility, at least as a *better* possibility than its rivals, i.e. set-theoretical mathematics in naive or axiomatic forms. (Lorenzen 1968, 133)

According to Lorenzen, the first perspective of justification concerns an *epistemological* problem, the second a *moral* problem in the sense of an evaluation.

The starting point of the *epistemological* justification is a consensus on the functioning of ordinary (and therefore imprecise) language on a practical level. The "practical" turn here refers to a spontaneous understanding (*Vorverständnis*) of science based on a technical and political practice.[8]

On this common practical basis, Lorenzen proposes gradually to develop rules that lead first to "concrete mathematics" and finally to "ab-

[4] Cf. Lorenzen and Lorenz 1978; Keiff 2011; Fontaine and Redmond 2008; Rahman, McConaughey, Klev, and Clerbout 2018.

[5] Cf. Schlaudt 2014 for the reception of Hugo Dingler by the Erlangen School.

[6] Cf. Lorenzen 1955a, 3–4, 6; 1968, 136.

[7] Note, however, Lorenzen (1961; 1987, 191–203), Janich (1989) and Inhetveen (1983), who, following ideas by Hugo Dingler, try to define the notions of plane, orthogonality and parallelism with the help of the concept of homogeneity.

[8] Cf. Lorenzen 1994, which is the publication of a lecture held in 1989 in Göttingen under the title "Die praktizistische Wende der Wissenschaftstheorie".

stract mathematics". "Abstract mathematics" differs from "concrete" or operative mathematics in that the former additionally introduces the axiomatic method – of course without a justification (Lorenzen 1955a, 8). Lorenzen has in mind a process of abstraction which avoids the limitations of nominalists (such as Goodman), who reject "abstract" objects and instead confine themselves to "concrete" individuals, as well as the limitations of skeptical finitists, who only allow restricted sets as abstract objects, but without going as far as the Cantorians, who allow indefinitely many infinities of different cardinality. In short, he defends the middle position of the golden mean (cf. Lorenzen 1968, 136, 140).

In the "non-axiomatic", that is to say, concrete, operative mathematics (Lorenzen 1955a, 195), any statement, for example, of "theoretical" arithmetic, can be interpreted as a statement about the *methods* or rules of "practical" arithmetic. This latter is a syntactic calculus for constructing, according to certain rules or schemes, symbols called "figures", for example, the number signs "|", "||", "|||", . . . , where ". . . " means that an indefinite, but finite, number of number signs follows. Theoretical statements are not axiomatic formalizations but rather "specifications" of the practical calculation (Lorenzen 1955a, 196).

An *evaluation* becomes necessary in relation to axiomatic theories for which we have neither a constructive model nor a constructive proof of consistency. Examples are ZF or Peano arithmetic, supplemented by

> axioms for the real numbers, x, y, . . . , especially the classical completeness axiom . . . In this completeness axiom we could use sentence-forms $A(x)$ of the theory instead of sets. The point is that the sentence-form $A(x)$ with one free variable x for reals may contain bound real variables too. If we use a *restricted completeness axiom*, the restriction being that $A(x)$ may contain *no* bound real variables, we get a theory $\mathbb{R}_0$ for which a constructive model easily may be found. (Lorenzen 1968, 138)

If we denote the theory of real numbers with the unrestricted axiom of completeness by $\mathbb{R}$, the question arises: Which of the theories, $\mathbb{R}$ or the revisionist theory $\mathbb{R}_0$, is better justified? As long as there is no physical result on the basis of $\mathbb{R}$ that is inaccessible on the basis of $\mathbb{R}_0$, Lorenzen argues for $\mathbb{R}_0$; for the hierarchy of transfinite cardinals does not seem to him to be more important to mathematics than the hierarchy of medieval angels for modern theology (cf. *ibid.*).

Generally speaking, Lorenzen's "philosophical conditioning of mathematics" consists of four points, which are controversially discussed in the philosophy of mathematics, namely,

1. the rejection of the actual infinite,
2. the avoidance of the general concept of power set,
3. the rejection of impredicative concept formation,
4. the restriction to an operational-constructive method.

Let us now turn to the more specific form of this constructive "mild" revisionism.[9] First of all, by using the example of practical arithmetic, we should take into account that the term "operative" does not mean a methodical requirement but rather refers to the *object* of theoretical arithmetic: the operations as *actions* and rules of practical arithmetic. Lorenzen (1955a, 3–5) generally considers the objects of operative mathematics to consist in the *calculations* in this sense.

3 The construction of the natural and the real numbers

Of course, Lorenzen does not begin his reconstruction of mathematics with an axiom system for real numbers or sets, but with the *construction* of natural numbers – by Weyl, they were presupposed – and then moves on to the real numbers and the formation of sets of them. This way of thinking is obviously compatible with the axiomatic approach in its non-fundamentalist interpretation:[10]

> After the objects of analysis are constructed, the interrelations between the proofs of the propositions about them can best be clarified by considering the objects with some relationships defined between them as models of suitable structures (field, lattice, topological space, etc.). (Lorenzen 1965, 2)

In his *Differential und Integral*, Lorenzen gives an operational version not only of natural and real numbers, but also of functions and differential geometry. Here, we limit ourselves to a sketch of the construction up to the real numbers.

The beginning of elementary arithmetic is given by a calculus for the creation of figures, here: number signs $|, ||, |||, \ldots$ Starting with

$$\rightarrow |$$

and the rule

$$m \rightarrow m|, \qquad \text{(potential infinite)}$$

one adds rules for identity, addition and multiplication etc.:

$$\rightarrow | = |,$$
$$m = n \rightarrow m| = n|,$$

[9] I call a position "mildly" revisionist if it does not accept the majority practice but nevertheless seeks to understand and justify the theorems and concepts of mathematics accepted by the majority, by taking into account philosophical criteria considered as in a logical sense prior to science.

[10] In this context, Lorenzen rightly refers to the non-Hilbertian use of axiomatic by Bourbaki (cf. Heinzmann and Petitot 2020).

$$\begin{aligned}&\to m \oplus | = m|,\\&\to m \oplus n| = (m \oplus n)|,\\&\to |\otimes n = n,\\&\to m| \otimes n = (m \otimes n) \oplus n.\end{aligned}$$

Here, m and n are variables, more precisely "Eigenvariablen", i.e., variables for substitution instances that are exclusively number signs already generated by the calculus. The symbols "$\oplus$" and "$\otimes$" are signs for addition and multiplication, respectively, and "$\to$" serves as a "message sign" (*Mitteilungszeichen*) for operations, for example, *It is allowed to set "$|$"*; or, *If one has "n", one can go to "$n|$"*. While rules are not statements, the statements about the rules are statements of finite theoretical arithmetic; such a statement says, for example, that *if the rules lead to $k \otimes m = n$, then they always produce $m \otimes k = n$*. The calculus of practical arithmetic, on the other hand, teaches us that

$$k \otimes m = n \ \to \ m \otimes k = n|$$

is wrong. In this way, Lorenzen comes to a result which is reminiscent of Poincaré in the sense that, in contrast to non-Euclidean geometry, one cannot introduce a *non-Peano* arithmetic:

> In theoretical arithmetic, there is a method of refuting arbitrary "axioms" on the basis of practical arithmetic; just this is the difference from geometry. (Lorenzen 1958, 242–243; cf. Lorenzen 1955b, 129)

The requirement to accept only "definite" statements is a methodological boundary for that part of mathematics which can be regarded as "stable" or "safe". For example, the statement "x is derivable in calculus K" (1) is definite, since it is decidable on the basis of a "schematic execution of operations with figures" whether (1) is deducible or not. The negation of this statement, "x is *not* derivable in K" (2), is also definite, because a concept of refutation is fixed: the refutation of (2) is given by a proof of (1) (Lorenzen 1955a, 5). Since definite statements can again occur in concepts of proof or refutation, Lorenzen formulates the inductive definition of "definite" as follows:

> (1) Any proposition decidable by schematic operations is called "definite".
> (2) If a definite proof or refutation concept is defined for a proposition, then the proposition itself is also definite, more precisely proof-definite or refutation-definite. (Lorenzen 1955a, 5–6)

While impredicative concept formation is indefinite and therefore excluded from operative mathematics (Lorenzen 1955a, 6), quantifiers are permissible, provided that the formulas in the quantification domain are definite. If $A(x)$ is definite, then in order to refute $\forall x\, A(x)$ it is sufficient to refute some formula $A(x_0)$; and in order to prove $\exists x\, A(x)$ it is sufficient to prove $A(x_0)$.

Lorenzen shows that the five well-known Peano axioms, together with the definitions of addition, multiplication, and exponentiation, can be construed as definite with the help of the construction rules for numerical signs and statements about them obtained by means of elementary logical reasoning without the *tertium non datur* (Lorenzen 1955a, Part 1; cf. Schroeder-Heister 2008).

It should be emphasized that the induction principle is a meta-rule of the form

$$A(|);\ \big(A(m) \to A(m|)\big)\ \to\ \forall n\, A(n)$$

that constitutes an operative interpretation of the classical induction principle. In fact, the variability range of the universal quantifier in the conclusion is definite: it consists exclusively of numerical signs constructed according to the rules, and all numerical signs are the results of such constructions (Lorenzen 1950, 163; 1965, 7–9; 1955a, 28, 134 sq.). One can see that the revisionism of operative mathematics first becomes apparent in abstract mathematics: the operative system of numerical signs indeed defines a monomorphic structure, i.e., all of its models are isomorphic (cf. Lorenzen 1955a, 136).

For natural and rational numbers the difference between a constructive and an axiomatic approach is only a difference "in the way of talking about arithmetic, not within arithmetic itself" (Lorenzen 1965, 3). The "problematic" step of the operative construction of concrete mathematics is the domain of real numbers, since those are introduced into modern mathematics through a "combination of arithmetic with set theory", which obviously is not definite. Now Lorenzen defines an operative theory of sets, according to which every infinite set is countable. It is foreseeable that this difference has a consequence for the construction of real numbers (cf. Lorenzen 1965, 194–195).

In 1955, Lorenzen constructed real numbers by introducing language levels (*Sprachschichten*) that are reminiscent of Weyl and Otto Hölder:[11] The construction of language levels starts with calculus figures, called "objects". By forming definition schemes for these, one obtains functions (addition, multiplication, subtraction, division) and relations between them (identity, less-than). The resulting propositions constitute the objects of the next level, composable by means of logical particles. In 1965, by contrast, Lorenzen uses as his starting point the operative calculus, enriched with logical particles, and his distinction between definite and indefinite formations, and obtains the rational and the real numbers through a process of predicative abstraction. The difficulty that arises in both cases, with or without language levels, is to define the new class of objects that should be the real numbers. In fact, the set of all definite sets of natural numbers, i.e., the power set of $\mathbb{N}$, is not itself definite. There are, however, sets of sets that are definite, such as, for example, the infinite set which has as its elements

> the set of all natural numbers [*Grundzahlen*],

[11] Lorenzen (1955a, 165) himself refers to the "mathematical process" which Weyl describes in 1918, and Oskar Becker (1956/57, 452, note 4), in his discussion of Lorenzen 1955a, calls attention to the fact that related thoughts exist in Hölder 1924.

> the set of all squares of natural numbers,
> the set of all cubes of natural numbers,
> $\vdots$
> (Lorenzen 1965, 39 sq.; 1955a, 165 sq.)

How, under these conditions, should one define a real number? Lorenzen goes the classical way and expands the rational numbers such that "all" Cauchy sequences converge. Of course, the Cauchy sequences of rational numbers are not definite sets. Lorenzen must therefore limit himself to the introduction of an indefinite extension procedure, which leads to their limits only for certain definite sequences, but which can always be extended to other definite sequences. The limits are obtained with respect to an equivalence relation between Cauchy sequences: let $r \sim s$ iff the sequence "$r - s$" with the elements $r_1 - s_1, r_2 - s_2, \ldots$ is a null sequence. One then shows that $r \sim s$ is an equivalence relation and confines oneself in one's statements about Cauchy sequences to those which are invariant modulo "$\sim$". Lorenzen calls the abstract objects defined by such invariants "real numbers" (cf. Lorenzen 1965, 54 sq.).

Under the classical approach, the field of real numbers is complete, i.e., every Cauchy sequence of reals which is monotone and bounded converges to a real number. What on the standard approach is called the set of all real numbers is not definite, i.e., it is a "class". It is therefore not surprising that it is provable that every definite set of real numbers is incomplete, i.e., that in every definite set of real numbers there are Cauchy sequences which have no limit in that set.

In fact, the operative construction of the real numbers implies that, for every definite set of real numbers, one can find a bijection into the natural numbers, i.e., each definite set is countable and therefore representable as the elements of a sequence $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ Lorenzen then shows that a series of real numbers containing all rational numbers in an interval is dense, and that density implies incompleteness.

Therefore, in contrast to classical axiomatics, the operative real numbers do not constitute an ordered and complete Archimedean field (cf. Lorenzen 1965, 61 sqq.). However, the indefinite field of real numbers contains (up to isomorphism) all ordered Archimedean fields and is in this sense the largest ordered Archimedean field. In other words, we now understand the completeness of the indefinite real numbers (*ibid.*, p. 65).

4 A short outlook on predicative mathematics

The idea of predicative mathematics as a justified part of mathematics was further developed, with explicit reference to Lorenzen, by Hao Wang:

> The Poincaré–Russell notion of predicativity seems to deserve renewed study in view of recent works by Lorenzen and others which appear to give hope of a

> predicative basis for ordinary mathematics. (Wang 1959, 216)

Wang's idea was to start from a multi-leveled constructive set theory and to ask whether one can then give a more accurate characterization of predicativity, "as sharp and acceptable an explication for predicativeness as recursiveness is for the intuitive concept of effective computability" (Wang 1964, 578).

In his introduction to the paper "Realism and the Debate on Impredicativity, 1917–1944" (2002), Charles Parsons echoes Wang's remarks with respect to further developments in a "classical" view of predicativity by Solomon Feferman and Kurt Schütte:

> Although in the 1950's Paul Lorenzen and Hao Wang had undertaken to reconstruct mathematics in such a way that impredicativity would be avoided, insistence on this (to which even Wang did not subscribe) was very much a minority view, and Feferman in particular sought principally to analyze what predicativity is, with the understanding that some aspects of this enterprise would require impredicative methods. (Parsons 2002, 372)

An interesting criticism of the predicative conception of the real numbers comes from Paul Bernays. He finds it unconvincing that Lorenzen confines himself to operative intuition and neglects the geometrical aspects of intuitive representation, such as the intuition of the continuum, of curves and planes, projections, and so on. Lorenzen's refusal to accept the classical, general concept of a real number means that complete arithmetization of real numbers is impossible. Indeed, such an arithmetization would require that the definition of each Dedekind cut be possible without referring to the quantity denoted by the cut. Of course, such an independent arithmetic definition of cuts is often possible: the length of the diagonal of the unit square, for example, is defined by the set of fractions whose squares are less than 2. However, we have no general proof that each cut is independently arithmetically definable (Bernays 1979, 6 ff). According to Bernays, such a strict arithmetization is by no means necessary, provided we introduce a set theory motivated by geometric intuition:

> When the method of conventional analysis is accused of impredicativity, this is because, in the theory of the real numbers, one does not want to get involved with the kind of idealization which lies in envisaging the continuum as the "number line". . . . Yet, if one conceives the real numbers as represented by definitory formulae for sets or for sequences of fractions (or of rational numbers), . . . , then these – in this respect one must certainly agree with Lorenzen – form only an indefinite totality. But this is not suitable for representing the continuum.
>
> The critics of classical analysis call for a more pronounced arithmetization of analysis. But it is possible to conceive of classical analysis in the sense of a closer fusion of geometry and arithmetic, which gives as good a unity of theory as a full arithmetization. (Bernays 1979, 14)

The question to be answered by Lorenzen is thus: "Can we conceive that the postulate of the power set of rational numbers is motivated by our geometric representation of the continuum?" (Lorenzen 1978, 222). This question seems insoluble as long as one maintains the classical understanding of geometry as a science of space (*ibid.*, p. 224).

References

Becker, Oskar. 1956/57. Review of Paul Lorenzen: Einführung in die operative Logik und Mathematik. *Kant-Studien* 48:447–454.

Bernays, Paul. 1979. "Bemerkungen zu Lorenzens Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik." In *Konstruktionen versus Positionen: Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie* (Paul Lorenzen zum 60. Geburtstag), edited by K. Lorenz, volume 1: *Spezielle Wissenschaftstheorie*, pages 3–16. Berlin/New York: De Gruyter.

Curry, Haskell B. 1951. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. Amsterdam: North-Holland.

Dingler, Hugo. 1913. *Die Grundlagen der Naturphilosophie*. Leipzig: Verlag Unesma (Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967).

———. 1931. *Philosophie der Logik und Arithmetik*. Munich: Ernst Reinhardt.

Feferman, Solomon. 1964. "Systems of predicative analysis." *Journal of Symbolic Logic* 29 (1): 1–30.

———. 1979. "A more perspicuous formal system for predicativity." In *Konstruktionen versus Positionen: Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie* (Paul Lorenzen zum 60. Geburtstag), edited by K. Lorenz, volume 1: *Spezielle Wissenschaftstheorie*, pages 68–93. Berlin/New York: De Gruyter.

Fontaine, Matthieu, and Juan Redmond. 2008. *Logique dialogique: Une introduction*. *Cahiers de Logique et d'Epistémologie*, volume 5. Milton Keynes: College Publications.

Gethmann, Carl Friedrich. 1991. *Lebenswelt und Wissenschaft: Studien zum Verhältnis von Phänomenologie und Wissenschaftstheorie*. Bonn: Bouvier.

Gethmann, Carl Friedrich, and Geo Siegwart. 1994. "The constructivism of the 'Erlanger Schule': Background, goals and developments." *Cogito* 8 (3): 226–233.

Heinzmann, Gerhard, and Jean Petitot. 2020. "The functional role of structures in Bourbaki." In *The pre-history of mathematical structuralism*, edited by E. H. Reck and G. Schiemer, pages 187–214. Oxford University Press.

Hölder, Otto. 1924. *Die mathematische Methode: Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik*. Berlin: Springer.

Inhetveen, Rüdiger. 1983. *Konstruktive Geometrie: Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie*. BI-Wissenschaftsverlag.

Janich, Peter. 1989. *Euklids Erbe: Ist der Raum dreidimensional?* München: Beck. (English translation by D. Zook: *Euclid's heritage: Is space three-*

dimensional? Dordrecht: Springer, 1992.)

Keiff, Laurent. 2011. "Dialogical logic." In *The Stanford encyclopedia of philosophy*, edited by E. N. Zalta (Summer 2011 edn.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/logic-dialogical/

Lorenzen, Paul. 1950. "Konstruktive Begründung der Mathematik." *Mathematische Zeitschrift* 53:162–201.

———. [1]1955a. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer; quoted according to the second edition 1969.

———. 1955b. "Über eine Erweiterung des finiten methodischen Rahmens." In *Actes du 2e congrès international de l'Union Internationale de Philosophie des Sciences, Zürich 1954*, volume II, pages 128–134. Neuchâtel.

———. 1958. "Logical reflection and formalism." *Journal of Symbolic Logic* 23: 241–249.

———. 1961. "Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung." *Philosophia Naturalis* 6:415–431; reprinted in Lorenzen 1969, 120–141.

———. 1965. *Differential und Integral: Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*. Frankfurt a. M.: Akademische Verlagsgesellschaft.

———. 1968. "Constructive mathematics as a philosophical problem." In *Logic and foundations of mathematics: Dedicated to Prof. A. Heyting on his 70th birthday*, edited by D. van Dalen, J. G. Dijkman, S. C. Kleene, and A. S. Troelstra, pages 133–142. Wolters-Noordhoff, Groningen.

———. 1969. *Methodisches Denken*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp ([1]1968).

———. 1978. "Konstruktive Analysis und das Geometrische Kontinuum." *Dialectica* 32:221–227.

———. 1987. *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*. Mannheim/Wien/Zürich: Wissenschaftsverlag.

———. 1994. "Konstruktivismus." *Journal for General Philosophy of Science* 25:125–133.

Lorenzen, Paul, and Wilhelm Kamlah. 1967. *Logische Propädeutik: Eine Vorschule des vernünftigen Denkens*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Lorenzen, Paul, and Kuno Lorenz. 1978. *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Mittelstraß, Jürgen. 2005–2017. *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. Second edition, eight volumes. Stuttgart/Weimar: J. B. Metzler.

——— (ed.). 2008. *Der Konstruktivismus in der Philosophie im Ausgang von Wilhelm Kamlah und Paul Lorenzen*. Paderborn: Mentis.

———. 2016. "Paul Lorenzen und die Erlanger Schule." In *Paul Lorenzen und die konstruktive Philosophie*, edited by J. Mittelstraß, pages 11–25. Münster: Mentis.

Parsons, Charles. 2002. "Realism and the debate on impredicativity, 1917–1944." In *Reflections on the foundations of mathematics: Essays in honor of Solomon Feferman*, edited by W. Sieg, R. Sommer, and C. Talcott, pages

372–389. Association for Symbolic Logic.

Rahman, Shahid, Zoe McConaughey, Ansten Klev, and Nicolas Clerbout. 2018. *Immanent reasoning or Equality in action: A plaidoyer for the play level*, volume 18 of Logic, Argumentation & Reasoning. Cham: Springer.

Schlaudt, Oliver. 2014. "La réception de Hugo Dingler par l'École d'Erlangen." *Philosophia Scientiæ* 18 (2): 141–159.

Schroeder-Heister, Peter. 2008. "Lorenzen's operative justification of intuitionistic logic." In *One hundred years of intuitionism (1907–2007): The Cerisy conference*, edited by M. van Atten, P. Boldini, M. Bordeau, and G. Heinzmann, pages 214–240. Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser.

Thiel, Christian. 2014. "Phenomenology, 'Grundwissenschaft' and 'Ideologiekritik': Hermann Zeltner's critique of the Erlangen School." In *Interdisciplinary works in logic, epistemology, psychology and linguistics: Dialogue, rationality, formalism*, edited by M. Rebuschi, M. Batt, G. Heinzmann, F. Lihoreau, M. Musiol, and A. Trognon, pages 11–19. Springer.

Wang, Hao. 1954. "The formalization of mathematics." *Journal of Symbolic Logic* 19:241–266.

———. 1959. "Ordinal numbers and predicative set theory." *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 5:216–239.

———. 1964. *A survey of mathematical logic*. Peking/Amsterdam: Science Press/North-Holland.

Weyl, Hermann. 1918. *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Chelsea/New York, no date (1918).

———. 1921. "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik." *Mathematische Zeitschrift* 10:39–79.

———. 1968. "Nachtrag Juni, 1955" [concerning Weyl 1921]. In his *Gesammelte Werke*, volume II, pages 179–180. Berlin/Heidelberg/New York: Springer.

———. 1985. "Axiomatic versus constructive procedures in mathematics." *Mathematical Intelligencer* 7: 10–17, 38.

Conceptions of Infinity and Set in Lorenzen's Operationist System

Carolin Antos

Abstract In the late 1940s and early 1950s, Lorenzen developed his operative logic and mathematics, a form of constructive mathematics. Nowadays this is mostly seen as a precursor of the better-known dialogical logic,[1] and one might assume that the same philosophical motivations were present in both works. However, we want to show that this is not everywhere the case. In particular, we claim that Lorenzen's well-known rejection of the actual infinite, as stated in Lorenzen 1957, was not a major motivation for operative logic and mathematics. Rather, we argue that a shift happened in Lorenzen's treatment of the infinite from the early to the late 1950s. His early motivation for the development of operationism is concerned with a critique of the Cantorian notion of set and with related questions about the notions of countability and uncountability; it is only later that his motivation switches to focusing on the concept of infinity and the debate about actual and potential infinity.

1 Introduction

In his work on the philosophy of mathematics, Paul Lorenzen was motivated by the so-called foundational crisis of mathematics and the challenges mathematics was confronted with at the beginning of the 20th century.[2] To

Carolin Antos
University of Konstanz, Germany, e-mail: carolin.antos-kuby@uni-konstanz.de

[1] Notable exceptions are the works of Schroeder-Heister (2008), Coquand and Neuwirth (2017) and Kahle and Oitavem (2020).

[2] At least this pertains to his broader philosophical motivations. In the beginning, mathematical reasons were more prominent, as Lorenzen recognized the impact of his work in lattice theory on consistency proofs (see Coquand and Neuwirth 2017; Coquand and Neuwirth 2020). I would like to thank one of the referees for pointing this out to me.

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_3

tackle the problems raised during this crisis, he developed in the 1950s a new foundational system for mathematics, a system he called "operative logic" and "operative mathematics".[3] Nowadays, the work on operative *logic* is mostly referred to as a precursor of his much better known later work on dialogical logic. Indeed, this approach was developed as an answer to the shortcomings of operative (proto-)logic.[4] In this article, we want to focus on his operative *mathematics*, which is an elaborate attempt at building a constructive version of mathematics that still preserves (most of) modern analysis. Although he later abandoned the specific setup of operative mathematics, he continued to pursue the general ideas and motivations operative mathematics rested on.

At the beginning of the 1950s, however, Lorenzen still perceived his operative logic and mathematics to be nothing less than a "new way to overcome the foundational crisis" (Lorenzen 1956b).[5] This new way is situated between the two main factions that developed answers to the crisis, the "Hilbertians" and the "intuitionists". In Lorenzen's view, the question of a "good" foundation for analysis remained unanswered by both accounts and so he sought out a new way towards a foundation by using methods and ideas of both approaches while overcoming the problems they were faced with. Central to this endeavor is a thorough treatment of the real numbers. According to Lorenzen, it was the (mistaken) treatment of the reals that led to the development of Cantorian set theory and the connected notion of mathematical infinity, which in turn gave rise to the problems that were at the heart of the foundational crisis.

Nowadays, Lorenzen is mostly known for his rejection of actual infinity. Indeed, Lorenzen (1957) claims that the next big challenge for mathematics is to show that "the infinitely large (more precisely, the actual infinite) is to be demonstrated to be disposable".[6] Therefore, it might seem as if the rejection of actual infinity had also been a central motivating factor for his development of operative mathematics.

In this article, we want to argue that this is in fact not the case. Instead, we claim that the rejection of actual infinity was *not* prominent in his development of operative mathematics; in particular, the notion of infinity was *not* his main focus, but rather the notion of set was. Our hypothesis is that *a shift occurred in Lorenzen's treatment of infinity*: in the beginning he

---

[3] A complete presentation can be found in Lorenzen 1955. For all quotes from this book and all the other German texts, the translations into English are my own.

[4] For a detailed account of how and why Lorenzen abandoned operative logic and developed dialogical logic, see Lorenz 2001.

[5] "Die operative Logik und Mathematik stellt einen neuen Weg der Überwindung der Grundlagenkrise dieser Wissenschaften dar." Lorenzen 1956b, a short but very informative outline of the main ideas of his operationist system, also sketches a larger project he seems to have had in mind, by planning on exploring the ramifications operative mathematics has for wider applications in the sciences.

[6] Lorenzen 1957, 11; translation taken from Lorenzen 1987, 202.

focused on the notion of set and, connected to this, the notions of countable and uncountable sets;[7] only in the late 1950s did his focus shift towards the question of potential and actual infinity.[8]

To make this hypothesis plausible, we will first give an overview of how Lorenzen's operative approach is embedded in the general discussion of the foundational crisis in mathematics and, in particular, how it relates to the major approaches of formalism and intuitionism (Section 2). To explain the first part of the proposed shift in Lorenzen's work, we will take a closer look at how Lorenzen eliminates the classical notion of set and how this impacts the notions of countability and uncountability in operative mathematics (Section 3). In Section 4 we will compare his treatments of the notion of infinity from the early and late 1950s and argue for the shift in Lorenzen's treatment of infinity. In the last section, we will suggest possibilities for future work on the explanation of why this shift occurred and the systematic question whether operative mathematics is a valid framework for potential infinity.

2 Operationism and the foundational crisis

Before going into the details of how Lorenzen attempted to tackle the question of the notions of set and infinity in an "operative" way, we want to show how Lorenzen situated his approach in the discussion about the foundational crisis in mathematics. This chapter therefore also serves as a short overview of Lorenzen's thought on the foundations of mathematics in the 1950s, as most of his work from this time is quite unknown to an international audience.[9]

In the late 1940s and early 1950s, Lorenzen was working on a constructive account of mathematics that had at its center the notion of operations via certain schematic rules. In Fraenkel, Bar-Hillel, and Levy 1973, it is described as follows:

> For Lorenzen, the main (though not the only) subject of mathematics is the treatment of calculi – this should by no means be misunderstood as a claim that mathematics *is* a calculus, which Lorenzen would very definitely reject – where a calculus is understood to be a system of rules for schematic operations

[7] A set X is countable if there is an injective function from X to the set of the natural numbers; X is uncountable if there is no such function.

[8] To explain what these terms mean, Lorenzen (and others) often point to Aristotle's definition in his *Metaphysics*, book 9, chapter 6. Mathematical definitions of these concepts vary; they usually contain a description of some "construction process", but differ in how far the construction should proceed and whether this is spelled out via induction, computation or other approaches. In Subsection 4.2 we discuss the possibilities of interpreting Lorenzen's notion of construct as a definition of potential infinity.

[9] One reason for this is that most of his papers were published in German and no English translations are available.

> with figures, which may but need not be marks on paper; they might as well be pebbles (*calculi*) or any other physical objects. In addition to this precisification of the subject-matter of mathematics – and only slightly connected with it – Lorenzen stipulates that the methodical frame be as wide as compatible with the *conditio sine qua non* that all mathematical statements be *definite*.[10] (p. 179)

Lorenzen acknowledges several sources for the ideas he uses in this operative approach, the most important among them being Weyl (1918). His approach is quite comprehensive, giving not only a new way of building up different areas of mathematics (with analysis as the most important one), but complementing this with a new logical system, operative logic, which in turn is founded on a so-called protologic.

He sees this as a kind of reverse account to Hilbertian mathematics and metamathematics:[11]

> After it has become clear that an axiomatization of the naive theories is not enough, but is in need of a metamathematics, the task arises to justify the metamathematical modes of inference. The object of metamathematics are certain formal systems [*Kalküle*], viz., axiomatized theories. In an exact reversion of this line of research, in "operationism" it is the formal systems (i.e., operating with symbol strings [*Figuren*] as such) which are put at the beginning, metamathematics is thus supplanted by protologic.[12] (Lorenzen 1956b)

In Lorenzen's view, Hilbert's Program and the distinction between mathematics and metamathematics are unable to adequately address the problem of a foundation for mathematics, for very basic, structural reasons:

> According to Hilbert's Program for the foundation of mathematics, the task to provide consistency proofs is assigned to metamathematics. . . . As every proof is only as good as the methods it uses, it can be objected to such proofs that the inference by virtue of content [*inhaltliches Schließen*] is neither formalized nor indeed justified.
>
> In attempting such a formalization it became apparent that the distinction between mathematics and metamathematics is not suited for the problem of foundations. The proof methods in metamathematics are none other than those

[10] For an example of such a system of rules, see the system Z below; for a definition of definiteness, see Subsection 4.2.

[11] Note that Lorenzen's view on other ways out of the foundational crisis, as presented, for example, by Hilbert or Brouwer, are only described here insofar as they serve as a demarcation line for his operationism. In his later work, for example, Lorenzen 1960, 119, he did indeed argue that the foundational crisis has been overcome precisely because we have a fruitful interplay between Hilbert's and Brouwer's approach.

[12] "Nachdem deutlich geworden ist, daß eine Axiomatisierung der naiven Theorien nicht genügt, sondern noch eine Metamathematik erfordert, stellt sich das Problem, die metamathematischen Schußweisen zu begründen. Gegenstand der Metamathematik sind gewisse Kalküle, nämlich die axiomatisierten Theorien. In genauer Umkehrung dieser Untersuchungsrichtung werden im ‚Operativismus' beliebige Kalküle (also das Operieren mit Figuren als solches) an den Anfang gestellt, an die Stelle der Metamathematik tritt so eine Protologik."

> used in mathematics. A foundation of metamathematics is therefore nothing but the foundation of a part of mathematics ....[13] (Lorenzen 1951b, 162)

So, instead of justifying the use of an axiomatic system in metamathematics (for example, by providing a consistency proof) in what could be perceived as a justification after the fact, Lorenzen puts the justification at the beginning of his investigation, via the protological principles:

> One can, without assuming logical or mathematical knowledge, obtain certain protological principles which are sufficient to establish customary logic and mathematics .... (Lorenzen 1956b)

These basic principles are, for example, operations on symbol strings that have their origin in basic practices like pre-mathematical forms of counting. They give rise to formalized operations or rules through which the usual objects in mathematics can be defined. As one example, if one thinks about numbers in the manner of "strokes on paper" of the form $|$, $||$, $|||$, $\ldots$, this can be written down as rules for manipulating symbol strings such as the following rule system Z:

1. Begin with $|$.
2. If you have reached x, add $x|$.

So, general rules for how to operate with symbol strings are given via formal systems which then constitute the objects of operative mathematics. In this way Lorenzen can utilize an axiomatic methodology and at the same time have a sound foundation in virtue of the protological principles.[14]

Such an approach shows the importance of action and applicability in mathematics that is characteristic for Lorenzen's thoughts:

> Such rules are not examined as to whether they are "true" or not—they are only examined as to whether they are "useful" or not, i.e., whether acting on these rules, meaning the construction of symbols, is suitable to some purpose. This, however, is no longer a mathematical question, but belongs to applications. (Lorenzen 1951b, 163)

This applicability is also the biggest difference between Lorenzen's operative mathematics and intuitionistic approaches like Brouwer's and Weyl's. For Lorenzen, a good foundation of mathematics should preserve the full power of contemporary analysis. This means, in particular, that one should be able to use *tertium non datur*, which is made possible in operative mathematics:

---

[13] Of course this is only Lorenzen's account of Hilbert's Program, and it would be interesting to see if it is a faithful one. For a non-Lorenzen viewpoint, see, for example, Sieg 1999.

[14] Lorenzen was not opposed in general to using axiomatic methods, as long as they were not used as a foundation: "Axiomatizations have no other purpose than to simplify operating on constructible sets, functions, real numbers etc." (Lorenzen 1951b, 165). Lorenzen (1960, 118) calls this the "systematic priority of axiomatic mathematics over constructive mathematics."

> In contrast to intuitionistic attempts, we are now—after an unobjectionable foundation of logic—allowed to always use the *tertium non datur*. The uncomfortable restriction to "decidable properties", "enumerable real numbers", etc. is no longer necessary. An attempt in this intended direction was made already by Weyl in 1918—however, it had to fail, because a justification of the *tertium non datur* was still lacking. (Lorenzen 1951b, 166)

Lorenzen addresses this issue in operative logic by distinguishing between the *effective* predicate calculus (*effektiver Quantorenkalkül*) (which is in essence the intuitionistic approach) and the *fictional* predicate calculus (*fiktiver Quantorenkalkül*), which includes the *tertium non datur* and is therefore the classical predicate calculus. As the word "fictional" suggests, the justification of such a calculus means to "justify a fiction" (Lorenzen 1955, 79). This justification can be given "in most of the cases" (Lorenzen 1955, 84) by a careful analysis of the concepts of effective and fictional derivability or underivability. Using these means, Lorenzen achieves a compatibility of operative analysis with classical analysis—although he notes that "[t]he operative conception also implies that the intuitionistic opinion is right in that 'in fact' only effective derivability is of interest" (Lorenzen 1955, 84).

Operative logic and mathematics is deemed to be a third way out of the crisis in that it overcomes both the foundational weakness of formalistic approaches and the lack of full applicability of the intuitionistic approaches, while at the same time borrowing some of their strengths. Incidentally, this also holds for Russell's solution to the crisis. As we will see in the next section, Lorenzen uses a version of Russell's ramified type theory to avoid impredicativity:

> With the laudable exception of the intuitionists, who went their own way, this approach (Russell's ramified type theory [*verzweigte Stufenlogik*]) has been abandoned in favor of unramified type theory only because ramified type theory was allegedly too complicated, because the stock of modern mathematics could not be "saved" in a satisfactory manner. However, the impredicativity of this logic has never been justified, at least until now: the error of infinite regress cannot be avoided this way. Yet ramified types [*verzweigte Stufen*] can be much simplified by introducing something like untyped branches [*ungestufte Zweige*], instead of appealing to unramified types .... And, with this, one remains "predicative" .... (Lorenzen 1956a, 275)

Contrary to the relative unrenownedness of Lorenzen's operationism in today's literature,[15] the book was well received by his contemporaries. Nevertheless, it also met with criticisms, which mainly pertained to the foundational aspect of operationism: As protologic carries much of the foundational load, it is not surprising that in the reception of Lorenzen's work a great part of the criticism was directed against the protological principles and the claim that they give a sound foundation. William Craig singled this out as the main problem of Lorenzen's approach:

> The main weakness of the book is its failure to indicate as clearly as a work on foundations should the strength of the methods employed and thus of the

[15] A notable exception is Fraenkel, Bar-Hillel, and Levy 1973.

> underlying assumptions. Claims that only the principles of the chapter on *Protologic* are employed and that no understanding of other logical notions is required are unconvincing and seem unnecessary. (Craig 1957, 319)

Gerhard Frey (1957, 633) even claims that when asserting that mathematical and logical knowledge are not needed for operating with symbol strings, Lorenzen "circumvents ... the actual philosophical questions on purpose".

According to Lorenz (2001), Lorenzen himself was convinced to abandon operative (proto-)logic after a discussion with Tarski when he was visiting the Institute of Advanced Study in Princeton in the Fall 1957/58. Then, he began to develop what is now known as dialogical logic. But this rethinking of the foundations did not diminish the significance of Lorenzen's mathematical work. Thoralf Skolem points this out by writing in his review that "although one may doubt whether Lorenzen's theory is the best conception of mathematics, the reviewer believes that the book will have a sound influence on the mathematical world" (Skolem 1957, 290). This is also the essence of Wolfgang Stegmüller's extensive review of Lorenzen's book:

> In particular the part that in the reviewer's eyes represents the most important contribution of Lorenzen towards a foundation of mathematics, namely the theory of the real numbers, is described in detail in this book; in fact, the thoughts developed in it are for the most part independent and can therefore be isolated from the operative framework of the theory and transferred to different system constructions. This point is not to be underestimated in an overall assessment of Lorenzen's achievement; as whatever one's opinion of Lorenzen's operative interpretation of logic and mathematics may be—his foundation of analysis is in most parts independent of this interpretation and will without doubt be inspiring and fruitful for all future attempts in this direction. (Stegmüller 1958, 161–162)

Despite his above-mentioned critique, Craig also concurs with Lorenzen's claim that the operative approach signifies a third way out of the crisis in much the same way as described above: "The reviewer believes that the book ... presents a legitimate and probably fruitful third approach to foundations. Its evident advantage over intuitionism is the preservation of classical logic and arithmetic and of much larger portions of the rest of mathematics, and over formalism the interpretation of these" (Craig 1957, 318).

3 Elimination of the classical notion of set

In the second half of the 19th century, set theory was developed in search for a sound foundation of analysis (see Ferreirós 2007). As is well known, the first approach, so-called "naive" set theory, led to paradoxes that were then addressed by a more appropriate axiomatization. Nowadays the Zermelo–Fraenkel axiomatization with the Axiom of Choice (ZFC) is considered standard in set theory.

But for Lorenzen this whole development is unsatisfactory: Not only is an axiomatization not a valid kind of foundation for him, he believes that the whole concept of set that underlies Cantorian set theory is flawed. He makes this point in one way or another in nearly all of his papers concerned with foundational work. As he writes in the introduction to his 1955, 4: "In spite of Cantor's 'definition' of set—of which, as is known, nothing can be deduced, in as much as nothing can be deduced from Euclid's 'definition' of a point—a set in mathematics is never built through a 'collection into a whole' …."

The fact that classical analysis rests on this (in Lorenzen's view) mistaken concept of set is one of the big challenges which analysis, and in turn modern mathematics, has to face. So, a central requirement for a valid foundation for mathematics is the elimination of the classical concept of set[16] and its replacement with an alternative account of sets, while at the same time making sure that the fundamental theorems of classical analysis are preserved.

Lorenzen develops this alternative in a series of papers that are concerned with the concept of finite sets (Lorenzen 1952c), the concept of set and its use in topology (Lorenzen 1952a) and especially the concept of set in analysis (Lorenzen 1951a; 1951c). These papers lead up to Lorenzen 1955, where he explains in detail how the classical concept of set can be eliminated.

The core idea of Lorenzen's operationist system is the following: instead of having an informal definition of set that relies on a quasi-intuitive understanding of some kind of "collection", Lorenzen mathematically defines what a set is via abstraction from formulas.[17] Formulas and relations themselves are defined by giving rules that produce them.

As an example for such a procedure, consider the way Lorenzen (1951a, 2) shows how unary relations are built for atoms x, y, …:

1. If σ is a relation, then $\sigma(x)$ is a formula for a variable x.
2. Let a, B, $A(x)$ be formulas, then the following are formulas: $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$, $\neg A$, $\forall x\, A(x)$, $\exists x\, A(x)$.
3. If A_1, …, A_κ are formulas and σ a relation, then the following is a relation:
$$\mathbf{I}_\sigma\big(A_1 \to \sigma(x_1), \ldots, A_\kappa \to \sigma(x_\kappa)\big).$$

Clause 3 means that σ is the relation inductively defined by the rules

[16] For an instance where Lorenzen formulates this as a challenge, see Lorenzen 1954, 67.

[17] For the purposes of this paper we will not differentiate between "Aussage" and "Aussageform", which we will both translate as "formula". The difference lies in the use of free variables (see Lorenzen 1955, 178).

$$A_1 \to \sigma(x_1),$$
$$\vdots$$
$$A_\kappa \to \sigma(x_\kappa).$$

Over such a language, sets are now given through formulas:[18]

Let $A_1(x)$, $A_2(x)$ be formulas such that, for all x,

$$A_1(x) \leftrightarrow A_2(x),$$

then $\mathrm{M}_x\, A_1(x) = \mathrm{M}_x\, A_2(x)$, where $\mathrm{M}_x\, A(x)$ is the set of x such that $A(x)$.

Although the final setup in Lorenzen 1955 is more elaborate than this example,[19] the basic idea remains the same: Operative rules tell us how to build up certain symbol strings which then are formulas, relations and so on. On this basis, objects like sets and functions can be built, and therefore precise definitions for them can be given.

Before we look more closely at how this setup enables Lorenzen to give an operative account of the real numbers, we will first consider the case of arithmetic. Here we can see in more detail how deeply the operative conception of set differs from the classical notion. For arithmetic, Lorenzen develops an account of how to treat finite sets, namely, not as a specific instance of the general concept of set, but rather as an object that can be treated independently from general sets:

> Since with the constructive foundation [of mathematics] one can already operate with symbols of arbitrary (finite) length before giving the definition of a formula—and therefore also before giving the definition of the notion of set—one would not want the notion of finite set to depend on the later choice of a definition of formula .... It is only the colloquial name "finite set" which misleads us into believing that one would have to define "set" as a basic concept and then "finite" as a specific difference. (Lorenzen 1952c, 331)

Consider a certain kind of symbol strings $x, y, \ldots$ that is built by writing the symbol strings x and y and so on in the given way (these symbol strings x can, for example, be formulas of a certain calculus). Such an $x, y, \ldots$, called a *system*, can be derived from the following calculus:

---

[18] From the definition it may seem that there is no difference between Lorenzen's way of defining sets via abstractions as given here and (some form of) comprehension in standard set theory. However, Lorenzen had a more general notion in mind. When introducing abstractions in Lorenzen 1955, 100, to build terms from objects, he comments that starting with Frege and Russell one normally conceives of abstractions as classes:

> With this, abstractions should be reduced to the introduction of "classes". However, we will see below that classes are nothing more than a special case of abstract objects. (Lorenzen 1955, 101)

[19] For instance, the defining schemata for relations have to satisfy certain criteria, such as foundation, to avoid circularity.

I. x (x is a system),
II. $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, x$ (if $\mathbf{r}$ is a system, then also $\mathbf{r}, x$).

Finite sets can then be defined by abstraction: two systems yield the same finite set if they consist of the same objects, irrespective of the number and place of these objects in the system (so x, x, y, z gives rise to the same finite set as z, y, y, x, z), where the meaning of "consists of the same objects" is expressed through certain formulas.[20] So, when considering finite and general sets, Lorenzen goes the exact opposite way to the classical approach: he first defines finite sets as separate entities and only later adjusts the process of abstraction for general formulas to arrive at general sets.

Indeed, he is able to set up the whole of arithmetic with the use of systems and finite sets only. For instance, numbers are defined via the system Z from Section 2, and cardinal numbers are defined as the lengths of systems. In § 13, where he defines basic numbers, Lorenzen includes two interesting philosophical comments. The first concerns the way in which operative arithmetic does not face the problem of incompleteness in the same way in which classical axiomatic approaches to arithmetic do. Because operative mathematics rests on protological principles, it is able to provide (operative) proofs "by reasoning in terms of content" (*inhaltlich beweisen*; Lorenzen 1955, 135) for sentences that would be undecidable in an axiomatic system because of Gödel's Incompleteness Theorem.

The second comment is one of the few times he explicitly refers to the underlying concept of infinity for operative mathematics in his 1955. He points out that the system Z that defines numbers contains the idea of iteration and therefore also the, as he calls it, "purest form of potential infinity" (Lorenzen 1955, 133). He assumes that this process of iteration or potential infinity, implicit in every rule of a calculus, is understandable to everybody. Note that this does not necessarily mean that he *restricts* himself to potential infinity or that he rejects actual infinity in operative mathematics. Instead, the reference to potential infinity has the purpose of explaining why the process of iteration meets the underlying requirements of protologic,[21] namely to be understandable without assuming any prior logical knowledge.[22]

Of course, when considering analysis, finite sets are not enough. Rather, one has to use the general definition of sets via abstraction, as outlined above. Taking this as a starting point, Lorenzen then develops the so-called "language strata" (*Sprachschichten*), in which the objects of analysis appear step by step. The idea of language strata is intended to counter the underlying problem of impredicativity: Lorenzen (1955, 165) describes it, with Weyl, as the "mathematical process" that goes from considering things like

[20] Accounts of this way of treating finite sets can be found, for example, in Lorenzen 1952c and 1955.

[21] See Section 2 for an example of the basic principles of protologic.

[22] We will discuss the question of potential and actual infinity in more detail in Section 4.

numbers as objects to considering formulas *about* these objects as objects themselves—a process that in classical set theory allows the existence of the (unrestricted) power set.[23]

The language strata are built up in the following way (Lorenzen 1955, chap. 5): The basic language stratum S_0 consists of the basic objects, which can be built by operations on symbol strings. As we showed above, this also includes the basic numbers. S_1 then consists of all elements of the basic language and the first formulas that can be built via iteration of the following operations:

1. inductive definitions, which are usually formed through the use of an induction operator $\mathbf{I}_\sigma$ (*Induktionsoperator*);[24]
2. combinations with logical symbols $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$.

Sets of the first language stratum S_1 are then sets that can be formed in the way pointed out above via formulas of S_1. We can iterate this process and form S_2 in the same way we formed S_1 from S_0. In particular, we get a formula that represents an enumeration of the objects of S_1 and is itself an object of S_2. So, with S_2, we now have two types of sets: the sets that could already be formed from S_1 and the "new" sets that were formed by means of formulas from $S_2 \setminus S_1$. This process can be iterated and gives us the sequence $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$.

Interestingly, Lorenzen extends this method of iteration to countably infinite ordinals: S_ω is defined to be the union of the S_n for all finite n (and more generally, for a [countable] limit ordinal θ, S_θ is the union of all S_ν for $\nu < \theta$). $S_{\omega+1}$ is then again built over S_ω by the usual iteration of inductive definitions and application of logical symbols. The question at which countable ordinal to stop this iteration process is open,[25] though it is essential that it go beyond S_ω.[26]

In all language strata that are higher than the basic S_0 we are provided with iterations of sets: set of sets of basic objects, sets of sets of sets of basic objects, and so on; and if we want every set to appear as an element, we have to iterate up to a limit ordinal. At the same time, every higher language stratum also produces new sets of basic objects, as can be shown via Cantor's diagonalization method: there is no enumeration of the elements of S_ν in S_ν, but there is one in $S_{\nu+1}$.[27] As a consequence, the power set becomes a relative notion, namely relative to a specific language stratum, where every higher language stratum adds more sets.

[23] As we have seen in Section 2, Lorenzen places himself in the tradition of Russell's type-theoretic approach (see also Lorenzen 1956a, 275).

[24] We introduced this operator in the definition of a relation; see page 28 above.

[25] Lorenzen 1955, 189, names $\omega+1$, 2ω, ω^2 and ε_0 as candidates; Lorenzen 1956a, 275, names ω^ω.

[26] Lorenzen (1955, 189) argues that "[f]or analysis, in the way we will develop it in chapter 6, it is only necessary that we transcend ω."

[27] For a detailed construction of this argument, see Lorenzen 1955, 191–192.

In the same way we can also see that countability and uncountability are relative notions. As the enumeration of a language stratum S_ν is not an element of S_ν, the set of all basic objects in S_ν is not countable in S_ν, but it is in $S_{\nu+1}$. Therefore, uncountability will always be only relative to some language stratum, and this entails trivial solutions to the questions of the Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.

However, the difference between countability and uncountability is a central notion for classical mathematics, and therefore Lorenzen expands on the issue in Lorenzen 1956a. Here, he defines a substitute notion for uncountability and shows how it can be used to transfer the countability–uncountability distinction into operative mathematics. Consider the following definition (Lorenzen 1956a, 276): Fix a limit θ_1 and a second limit $\theta_2 > \theta_1$. All language strata up to S_{θ_2} are considered as constructed. Then we call all strata up to index θ_1 "primary" and all higher strata up to θ_2 "secondary". Similarly, a set is called "primary" if it is definable by a formula in a primary language stratum, and "secondary" otherwise.

Lorenzen immediately notes that the primary–secondary distinction does not seem to fit the usual countable–uncountable distinction. It can be shown that every infinite primary set contains secondary subsets, whereas subsets of countable sets are always countable. But, he argues, the notion of secondary set can be *used* in operative mathematics as a substitute for uncountability. To this purpose, he considers several examples from integration theory, measure theory and topology, in which instances he shows that the replacement works as intended. One example is the following: Real numbers are primary, as they can be introduced by dint of primary convergent sequences of rational numbers (which are primary themselves). But *intervals* of real numbers are secondary because every interval of reals consists of reals of arbitrarily high primary strata (Lorenzen 1956a, 276–277). He therefore argues that the notions of secondary set and uncountable set are "essentially" equivalent:

> Summing up, I would like to claim that the use of secondary strata (obviously not without boundaries, only up to the unproblematic ordinal numbers, like ω^ω), in connection with the linguistic means [*sprachliche Mittel*] available in every stratum, gives us enough mobility to mostly follow the lines of reasoning [*Gedankengänge*] of modern mathematics. (Lorenzen 1956a, 279)

At this point Lorenzen developed an operative analysis, which is "in essence" (*im wesentlichen*) similar to classical analysis. By "classical analysis", Lorenzen means analysis "in virtue of content" (*inhaltlich*), so, not an axiomatic system of analysis but concrete, non-abstract analysis or—as he puts it—everything that can be found in "current textbooks" (Lorenzen 1955, 196). This includes in particular everything that is needed for the natural sciences, like theoretical physics. He has therefore achieved his main goals: to present a foundation for mathematics that on the one hand is meaningful by being based on a mathematically definable concept of set while on the other hand still preserving the essence of classical analysis. For our purposes, the former is the more informative conclusion. We can now state that the elimination of the classical concept of set was a main motivation for Lorenzen's work on operative mathematics and that, in his view, he achieved his goal of replacing it with a more acceptable one. In the next chapter, we will examine how this endeavor relates to Lorenzen's views on the concept of infinity.

4 The question of infinity

4.1 A shift in focus

Let us now return to our initial claim about a shift in Lorenzen's treatment of infinity. As we mentioned in the introduction, Lorenzen is known for his rejection of actual infinity in his 1957. There, he uses operative mathematics as an example for a foundation of analysis that uses only potential infinity instead of requiring actually infinite sets. He concludes with the statement that actual infinity should be eliminated from modern mathematics (Lorenzen 1957, 11).

This might suggest that operative mathematics was motivated by the search for a framework that allows for such an elimination. Indeed this claim is made in the literature: In Stegmüller's review of Lorenzen's book (1955) on operative mathematics, he remarks that "from the beginning, the author is concerned with allowing no more than the 'potential infinite' in the foundation of mathematics, ... while abandoning the idea of 'completed infinities'" (Stegmüller 1958, 177). Heyting (1957) reviews both papers 1957, 1954 at once. He judges the former as the philosophical and the latter as the more mathematical paper, which together explain Lorenzen's operationist system. He points out that "the author agrees with intuitionists in so far as he does not accept the notion of actual infinity in mathematics" (Heyting 1957, 368).

Both reviews, however, appeared *after* Lorenzen 1957 (in the case of Heyting that is of course necessarily the case). Prima facie this does not seem to be problematic, as all of these works were tightly linked by the common topic of the operationist approach and its foundational role, as well as by publication date. But, surprisingly, when reviewing these works not in retrospect, but in chronological order, as a single body of work, actual infinity is not explicitly rejected by Lorenzen until his 1957. Rather, in the development of his operationist system, the question of infinity is not prominent at all. As we have shown in the previous chapter, what *is* heavily discussed is the notion of set and the deficiencies of the Cantorian notion of set, which make it unsuitable as a "good" foundation for mathematics.

This leads us to propose that in Lorenzen's focus on foundational questions a shift occurred, from the notion of set to that of infinity. Let us give the following classification:

First phase: In the early 1950s Lorenzen focuses on the *notion of set*. He sees it as his central task to eliminate the classical notion of set and to replace it with a rigorous operative definition. This provides a solution of the problem of uncountable sets, as *uncountability* only remains in a relative version, whereas in an absolute sense, all sets are countable.

Second phase: In the late 1950s Lorenzen's focus is on the *notion of infinity*. This is now primarily framed as the *distinction between potential and actual infinity* and it culminates in the goal of eliminating the actual infinite from mathematics.

To make the time frame of the above classification a little more precise, we will count the articles that lead up to Lorenzen 1955, and papers that expand on this, like Lorenzen 1956a, as belonging to the first phase, whereas Lorenzen 1957 marks the shift towards considering the question of infinity as the more fundamental one and is therefore already representative of the second phase.

Let us point out more clearly what this shift does and does not imply: It does not imply that Lorenzen's topic of research changed between the two phases outlined above. Instead, it is a change of focus regarding the issue of which notion (set or infinity) is the more fundamental and, therefore, whether eliminating the one or the other gives us better reasons to argue that the mathematical outcome is free of the inherent flaws of other foundational approaches. The technical way of explicating such a good foundation can be—and indeed is—the same, namely the framework of operative mathematics, but the *reason* for why one should consider it to be a good foundation differs. Naturally, the notions of set and of infinity are interconnected: in the first phase, the argument that the newly developed notion of set only relies on potential infinity is used as an additional argument for its soundness; in the second phase, the intended potentialist notion of infinity is explicated by using the operative notion of set.[28] Nevertheless, it still matters strongly which of the two notions is regarded as basic for foundational purposes, not least because changing one does not have to entail changing the other.[29]

So, our main goal here is to show that such a shift in focus occurs in Lorenzen's work. However, in proposing the occurrence of such a shift, we make no claim on whether operative mathematics constitutes a potentialist framework regarding infinity or not. Indeed we will treat this as a separate question, which due to constraints of space and time will have to be considered in a different article. The same holds for the question of *why* such a shift occurs. An analysis of this would require a much wider consideration of Lorenzen's philosophical development than we are able

[28] Examples where Lorenzen argues along these lines will be given below.

[29] The same holds for a connection that seems even more fundamental, namely, that between intuitionistic logic and potential infinity. Although it is generally assumed that they depend on each other, Linnebo and Shapiro (2019) show that there is an explication of potential infinity that still allows for classical logic.

to present in this context. We will therefore limit ourselves to pointing out some considerations towards both questions at the end of this article.

In the rest of this article we will argue for Lorenzen's proposed change in focus in the following way: Having already described that the elimination of the Cantorian notion of set was a main motivation for the development of operative mathematics in the first phase (see Section 3), we will show how Lorenzen shifts towards regarding, in the second phase, the question of infinity as more fundamental. As this is spelled out quite clearly in Lorenzen 1957, the main burden of proof for the proposed shift lies in arguing that the question of infinity was *not* prominent as the main foundational motivation in the first phase.

Let us therefore start by addressing this point first. What we intend to show is that in the first phase Lorenzen places no special emphasis on the question of potential vs. actual infinity and indeed does not explicitly commit himself to a standpoint in this debate. We will present two arguments: first, we point out that Lorenzen simply does not explicitly reject actual infinity, even in cases where it would be obvious to do so; and second, we lay out his argument that the problems usually associated with infinity are in fact problems that arise because of the Cantorian notion of set, whereby he reduces the question of infinity to that of the notion of set.

4.2 Constructs and infinity

Both lines of argument can be seen quite clearly in his article "On the consistency of the concept of infinity" (Lorenzen 1952b). In the first sentence he states: "The problematic nature of the concept of infinity is independent from that of set" (p. 591). This may seem surprising at first, as one major motivation of operative mathematics is to address the problems in modern mathematics by eliminating the classical notion of set. But in the following it becomes clear that by "concept of infinity" he means something very specific, namely the notion of infinity as it appears in *arithmetic*: "If one poses the question of the consistency of the notion of infinity, one wants to know whether no contradictory statements can be proven over $\mathbb{N}$, i.e., whether arithmetic (the theory of $\mathbb{N}$) is consistent" (1952b, 591). He then explains this further by arguing why the natural numbers are the right choice for such an investigation into the concept of infinity:

> Of course one could take any infinite set instead of $\mathbb{N}$—however, with such a formulation one would unnecessarily enter into the difficulty of the concept of set. What makes $\mathbb{N}$ so unproblematic as a set is that each of its elements is constructible. Starting from 1, by constructing an additional $a+1$ to each a, one obtains all natural numbers. We will call every set a "construct" whose elements can be constructed in such a (eventually much more complicated) way. (Lorenzen 1952b, 591)

He elucidates this point in the conclusion of the article:

> In cases where the dangers of contradiction still exist in connection with an infinite set, e. g., the set of all real numbers, all real functions, as they are used in classical analysis—in all these cases one will need to find "the error" not in the concept of infinity, but in the concept of set. (Lorenzen 1952b, 594)

How is this presentation of a concept of infinity to be understood? Being aware of Lorenzen's decisive rejection of actual infinity in later articles, one could in retrospect read this as the difference between potential and actual infinity. Indeed, several points seem to support this thesis, at least when looking at the first term of the distinction, namely, potential infinity. The way in which "constructs" are introduced accords with the usual way in which potential infinity is explained, i. e., there is some kind of procedure that can be used again and again, with the possibility of going on without end. So, it could be that, for Lorenzen, constructs are an acceptable way of describing infinity because, by being the products of a well-defined process, they are compatible with the framework of potential infinity.

However, if we claim that, in restricting the concept of infinity to that of constructs, the underlying motivation derives from the actual–potential infinity distinction, this immediately raises the question: Why doesn't Lorenzen say so? Instead, Lorenzen never once uses the term "potential infinity" throughout the article. A similar point could be made for his treatment of actual–potential infinity in his book on operative mathematics (Lorenzen 1955). Here, he does mention both concepts already in the introduction, when he describes Brouwer's intuitionistic program (1955, 2). But even though he uses the introduction many times to point out which philosophical and mathematical thoughts have influenced him in his work, he never commits to a standpoint in the actual–potential infinity debate. And, as we have seen in Section 3, even when he mentions potential infinity later on in the book, he never goes so far as to explicitly reject actual infinity. One example for such a remark is: "We have already when dealing with protologic presupposed the capacity on the part of the reader to conceive of every rule of a calculus as something potentially infinite" (1955, 133). The maximal commitment we find here is that he does not have to stay in a finitist framework because of his assumption that agents carrying out the schematic operations have the capacity to work with the potentially infinite.

Still, this kind of argument does not seem sufficient. There could be a number of reasons why he never explicitly stated the connection to the actual–potential infinity debate: he might have considered it to be unimportant to make this philosophical point in a more mathematical paper; he might have regarded it as so obvious that there was no need to bring it up; he might have been unaware of his underlying motivations (though this is quite unlikely).

To settle the question more satisfactorily, let us look more closely at the notion of "constructs" he introduces in the paper 1952b. This term seems to capture the concept of infinity he wants to consider (because it is an acceptable concept of infinity), whereas problems arise with sets that are not constructs. So our question from above reduces to the problem whether the introduction of constructs is motivated by questions about infinity or about the concept of set. As we have seen above, an argument can be made that the definition of constructs is motivated by the concept of potential infinity. What, then, about actual infinity? Could it be that Lorenzen simply understands everything which is not a construct, for example, the set of the real numbers, as an actually infinite set and therefore rejects it as an instance of acceptable infinity? He seems to hint at something like this when talking about what he (later in the article) calls the "schism in mathematics":

> Whether it is justified to demand a ban of all those sets which cannot be reduced to constructs, that is still a debated question. If one leaves this question open, the interesting situation arises which is on display in current mathematics: there are actually two mathematics, a constructive one (in particular in the intuitionistic form) and a classical one (the axiomatic variety also belongs here). (Lorenzen 1952b, 594)

In the same year that "On the Consistency of the Concept of Infinity" is published, Lorenzen gives a talk at the second "Colloque International Logique Mathematique" in Paris. This talk is later published as Lorenzen 1954, where he provides a more detailed account of the notion of construct. It is especially interesting to see how he frames the introduction of constructs: it is to provide an answer to the challenge of eliminating the naive concept of set from analysis (p. 67). The notion of construct is explained, similarly to 1952b, 591, as a foundation for the basic notion of set (1954, 70). He then discusses how and why it could be legitimate to restrict the naive notion of set in such a way, and presents his construction of the language strata system, where each language stratum S_n, and indeed also S_ω and $S_{\omega+1}$, are constructs (1954, 71).

At this point it becomes quite clear that Lorenzen regards the concept of set as much more fundamental than the concept of infinity. When the concept of set is restricted to the acceptable notion of constructs, the concept of infinity indeed becomes consistent with the arguments presented in 1952b. But this is a consequence of settling the question of what a "good" concept of set is. So, the question of the right concept of infinity is secondary to the question of the correct concept of set; indeed the former is resolved by resolving the latter.

It only remains to be shown whether he still holds this position in the final version of operative mathematics in 1955. Here he does not use the notion of construct; instead, he replaces it with a more elaborate setup in which the key notion is definiteness.

The notion of definiteness (*Definitheit*) is very basic for operative logic and mathematics. In a nutshell, the sentence "x is derivable" (or, respectively, "x is underivable") is called definite because we know by the operationist system how to prove it (respectively, how to refute it). This can be called "definite via proof" (*beweisdefinit*) and "definite via refutation" (*widerlegungsdefinit*), respectively. He gives an inductive definition of definiteness already in the introduction of his book 1955, 5:

1. Every formula that is decidable via schematic operations is called definite.
2. If a notion of being definite via proof or being definite via refutation is determined for a formula, then the formula itself is called definite.

He then builds up the operative notion of set in the way we described in Section 3, always making sure that his logical and mathematical setup remains definite. This becomes particularly important when deciding where to terminate the construction of language strata. As we have seen above, Lorenzen is not settled on the exact point where the construction of language strata has to end; the only thing that is crucial for arriving at classical analysis is that one make the step to S_ω or $S_{\omega+1}$. However, for further according with Lorenzen's philosophical convictions, it is equally important that the construction *does* end at some point![30] The reason for the restriction of this iterative process is given in 1955, 189:

> However, there would be no *definite* meaning in saying that the iteration should be continued "arbitrarily" long—in the same way, clauses from modern set theory, like the following, are not definite: "the index of the language strata should run through Cantor's II. number class (II. *Zahlenklasse*)".

So the notion of definiteness takes the place of the notion of construct in providing a boundary line for which sets should be permitted or excluded, as all operative sets have to appear in some language stratum. In a second step, this restriction of the concept of set then gives rise to the operative concept of infinity where uncountable infinities only appear relative to language strata.

We can therefore conclude that in the first of the proposed phases, Lorenzen indeed considered the concept of set the most fundamental *philosophical* notion in developing operative mathematics.[31] His main motivation was to resolve the problems introduced by the classical notion of set. Again, this does not mean that he did not care about the question of actual–potential infinity. But it was not prominent in his foundational motivations; rather, the question of how to deal with the infinite gets resolved by using the "right" conception of set. We will see how this changed in the next subsection.

4.3 Rejection of actual infinity

To show Lorenzen's shifting of focus towards the concept of infinity in the second of the proposed phases, we will concentrate on the article "The

[30] "... obviously not without boundaries, only up to the unproblematic ordinal numbers ..." (Lorenzen 1956a, 279).

[31] Again, this does not mean that he didn't have major mathematical motivations for the development of the operationist system (see also footnote 2).

Actual-Infinite in Mathematics" (Lorenzen 1957). The reasons for considering only this article are twofold: First, the article gives a very clear formulation of the motivation behind his work in what we called the second phase. Especially the programmatic part at the end of the article constitutes what we claim to be the content of the second phase. Second, soon after the publication of this article, Lorenzen began to abandon operative logic and mathematics. According to Lorenz (2001, 35), the reason was a flaw in the concept of definiteness that ultimately made it inappropriate for Lorenzen's purposes.[32] In his 1957, however, Lorenzen still considers operative mathematics, but this time motivated by eliminating the notion of actual infinity from mathematics.

This explains why the mathematical content of this paper is not new in comparison to his prior work. The philosophically motivated interpretation of this mathematical content, however, is novel, as Lorenzen looks at operative mathematics through the lens of the question of potential and actual infinity. Here we can find all of the direct references to these conceptions of infinity we were unsuccessfully looking for in the earlier works.

When introducing the construction of the natural numbers via the usual rules, Lorenzen states:

> [To] assert that infinitely many such numbers really exist, that they can really be constructed by following this rule, would of course be false. . . .
>
> In philosophical terminology we say that the infinity of the number sequence is only potential; that is, it exists only as a possibility but does not actually (i.e., not in reality) exist. (Lorenzen 1987, 196; translated from Lorenzen 1957, 4–5)

He concludes that "in arithmetic there is . . . no motivation to introduce the actual infinite" (1987, 197).[33] He then discusses how actual infinity comes up in geometry and in the construction of the real numbers and finally discusses modern set theory:

> It is this actual infinity of real numbers (latent in modern mathematics since the seventeenth century) that Cantor first brought explicitly to light, and it is the basis for the present acceptance of the Cantorian conception of infinity.
>
> With the admission of the set of all real numbers as a legitimate object for mathematics there is simultaneously admitted the "power set," that is, the set of all subsets. (Lorenzen 1987, 200; translated from Lorenzen 1957, 8)

All of this is neither historically nor mathematically new. But Lorenzen frames this development completely under the motivational point of view of the actual–potential infinity debate. What consequences does he then draw for the future development of mathematics? He states:

---

32 "It was Alfred Tarski who . . . convinced him of the impossibility to characterize arbitrary (logically compound) propositions by some decidable generalization of having a decidable proof-predicate or a decidable refutation-predicate. . . . Hence, Lorenzen's attempt of an inductive definition of 'definite' in order to find a characterization of propositions which relinquishes the synonymy of 'definite' and 'decidably definite' had to be accepted as inappropriate" (Lorenz 2001, 35).

33 Translated from Lorenzen 1957, 5.

> The key to the indicated solution lies in replacing Cantor's power set of the set C of all cardinal numbers with an appropriate potentially infinite set. . . . Thus, instead of the power set, we have to construct an appropriate potentially infinite set of propositional forms. (Lorenzen 1987, 201; translated from Lorenzen 1957, 10)

This is the locus where the proposed shift truly comes into play. Lorenzen still concludes that the concept of (a certain kind of) set has to be replaced by a different notion, but the motivation, explicitly stated, is to eliminate actual infinity. The replacement of the concept of set now becomes merely the way in which such a reduction to potential infinity is carried out. The new concept of set has to fulfill the requirement of being only potentially infinite; so, here, the concept of infinity is the primary concern; the concept of set is secondary. Lorenzen states this quite clearly in the programmatic appeal with which he concludes the article:

> If the conception developed here is correct, it represents for modern mathematics a reform . . . .
>
> Just as at that time the infinitely small was to be eliminated from mathematics, now also the infinitely large (more precisely, the actual infinite) is to be demonstrated to be dispensable. (Lorenzen 1987, 201–202; translated from Lorenzen 1957, 10–11)

5 Conclusion and outlook

We have shown above that Lorenzen shifts his focus from considering the concept of set as the more fundamental notion in his foundational work in operative mathematics, until the mid-50s, to focusing on the concept of the infinite and, in particular, the actual–potential infinity distinction in the later 1950s. This seems to indicate that Lorenzen's operative work was not simply a precursor for his later work, but a body of work with its own philosophical and mathematical motivations.

As mentioned before, two questions still remain open: First, why does this shift occur? And secondly, regardless of Lorenzen's motivations, does operative mathematics represent a framework for potential infinity? The answers to both questions require more work than can be done within the scope of this article; so let us just point out some considerations towards possible answers.

Regarding the question of why such a shift occurred, a simple answer presents itself. The 1950s marked a significant change for Lorenzen from an institutional point of view. Having been appointed a professor of mathematics at the University of Bonn in 1952, he changed to a professorship in philosophy at the University of Kiel in 1956. From a thematic point of view, this may not seem surprising, since he had been working on the foundations of mathematics for some years. Nevertheless, Lorenzen perceived it as a change himself, remarking upon it several times in correspondence with the philosopher Oskar Becker (who was Lorenzen's colleague in Bonn), as in this slightly sarcastic passage:

> Besides, as I am a "philosopher" now, this is all right with me, because it is common with "philosophical" books that they are completely misunderstood. (Letter from Lorenzen to Becker, August 22nd, 1957, OB 5-1-1, Philosophical Archive, University of Konstanz)[34]

So, one explanation for this shift is that the context of debate changed. One could argue that during the first phase, Lorenzen primarily wanted to inform the *mathematical* debate on foundational issues, as it developed in the aftermath of the so-called foundational crisis. In the second phase, however, Lorenzen re-framed his operationist approach to inform the *philosophical* debate about mathematical infinity. To fully argue for such a thesis, more work has to be done. But, reading Lorenzen's papers, one can always find hints that he was very aware of which discussions would be considered interesting for the mathematical community and its discourse on foundational issues, and which would be better suited for the philosophical community.[35] So, this is a viable candidate for an explanation of this shift.

The systematic question of whether the operationist approach is indeed a framework for potential infinity (and does not assume any kind of actual infinity) has no clear answer from the outset. Obviously, Lorenzen considered this to be the case, as he names operative mathematics as one way of replacing the usual power set with a potential infinity of formulas (Lorenzen 1957, 10). But this view did not remain uncontested. Niebergall (2004) analyzes the underlying assumption of infinity Lorenzen draws from in setting up basic numbers (via the usual rules presented in operative mathematics) and thoroughly examines Lorenzen's notions of "always-counting-on" and, more generally, rule-based infinite processes (see Niebergall 2004, 171). In the end he concludes that such approaches to infinity can never stay merely potential; one always has to assume some kind of actual infinity, "be it of infinite objects or be it of infinitely many objects" (Niebergall 2004, 171).[36]

Looking at operative mathematics, this analysis seems to hold even more strongly. Let us consider the fundamental framework in which operative analysis is developed, namely the framework of language strata. The fact that the first language stratum contains infinitely many objects can be explained

[34] "Da ich jetzt ja außerdem ‚Philosoph' bin, ist mir das auch insofern recht, weil es bei ‚philosophischen' Büchern ja gang und gäbe ist, daß sie völlig mißverstanden werden."

[35] One such occurrence is the following quote (more can easily be found in his papers): "Taking the cavalier attitude that most mathematicians display toward philosophical questions, we could try simply to ignore these 'sophistical' problems" (Lorenzen 1987, 197–198; translated from Lorenzen 1957, 6).

[36] This conclusion can be contested, though: one of the referees pointed out that Niebergall's critique only seems to hold when reconstructing Lorenzen's approach in standard set theory, and this is not the way Lorenzen intended it to be read. It would be interesting to contrast these different viewpoints in more detail and to investigate to what extent modern analyses (like the one of Linnebo and Shapiro 2019) can have an impact on Lorenzen's notion of potential infinity.

by the rule-based procedures of schematic operations (although this is exactly what Niebergall criticizes). However, the most important step in the construction of the language strata occurs when defining S_ω and $S_{\omega+1}$. As we have seen, S_ω is the union of all previous language strata. Note that this does not yet mean that we are actually building a new language over atoms in this step. This only happens when we define $S_{\omega+1}$. There, we consider the infinite union of all of the infinite sets in the S_n, and in $S_{\omega+1}$ we begin to add new objects to this infinite union of infinite objects. Thus, we now not only allow sets whose elements can be defined by a construction process, but we have to consider infinitely many different construction processes at once (to know if an x is in S_ω we have to search through infinitely many S_n and check if x appears in one of them). Lorenzen states that allowing such procedures is motivated by mathematical expediency:

> If we want to attain that every set also appears as an element, we have have to go up to a limit ordinal with the index of the language strata. For example, one can go beyond the language strata with finite index by building a set whose elements are u, $\{u\}$, $\{\{u\}\}$, ... This set is only representable in $S_{\omega+1}$. (Lorenzen 1955, 190)

As Lorenzen (1955, 189) himself remarks, this step is crucial for mirroring classical analysis in operative mathematics. Even if Niebergall's abovementioned arguments could be sidestepped, the setup with language strata seems to make it difficult to argue that operative mathematics provides a framework for potential infinity.

Perhaps a solution to this difficulty can be found in recent work on actual and potential infinity by Linnebo and Shapiro (2019). Here the authors address Niebergall's general claim that there is no clear way of expressing potential infinity without either staying finite or falling back on actualist assumptions about infinity (see Linnebo and Shapiro 2019, 166). They propose a way out of Niebergall's dilemma by using modal logic to explicate different potentialist positions. Indeed, they are able to show that there is a way of being potentialist about infinity while still using classical logic (instead of having to use intuitionistic logic). It could be an interesting future project to see how Lorenzen's operationist system, or indeed similar constructive approaches, fares when analyzed by means of Linnebo and Shapiro's modal explication.

References

Bernays, Paul. 1952. Review: "Über endliche Mengen" by Paul Lorenzen. *Journal of Symbolic Logic* 17 (4): 275–276.

Coquand, Thierry, and Stefan Neuwirth. 2017. "An introduction to Lorenzen's 'Algebraic and logistic investigations on free lattices' (1951)." arXiv:1711.06139 [math.LO].

———. 2020. "Lorenzen's proof of consistency for elementary number theory." *History and Philosophy of Logic*, to appear. doi:10.1080/01445340.2020.1752034

Craig, William. 1957. Review: *Einführung in die Operative Logik und Mathematik* by Paul Lorenzen. *Bulletin of the American Mathematical Society* 63 (5): 316–320.

Ferreirós, José. 2007. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*. Basel: Birkhäuser.

Fraenkel, Abraham A., Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy. 1973. *Foundations of set theory*. Volume 67 of Studies in Logic and in the Foundations of Mathematics. Amsterdam: Elsevier.

Frey, Gerhard. 1957. Review: Paul Lorenzen: Einführung in die operative Logik und Mathematik. *Zeitschrift für philosophische Forschung* 11:631–632.

Heyting, Arend. 1957. Review: Paul Lorenzen, *Das Aktual-Unendliche in der Mathematik*; Paul Lorenzen, *Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis*. *Journal of Symbolic Logic* 22 (4): 368.

Kahle, Reinhard, and Isabel Oitavem. 2020. "Lorenzen between Gentzen and Schütte." In this volume, pages 61–73.

Linnebo, Øystein, and Stewart Shapiro. 2019. "Actual and potential infinity." *Noûs* 53 (1): 160–191.

Lorenz, Kuno. 2001. "Basic objectives of dialogue logic in historical perspective." *Synthese* 127:255–263.

Lorenzen, Paul. 1951a. "Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis." *Mathematische Zeitschrift* 54:1–24.

———. 1951b. "Konstruktive Begründung der Mathematik." *Mathematische Zeitschrift* 53:162–202.

———. 1951c. "Maß und Integral in der konstruktiven Analysis." *Mathematische Zeitschrift* 54:275–290.

———. 1952a. "Über den Mengenbegriff in der Topologie." *Archiv der Mathematik* 3:377–386.

———. 1952b. "Über die Widerspruchsfreiheit des Unendlichkeitsbegriffes." *Studium Generale* 5:591–594.

———. 1952c. "Über endliche Mengen." *Mathematische Annalen* 123:331–338.

———. 1954. "Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis." In *Applications scientifiques de la logique mathematique: Actes de 2^{e} Colloque International Logique Mathematique, Paris 25–30 aout 1952, Institut Henri Poincaré*, pages 65–73.

———. 1955. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Springer.

———. 1956a. "Die Fiktion der Überabzählbarkeit." In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954, Amsterdam September 2 – September 9*, volume III, pages 273–279. North-Holland.

———. 1956b. "Über den ‚Operativismus'." Unpublished document.

———. 1957. "Das Aktual-Unendliche in der Mathematik." *Philosophia*

Naturalis 4 (1): 1–11.

———. 1960. "Constructive and axiomatic mathematics." *Synthese* 12 (1): 114–119.

———. 1987. "The actual-infinite in mathematics." Translation by K. R. Pavlovic of Lorenzen 1957. In his *Constructive philosophy*, pages 195–202. Amherst: University of Massachusetts Press.

Niebergall, Karl-Georg. 2004. "Is ZF finitistically reducible?" In *One hundred years of Russell's Paradox: Mathematics, logic, philosophy*, edited by G. Link, pages 153–180. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Schroeder-Heister, Peter. 2008. "Lorenzen's operative justification of intuitionistic logic." In *One hundred years of intuitionism (1907–2007): The Cerisy conference*, edited by M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau, and G. Heinzmann, pages 214–240. Basel: Birkhäuser.

Sieg, Wilfried. 1999. "Hilbert's programs: 1917–1922." *Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1): 1–44.

Skolem, Thoralf. 1957. Review: Paul Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. *Journal of Symbolic Logic* 22 (3): 289–290.

Stegmüller, Wolfgang. 1958. Review: Paul Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. *Philosophische Rundschau* 6 (3/4): 161–182.

Weyl, Hermann. 1918. *Das Kontinuum*. Leipzig: Veit & Co.

Lorenzen and Constructive Mathematics

Thierry Coquand

Abstract The goal of this paper is to present a short survey of some of Lorenzen's contributions to constructive mathematics, and its influence on recent developments in mathematical logic and constructive algebra. We also present some work in measure theory which uses these contributions in an essential way.

Introduction

The school of mathematics in Germany between the two world wars – Noether, Herglotz, Artin, Schmidt, Krull, Hasse, ... – was truly exceptional. This is described in P. Roquette's survey (2018), which emphasizes in particular the importance of the work of Hasse. Lorenzen was Hasse's student, and so was in direct contact with several members of this school.

A new feature was the use of highly non-effective methods in *algebra*. The axiom of choice was used to show the existence of prime ideals (Krull), or to show the existence of the real or algebraic closure of a given field. A striking example was the use of real algebraic closures by Artin and Schreier (1927) to solve Hilbert's 17th problem.

Lorenzen was quite unique in this group of mathematicians in being aware of mathematical logic, in particular the contribution of Gentzen. He was able to connect his work in algebra, analysing the use of lattice theory, which started in Dedekind's analysis of ideal numbers, with *proof theory*. While connections between lattice theory and logic were known since the work of Peirce (1885) and Schröder (1890–1910), connections between lattice

Thierry Coquand
Computer Science and Engineering Department, University of Gothenburg, Sweden, e-mail: coquand@chalmers.se

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_4

theory and proof theory were quite original.[1]

The work Neuwirth 2020 presents a detailed analysis of this unique situation, containing the following extract of a letter from Krull to Scholz (1953), which illustrates well how Lorenzen's contribution was perceived:

> In working with the uncountable, in particular with the well-ordering theorem, I always had the feeling that one uses fictions there that need to be replaced some day by more reasonable concepts. But I was not getting upset over it, because I was convinced that in a careful application of the common "fictions", nothing false comes out, and because I was firmly counting on the man who would some day put all in order. Lorenzen has now found according to my conviction the right way ....

The goal of this paper is to present a short survey of some of Lorenzen's work in constructive mathematics, and its influence on recent developments in mathematical logic and constructive algebra. We also present some work in measure theory which uses Lorenzen's contributions in an essential way.

1 Lorenzen's analysis of Gentzen's work

1.1 The consistency proof

Lorenzen (1951a) presents Gentzen's consistency proof as a proof about an infinitary cut-free calculus showing that the cut rule is *admissible* ("zulässig"). Two highly original features of his argument are that the metatheory is *constructive* (with use of generalised inductive definitions) and that there is no ordinal analysis. At about the same time, and independently, P. S. Novikov (1943) had a similar analysis, and also introduced the notion of an admissible/derivable rule (Citkin 2016). For a historical presentation of Lorenzen's work on infinitary calculus, see Coquand and Neuwirth 2020.

Apart from Novikov, most treatments in proof theory (Gentzen, Schütte, Takeuti) involve ordinal analysis. From a *constructive* point of view (and for me personally), the purely inductive presentation is much clearer. One objection against this use of infinitary calculus is that, for a consistency proof of *arithmetic*, the use of generalized inductive definitions is too strong. Indeed, for this purpose the negative translation works just as well, by a purely syntactical argument. Furthermore, an ordinal analysis presents very refined information about what is going on in proofs of arithmetic, information that we cannot get by Lorenzen's proof. However, Lorenzen's argument provides, as we shall see below, an effective description of the free σ-complete Boolean algebra on a given Boolean algebra, and this is definitely interesting from a mathematical point of view.

[1] The only exception seems to have been the previous work of Skolem (1920).

For establishing the consistency of *stronger* calculi, such as Π^1_1-analysis, one can even argue that ordinal analysis is, from a constructive point of view, a kind of diversion. For instance, Takeuti proves consistency of this system with a system of ordinal diagrams in a finitary way. To have a *constructive* explanation of Π^1_1-comprehension, however, one needs furthermore, as emphasized, e.g., in Kreisel's (1964) review of Takeuti's proof or in Feferman's (1977) review of Takeuti's book on proof theory, to explain that ordinal diagrams are well-founded in an *intuitionistic* theory of inductive definitions. A direct explanation of Π^1_1-comprehension in an intuitionistic theory of inductive definitions (such as one obtained by use of Buchholz's Ω-rule; Buchholz and Schütte 1988) seems thus to be preferred.

To allow generalized-inductively defined objects in a constructive setting was highly original. Apart from Novikov, the only example of this I could find are proofs in the book *Notes on Constructive Mathematics* (1968) by Martin-Löf. There, however, infinitary objects are not represented directly, but only via coding as recursively enumerable sets (which arguably obscures the main ideas).

In their paper 1959, Lorenzen and Myhill analyse different ways to define subsets of natural numbers and introduce the stratification given in Table 1.

(I) By explicit definition, quantifying only over natural numbers
(II) By inductive definition, quantifying only over natural numbers
(III) By explicit definition, quantifying only over the (denumerable) totality of sets previously obtained
(IV) By inductive definition, with the same restriction on quantifiers
(V) By uninhibited use of function-quantifiers

Table 1 Lorenzen–Myhill stratification of definitions of sets.

Use of generalized inductive definitions (IV) is presented as the "method of Lorenzen" exposed in Lorenzen 1955, with the comment that it "exhausts those means of definition at present known which are acceptable from a standpoint which rejects the actual infinite" (p. 48). The last method (V) is impredicativity, which has no constructive justification. This logical description of methods used in mathematics is quite similar to the one of Martin-Löf in his paper 2008.

The method (IV) goes beyond what has been called "predicative" mathematics, after the work of Schütte (1965) and Feferman (1964), but it is needed in constructive mathematics, as shown by Lorenzen in his analysis of the Cantor–Bendixson Theorem, which we explain below.

1.2 The inversion principle

In Lorenzen's description of the mathematical universe, we have a calculus of inductively defined objects and inductive proofs/recursively defined functions on these objects.

For instance, we inductively describe the natural numbers by two production rules,

$$\to | \qquad \text{and} \qquad x \to x|,$$

but we also inductively describe the relation of equality, by the two production rules

$$\to \ |=| \qquad \text{and} \qquad x=y \ \to \ x|=y|.$$

One important discovery of Lorenzen is the *inversion principle* (Lorenzen 1955). Let us illustrate this principle on the example of the above inductive description of equality. We have as an *admissible* rule (this notion was also introduced by Lorenzen)

$$|=x| \ \to \ \bot,$$

since there is no way to derive an equality of the form $|=x|$. Similarly, we see that

$$x|=y| \ \to \ x=y$$

is an admissible rule.

This way of describing objects and proofs is now common practice in computer science. It is, e.g., used extensively for expressing and proving properties of the semantics of programming languages (as in Kahn's natural semantics; Kahn 1987) in interactive proof systems. Just to give an example, Lorenzen's paper 1951b could almost be written as it is in proof systems for type theory.

In 1992, we noticed that this inversion principle corresponds to the notions of *pattern-matching* and *case notation* in functional programming (Coquand 1992). This provides a convenient notation for inductive proofs, which is closely connected to the work Hallnäs and Schroeder-Heister 1990 on definitional reflection. More recent works in this direction are N. Zeilberger's 2009 and J. Cockx' Ph.D. thesis (2017).

1.3 Distributive lattices and entailment relations

With respect to this topic, Lorenzen seems to be now mainly known for the following result, which is actually only implicit in his fundamental paper 1951a.

Theorem 1 *A lattice is distributive if, and only if, it satisfies the (cut) rule*

$$\frac{a \wedge c \leqslant b \qquad a \leqslant b \vee c}{a \leqslant b}$$

This result is cited, e.g., in Curry's book 1976 (Theorem B9, Chap. 4). The paper Lorenzen 1951a actually contains a deeper application of proof theory to the study of distributive lattices, via the notion of an *entailment relation*. An entailment relation $E, \vdash$ is a relation $a_1, \ldots, a_n \vdash b_1, \ldots, b_m$ between finite subsets of a given abstract[2] set E such that

1. $X \vdash Y$ if X and Y intersect,
2. $X \vdash Y$ if $X' \vdash Y'$ and $X' \subseteq X$ and $Y' \subseteq Y$,
3. $X \vdash Y$ if $X, a \vdash Y$ and $X \vdash Y, a$.

We can have $n = 0$ or $m = 0$, which means that, in this way, we present *bounded* distributive lattices, i.e., ones with a greatest and a least element. Earlier, Lorenzen (1953) also considered the notion of an *unbounded* entailment relation, where m and n have to be > 0.

Entailment relation is the key notion for presenting distributive lattices/spectral spaces in an elegant way, as explained in Cederquist and Coquand 2000. If D is a (bounded) distributive lattice, an *interpretation* of $E, \vdash$ is a map $j \colon E \to D$ such that $X \vdash Y$ implies $\bigwedge j(X) \leqslant \bigvee j(Y)$. By universal algebra, there exists a universal interpretation $i \colon E \to L$: it is an interpretation such that, for any other interpretation $j \colon E \to D$, there is a *unique* map $f \colon L \to D$ such that $j = fi$. The following result is essentially stated as such in Lorenzen 1951a.[3]

Theorem 2 (Cederquist and Coquand 2000) *Let $E, \vdash$ be an entailment relation. If $L, i \colon E \to L$ is the universal interpretation then we have $X \vdash Y$ if, and only if, $\bigwedge i(X) \leqslant \bigvee i(Y)$.*

Let us give an example from algebra. On a given integral domain R, a *valuation* for R is a domain $V \supseteq R$ in the field K of fractions of R such that, for any $a \neq 0$ in K, we have either $a \in V$ or $a^{-1} \in V$. A fundamental result, proved using Zorn's Lemma, is that an element of K is integral over R (i.e., the root of a unitary polynomial in $R[X]$) if, and only if, it belongs to all valuation domains. Lorenzen was able to describe directly and effectively an *unbounded* entailment relation $X \vdash Y$ where X and Y are finite sets of non-zero elements of K, which, classically, would be equivalent to the following relation: for all valuation domains V, there exist a in X and b in Y such that b/a is in V.

Lorenzen's (1953) description was the following. If $x_1, \ldots, x_n$ are elements in the fraction field of R, we write $(x_1, \ldots, x_n)$ for the R-module generated by $x_1, \ldots, x_n$.

Theorem 3 *The relation (for non-zero elements of the field of fractions of R)*

$$a_1, \ldots, a_n \vdash b_1, \ldots, b_m \quad \leftrightarrow \quad 1 \in \sum_{i>0} \left(a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_n b_m^{-1}\right)^i$$

[2] By this, we mean that E does not need to be a set of syntactically defined objects but can be a set of objects in an arbitrary mathematical structure.

[3] There is a similar result for connecting *unbounded* distributive lattices and *unbounded* entailment relations.

is an (unbounded) entailment relation which is classically equivalent to the fact that if V is an arbitrary valuation domain then we have $b_i/a_j \in V$ for some i, j.

See Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019 for different proofs and comments on this result. For instance, $a \vdash b$ holds if, and only if, b is integral over a. In particular, b is integral over R if, and only if, we have $1 \vdash b$, which can be seen as a constructive version of the result that an element is integral if, and only if, it belongs to all valuation domains. We think this example illustrates well the way Lorenzen's work provides a constructive analysis of non-effective methods in algebra (as evocated in Krull's letter cited in the introduction).

This was in part rediscovered in Coquand and Persson 2001, but expressed there for a *bounded* entailment relation $X \vdash Y$ on K representing classically the relation: if all elements of X are in V then some element of Y is in V.

2 Proof-theoretic analysis of point-free spaces

In this section, we want to present Lorenzen's (1958) analysis of Cantor–Bendixson's Theorem. It states that if F is a closed subset of $[0,1]$ then we can find a closed subset $K \subseteq F$ which is *perfect* (i.e., K has no isolated points) and such that $F - K$ is countable. Since K has the power of the continuum if it is not empty, this shows that the continuum hypothesis holds for closed subsets of $[0,1]$. The way we build K is by a transfinite process: we first define the derivative F' of F obtained by removing from F its isolated point, and we iterate this operation (maybe transfinitely) in order to get a fixed point $K = K'$. The analysis of this theorem was crucially needed in Kreisel's paper 1959. Defining the kernel requires, a priori, being at stage (v) of the Lorenzen–Myhill stratification in Table 1. What is remarkable about this result is that, as shown by Kreisel, Cantor–Bendixson's Theorem requires methods going beyond what has been called "predicative mathematics" by Feferman (1977) and Schütte (1965), but, and this is Lorenzen's contribution, it can be captured constructively using Method (iv) of Table 1. In characteristic manner, Lorenzen presents in his 1958 only the main idea, without ever providing all the details (they can be found in the proof of Theorem 1 of Kreisel 1959).

In order to present this analysis as simply as possible, we will do it for Cantor space instead of $[0,1]$ (as is done in Lorenzen 1958). As a set of points, the Cantor space is the set Ω of infinite binary sequences $\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ As a point-free space, where we describe directly in algebraic (and effective) terms its compact open subsets, it can be seen as the Boolean algebra C of propositional logic, i.e., the Boolean algebra freely generated by countably many formal atoms written $\omega_k = 1$ or $\omega_k = 0$. For instance, $\omega_1 = 0 \wedge \omega_3 = 1$ represents a compact open subset of Ω, namely all sequences ω such that $\omega_1 = 0$ and $\omega_3 = 1$. We write σ, σ_1, etc. for finite binary sequences. Each such finite sequence σ represents a compact open subset, namely the set of all infinite sequences extending σ. Seen as a set of sequences, σ is equal to the union of the two sets defined by its direct extensions $\sigma 0$ and $\sigma 1$.

Using this representation, an open subset U of Ω can be represented as a *predicate* $U(\sigma)$ such that $U(\sigma)$ holds if, and only if, we have both $U(\sigma 0)$ and $U(\sigma 1)$. In terms of sets of infinite sequences, $U(\sigma)$ expresses that the compact open set represented by σ is a subset of the open set represented by U. Dually, such a predicate can also be thought of as representing the closed subset complement $F = \Omega \backslash U$. As explained above, the main operation in Cantor–Bendixson's Theorem is the forming of the derivative of a closed subset, which is obtained by taking away the isolated points of this subset. Dually, this can be understood as an operation $U' \supseteq U$ on open subsets U such that $\Omega \backslash U'$ is the derivative of $\Omega \backslash U$.

One crucial insight of Lorenzen is that we can define U' in terms of an operation on predicates on finite binary sequences. We can indeed express the fact that σ contains at most one point of $\Omega \backslash U$ as follows: at level 1, we have $U(\sigma 0)$ or $U(\sigma 1)$, at level 2, we have $U(\sigma 0) \wedge U(\sigma 10)$ or $U(\sigma 0) \wedge U(\sigma 11)$ or $U(\sigma 1) \wedge U(\sigma 00)$ or $U(\sigma 1) \wedge U(\sigma 01)$, and so on. We can thus write a formula $A(U, \sigma)$ involving a universal quantification on natural numbers, such that $A(U, \sigma)$ expresses that σ, seen as a set of infinite sequences, contains at most one point in $\Omega \backslash U$. The inductive definition of U' is then

1. $U'(\sigma 0) \wedge U'(\sigma 1) \rightarrow U'(\sigma)$,
2. $A(U, \sigma) \rightarrow U'(\sigma)$,

and $U'(\sigma)$ expresses classically that there are only finitely many points of F in the compact open set represented by σ.

The kernel of F is obtained by iterating (maybe transfinitely) the derivative operation for F. In terms of open sets, this can be represented by the following inductive definition:

1. $U(\sigma) \rightarrow V(\sigma)$,
2. $V(\sigma 0) \wedge V(\sigma 1) \rightarrow V(\sigma)$,
3. $A(V, \sigma) \rightarrow V(\sigma)$.

With this definition, we have that $\Omega \backslash V$ represents the kernel of $\Omega \backslash U$. Since the predicate $A(V, \sigma)$ involves a universal quantification on natural numbers, this description of the kernel uses a *generalized inductive definition* (Lorenzen and Myhill 1959), but it is constructive and does not involve a classical theory of uncountable ordinals.

3 Measure theory

3.1 Borel subsets of Cantor space

The analysis by Lorenzen of Gentzen's cut-elimination contains an effective description the σ-complete Boolean algebra generated by a given Boolean algebra. More generally, given an entailment relation $E, \vdash$ as defined above, Lorenzen describes the σ-complete Boolean algebra B with an interpretation $v \colon E \to B$ universal for this property. He then proves

Theorem 4 *For the universal σ-complete Boolean algebra B with an interpretation $v \colon E \to B$, we have*

$$a_1, \ldots, a_n \vdash b_1, \ldots, b_m \quad \leftrightarrow \quad v(a_1) \wedge \cdots \wedge v(a_n) \leqslant v(b_1) \vee \cdots \vee v(b_m).$$

This result is cited in the reference Beth 1959 (which might, surprisingly, be the only published reference to this remarkable result from the paper Lorenzen 1951a). If we start from the Boolean algebra C of *propositional logic*, which is the Boolean algebra generated from countably many atoms, we get a σ-complete Boolean algebra B. As explained above, C can be seen as a point-free presentation of *Cantor space*, which is the set Ω of all infinite binary sequences $\omega = \omega_0, \omega_1, \ldots$ The algebra B can then in turn be seen as a point-free presentation of the σ-complete Boolean algebra of *Borel sets* on Cantor space. This was noticed by Martin-Löf (1968). If we start from the Boolean algebra with two elements, we get the σ-complete Boolean algebra of *hyperarithmetical propositions*.

In this point-free view, a Borel set X is given inductively: X is a propositional formula or X is of the form $\bigvee_n X_n$ or X is of the form $\bigwedge_n X_n$. Lorenzen defines a sequent calculus $X_1, \ldots, X_n \vdash Y_1, \ldots, Y_m$ and proves that the cut rule is admissible. This means that we can prove the rule

$$\frac{\Gamma, X \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash X, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

by case analysis and induction on the two given derivations. Essentially the same argument is done in Martin-Löf 1968.

We can define $X \subseteq Y$ by $X \vdash Y$. We have $X \subseteq X$ by induction on X and, using cut-elimination, $X \subseteq Z$ if $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq Z$. Indeed, if we have $X \vdash Y$ and $Y \vdash Z$ then by weakening we get $X \vdash Y, Z$ and $X, Y \vdash Z$, and then by cut-elimination we get $X \vdash Z$.

An example of a point-free description is the set of *normal* binary sequences

$$N = \bigwedge_k \bigvee_m \bigwedge_{n \geqslant m} b_{n,k}$$

with $b_{n,k}$ a point-free representation of

$$\left\{\, \omega \in \Omega \;\middle|\; -\frac{1}{k} \leqslant \frac{\Sigma_{i<n}(2\omega_i - 1)}{n} \leqslant \frac{1}{k} \,\right\}.$$

In the classical approach this is thought of as a set of points (the complement of which is not countable and of measure 0). In the present setting, it is a purely symbolic expression. A satisfactory theory of the measures of Borel sets should prove that this set, defined in this "symbolic" way, is of measure 1.

3.2 Borel's measure problem

As explained above, Borel sets can be described inductively. The following is then a natural question: Can we define the measure $\mu(X)$ of a Borel set X by induction on X? Borel's (1894) own formulation was the following (for subsets of $[0,1]$): we design a formal theory which describes how the measure should work, and we have to prove that this formal theory is *consistent*.

As presented by Lusin (1930), the question can be seen as a *coherence problem*: we have to provide an inductive definition of the measure $\mu(X)$ of a Borel set X such that $X \vdash Y \rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$. Lusin, in his book 1930, asked for a purely inductive solution of this problem, and called this question *Borel's measure problem*.

3.3 An inductive solution of Borel's measure problem

In 1959 (p. 48), Lorenzen and Myhill wrote, referring to the stratification in Table 1:

> We regard as important the problem of determining what sets, relative to the function-quantifier hierarchy, are definable by this method. For Method (IV) exhausts those means of definition at present known which are acceptable from a standpoint which rejects the actual infinite; so that the determination of the extent to which sets definable by this method penetrate the function-quantifier hierarchy would be of no small significance from the point of view of foundations. For it would yield a quantitative measure of the extent to which discourse involving the quantifiers $\bigwedge_f$ and $\bigvee_f$, which *seems* to refer to an actual infinite, can be so paraphrased as to avoid such statements.

We provide here such an analysis for *measure theory*. In the usual treatment (Lebesgue, Daniell, Bourbaki), it refers to an actual infinite. It can, however, as we explain here, be described purely at the level of Method (IV), i.e., using generalized inductive definitions.

Here, I show how to recursively define $r < \mu(X)$ as a *hyperarithmetical* proposition by induction on X. We take the usual measure on Cantor space:

if X is a propositional formula, $\mu(X)$ is a rational and $r < \mu(X)$ is 0 or 1. For instance, $\mu(\omega_1 = 0 \wedge \omega_3 = 1) = 1/4$.

The approach of Borel (1894), inspired by the work of Drach, is to specify abstractly what properties any measure should satisfy, and to prove then that these conditions do not produce any contradiction. The condition is that the measure of a *disjoint* countable union be the sum of the measures (and to require in particular that this sum actually converges).

Here is a simple example of the potential *coherence* problem in this specification. If we define $X_0 = \bigwedge_k [\omega_k = 0]$ and $X_{n+1} = \bigwedge_{i<n}[\omega_i = 0] \wedge [\omega_n = 1]$, we have $1 = \bigvee_n X_n$ and $\mu(1) = 1$ and $\mu(X_0) = 0$ and $\mu(X_{n+1}) = 1/2^{n+1}$. We see that we have two ways to write 1 as a disjoint sum of elements: either as 1 itself or as the disjoint sum of the X_n. We can then check the consistency of these two possible ways to compute $\mu(1)$ since we have $1 = 0 + 1/2 + 1/4 + \cdots$.

The main difficulty in this inductive approach is how to define $r < \mu(X)$ if X is a disjunction or conjunction. The problem is that if X is, for instance, a disjunction $\bigvee_n X_n$, not necessarily disjoint, then $\mu(X)$ is not a function of the sequence $\mu(X_n)$ anymore. There is thus a problem in defining $\mu(X)$ by induction on X.

One solution is provided by the remarkable paper of F. Riesz (1930): if X is the disjunction of the family X_n then the function $\mu_X\colon b \mapsto \mu(b \wedge X)$ on propositional formulas *can* be defined in terms of μ_{X_n}.

The recursive definition of F. Riesz is, for $X = \bigvee_n X_n$, given by

$$\mu_X(b) \;=\; \bigvee_{\substack{b=b_1,\dots,b_k\\ n_1<\cdots<n_k}} \sum_{\kappa=1}^{k} \mu_{X_{n_\kappa}}(b_\kappa),$$

where $b = b_1, \dots, b_k$ is a *partition* of b.

If $X = c$ then we can compute $r < \mu(b \wedge c)$, and this is the value of $r < \mu(b \wedge X)$.

If $X = \bigvee_n X_n$ then $r < \mu(b \wedge X)$ is the formula

$$\bigvee_{\substack{b=b_1,\dots,b_k\\ r=r_1+\cdots+r_k\\ n_1<\cdots<n_k}} \bigwedge_{\kappa=1}^{k} \big(r_\kappa < \mu(b_\kappa \wedge X_{n_\kappa})\big).$$

For $X = \bigwedge_n X_n$, we should have $\mu(b \wedge X) = \mu(b) - \mu(b \wedge \bigvee_n X'_n)$, where X'_n is the formal complement of X_n and

$$\mu\Big(b \wedge \bigvee_n X'_n\Big) \;=\; \bigvee_{\substack{b=b_1,\dots,b_k\\ n_1<\cdots<n_k}} \sum_{\kappa=1}^{k} \mu(b_\kappa \wedge X'_{n_\kappa}).$$

From this, we deduce the value of $r < \mu(b \wedge X)$ as the formula

$$\bigvee_{r<s} \bigwedge_{\substack{b=b_1,\ldots,b_k \\ n_1<\cdots<n_k}} \bigvee_{s=s_1+\cdots+s_k} \bigwedge_{\kappa=1}^{k} s_\kappa < \mu(b_\kappa \wedge X_{n_\kappa}).$$

Using these equations recursively, we define $r < \mu(b \wedge X)$ as a *hyperarithmetical* formula.

In this way, we get a purely inductive description of measure theory. We are at stage (IV) of Lorenzen and Myhill's stratification in Table 1. The proof given by Riesz (and by Lebesgue, Daniell, Bourbaki) that the definitions work, however, uses *impredicative* arguments that are at stage (V) of this stratification. The new discovery is that it is possible to show in a *purely inductive way* the following result.

Theorem 5 *If $X \vdash Y$ then $\left[r < \mu(b \wedge X)\right] \leqslant \left[r < \mu(b \wedge Y)\right]$. Hence if X and Y define the same Borel subset of Cantor space, $\mu(X) = \mu(Y)$.*

This shows the consistency of our definition: if X and Y represent the *same* Borel set then $r < \mu(b \wedge X)$ and $r < \mu(b \wedge Y)$ are equal.

This analysis is provided in Coquand 2004, where I also give a presentation of measure theory using only generalized inductive definitions and no impredicative arguments.

As an application, we can show, purely inductively, that $r < \mu(1 \wedge N)$ is provable for each $r < 1$, where N is the symbolic representation of the set of normal binary sequences described above. We get in this way a proof of $\mu(N) = 1$ which involves only inductive reasoning.

4 Game semantics

In this last section, I briefly present Lorenzen's extremely original work on game semantics. A formula is seen as specifying a game between two players, the *proponent* and the *opponent*, who argue about the truth value of the formula. A proof of the formula is then seen as a *winning strategy* for the proponent in this game. Lorenzen (1959) has, for instance, a suggestive analysis of the formula $\neg\neg a \rightarrow a$ and of why it is not intuitionistically valid. The idea is to consider a statement a for which the opponent has a proof which is not known by the proponent. If the opponent asserts $\neg\neg a$, the proponent (who does not know the proof of a) has to challenge the opponent by asserting $\neg a$ (hoping that the opponent does not know the proof of a either). But then the opponent wins by giving the proof of a.

Lorenzen (1959) mentions that we can get an interpretation of *classical* logic by allowing the proponent to backtrack. In Coquand 1995, I suggested an analysis of *cut-elimination* based on this interpretation, describing cut-elimination as an interaction between two strategies that can both backtrack. We can in this way give a proof of termination of the cut-elimination process, essentially different from the one of Gentzen. This has recently been used by F. Aschieri (2017) to provide a nontrivial refinement of Gentzen's upper bound (with a tower of exponentials) for the depth of the resulting proof obtained by the cut-elimination process in terms of the level of *backtracking* of the strategies. For instance, if *one* strategy has only one level of backtracking, the upper bound is given by a *single* exponential (whatever the complexity of the cut formula).

This idea of game interpretation has also been refined in various ways. An extension of this interpretation to *analysis* is described in Berardi, Bezem, and Coquand 1995, giving in particular a different interpretation than the one of Spector (1961). See also the interpretation of the axiom of determinacy in Hida 2012.

References

Artin, Emil, and Otto Schreier. 1927. "Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper." *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 5:225–231.

Aschieri, Federico. 2017. "Game semantics and the geometry of backtracking: A new complexity analysis of interaction." *Journal of Symbolic Logic* 82 (2): 672–708.

Berardi, Stefano, Marc Bezem, and Thierry Coquand. 1995. "A realization of the negative interpretation of the Axiom of Choice." In *Typed lambda calculi and applications: Second international conference on typed lambda calculi and applications, TLCA '95, Edinburgh, UK, April 10–12, 1995, Proceedings*, edited by M. Dezani-Ciancaglini and G. D. Plotkin, pages 47–62. Lecture Notes in Computer Science, volume 902. Springer. doi:10.1007/BFb0014044

Beth, Evert Willem. 1959. *The foundations of mathematics: A study in the philosophy of science*. Amsterdam: North-Holland.

Borel, Émile. 1894. *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars.

Buchholz, Wilfried, and Kurt Schütte. 1988. *Proof theory of impredicative subsystems of analysis.* Naples: Bibliopolis.

Cederquist, Jan, and Thierry Coquand. 2000. "Entailment relations and distributive lattices." In *Logic colloquium '98*, edited by S. R. Buss, P. Hájek, and P. Pudlák, pages 127–139. Association for Symbolic Logic.

Citkin, Alex. 2016. "Multiple conclusion rules in logics with the disjunction property." In *Logical Foundations of Computer Science: LFCS 2016*, edited by S. Artemov and A. Nerode, pages 76–89. Lecture Notes in Computer Science, volume 9537. Cham: Springer.

Cockx, Jesper. 2017. *Dependent pattern matching and proof-relevant unification.* Ph.D. thesis, KU Leuven.

Coquand, Thierry. 1992. "Pattern matching with dependent types." Informal proceedings of Logical Frameworks, pages 66–79. doi:10.1.1.37.9541

———. 1995. "A semantics of evidence for classical arithmetic." *Journal of Symbolic Logic* 60 (1): 325–337.

———. 2004. "A note on measures with values in a partially ordered vector space." *Positivity* 8 (4): 395–400.

Coquand, Thierry, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. 2019. "Lattice-ordered groups generated by an ordered group and regular systems of ideals." *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 49:1449–1489. doi:10.1216/rmj-2019-49-5-1449.

Coquand, Thierry, and Stefan Neuwirth. 2020. "Lorenzen's proof of consistency for elementary number theory." *History and Philosophy of Logic*, to appear. doi:10.1080/01445340.2020.1752034

Coquand, Thierry, and Henrik Persson. 2001. "Valuations and Dedekind's Prague theorem." *Journal of Pure and Applied Algebra* 155 (2–3): 121–129.

Curry, Haskell B. 1976. *Foundations of mathematical logic.* Dover.

Feferman, Solomon. 1964. "Systems of predicative analysis." *Journal of Symbolic Logic* 29:1–30.

———. 1977. Review of *Proof theory* by G. Takeuti. *Bulletin of the American Mathematical Society* 83 (3): 351–361.

Hallnäs, Lars, and Peter Schroeder-Heister. 1990. "A proof-theoretic approach to logic programming. I. Clauses as rules." *Journal of Logic and Computation* 1 (2): 261–283.

Hida, Takanori. 2012. "A computational interpretation of the axiom of determinacy in arithmetic." In *Computer Science Logic (CSL'12) – 26th International Workshop/21st Annual Conference of the EACSL*, edited by P. Cégielski and A. Durand, pages 335–349. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik.

Johnstone, Peter T. 1982. *Stone spaces*. Cambridge studies in advanced mathematics 3. Cambridge: Cambridge University Press.

Kahn, G. 1987. "Natural semantics." In *STACS 87: 4th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science: Passau, Federal Republic of Germany, February 19–21, 1987: Proceedings*, pages 22–39. Berlin/Heidelberg: Springer.

Kreisel, Georg. 1959. "Analysis of Cantor–Bendixson theorem by means of the analytic hierarchy." *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* 7:621–626.

———. 1964. Review of *On the fundamental conjecture of GLC.* VI by G. Takeuti. *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* 106 (2): 237–238.

Lorenzen, Paul. 1951a. "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände." *Journal of Symbolic Logic* 16:81–106. URL: http://www.jstor.org/stable/2266681. Translation by S. Neuwirth: Algebraic and logistic investigations on free lattices, URL: http://arxi v.org/abs/1710.08138.

———. 1951b. "Über endliche Mengen." *Mathematische Annalen* 123:331–338.

———. 1953. "Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen." *Mathematische Zeitschrift* 58:15–24.

———. 1955. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin.

———. 1958. "Logical reflection and formalism." *Journal of Symbolic Logic* 23 (3): 241–249.

———. 1959. "Operative mathematics and computers." In *Computer programming and artificial intelligence: An intensive course for practicing scientists and engineers: Lectures given at the University of Michigan, summer 1958*, edited by J.W. Carr, pages 405–426. College of Engineering, University of Michigan.

Lorenzen, Paul, and John Myhill. 1959. "Constructive definition of certain analytic sets of numbers." *Journal of Symbolic Logic* 24 (1): 37–49.

Lusin, Nicolas. 1930. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Paris: Gauthier-Villars.

Martin-Löf, Per. 1968. *Notes on constructive mathematics*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

———. 2008. "The Hilbert–Brouwer controversy resolved?" In *One hundred years of intuitionism (1907–2007): The Cerisy conference*, edited by M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau, and G. Heinzmann, pages 243–256. Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser.

Neuwirth, Stefan. 2020. "Lorenzen's reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains (1938–1953)." In this volume, pages 141–180.

Novikov, Pyotr Sergeyevich. 1943. "On the consistency of a certain logical calculus." *Matematičeskij sbornik/Recueil mathématique* 12 (54): 230–260.

Peirce, Charles Sanders. 1885. "On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation." *American Journal of Mathematics* 7 (2): 180–202.

Riesz, Frédéric. 1930. "Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires." In *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928*, volume 3, pages 143–148.

Roquette, Peter. 2018. *The Riemann hypothesis in characteristic p in historical perspective*. Cham: Springer.

Schröder, Ernst. 1890–1910. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, volumes I–III. Reprint Chelsea 1966.

Schütte, Kurt. 1965. "Predicative well-orderings." In *Formal systems and recursive functions: Proceedings of the eighth logic colloquium, Oxford, July 1963* (volume 40 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*), edited by J. N. Crossley and M. A. E. Dummett, pages 280–303. Elsevier.

Skolem, Thoralf. 1920. "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen." *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse* 4:1–36.

Spector, Clifford. 1961. "Provably recursive functionals of analysis: A consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics." In *Recursive function theory: Proceedings of symposia in pure mathematics*, volume v, pages 1–27. Providence, RI: American Mathematical Society.

Zeilberger, Noam. 2009. *The logical basis of evaluation order and pattern-matching.* Ph.D. thesis, Carnegie-Mellon University.

Lorenzen between Gentzen and Schütte

Reinhard Kahle and Isabel Oitavem

Abstract We discuss Lorenzen's consistency proof for ramified type theory without reducibility, published in 1951, in its historical context and highlight Lorenzen's contribution to the development of modern proof theory, notably by the introduction of the ω-rule.

"Ihr Vorschlag, die Beweismittel nicht ‚finit', sondern ‚konstruktiv' zu nennen, hat wie eine Art Erlösung auf mich gewirkt."

Paul Lorenzen to Paul Bernays, 1947

1 Introduction: Hilbert's Programme after Gentzen

David Hilbert had proposed, in the 1920s, his well-known programme to develop finitist consistency proofs for formalized mathematical theories. Gödel (1931) showed that this programme cannot be carried out in its original form. However, by liberalizing the finitist base of Hilbert's Programme, Gentzen (1936) was able to give a consistency proof for formalized number theory. It satisfies, to a good extent, Hilbert's original aims, when Gentzen uses transfinite induction up to the ordinal ε_0 in a controlled way. It is, in particular, justified from a constructive, rather than a finitist, point of view.[1]

Reinhard Kahle
Theorie und Geschichte der Wissenschaften, Universität Tübingen, Germany, and CMA, FCT, Universidade Nova de Lisboa, Caparica, Portugal e-mail: kahle@mat.uc.pt

Isabel Oitavem
CMA and DM, FCT, Universidade Nova de Lisboa, Portugal, e-mail: oitavem@fct.unl.pt

[1] For a more detailed historical and philosophical discussion of Gentzen's result, see Kahle 2015.

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_5

Gentzen was well aware that this could be at best a first step towards a consistency proof for Analysis. In 1938, he wrote:[2]

> Indeed, it seems not entirely unreasonable to me to suppose that *contradictions* might possibly be concealed even in classical *analysis*.
>
> ... the most important [consistency] proof of all in practice, that for *analysis*, is still outstanding. (Gentzen 1969, 235–236)

It is known that Gentzen was thinking of such a proof up to his premature death in a prison in Prague in 1945;[3] but it is clear that he didn't reach any satisfactory solution. And modern elaborations of Gentzen-style proof theory suggest that it is unlikely that we are going to find an easy solution to the problem of determining the proof-theoretic ordinal of Analysis, for instance, in the form of second-order arithmetic as defined in Hilbert and Bernays 1939, Suppl. IV. Even today we reach "only" subsystems of Analysis, like Π^1_2 comprehension.[4]

When Lorenzen attended a talk of Gerhard Gentzen in 1937 or 1938, he observed that "the problem of freedom from contradiction of the classical calculus of logic" was closely related to lattice theory, the research area of his Ph.D. thesis.[5] As a result of this observation, he worked out a consistency proof for ramified type theory without reducibility, which was published in 1951 (Lorenzen 1951a) but can be traced back to the 1940s. Lorenzen also put his algebraic perspective on record: "logical calculuses are semilattices or lattices" (Lorenzen 2017, § 4).[6] The result was appreciated at the time by Paul Bernays, but today it is widely perceived as an isolated accomplishment rather than a conceptional breakthrough, let alone a philosophical solution to the consistency problem in Mathematics.

---

[2] In 1934, Bernays already highlighted the importance of a consistency proof for Analysis, with an additional twist concerning the role of intuitionistic methods:

> The question which now arises is whether the strengthening of the method of proof theory obtained by admitting the abstract arguments of intuitionism would put us into a position to prove the consistency of analysis. The answer would be very important and even decisive for proof theory, and even, it seems to me, for the role which is to be attributed to intuitionistic methods. (Bernays 1964, 286; translated from the French original published in 1935)

[3] Szabo (Gentzen 1969, viii) relates the memories of a prison friend of Gentzen: "He once confided in me that he was really quite contented since now he had at last time to think about a consistency proof for analysis. He was in fact fully convinced that he would succeed in carrying out such a proof."

[4] See, for instance, Rathjen 2005a; 2005b. Szabo (in Gentzen 1969, 12–16) gives a short review of consistency results going beyond Arithmetic. He covers Fitch, Takeuti, and Ackermann, but also Lorenzen and Schütte.

[5] See Coquand and Neuwirth 2020, § 1. The contribution of Lorenzen to lattice theory and its legacy in modern developments is discussed in the contributions by Coquand, Lombardi, and Neuwirth, Neuwirth, and Schuster and Wessel in this volume.

[6] German orginal: "die logischen Kalküle [sind] Halbverbände oder Verbände" (Lorenzen 1951a, 89).

Proof theory, as a specialized discipline within mathematical logic, did not take up Lorenzen's result,[7] but rather developed other techniques, notably Ordinal Analysis as a tool to measure the strength of mathematical theories. In this paper, we will place the result of Lorenzen's 1951 *Journal of Symbolic Logic* article (1951a) in its historical context and try to explain why its legacy is ambivalent: while it doesn't occupy a distinguished status in the context of Hilbert's Programme, it provided the most useful tool in post-Gentzen proof theory: the ω-rule.

In his book *Beweistheorie* (1960), Schütte credits Lorenzen (as already in his 1951) with the introduction of the ω-rule in proof theory and devotes a good part of the final discussion of possible foundations of Analysis (Schütte 1960, § 36) to Lorenzen's work (referring, in fact, not only to Lorenzen 1951a, but also touching on Lorenzen 1951b). Credit and discussion, however, vanished in the entirely rewritten English edition *Proof Theory* of 1977 (Schütte 1977). In Sundholm's Ph.D. thesis on the ω-rule of 1983, history appears to be reverted when Lorenzen is mentioned only after Schütte's paper (1951) with the brief recognition: "The same idea is found in Lorenzen (1951), but there the ordinals are lacking" (Sundholm 1983, 1:3).

It is thus overdue to assign to Lorenzen his appropriate place in the history of the ω-rule as its inventor in proof theory.

2 Lorenzen's consistency proof for ramified type theory (without reducibility)

In 1951, Lorenzen published his paper "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände" (Lorenzen 1951a). It was recently translated by Neuwirth (Lorenzen 2017). Coquand and Neuwirth (2017, 1) provide a neat description of Lorenzen's achievement:

> The "Investigations" are best known for providing a constructive proof of consistency for ramified type theory without axiom of reducibility. They do so by showing that it is a part of a trivially consistent "inductive calculus" that describes our knowledge of arithmetic without detour. The proof resorts only to the inductive definition of formulas and theorems.

And in a footnote:

> More precisely, Lorenzen proves the admissibility of cut by double induction, on the cut formula and on the complexity of the derivations, without using any ordinal assignment, contrary to the presentation of cut elimination in most standard texts on proof theory.

Here, we will not discuss the mathematical details of Lorenzen's proof, but refer to the article itself (Lorenzen 1951a; 2017) and the discussion of it

[7] Only recently, Coquand and Neuwirth (2017; 2020) have revived the mathematical interest in Lorenzen's result and methods; see also the contribution by Coquand in this volume.

by Coquand and Neuwirth (2017; 2020). We would only like to highlight two aspects which are important for a historical and philosophical evaluation of Lorenzen's work.

The first one is that Lorenzen deals "only" with Analysis (in the formal framework of ramified type theory) *without reducibility*. Just as his result has to be considered a breakthrough in Hilbertian proof theory, so it is limited: without reducibility one does not reach full Analysis in the form of Hilbert and Bernays's second-order arithmetic. Of course Lorenzen was aware of this, and gave a clear caveat: "As this axiom [of reducibility] is not comprised, our calculus does not contain classical analysis, ..." (Lorenzen 2017, 2).[8] The problem is not that Lorenzen considered only a rather weak form of Analysis, but that his method did not open the way to analyzing stronger systems. When Lorenzen himself turned more to foundational questions of logic (see § 4 below), his approach was superseded by Schütte's proof-theoretic investigations.

The second observation, however, is a much more positive one: Lorenzen was the first to consider a proper ω-rule in proof theory. The history of the ω-rule is rather intricate. Within proof theory, it is often attributed to Hilbert, who—apparently—suggested such a rule in 1930, when his programme was about to fail due to Gödel's Theorems (although it is unclear whether by this time Hilbert was already informed about Gödel's results). A close inspection of Hilbert's wording in his 1931a, 1931b, however, shows that he did not propose an ω-rule in a formal calculus.[9] He discussed a "meta-rule" which would allow to introduce a new *axiom* ("Anfangsformel" in German) $\forall n \,.\, A(n)$ when one has proofs for all instances with fixed natural numbers $A(0)$, $A(1)$, ... (in addition, A is restricted to be quantifier-free).

For the proper infinitary rule, Feferman (1986, 213) writes: "Apparently, the first to consider such a frankly infinitary rule was Tarski in a lecture he gave in 1927, although his first publication in which this was stated is *Tarski 1933*." He also refers to Carnap, who formulated such a rule in 1934 and 1935, such that Rosser, in 1937, 129, used the designation "Carnap's rule". As close as Hilbert might have been to the ω-rule as we know it today, there is a bold conceptional step necessary to incorporate such a rule on the object level, to consider *semi-formal systems*, as we call them today (Schütte 1960; 1977). For proof-theoretic investigations, it was, in some sense, not even Lorenzen who took such a step.[10] As far as we can see, he never

[8] German original: "Da dieses Axiom nicht miteinbezogen ist, enthält unser Kalkül nicht die klassische Analysis" (Lorenzen 1951a, 82).

[9] In fact, in 1926, he had mocked infinitary proofs:

> ... some stress the stipulation, as a kind of restrictive condition, that, if mathematics is to be rigorous, only a *finite* number of inferences is admissible in a proof—as if anyone had ever succeeded in carrying out an infinite number of them! (Hilbert 1967, 370; translation of Hilbert 1926, 162)

[10] In our understanding, this achievement is due to Schütte; see below.

referred to Hilbert's final papers, and may not even have read them. On the contrary, he had a completely independent motivation, which came from his expertise in lattice theory.[11] Looking at derivations with infinitely many premises from an algebraic perspective, the conclusion may appear as the *infimum* of an infinite set. Algebra, of course, has no foundational problems in dealing with infinite objects, and an infimum is an absolutely natural object in this context. Thus, Lorenzen just realized that—existing—algebraic structures can be considered as (infinite) proof objects. This is a quite different route from first extending a calculus by an infinite rule and then giving it an algebraic interpretation. In addition, Lorenzen's motivation is entirely mathematical in nature—an aspect which would probably have delighted Hilbert, as it was his declared objective to "transfer the entire set of issues [of the foundational questions in mathematics] into the domain of pure mathematics."[12]

In the following, we take a closer look at the historical context in which Lorenzen's paper developed (it had, in fact, a rather long history).

3 Gentzen, Bernays, Schütte

According to Lorenzen's own testimony, he attended a talk by Gentzen in 1937 or 1938, realizing that his "algebraic works ... were concerned with a problem that had *formally* the same structure as the problem of freedom from contradiction of the classical calculus of logic."[13] In 1944, at the latest, he had a draft for a consistency proof for elementary number theory along these lines, "Ein halbordnungstheoretischer Widerspruchsfreiheitsbeweis" (Lorenz 2020; see also Coquand and Neuwirth 2020).[14] By December 1945, he had extended the result to *classical logic with ramified type theory* (Coquand and Neuwirth 2017, § 3); Heinrich Scholz submitted the corresponding

[11] For his algebraic education under Hasse and Köthe, see Coquand and Neuwirth 2020, § 1.

[12] The full German passage from Hilbert's talk at the International Congress of Mathematicians in Rome in 1928 reads as follows (Hilbert 1928, 3):

> Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch den ganzen Fragenkomplex in die Domäne der reinen Mathematik versetze.

[13] See Coquand and Neuwirth 2020, § 1 and footnote 5, with reference to a letter by Lorenzen to Carl Friedrich Gethmann.

[14] Coquand and Neuwirth (2020, § 2) provide some evidence that the paper was sent at that time to Wilhelm Ackermann, Gerhard Gentzen, Hans Hermes, and Heinrich Scholz.

manuscript to Paul Bernays.[15] In 1947, Lorenzen sent a new version to Bernays, which, according to Coquand and Neuwirth (2017, § 4), "tries to make a synthesis of 'Ein halbordnungstheoretischer Widerspruchsfreiheitsbeweis' and 'Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Logik mit verzweigter Typentheorie', but is rather a juxtaposition of the two: the seams remain apparent." Its first part contains an exposition of the lattice-theoretic background. After some discussion with Bernays (see below and Coquand and Neuwirth 2017), the paper was submitted to the *Journal of Symbolic Logic* on March 17, 1950, and published in 1951 (Lorenzen 1951a).

Gerhard Gentzen still responded to Lorenzen on the 1944 version, with a rather discouraging remark: "The freedom from contradiction of number theory cannot be proven so simply."[16] Lorenzen would hardly have been excited about Gentzen's reaction, and nearly 50 years later he commented on it in a letter to Menzler-Trott: "Contrary to Gentzen's opinion, consistency proofs do allow themselves to be 'so simply' proven."[17]

The reaction of Bernays—who could have seen only later versions already dealing with Analysis—was, however, quite enthusiastic:[18]

> It seems to me that your argumentation accomplishes in effect the desired and that thereby at the same time also a new, methodically more transparent proof of consistency for the number-theoretic formalism, as well as for Gentzen's subformula theorem is provided.

In particular, he was able to clarify Lorenzen's metamathematical base by indicating that he starts from a *constructive* rather than a *finite* standpoint. In a letter from February 21, 1947, Lorenzen wrote to Bernays:

> I beg once again to ask you for your advice—namely, it is not clear to me whether I rightly call the logic used here "finite" logic.

Bernays replied on April 3, 1947:

> When it comes to the methodical standpoint and to the terminology to be used in relation, then it seems advisable to me to keep with the mode chosen by Mr Gentzen, that one speaks of "finite" reflections only in the narrower sense, i.e. relating to considerations that may be formalised in the framework of recursive

[15] The letter is contained in the Bernays Nachlass at the ETH Zurich, HS. 975:4111; a copy of the manuscript can be found in the Nachlass of Köthe at the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. G. Köthe M 10 (Coquand and Neuwirth 2020, footnote 17).

[16] Letter by Gentzen to Lorenzen from September 12, 1944. The full text of the letter in German is given in Menzler-Trott 2001, 259–260, and reproduced photographically (Menzler-Trott 2001, 372).

[17] German original: "Wf-beweise lassen sich — gegen die Meinung Gentzens — doch ‚so einfach' beweisen" (Menzler-Trott 2001, 260, footnote 31); for the English translation, see Menzler-Trott 2007. We note in passing that by that time, Lorenzen thought he had sent to Gentzen already a version of his paper containing the consistency proof for Analysis.

[18] The translation of the correspondence between Lorenzen and Bernays is taken from Coquand and Neuwirth 2017, where one also finds the original German texts and the references to the sources.

> number theory (possibly with extension of the domain of functions to arbitrary computable functions), that one uses in contrast the expression “constructive” for the appropriate extension of the standpoint of the intuitive self-evidence.

Lorenzen happily accepted this terminological shift (which, of course, corresponded to a substantial conceptional alteration, compared to Hilbert’s original conception):

> Your proposal to call the means of proof not “finite” but “constructive” acted on me as a sort of redemption. I was sticking so far to the word finite only to emphasise that these are Hilbertian ideas that I am trying to pursue.

With Paul Bernays, Lorenzen had of course the highest authority in Hilbertian proof theory of that time on his side. However, Lorenzen was not really engaged in the proof-theoretic school of Hilbert, which had remained in Germany and was led by Arnold Schmidt.[19]

Through Bernays or Schmidt, Kurt Schütte would have received a copy of Lorenzen’s article.[20] In 1948/49, Schütte developed his own proof-theoretic methods, which make substantial use of the ω-rule, taken from Lorenzen—in 1950, he wrote in his letter to Lorenzen: “This insight gained by you which appears to me exceptionally important for fundamental research, I have now taken up.”[21]

When describing his results in a letter to Paul Bernays of August 26, 1949, he refers to Lorenzen in two respects.[22] First, he credits Lorenzen with the invention of the ω-rule:

> Herein the following are utilized: . . . 2. the possibility, discovered by Lorenzen, of preserving Gentzen’s *Hauptsatz* also under inclusion of formal induction, namely by means of inferences with an infinite number of premises, . . .

In a following remark, however, he makes the link to Hilbert’s latest publication:

[19] In a letter to Bernays from April 30, 1950 (Hs. 975:3926 in the Bernays Nachlass at the ETH Zurich), Schmidt expresses a quite negative impression of Lorenzen: “Mr. Lorenzen sent me a draft on decision in positive logic. . . . His proofs are very sophisticated, but also ‘in the details’ often downright incorrect and only reparable with new methodological changes (but that doesn’t interest him, if you call his attention to it, and doesn’t shock him at all).” (“Herr Lorenzen sandte mir einen Entwurf zur Entscheidung in der positiven Logik. . . . Seine Beweise sind sehr elegant, allerdings auch ‚im kleinen‘ oft regelrecht unrichtig und nur mit neuen methodischen Wendungen reparabel (was ihn aber, wenn man ihn darauf aufmerksam macht, nicht interessiert und nicht im geringsten erschüttert).”) In view of the later developments in Hilbert-style proof theory, which heavily relies on technical accuracy, Lorenzen’s attitude (as observed by Schmidt) is, of course, devastating.

[20] See the opening of the letter by Schütte to Lorenzen from May 1, 1950 (PL 1-1-45 in the Lorenzen Nachlass kept at the University of Konstanz). The letter suggests that Schütte and Lorenzen did not know each other from before. Lorenzen studied in Göttingen from 1936 to 1939, when Schütte had already left the University.

[21] See Coquand and Neuwirth 2017, § 6, in particular, footnote 35, for a longer passage of the letter.

[22] The letter is reprinted and discussed in its historical context in Kahle 2020.

2. with the inference of "infinite induction"

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{N} \qquad \text{for all numerals } \mathfrak{z}}{(x)\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}}$$

as it was accordingly already recommended by Hilbert.

This link is misleading, as Hilbert draws only on a metamathematical rule to introduce new universal axioms. Schütte clearly uses an infinite rule on the *object* level. By conflating this with Hilbert's proposal he implemented a historical misunderstanding; on the other hand, he fully released the ω-rule from the mathematical motivation present in Lorenzen's work and turned it, as such, into a new and independent tool in proof theory. Schütte did not only give thanks to Lorenzen in the letter mentioned above, but also credited him as the first one using a rule with infinitely many premisses for a consistency proof in his publication Schütte 1951 as well as in his monograph *Beweistheorie* (Schütte 1960, 168).

Secondly, Schütte was very much concerned to convince Bernays that his approach was sufficiently different from Lorenzen's to deserve publication:

> This proof idea is entirely in keeping with the one applied by Lorenzen, but the implementation is a slightly different one. I think, that my investigations are not redundant when put next to those of Lorenzen because the necessary metamathematical means of proof and the connections with the deducibility of the formalized transfinite induction are revealed in this way.

and:

> The results should relate to those of Lorenzen in that the sentence induction [*Satzinduktion*] employed by Lorenzen is of the same character of a transfinite induction over the second number class as the transfinite induction ranging over the orders of derivations. If one allows arbitrary inferences with infinitely many premises, as is the case with Lorenzen, the corresponding transfinite induction will reach arbitrarily high levels of the second number class.

Schütte's work shifted away the analysis from the mathematical (lattice-theoretic) background, highlighted by Lorenzen. Conceptionally, he was bringing back the ordinals of Gentzen (which are completely absent in Lorenzen's work). In the long run, this was a decisive advantage for Schütte's approach, as it paved the way for the analysis of other mathematical theories.[23]

[23] One should add here that modern proof theory is of course not just interested in consistency proofs, but rather in additional information. In this respect, Macintyre (2005, 2426) writes:

> Much nonsense has been pronounced about Gentzen's work, even by extremely distinguished people. Consistency is not really the main issue at all. He did reveal fine structure in the unprovability of consistency of PA, as a consequence of much deeper general methodology.

4 Digression: Lorenzen's 1951 *Zeitschrift* paper

Although going back to work from the 1940s, Lorenzen's paper "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände" appeared in print only in 1951 in the *Journal of Symbolic Logic*. By that time, Lorenzen's interest had already shifted.[24] By coincidence, it was also in 1951 that another paper of Lorenzen appeared, in the *Mathematische Zeitschrift*, with the—quite misleading—title "Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis" ("The consistency of classical analysis"; Lorenzen 1951b). One has to remember that in his JSL paper Lorenzen clearly stated that, due to the missing reducibility axiom, his consistency proof does not extend to classical Analysis.[25] In the *Zeitschrift* paper, which has no relation to the JSL paper, he is not even attempting to provide a consistency proof. In contrast, he provides a constructive (re-)definition of Analysis, based on a "construction of the real numbers for which all fundamental theorems of classical analysis are valid" (Lorenzen 1951b, 1). These real numbers are constructed in stages, and to obtain them, one has to take the union of the finite stages (only!). Thus, it is necessary to adapt the classical theorems to this framework![26] In consequence, one can hardly call the system under consideration "classical analysis". And, as Kurt Schütte stated this in his review of Lorenzen 1951b in the *Journal of Symbolic Logic* (Schütte 1953, 261): "the author carries out a construction of real numbers, which does not give the usual classical analysis, but a system in which all corresponding fundamental theorems are valid."

The problem of the 1951 paper is not only the misleading title; it also marks a significant turn of Lorenzen away from Hilbert's philosophical basis. In a tactical move, Hilbert had proposed finite mathematics as foundation to secure ordinary mathematics; it was somehow the goal to beat Brouwer at his own game. Gödel's Theorems show that this cannot be carried out. For Hilbert, however, this is not an argument to dismiss parts of Mathematics; on the contrary, the foundational base has to be adapted. This led, first, to the change from finite to constructive mathematics.[27] Today, we have to admit that even constructive mathematics will not be sufficient.[28] From a

[24] "In fact, from 1947 on, Lorenzen is already mostly occupied by his project of layers of language which will lead to his operative logic" (Coquand and Neuwirth 2017, end of § 5). Operative logic and mathematics preceded Lorenzen's introduction of dialogical logic and deserves its own recognition; see the contribution by Heinzmann in this volume.

[25] See footnote 8 above.

[26] Such (necessary) reinterpretations of classical theorems are still today in the focus of research in constructive analysis.

[27] See, in particular, the remark of Bernays to Lorenzen in his letter of April 3, 1947 above.

[28] See Martin-Löf's comment concerning the alleged "second failure of Hilbert's program":

> This is what I propose to call the second failure of the Hilbert program. The first failure of the Hilbert program was the one which was discovered by Gödel and of which we are now all aware, but that gave rise to the revised, or modified, Hilbert

Hilbertian perspective, this only necessitates another liberalization of the foundational standpoint. Lorenzen, however, turned into a "constructive fundamentalist", as we may say. In Lorenzen 1968, for instance, he made clear that classical mathematics is "justified", at best, by a constructive interpretation or a constructive consistency proof.[29]

Lorenzen still worked out constructive approaches to Analysis (see his textbook on Differential and Integral, Lorenzen 1965), but eventually turned completely to logic and philosophy.[30] Doing so, he contributed substantially to the philosophical discussion of the foundations of logic, but the link to proof theory in the spirit of Hilbert was lost.

5 Conclusion

Lorenzen's consistency proof for ramified type theory without reducibility has to be considered as a landmark in proof theory. It is distinguished by the introduction of the ω-rule and the underlying mathematical methodology stemming from lattice theory.

Lorenzen was commissioned to write the chapter on Foundations of Mathematics for the FIAT report[31] on Pure Mathematics (Lorenzen 1948). From it, one can obtain an impression of how Lorenzen himself judged the importance of his work, when he devoted nearly 4 of the 12 pages to his own unpublished manuscripts, more than half of them in the section on "Finite Logistics",[32] which otherwise covers only Gentzen and Ackermann.

When afterwards Lorenzen turned, first, to constructive reformulations of classical mathematics and, later, to philosophical foundations of logic, he

> program, whose characteristic is that we no longer allow merely combinatorial methods in the consistency proof but arbitrarily strong constructive methods. But even this revised, or modified, Hilbert program has come to an end in the nineties, or has failed in the nineties, so it is the second failure of the original Hilbert program, which I cannot interpret in any other way than that we have to give up the dream of being able to establish the consistency of classical mathematics by constructive means. (Martin-Löf 2008, 254)

Here one can speak of a "failure" only if one takes the constructive point of view as the last resort for foundations.

[29] Occasionally, however, Lorenzen was rather liberal in his discussions: in the preface to his book on Metamathematics, he comes to the—correct—conclusion: "There exists no contradiction between constructive and classical set theory" (Lorenzen 1962, 9).

[30] This turn is described in part in the recollections of his student Kuno Lorenz in this volume.

[31] After World War II, the US Army was collecting in the FIAT ("Field Information Agency, Technical") reports information about the development of science in Germany during the years 1939–1946.

[32] The section heading suggests that he finished this report before receiving Bernays's suggestion to switch from "finite" to "constructive".

lost the "mathematical momentum" of his consistency proof. As a result, mathematical proof theory changed course. The ω-rule turned into a basic tool in ordinal analysis, under the guidance of Kurt Schütte.

But it is worth noting that the mathematical inspiration for Lorenzen's consistency proof fits squarely within Hilbert's philosophical vision. To determine its full rationale within Hilbertian proof theory and its potential for the investigation of stronger mathematical theories is, however, still a desideratum.

References

Bernays, Paul. 1964. "On platonism in mathematics." In *Philosophy of mathematics*, edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam, pages 274–286. Prentice-Hall. Lecture delivered June 18, 1934, in the cycle of *Conferences internationales des sciences mathematiques* organized by the University of Geneva, in the series on Mathematical Logic. Translated from the French by C. D. Parsons from *L'enseignement mathematique*, 1st ser., vol. 34 (1935), pp. 52–69.

Carnap, Rudolf. 1935. "Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 42:163–190.

Coquand, Thierry. 2020. "Lorenzen and constructive mathematics." In this volume, pages 45–59.

Coquand, Thierry, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. 2020. "Regular entailment relations." In this volume, pages 101–112.

Coquand, Thierry, and Stefan Neuwirth. 2017. An introduction to Lorenzen's "Algebraic and logistic investigations on free lattices" (1951). arXiv: 1711.06139v1 [math.LO].

———. 2020. "Lorenzen's proof of consistency for elementary number theory." *History and Philosophy of Science*. https://doi.org/10.1080/01445340.2020.1752034.

Feferman, Solomon. 1986. "Introductory note to *[Gödel 1931c]*." In *Kurt Gödel: Collected works*, I*: Publications 1929–1936*, edited by S. Feferman et al., pages 208–213. Oxford University Press.

Gentzen, Gerhard. 1936. "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie." *Mathematische Annalen* 112:493–565.

———. 1969. *Collected works*. Edited by M. E. Szabo. North-Holland.

Gödel, Kurt. 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38:173–198.

Heinzmann, Gerhard. 2020. "Operation and predicativity: Lorenzen's approach to arithmetic." In this volume, pages 9–20.

Hilbert, David. 1926. "Über das Unendliche." *Mathematische Annalen* 95:161–190.

———. 1928. "Probleme der Grundlegung der Mathematik." In *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna, 3–19 settembre 1928)*. Nicola Zanichelli. Offprint.

———. 1931a. "Beweis des Tertium non datur." *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 120–125. Talk given on July 17, 1931 in Göttingen.

———. 1931b. "Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre." *Mathematische Annalen* 104 (1): 485–494. Talk given in December 1930 in Hamburg.

———. 1967. "On the infinite." In *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*, edited by Jean van Heijenoort, pages 367–392. Harvard University Press. English translation of Hilbert 1926.

Hilbert, David, and Paul Bernays. 1939. *Grundlagen der Mathematik* II. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 50. Springer. Second edition 1970.

Kahle, Reinhard. 2015. "Gentzen's theorem in context." In *Gentzen's centenary: The quest for consistency*, edited by Reinhard Kahle and Michael Rathjen, pages 3–24. Springer.

———. 2020. "'Sehr geehrter Herr Professor!' Proof theory in 1949 in a letter from Schütte to Bernays." In *The legacy of Kurt Schütte*, edited by Reinhard Kahle and Michael Rathjen, pages 3–19. Springer.

Lorenz, Kuno. 2020. "Paul Lorenzens Weg von der Mathematik zur Philosophie: Persönliche Erinnerungen." In this volume, pages 1–8.

Lorenzen, Paul. 1948. "Grundlagen der Mathematik." In *Reine Mathematik, Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946* (für Deutschland bestimmte Ausgabe der FIAT Review of German Science), Band 1, Teil 1, edited by W. Süss, pages 11–22. Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung.

———. 1951a. "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände." *Journal of Symbolic Logic* 16:81–106.

———. 1951b. "Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis." *Mathematische Zeitschrift* 54:1–24.

———. 1962. *Metamathematik*. Volume 25 of BI Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut.

———. 1965. *Differential und Integral: Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*. Akademische Verlagsgesellschaft.

———. 1968. "Constructive mathematics as a philosophical problem." *Compositio Mathematica* 20:133–142. Also published (with identical pagination) in *Logic and foundations of mathematics*, edited by D. van Dalen, J. G. Dijkman, S. C. Kleene, and A. S. Troelstra, Wolters-Noordhoff Publishing.

———. 2017. "Algebraic and logistic investigations on free lattices." arXiv: 1710.08138. Translation by Stefan Neuwirth of Lorenzen 1951a.

———. (1944) 2020. "Ein halbordnungstheoretischer Widerspruchsfreiheitsbeweis." *History and Philosophy of Logic*. From the Oskar Becker Nachlass, Philosophical Archive of the University of Konstanz, file

OB 5-3b-5, edited and translated as "A proof of freedom from contradiction within the theory of partial order" by Stefan Neuwirth. https://doi.org/10.1080/01445340.2020.1752040

Macintyre, Angus. 2005. "The mathematical significance of proof theory." *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 363:2419–2435.

Martin-Löf, Per. 2008. "The Hilbert–Brouwer controversy resolved?" In *One hundred years of intuitionism (1907–2007): The Cerisy conference*, edited by Mark van Atten, Pascal Boldini, Michel Bourdeau, and Gerhard Heinzmann, pages 243–256. Birkhäuser.

Menzler-Trott, Eckhart. 2001. *Gentzens Problem*. Birkhäuser.

———. 2007. *Logic's lost genius: The life of Gerhard Gentzen*. Volume 33 of History of mathematics. American Mathematical Society.

Neuwirth, Stefan. 2020. "Lorenzen's reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains (1938–1953)." In this volume, pages 141–180.

Rathjen, Michael. 2005a. "An ordinal analysis of parameter free Π^1_2-comprehension." *Archive for Mathematical Logic* 44 (3): 263–362.

———. 2005b. "An ordinal analysis of stability." *Archive for Mathematical Logic* 44 (1): 1–62.

Rosser, Barkley. 1937. "Gödel theorems for non-constructive logics." *Journal of Symbolic Logic* 2 (3): 129–137.

Schuster, Peter, and Daniel Wessel. 2020. "Syntax for semantics: Krull's maximal ideal theorem." In this volume, pages 75–100.

Schütte, Kurt. 1951. "Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie." *Mathematische Annalen* 122:369–389.

———. 1953. Review of Paul Lorenzen, *Die Widerspruchsfreiheit der Klassischen Analysis* (Lorenzen 1951a). *Journal of Symbolic Logic* 18 (3): 261–262.

———. 1960. *Beweistheorie*. Volume 103 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer.

———. 1977. *Proof theory*. Springer.

Sundholm, Göran. 1983. "Proof theory: A survey of the omega-rule." Ph.D. dissertation, Magdalen College, University of Oxford.

Tarski, Alfred. 1933. "Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 40:97–112.

Syntax for Semantics: Krull's Maximal Ideal Theorem

Peter Schuster and Daniel Wessel

Abstract Krull's Maximal Ideal Theorem (MIT) is one of the most prominent incarnations of the Axiom of Choice (AC) in ring theory. For many a consequence of AC, constructive counterparts are well within reach, provided attention is turned to the syntactical underpinning of the problem at hand. This is one of the viewpoints of the revised Hilbert Programme in commutative algebra, which will here be carried out for MIT and several related classical principles.

1 Introduction

Transfinite proof methods have been introduced into mathematics more than a century ago, most prominently by Ernst Zermelo's Well-Ordering Theorem (WO) dating back to 1904 (Zermelo 1904; 1908). To prove WO, Zermelo needed to postulate the Axiom of Choice (AC), about which Paul Lorenzen most appropriately remarked that by calling AC an axiom, "one believes oneself absolved from the responsibility to justify it."[1] Though immediately causing a heated foundational debate, transfinite methods turned out soon after to work surprisingly well in mathematical practice, even for proving theorems of a finite nature. A typical proof method of the time was to use the principle of mathematical induction also beyond the

Peter Schuster
Dipartimento di Informatica, Università di Verona, Italy, e-mail: peter.schuster@univr.it

Daniel Wessel
Dipartimento di Informatica, Università di Verona, Italy, e-mail: daniel.wessel@univr.it

[1] "Da man allerdings dort, wo angeblich keine Abzählung möglich ist, das Auswahlprinzip – indem man es als Axiom bezeichnet, glaubt man sich der Verpflichtung enthoben, es zu begründen – anwendet, lassen sich die Beweise für den ‚abzählbaren' Fall meist ohne weiteres auf den ‚überabzählbaren' Fall übertragen" (Lorenzen 1953, 241).

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_6

context of natural numbers. This meant doing transfinite induction, and thus, more often than not, to invoke a well-ordering, the existence of which in general requires WO.

Soon after, Zermelo's postulate AC started to play a crucial role especially during the advent of abstract algebra, so already in 1910 for Steinitz's pure existence proof of the algebraic closure of an arbitrary field (Steinitz 1910). This methodical move raised considerable concern among the algebraists of the time, and Max Zorn allegedly spoke for many when he said in 1935:

> The theorems of Steinitz concerning algebraic closure ... are barred, from the algebraic point of view, by the well-ordering theorem and its theory. (Zorn 1935, 667)

As a way out he coined what is now known as "Zorn's Lemma" (ZL) (Zorn 1935; Campbell 1978), to have a variant of WO more palatable to algebraists. Since then, ZL has gradually replaced WO in proof practice, especially in algebra.

Even for Wolfgang Krull, WO had merely been a means to an end, rather than an end in itself. Krull wrote to Heinrich Scholz on 18th April 1953:[2]

> In working with the uncountable, in particular with the well-ordering theorem, I always had the feeling that one uses fictions there that need to be replaced some day by more reasonable concepts. But I was not getting upset over it, because I was convinced that in a careful application of the common "fictions", nothing false comes out, and because I was firmly counting on the man who would some day put all in order. Lorenzen has now found according to my conviction the right way ....

It is not unlikely that Krull had heard of Vaihinger's *useful fictions* (Vaihinger 1922; 1924), which gain justification already by practical usefulness rather than objective provability. Krull's lines may have been well received by Scholz, who was thoroughly versed in Vaihinger's philosophy of "As If" (Scholz 1919). According to Fine (1993, p. 3),

> Vaihinger was trying to associate himself with an empiricist approach to positive, scientific knowledge and to disassociate his view from rationalism or Platonism; indeed from any view that would presume some reality to correspond to whatever the mind logically constructs.

The many successes of the revised Hilbert Programme in abstract algebra (Crosilla and Schuster 2014), as called for by Coquand and Lombardi (2006), seem to resonate well with Vaihinger's views. In fact, constructive counterparts of many a consequence of AC are within reach, provided we turn our attention to the syntactical underpinning of the respective problem at hand. It seems as if, for every fiction arising from transfinite methods, each concrete use in proof practice can be reduced to a use of the fiction's provable part.

---

[2] Scholz-Archiv, Universitäts- und Landesbibliothek Münster, `https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/ScholzWiki/doku.php?id=scans:blogs:ko-05-0647`, accessed Nov. 15, 2018. Translation by Stefan Neuwirth (Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019).

Our paper is meant to illustrate this with regard to Krull's (1929) Maximal Ideal Theorem (in the unital commutative case), presumably the most prominent incarnation of AC in ring theory.[3] Let's recall the statement for the sake of reference:

MIT Every non-trivial commutative ring with unit has a maximal ideal.

Incidentally, in today's textbooks, MIT is used to prove Steinitz's existence theorem, e. g., Kunz 1991.

More precisely, we develop an account of MIT in terms of an infinitary variant of Lorenzen's (1950, 1951, 1952, 1953) and Scott's (1971, 1973, 1974) entailment relations. No claim is made as to our treatment being the definitive one, nor do we intend to compete by any means with the sophisticated machinery of Dynamical Algebra (Coste, Lombardi, and Roy 2001; Lombardi and Quitté 2015; Yengui 2015), which, as we hasten to add, has already shown how to make constructive the use of maximal ideals (Yengui 2008; 2015).

We proceed as follows. In Section 2, we briefly discuss MIT in the case of countable, of Noetherian, and of arbitrary rings. In Section 3, we sketch a possible development of infinitary entailment relations (Wessel 2018), which will be applied in Section 4 to interpret MIT constructively. Several applications will be given in Section 5, which further illustrates that our generalised concept of entailment relation retains much of the conventional one's flexibility.

On method and foundations

Unless specifically stated otherwise, we work in Bishop's constructive mathematics, which can be formalised in Aczel's constructive set theory CZF (Aczel 1978; 1982; 1986; Aczel and Rathjen 2000; 2010). Recall that a set S is said to be *discrete* if

$$(\forall a, b \in S)(a = b \lor a \neq b).$$

A subset T of S is *detachable* if

$$(\forall a \in S)(a \in T \lor a \notin T).$$

By a *finite* set we understand a set that can be written as $\{a_1, \ldots, a_n\}$ for some $n \geq 0$.[4] The set of all finite subsets of a set S will be denoted by $\mathrm{Fin}(S)$,

[3] Recall that MIT is in fact equivalent to AC over Zermelo–Fraenkel set theory ZF (Hodges 1979; Banaschewski 1994; Howard and Rubin 1998). In comparison, the *Prime Ideal Theorem*, asserting that every non-trivial commutative ring with unit has a *prime* ideal, is ZF-equivalent to the Boolean Ultrafilter Theorem (BUT) (Scott 1954; Banaschewski 1983), a weak form of AC (Howard and Rubin 1998).

[4] For the sake of a slicker wording we thus deviate from the prevalent terminology of constructive mathematics and set theory (Aczel and Rathjen 2000; 2010; Bishop 1967;

and the class of *all* subsets of S by $\mathrm{Pow}(S)$. We further refer to Rinaldi, Schuster, and Wessel 2018 for provisos to carry over to the present paper.

We need to recall only few and basic notions from commutative ring theory (Lombardi and Quitté 2015; Yengui 2015). Throughout, let $\mathbf{A}$ denote a commutative ring with unit. If U is a subset of $\mathbf{A}$, then $\langle U \rangle$ consists of all finite sums $r_1 a_1 + \cdots + r_k a_k$, where $r_i \in \mathbf{A}$ and $a_i \in U$. A subset $\mathfrak{a}$ of $\mathbf{A}$ is an *ideal* if $\langle \mathfrak{a} \rangle = \mathfrak{a}$. We say that elements $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$ are *comaximal* if $1 \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. An ideal $\mathfrak{a}$ is *proper* if $1 \notin \mathfrak{a}$, and *prime* if it is proper and such that $ab \in \mathfrak{a}$ implies $a \in \mathfrak{a}$ or $b \in \mathfrak{a}$. The *radical* of an ideal $\mathfrak{a}$ is

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{ a \in \mathbf{A} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in \mathfrak{a}) \}.$$

An ideal $\mathfrak{a}$ is a *radical ideal* if $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. The *Jacobson radical* of an ideal $\mathfrak{a}$ is

$$\mathrm{Jac}(\mathfrak{a}) = \Big\{ a \in \mathbf{A} \;\Big|\; (\forall b \in \mathbf{A})(\exists c \in \mathbf{A})\big(1 - (1 - ab)c \in \mathfrak{a}\big) \Big\}.$$

In other words, $\mathrm{Jac}(\mathfrak{a})$ consists of all elements $a \in \mathbf{A}$ such that, for every $b \in \mathbf{A}$, the element $1 - ab$ is invertible modulo $\mathfrak{a}$. Note that $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathrm{Jac}(\mathfrak{a})$. We write $\mathrm{Jac}\,\mathbf{A}$ for $\mathrm{Jac}(0)$. Assuming AC, this $\mathrm{Jac}\,\mathbf{A}$ is the intersection of all maximal ideals of $\mathbf{A}$ (Lombardi and Quitté 2015).

2 Maximal ideals

A commutative ring $\mathbf{A}$ is said to be a *discrete field* (Lombardi and Quitté 2015) if, for all $a \in \mathbf{A}$,

$$a = 0 \quad \text{or} \quad (\exists b \in \mathbf{A})(ab = 1).$$

For instance, the trivial ring in which $0 = 1$ is a discrete field, and non-triviality renders the carrier of $\mathbf{A}$ a discrete set. Now, let us define an ideal $\mathfrak{m}$ of $\mathbf{A}$ to be *maximal* if the quotient ring $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ is a non-trivial discrete field. This is to say that the maximal ideals of $\mathbf{A}$ are precisely the proper ideals $\mathfrak{m}$ of $\mathbf{A}$ which are *complete*, i.e., such that, for all $a \in \mathbf{A}$,

$$a \in \mathfrak{m} \quad \text{or} \quad 1 \in \mathfrak{m} + \mathbf{A}a. \tag{1}$$

Note that properness combined with completeness (1) ensures detachability.

Bishop and Bridges 1985; Mines, Richman, and Ruitenburg 1988; Lombardi and Quitté 2015): (1) to call 'subfinite' or 'finitely enumerable' a finite set in the sense above, i.e., a set T for which there is a surjection from $\{1, \ldots, n\}$ to T for some $n \geq 0$; and (2) to reserve the term 'finite' to sets which are in bijection with $\{1, \ldots, n\}$ for a necessarily unique $n \geq 0$. Also, finite sets in this stricter sense do not play a role in this paper.

The countable case

From a constructive point of view, it is interesting to note that *countable* non-trivial commutative rings $\mathbf{A}$ do have maximal ideals whenever they are *strongly discrete*, i.e., whenever the finitely generated ideals are detachable (Mines, Richman, and Ruitenburg 1988). This is a standard argument, perhaps worth recalling: Let $a_0, a_1, \ldots$ be an enumeration of $\mathbf{A}$; inductively define a sequence $(\mathfrak{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of finitely generated proper ideals where $\mathfrak{a}_0 = 0$ and

$$\mathfrak{a}_{i+1} = \begin{cases} \mathfrak{a}_i & \text{if } 1 \in \mathfrak{a}_i + \mathbf{A}a_i, \\ \mathfrak{a}_i + \mathbf{A}a_i & \text{otherwise;} \end{cases}$$

put

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_i.$$

This $\mathfrak{m}$ is a proper ideal, and since $a_i \in \mathfrak{m}$ if and only if $a_i \in \mathfrak{a}_{i+1}$, it follows that $\mathfrak{m}$ is maximal.[5] Note that $\mathfrak{a}_0$ above can be replaced by any finitely generated proper ideal which needs to be extended to a maximal one.

Where generalisation demands that countability assumptions be dropped, AC, be it in the guise of WO or ZL, comes to one's aid. Below, we show how to argue for MIT using Raoult's principle of Open Induction. It seems instructive to consider the case of Noetherian rings first.

Noetherian rings

Several constructive notions of Noetherianity have been proposed in the literature (Richman 1974; Seidenberg 1974; Mines, Richman, and Ruitenburg 1988; Jacobsson and Löfwall 1991; Coquand and Persson 1998a; Perdry 2004; Perdry and Schuster 2011; 2014; Blechschmidt 2017), the litmus test usually being Hilbert's Basis Theorem. Martin-Löf has proposed a definition replacing the Ascending Chain Condition by an induction principle (Jacobsson and Löfwall 1991), to be recalled in the following.

Let $(E, \leqslant)$ be a partially ordered set. A subset H of E is *hereditary* if

$$(\forall x \in E)\Big((\forall y \in E)(y < x \to y \in H) \to x \in H\Big), \tag{2}$$

where $y < x$ is understood as the conjunction of $y \leqslant x$ and $y \neq x$. The poset E is *well founded* if its only hereditary subset is E itself. A coherent[6]

[5] We have adopted this from (Mines, Richman, and Ruitenburg 1988, Lemma VI.3.2). A similar argument is employed in classical reverse mathematics, as part of the proof that MIT for countable commutative rings is equivalent to ACA_0 over RCA_0 (Simpson 2009, III.5.).

[6] $\mathbf{A}$ is *coherent* if for all $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$, the kernel of the mapping $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ is finitely generated.

ring in which every finitely generated ideal is detachable is said to be *ML-Noetherian* if the collection $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}$ of finitely generated ideals, ordered by reverse set inclusion $\supseteq$, is well founded.

Suppose now that $\mathbf{A}$ has detachable ideals and $(\mathcal{I}_{\mathbf{A}}, \supseteq)$ is well founded. In analogy with *primality tests* (Perdry 2004), we further assume that there is a procedure which decides, given a finitely generated ideal $\mathfrak{a}$, whether it is maximal, and if not, gives an $a \in \mathbf{A}$ such that

$$a \notin \mathfrak{a} \quad \text{and} \quad 1 \notin \mathfrak{a} + \mathbf{A}a. \tag{3}$$

Consider the property $P(\mathfrak{a})$ that *if* $\mathfrak{a}$ *is proper, then* $\mathfrak{a}$ *is contained in a maximal ideal*. To show that P applies to every $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_{\mathbf{A}}$, we need to show that it defines a hereditary subset of $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}$. Thus, let $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_{\mathbf{A}}$ and suppose that $P(\mathfrak{b})$ for every $\mathfrak{b} \supsetneq \mathfrak{a}$. Now, either $\mathfrak{a}$ is maximal itself, so $P(\mathfrak{a})$ anyway. Else there is $a \notin \mathfrak{a}$ such that $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathbf{A}a$ is proper by (3), whence $P(\mathfrak{b})$ by the assumption, and so again $P(\mathfrak{a})$.

It is worth noting that there is no need to invoke Dependent Choice, which would have been required had we assumed the classical Ascending Chain Condition instead of the induction principle.

Proof by Open Induction

The argument in the Noetherian case carries over almost literally to the general one, provided we work with Raoult's principle of *Open Induction* (OI) (Raoult 1988; Coquand 1997; Berger 2004; Schuster 2012; 2013; Rinaldi and Schuster 2016). Let us switch to ZFC.

Let $(E, \leqslant)$ be a partially ordered set with directed joins (a *dcpo*). Recall that a subset O of E is *open* (in the Scott topology; Johnstone 1982) if it is *inaccessible by directed joins*, which is to say that, if $D \subseteq E$ is directed and $\sup D \in O$, then $D \between O$.[7] Now OI asserts that if $O \subseteq E$ is open and hereditary with respect to the converse $\geq$, then $O = E$. This principle follows classically from ZL, to which it is in fact equivalent by complementation (Raoult 1988; Rinaldi and Schuster 2016).

To see how OI applies to prove MIT, consider the dcpo of ideals of $\mathbf{A}$, where directed joins are unions. The property P introduced in the preceding section describes, as we have seen, a hereditary subset, which is readily shown open. Therefore, by OI, every proper ideal is contained in a maximal one.

In order to interpret MIT constructively, we next turn it "upside down". In this guise it will assert the non-triviality of a suitable entailment relation, whose ideal elements are exactly the maximal ideals sought after. Abstract

[7] The very intuitive notation $U \between V$ has been borrowed from formal topology (Sambin 2003); it is to express that the sets U and V have an element in common.

existence will thus be replaced by syntactic consistency, as called for in the revised Hilbert Programme.

3 Entailment relations

Entailment relations provide an astonishing example for the persistence of a mathematical concept which emerges independently in various fields of mathematical inquiry. Prevalently attributed to Scott (1971; 1973; 1974), similar concepts had been developed by Lorenzen (1950; 1951; 1952; 1953; 2017), as currently being revived by Coquand, Lombardi, and Neuwirth (2019; Coquand and Neuwirth 2017).

Let S be a set. A relation

$$\vdash \,\subseteq \mathrm{Fin}(S) \times \mathrm{Fin}(S)$$

between finite subsets of S is an *entailment relation* if it is *reflexive*, *monotone*, and *transitive*, as follows:

$$\frac{U \between V}{U \vdash V}\ (\mathrm{R}) \qquad \frac{U \vdash V}{U, U' \vdash V, V'}\ (\mathrm{M}) \qquad \frac{U \vdash V, a \quad U, a \vdash V}{U \vdash V}\ (\mathrm{T})$$

where the usual shorthand notation is at work, putting a comma to abbreviate set union, and suppressing brackets where it should read a singleton set. We will refer to relations of this kind as "conventional" entailment relations, as opposed to the ones introduced below.

Notwithstanding the utmost versatility (Cederquist and Coquand 2000) of (conventional) entailment relations, some potential applications call for an extended concept which allows for arbitrary sets of succedents (rather than the usual finite ones). We sketch a possible development (Wessel 2018), rather close to the one of Fourman and Grayson 1982.

An infinitary generalisation

Let S be a set. By a *geometric entailment relation* on S we propose to understand a class relation

$$\vdash \,\subseteq \mathrm{Fin}(S) \times \mathrm{Pow}(S)$$

between finite and arbitrary subsets of S. This relation is required to be reflexive, monotone, and transitive in the following sense, respectively:

$$\frac{U \between V}{U \vdash V}\ (\mathrm{R}) \qquad \frac{U \vdash V}{U, U' \vdash V, V'}\ (\mathrm{M}) \qquad \frac{U \vdash V \quad (\forall b \in V)(U, b \vdash W)}{U \vdash W}\ (\mathrm{T})$$

If $U \in \mathrm{Fin}(S)$ is such that $U \vdash$, i.e., $U \vdash \emptyset$, then U is said to be *inconsistent*. Borrowing terminology from Dynamical Algebra (Coste, Lombardi, and Roy 2001), we say that $\vdash$ *collapses* if the empty set is inconsistent.

The recommended reading of $U \vdash V$ still is the same as for conventional entailment relations (Scott 1974), i.e., as that of a Gentzen sequent, or rather as

$$\bigwedge_{a \in U} P(a) \to \bigvee_{b \in V} P(b),$$

where P is a distinguished predicate on S. However, the succedent V must now be read as an infinite disjunction, so what we intend to capture are *geometric sequents* (Johnstone 2002), whence our choice of terminology. Henceforth, by "entailment relation" will always be meant "geometric entailment relation".

By an *ideal element* of $\vdash$ we understand a subset α of S which is such that, if $U \vdash V$ and $U \subseteq \alpha$, then $\alpha \between V$. The class of all ideal elements of $\vdash$, its *spectrum*, will be denoted

$$\mathrm{Spec}(\vdash).$$

Interestingly, Hertz (1922; 1923; 1929), presumably the first to conceive "the very idea of sequent calculi and of structural rules" (Legris 2012, 3), introduced the notion of ideal element with explicit reference to Vaihinger. Hertz's ideal elements refer to an "introduction of special symbols ... in order to reduce the complexity of axioms" (Legris 2012), whence there is a conceptual difference. The ideal elements in Hertz's (1922, § 3. 53. [Definition]) sense rather correspond to the elements of the generated frame (see below).

Inductive generation and fundamental theorem

Once a set $\mathcal{E}$ of initial entailments has been specified, how do we obtain the *least* entailment relation $\vdash_{\mathcal{E}}$ to contain $\mathcal{E}$? Impredicatively, $\vdash_{\mathcal{E}}$ would squarely be identified with the intersection of *all* entailment relations that contain $\mathcal{E}$. In order to not incur impredicativity, we are well advised to resort to an inductive definition instead, which constructive set theory conveniently accommodates (Aczel 1986; Aczel and Rathjen 2000; 2010; Rathjen 2005). To this end, a combination of strategies employed in formal topology (Coquand, Sambin, Smith, and Valentini 2003), with related ideas developed in sequent calculus (Negri 2014; Negri and von Plato 1998), has already proved viable (Wessel 2018).

The basic idea carries over from the recent treatment of conventional entailment relations (Rinaldi and Wessel 2019). To each "initial entailment" of $\mathcal{E}$ we assign an inference step, as follows:

$$(A, B) \in \mathcal{E} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\{\, (U \cup \{b\}, V) \mid b \in B \,\}}{(U \cup A, V)} \in \Phi$$

Furthermore,

$$\frac{\emptyset}{(U, V)} \in \Phi \quad \text{whenever} \quad U \between V.$$

By the *Class Inductive Definition Theorem* (Aczel and Rathjen 2000), there is a smallest Φ-closed class $I(\Phi)$, and we put $\vdash_{\mathcal{E}} = I(\Phi)$. This Φ is indeed an entailment relation; in fact, it is the least one to contain $\mathcal{E}$ (Wessel 2018).

Moreover, analogously to the finitary case (Cederquist and Coquand 2000), with every inductively generated entailment relation $\vdash_{\mathcal{E}}$, we can associate a certain *complete* distributive lattice F together with a mapping $[\,\cdot\,]\colon S \to F$ such that, for all $U \in \mathrm{Fin}(S)$ and $V \in \mathrm{Pow}(S)$,

$$U \vdash_{\mathcal{E}} V \quad \text{if and only if} \quad \bigwedge_{a \in U} [a] \leqslant \bigvee_{b \in V} [b],$$

and which, moreover, has the evident universal property analogous to the fundamental result in Cederquist and Coquand 2000.[8] Last but not least, the (set-generated) completely prime filters (Aczel 2006) of F bijectively correspond to the ideal elements of $\vdash_{\mathcal{E}}$.

We can study this frame – which is a point-free presentation of the space of ideal elements equipped with the *finite information topology* (Fourman and Grayson 1982) – through its syntactic underpinning, i.e., by way of the entailment relation at hand.

Remark 1 If $\vdash_{\mathcal{E}}$ is generated by a set $\mathcal{E}$ of *finitary* axioms (A, B), i.e., such that both A, $B \in \mathrm{Fin}(S)$, then, by an inductive argument,

$$U \vdash_{\mathcal{E}} V \quad \text{if and only if} \quad \big(\exists V_0 \in \mathrm{Fin}(V)\big)\big(U \vdash_{\mathcal{E}} V_0\big).$$

Assuming AC,[9] by way of Scott's (1974) completeness theorem, every such entailment relation $\vdash$ is determined by its spectrum, i.e., such that

$$U \vdash V \quad \text{if and only if} \quad \big(\forall \alpha \in \mathrm{Spec}(\vdash)\big)\big(U \subseteq \alpha \to \alpha \between V\big). \tag{4}$$

In particular,

$$\vdash a \quad \text{if and only if} \quad a \in \bigcap \mathrm{Spec}(\vdash); \tag{5}$$

and non-collapse of $\vdash$ amounts to $\vdash$ having an ideal element. This, however, does not carry over to geometric entailment relations in general, due to

[8] Note that in CZF a frame invariably means a *class* frame, on account of certain size issues (Aczel 2006; Curi 2010). The focus should thus be put on the notion of a *set-generated* frame, of which the frame generated by a set $\mathcal{E}$ of axioms is an example, provided we go beyond CZF, adopting the *Regular Extension Axiom* REA.

[9] Actually, BUT suffices, which is ZF-equivalent to Scott's completeness theorem (Rinaldi, Schuster, and Wessel 2018).

the well-known fact from point-free topology that there are non-trivial non-spatial locales (Johnstone 1982).

Remark 2 Let S and T be sets equipped with entailment relations $\vdash$ and $\vdash'$, respectively. Every function $f\colon S \to T$ such that, for all $U \in \mathrm{Fin}(S)$ and $V \in \mathrm{Pow}(S)$,

$$U \vdash V \quad \text{implies} \quad f(U) \vdash' f(V),$$

induces a mapping of ideal elements

$$f^*\colon \mathrm{Spec}(\vdash') \to \mathrm{Spec}(\vdash), \quad \alpha \mapsto f^{-1}(\alpha).$$

Note that if f denotes a subset inclusion $S \subseteq T$, then f^* amounts to restriction, i.e., $f^*(\alpha) = \alpha \cap S$. If moreover $S = T$, then $\vdash \subseteq \vdash'$ entails $\mathrm{Spec}(\vdash') \subseteq \mathrm{Spec}(\vdash)$. In this manner, several extension theorems can be captured in terms of entailment relations (Cederquist and Coquand 2000; Rinaldi and Wessel 2018).

Definition 1 Let $\vdash$ and $\vdash'$ be entailment relations on S such that $\vdash \subseteq \vdash'$. We say that $\vdash'$ is *weakly conservative over* $\vdash$ if every $U \in \mathrm{Fin}(S)$ is inconsistent with respect to $\vdash$ if and only if it is so with respect to $\vdash'$, i.e.,

$$U \vdash \quad \text{if and only if} \quad U \vdash'.$$

4 Krull's theorem without choice

Prime ideals

We first study the entailment relation of *prime ideal*, inductively generated by the following axioms (Cederquist and Coquand 2000):

$$\begin{aligned} 1 &\vdash_{\mathrm{p}} \\ a &\vdash_{\mathrm{p}} ab, \\ a, b &\vdash_{\mathrm{p}} a+b, \\ ab &\vdash_{\mathrm{p}} a, b, \\ &\vdash_{\mathrm{p}} 0. \end{aligned}$$

The ideal elements of $\vdash_{\mathrm{p}}$ are precisely the prime ideals of $\mathbf{A}$. This entailment relation has a well-known direct, non-inductive description (Cederquist and Coquand 2000), sometimes known as *formal Nullstellensatz*:

Proposition 1 *The following are equivalent:*

1. $a_1, \ldots, a_k \vdash_{\mathrm{p}} b_1, \ldots, b_\ell$.

2. $b_1 \cdots b_\ell \in \sqrt{\langle a_1, \ldots, a_k \rangle}$.

The formal Nullstellensatz has many applications in constructive algebra (Coquand 2009), e.g., to give an elementary constructive proof of the Gauß–Joyal Lemma (Banaschewski and Vermeulen 1996), the classical proof of which proceeds by reduction modulo a generic prime ideal (Eisenbud 1995).

Often the restriction of an entailment relation to its *trace*, i.e., to its single-conclusion instances, promotes further insight. The entailment relation of *radical ideal* is generated by the following axioms (Rinaldi, Schuster, and Wessel 2017; 2018):

$$\begin{aligned} a &\rhd ab, \\ a, b &\rhd a+b, \\ a^2 &\rhd a, \\ &\rhd 0. \end{aligned}$$

The ideal elements of $\rhd$ are precisely the radical ideals of $\mathbf{A}$, and it is easy to see that

$$a_1, \ldots, a_k \rhd b \quad \text{if and only if} \quad a_1, \ldots, a_k \vdash_{\mathrm{p}} b. \tag{6}$$

In other words, the (multi-conclusion) entailment relation of prime ideal is a *conservative extension* of the (single-conclusion) entailment relation of radical ideal (Rinaldi, Schuster, and Wessel 2017; 2018). This conservation boils down to applications of the well-known but seldom made explicit (Rinaldi 2014; Rinaldi and Schuster 2016) computational rule that

$$\sqrt{\langle U, a \rangle} \cap \sqrt{\langle U', b \rangle} \subseteq \sqrt{\langle U, U', ab \rangle}. \tag{7}$$

The semantic counterpart of this conservation result is that *every radical ideal is the intersection of all prime ideals containing it*, also known as Krull's Lemma. Again, classical arguments which proceed via the latter can sometimes be reshaped in a constructive manner using (7) (Wessel 2020).

Maximal ideals

Next we consider the entailment relation of *maximal ideal* of $\mathbf{A}$, generated by the following axioms:

$$\begin{aligned} 1 &\vdash_{\mathrm{m}}, \\ a &\vdash_{\mathrm{m}} ab, \\ a, b &\vdash_{\mathrm{m}} a+b, \\ &\vdash_{\mathrm{m}} a, \{\, 1 - ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}. \end{aligned}$$

The ideal elements of $\vdash_\mathrm{m}$ are exactly the maximal ideals of $\mathbf{A}$ in the sense of Section 2. We have not postulated $\vdash_\mathrm{m} 0$, for it can be readily inferred by instantiation of the last axiom for $a = 0$, which yields $\vdash_\mathrm{m} 0, 1$ and which in turn can be cut with $1 \vdash_\mathrm{m}$.

Classically, in view of MIT, this entailment relation has an ideal element, due to which it does not collapse. Our next aim is to give an elementary constructive proof of the latter.

Let us first capture the classical fact that every maximal ideal is prime.

Lemma 1 *For all $a, b \in \mathbf{A}$,*

$$ab \vdash_\mathrm{m} a, b.$$

In particular, $\vdash_\mathrm{p} \subseteq \vdash_\mathrm{m}$.

Proof For all $c \in \mathbf{A}$, $abc + (1-ac)b = b$, which witnesses $ab, 1-ac \vdash_\mathrm{m} b$. This can be used to cut $\vdash_\mathrm{m} a, \{\, 1-ac \mid c \in A \,\}$ so as to obtain $ab \vdash_\mathrm{m} a, b$. □

In view of Remark 2, Lemma 1 entails in fact that $\mathrm{Spec}(\vdash_\mathrm{m}) \subseteq \mathrm{Spec}(\vdash_\mathrm{p})$. In other words, every maximal ideal is prime.

Lemma 2 *For all $a \in \mathbf{A}$, $U \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A})$, and $V \in \mathrm{Pow}(\mathbf{A})$, the following are equivalent:*

1. $U \vdash_\mathrm{m} a, V$.
2. $(\forall b \in \mathbf{A})(U, 1-ab \vdash_\mathrm{m} V)$.

Proof Suppose that $U \vdash_\mathrm{m} a, V$ and let $b \in \mathbf{A}$. Since $1-ab, a \vdash_\mathrm{m}$ due to Proposition 1 and Lemma 1, we get $U, 1-ab \vdash_\mathrm{m} V$ by cut. Conversely, if $U, 1-ab \vdash_\mathrm{m} V$ for all $b \in \mathbf{A}$, then $\vdash_\mathrm{m} a, \{\, 1-ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}$ can be cut so as to obtain $U \vdash_\mathrm{m} a, V$. □

Lemma 3 *The following are equivalent:*

1. $a_1, \ldots, a_k \vdash_\mathrm{m}$.
2. $1 \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.

In particular, $a \vdash_\mathrm{m}$ if and only if a is invertible.

Proof If $1 \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, then $a_1, \ldots, a_k \vdash_\mathrm{p}$ by Proposition 1 and thus $a_1, \ldots, a_k \vdash_\mathrm{m}$ by Lemma 1. As regards the converse, it is enough to check that

$$\frac{U \vdash_\mathrm{m} V \quad (\forall b \in V)\big(1 \in \langle a_1, \ldots, a_k, b \rangle\big)}{1 \in \langle a_1, \ldots, a_k, U \rangle}$$

where for $U \vdash_\mathrm{m} V$ it suffices to instantiate initial entailments only (Wessel 2018). Except perhaps for the axiom of maximality, this is trivial. Hence, let $a \in \mathbf{A}$ and suppose that

$$1 \in \langle a_1, \ldots, a_k, a \rangle$$

as well as that, for all $b \in \mathbf{A}$,

$$1 \in \langle a_1, \ldots, a_k, 1-ab \rangle.$$

According to the former, there is $b \in \mathbf{A}$ such that $1-ab \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, which, if instantiated within the latter assumption, yields the desired conclusion $1 \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. □

In view of Proposition 1, Lemma 3 implies that a finite subset U of $\mathbf{A}$ is inconsistent with respect to $\vdash_{\mathrm{m}}$ precisely if it is so with respect to $\vdash_{\mathrm{p}}$, i.e.,

$$U \vdash_{\mathrm{p}} \quad \text{if and only if} \quad U \vdash_{\mathrm{m}}.$$

For this we say that $\vdash_{\mathrm{m}}$ is a *weakly conservative extension* of $\vdash_{\mathrm{p}}$. In particular (Wessel 2018), the classical counterpart using AC is that *every prime ideal is contained in a maximal ideal*, a form of Krull's MIT.

Corollary 1 *The following are equivalent:*

1. $\vdash_{\mathrm{m}}$ *collapses.*
2. $\mathbf{A}$ *is trivial.*

Proof According to Lemma 3, $\vdash_{\mathrm{m}}$ collapses if and only if $1 \in \langle 0 \rangle$. □

In all, non-collapse of $\vdash_{\mathrm{m}}$ is immediate, provided that $\mathbf{A}$ is a non-trivial ring to begin with, which is a constructive counterpart of MIT. We hasten to add that Coquand and Persson (1998b), too, have obtained a constructive interpretation for the existence of maximal ideals using constructive models based on point-free topology.

Last but not least, putting together the preceding lemmas, we arrive at a direct, non-inductive description of the canonical finitary subrelation of $\vdash_{\mathrm{m}}$, analogous to the formal Nullstellensatz (Proposition 1).

Proposition 2 *The following are equivalent:*

1. $a_1, \ldots, a_k \vdash_{\mathrm{m}} b_1, \ldots, b_\ell$.
2. $b_1 \cdots b_\ell \in \mathrm{Jac}(\langle a_1, \ldots, a_k \rangle)$.

Proof Since $U \vdash_{\mathrm{m}} a, b$ if and only if $U \vdash_{\mathrm{m}} ab$, which is a consequence of Lemma 1, it suffices to consider the single-conclusion case $\ell = 1$. Combining the case $V = \emptyset$ of Lemma 2 with Lemma 3, we see that

$$a_1, \ldots, a_k \vdash_{\mathrm{m}} b \quad \text{if and only if} \quad (\forall c \in \mathbf{A})\big(1 \in \langle a_1, \ldots, a_k, 1-bc \rangle\big),$$

the latter of which is to say that $1-bc$ is invertible modulo $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ for any $c \in \mathbf{A}$. □

Corollary 2 *The following are equivalent:*

1. $\vdash_{\mathrm{m}} a$.
2. $a \in \mathrm{Jac}\, \mathbf{A}$.

Corollary 2 is reminiscent of the classical fact that Jac **A** is the intersection of all maximal ideals of **A**.

Remark 3 The condition on **A** to be a *residually discrete local ring* (Lombardi and Quitté 2015; Yengui 2015), i.e., that every $a \in \mathbf{A}$ either is invertible or belongs to the Jacobson radical Jac **A**, can here be captured in terms of the *completeness* (Scott 1974) of $\vdash_{\mathrm{m}}$, which is to say that, for all $a \in \mathbf{A}$,

$$a \vdash_{\mathrm{m}} \quad \text{or} \quad \vdash_{\mathrm{m}} a.$$

Notice that because of $1-ab, a \vdash_{\mathrm{m}}$ for any $b \in \mathbf{A}$, if $\vdash_{\mathrm{m}}$ is complete, then $a \vdash_{\mathrm{m}}$ or $1-ab \vdash_{\mathrm{m}}$, which of course follows directly from the description of Jac **A** as well. In particular,

$$a \vdash_{\mathrm{m}} \quad \text{or} \quad 1-a \vdash_{\mathrm{m}},$$

which condition, in view of Lemma 3 above, translates back as asserting that **A** be a *local ring* (Lombardi and Quitté 2015; Yengui 2015).

5 Applications

Krull dimension

In classical mathematics, the *Krull dimension* of a ring or distributive lattice is defined as the supremum of the lengths of strictly increasing chains of prime ideals. As it takes recourse to objects which may fail to exist constructively, this definition is not effective. A constructive definition was suggested by Joyal (Boileau and Joyal 1981; Español 1982)[10] and has been analysed also from the point of view of entailment relations (Cederquist and Coquand 2000). Subsequent developments (Lombardi 2002; Coquand and Lombardi 2002) have led to an inductive definition of dimension (Coquand, Lombardi, and Roy 2005), which via Stone duality applies just as well to spectral spaces, in which case it appears as a simplified version of the Menger–Urysohn definition (Coquand, Lombardi, and Roy 2005).

Here is the constructive and elementary characterisation of Krull dimension (Kdim) (Lombardi 2002; Coquand and Lombardi 2002; Coquand, Lombardi, and Roy 2005), by now widely used (Yengui 2015; Kemper and Yengui 2019): let $\ell \in \mathbb{N}$, then Kdim $\mathbf{A} \leqslant \ell$ if and only if, for all $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{A}$, there are $b_0, \dots, b_\ell \in \mathbf{A}$ and $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ such that

$$a_0^{m_0}\Big(\cdots\big(a_\ell^{m_\ell}(1+a_\ell b_\ell)+\cdots\big)+a_0 b_0\Big) \;=\; 0.$$

[10] With this, as Lombardi and Quitté put it, "the theory of dimension which seemed bathed in ethereal spaces – that are invisible when you do not trust the axiom of choice – has become (at least in principle) an elementary theory, without any further mysteries" (Lombardi and Quitté 2015, p. xliii).

In particular,

$$\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0 \quad \text{if and only if} \quad (\forall a \in \mathbf{A})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbf{A})\big(a^n(1-ab) = 0\big).$$

For example, if $\mathbf{A}$ is a *Boolean ring*, i.e., such that $a^2 = a$ for every $a \in \mathbf{A}$, then evidently $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$.[11] The following Proposition 3 captures the classical counterpart of $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$, which by Remark 2 asserts that every prime ideal of $\mathbf{A}$ is a maximal ideal, or in other words, that there is no proper chain $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1$ of prime ideals. For a similar characterisation, see Cederquist and Coquand 2000, Corollary 4.

Proposition 3 *The following are equivalent:*

1. $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$.
2. $\vdash_{\mathrm{p}} = \vdash_{\mathrm{m}}$.

Proof Suppose that $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$. Due to Lemma 1, in order to show $\vdash_{\mathrm{p}} = \vdash_{\mathrm{m}}$, it suffices to prove $\vdash_{\mathrm{p}} \supseteq \vdash_{\mathrm{m}}$, i.e., that, for every $a \in \mathbf{A}$,

$$\vdash_{\mathrm{p}} a, \{\, 1-ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}.$$

Thus, let $a \in \mathbf{A}$. Since $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$, there is $n \in \mathbb{N}$ and $b \in \mathbf{A}$ such that $a^n(1-ab) = 0$, whence $\vdash_{\mathrm{p}} a, 1-ab$, and monotonicity (M) yields the desired entailment. Conversely, if indeed $\vdash_{\mathrm{p}} = \vdash_{\mathrm{m}}$, then, since $\vdash_{\mathrm{p}}$ is finitary (cf. Remark 1), for every $a \in \mathbf{A}$ there are $b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbf{A}$ such that

$$\vdash_{\mathrm{p}} a, 1-ab_1, \ldots, 1-ab_\ell.$$

Hence, according to Proposition 1,

$$a(1-ab_1)\cdots(1-ab_k) \in \sqrt{0}.$$

Since $\Pi_{j=1}^{\ell}(1-ab_j)^n = 1-ac$ for a suitable $c \in A$, this completes the proof.□

Jacobson rings

Rings with Krull dimension $\leqslant 0$ are among those for which $\vdash_{\mathrm{m}}$ is conservative over the single-conclusion entailment relation $\rhd$ of radical ideal (cf. Section 4) in the sense that

$$U \vdash_{\mathrm{m}} a \quad \text{if and only if} \quad U \rhd a. \tag{8}$$

[11] Incidentally, as Moore points out with regard to Stone's development of duality theory, "it was apropos of Boolean rings, which Krull did not consider specifically, that [MIT] proved to be particularly significant" (Moore 1982, p. 229).

This is immediate in view of Propositions 3 and 1. However, as opposed to the case of primality (Rinaldi, Schuster, and Wessel 2017; 2018), conservation of maximality (8) does not hold in general.

In this context it might be interesting to consider *Jacobson rings*,[12] a classical characterisation of which is that every prime ideal be the intersection of all maximal ideals containing it. This can be rephrased as demanding that the two notions of radical coincide (Goldman 1951), which is to say that, for every ideal $\mathfrak{a}$ of $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{Jac}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

The latter characterisation can be recast in terms of entailment relations. This is really just a back and forth between entailment and the corresponding algebraic certificate, but perhaps worth carrying out for the sake of illustration.

Proposition 4 *The following are equivalent:*

1. $\mathbf{A}$ *is a Jacobson ring.*
2. $\vdash_{\mathrm{m}}$ *is conservative over* $\rhd$ *and the Jacobson radical is a finitary closure operator.*

Proof If the Jacobson radical coincides with the nilradical, then of course the former is finitary (as so is the latter), and $\vdash_{\mathrm{m}}$ is conservative over $\rhd$ on account of (6) and Propositions 1 and 2. Conversely, if conservation holds and the Jacobson radical is a finitary closure operator, then for each ideal $\mathfrak{a}$ and every $a \in \mathrm{Jac}(\mathfrak{a})$ there are $a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{a}$ such that $a \in \mathrm{Jac}\big(\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\big)$, so $a_1, \ldots, a_k \vdash_{\mathrm{m}} a$, hence $a_1, \ldots, a_k \rhd a$, which implies $a \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Primary ideals and von Neumann regularity

Recall that a (not necessarily commutative) ring $\mathbf{A}$ is said to be *von Neumann regular* if

$$(\forall a \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{A})(a = aba).$$

Every commutative von Neumann regular ring $\mathbf{A}$ is *reduced*, i.e.,

$$(\forall a \in \mathbf{A})(a^2 = 0 \rightarrow a = 0).$$

In fact, $\mathbf{A}$ is von Neumann regular if and only if $\mathbf{A}$ is reduced and $\mathrm{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant 0$. In a commutative von Neumann regular ring $\mathbf{A}$ every primary ideal is

[12] "This name, bestowed by Krull, honors Nathan Jacobson's studies of the intersection of the maximal ideals of a ring, which is now called the Jacobson radical" (Eisenbud 1995, 132, fn. 1). Goldman (1951), independently and in view of the general form of Hilbert's Nullstellensatz, had chosen the name *Hilbert ring*.

maximal (Satyanarayana 1967; Lal 1971). This lends itself to be captured in terms of entailment relations.[13]

We consider the entailment relation of *primary ideal*, generated by

$$\begin{aligned} 1 &\vdash_{\mathrm{p}'}, \\ a &\vdash_{\mathrm{p}'} ab, \\ a, b &\vdash_{\mathrm{p}'} a+b, \\ ab &\vdash_{\mathrm{p}'} a, \{\, b^n \mid n>0 \,\}, \\ &\vdash_{\mathrm{p}'} 0. \end{aligned}$$

The ideal elements of $\vdash_{\mathrm{p}'}$ are exactly the primary ideals of $\mathbf{A}$, i.e., the proper ideals $\mathfrak{a}$ of $\mathbf{A}$ such that if $ab \in \mathfrak{a}$, then $a \in \mathfrak{a}$ or $b^n \in \mathfrak{a}$ for some $n > 0$.

Since evidently $ab \vdash_{\mathrm{p}} a, \{\, b^n \mid n>0 \,\}$, and in view of Lemma 1, it is clear that

$$\vdash_{\mathrm{p}'} \subseteq \vdash_{\mathrm{p}} \subseteq \vdash_{\mathrm{m}}.$$

Moreover, following a strategy similar to the one employed for the proof of Lemma 3, it can be shown that

$$a_1, \ldots, a_k \vdash_{\mathrm{p}'} \quad \text{if and only if} \quad 1 \in \langle a_1, \ldots, a_k \rangle,$$

whence both $\vdash_{\mathrm{p}}$ and $\vdash_{\mathrm{m}}$ are weakly conservative over $\vdash_{\mathrm{p}'}$.

Similar to the case of nil- and Jacobson radicals, the *Gilmer radical* of $\mathbf{A}$ (Brewer and Richman 2006), which is the intersection of all primary ideals of $\mathbf{A}$, could be described by means of the "tautologies" for the corresponding entailment relation, i.e., as the set of all $a \in \mathbf{A}$ such that $\vdash_{\mathrm{p}'} a$. Classically, it is known that the Gilmer radical of $\mathbf{A}$ is zero if and only if $\mathbf{A}$ is a subring of a product of zero-dimensional rings (Arapović 1983; Brewer and Richman 2006).

The following is straightforward and presented just for the sake of practice. Its converse will briefly be discussed below in Remark 4, but from a classical perspective.

Proposition 5 *If* $\mathbf{A}$ *is von Neumann regular, then* $\vdash_{\mathrm{p}'} = \vdash_{\mathrm{m}}$.

Proof It suffices to check $\vdash_{\mathrm{p}'} \supseteq \vdash_{\mathrm{m}}$, i.e., that, for all $a \in \mathbf{A}$,

$$\vdash_{\mathrm{p}'} a, \{\, 1-ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}.$$

Thus, let $a \in \mathbf{A}$. By von Neumann regularity, there is $b \in \mathbf{A}$ such that $a(1-ab) = 0$. It follows that

$$\vdash_{\mathrm{p}'} a, \left\{\, (1-ab)^n \;\middle|\; n>0 \,\right\}.$$

[13] Rings in which every primary ideal is maximal have been studied under the name *P-ring* (Satyanarayana 1967; Lal 1971).

Since $(1-ab)^n = 1-ac$ for a suitable $c \in \mathbf{A}$, the latter entailment yields the desired one by monotonicity (M). $\square$

Remark 4 That every primary ideal of $\mathbf{A}$ be a maximal ideal is not only necessary for von Neumann regularity, but actually sufficient (Lal 1971). Unfortunately, we don't have at hand an elementary argument solely in terms of entailment relations; but here is a brief and succinct *classical* one: if $\vdash_{\mathrm{m}} = \vdash_{\mathrm{p}'}$, then, on the one hand, $\vdash_{\mathrm{m}} = \vdash_{\mathrm{p}}$, whence $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$ by Proposition 3. On the other hand, $\vdash_{\mathrm{p}} = \vdash_{\mathrm{p}'}$, which directly implies that $\mathbf{A}$ is reduced since, according to the above-mentioned result of Arapović 1983 and Brewer and Richman 2006.

Integral extensions

Recall that if $\phi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ is a homomorphism of commutative rings, and if $\mathfrak{p}$ is a prime ideal of $\mathbf{B}$, then the pre-image $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ is a prime ideal of $\mathbf{A}$. In general, this does not carry over if "prime" is to be replaced with "maximal" (Atiyah and Macdonald 1969). However, it is a standard observation that maximal ideals do pull back along *integral* ring extensions. Let's capture this in terms of entailment relations.

Let $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}'$ be commutative rings. Recall that an element $x \in \mathbf{A}'$ is said to be *integral* over $\mathbf{A}$ if

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

for certain $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ and $n > 0$. The ring $\mathbf{A}'$ is said to be *integral* over $\mathbf{A}$ if every element of $\mathbf{A}'$ is integral over $\mathbf{A}$. *In the following, we assume that* $\mathbf{A}'$ *is integral over* $\mathbf{A}$.

We consider the entailment relations $\vdash_{\mathrm{m}}$ and $\vdash'_{\mathrm{m}}$ of maximal ideals of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}'$, respectively. The question which poses itself is whether $\vdash_{\mathrm{m}} \subseteq \vdash'_{\mathrm{m}}$. For this to be answered affirmatively, we only need to check that the maximality axiom interprets, which is to say that, for all $a \in \mathbf{A}$,

$$\vdash'_{\mathrm{m}} \; a, \{\, 1-ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}.$$

The following lemma is straightforward and actually holds for every entailment relation considered in this note; the one after is crucial in the above regard.

Lemma 4 *Let $a, b, c \in \mathbf{A}$ and $n > 0$.*

1. $1-a \vdash_{\mathrm{m}} 1-a^n$.
2. $1-a, ab+c \vdash_{\mathrm{m}} b+c$.

Proof The first entailment is witnessed by $1-a^n = (1-a)(1+a+\cdots+a^{n-1})$, and the second by $(1-a)b + ab + c = b+c$. $\square$

Lemma 5 *Let* $\mathbf{A}'$ *be integral over* $\mathbf{A}$*, and let* $a \in \mathbf{A}$*. For every* $x \in \mathbf{A}'$ *there is* $b \in \mathbf{A}$ *such that*

$$1 - ax \ \vdash'_{\mathrm{m}} \ 1 - ab.$$

Proof To begin with, write

$$x^n \ = \ a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

for certain $n > 0$ and $a_i \in \mathbf{A}$. Lemma 4.1 implies $1 - ax \ \vdash'_{\mathrm{m}} \ 1 - (ax)^n$, which is

$$1 - ax \ \vdash'_{\mathrm{m}} \ 1 - a\Big((ax)^{n-1} a_1 + (ax)^{n-2} a a_2 + \cdots + (ax) a^{n-2} a_{n-1} + a^{n-1} a_n\Big).$$

By way of Lemma 4.2 and cut (T), we may now cancel the ax's in the succedent, which yields

$$1 - ax \ \vdash'_{\mathrm{m}} \ 1 - a\big(a_1 + a a_2 + \cdots + a^{n-1} a_n\big),$$

so that $b = a_1 + a a_2 + \cdots + a^{n-1} a_n \in \mathbf{A}$ witnesses the claim. $\square$

Proposition 6 *Let* $\mathbf{A}'$ *be integral over* $\mathbf{A}$*.*

1. $\vdash_{\mathrm{m}} \subseteq \vdash'_{\mathrm{m}}$.
2. $\vdash'_{\mathrm{m}}$ *is weakly conservative over* $\vdash_{\mathrm{m}}$*.*

Proof 1. Let $a \in \mathbf{A}$. First we instantiate the maximality axiom with respect to $\mathbf{A}'$, i.e.,

$$\vdash'_{\mathrm{m}} \ a, \{\, 1 - ax \mid x \in \mathbf{A}' \,\}.$$

According to Lemma 5, for every $x \in \mathbf{A}'$ there is $b \in \mathbf{A}$ such that $1 - ax \vdash'_{\mathrm{m}} 1 - ab$, whence, by monotonicity (M),

$$1 - ax \vdash'_{\mathrm{m}} \{\, 1 - ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}.$$

Transitivity (T) yields

$$\vdash'_{\mathrm{m}} \ a, \{\, 1 - ab \mid b \in \mathbf{A} \,\}.$$

2. In view of Lemma 3, this is just another way of expressing that if elements $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$ are comaximal in $\mathbf{A}'$ then they are so with respect to $\mathbf{A}$. This can be shown by induction, passing for $k > 0$ to the quotients

$$\mathbf{A}/(\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' a_k) \hookrightarrow \mathbf{A}'/\mathbf{A}' a_k$$

and taking into account that $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' a_k \subseteq \sqrt{\langle a_k \rangle}$ (Coquand, Ducos, Lombardi, and Quitté 2009, Lemma 2.1).

How do we interpret Proposition 6? By Clause 1 and Remark 2, there is an induced mapping of ideal elements

$$\mathrm{Spec}(\vdash'_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Spec}(\vdash_{\mathrm{m}}), \qquad \mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \cap \mathbf{A}.$$

In other words, restriction preserves maximality. Assuming AC, by Clause 2, this mapping is surjective (Wessel 2018)!

Acknowledgements

The research that has led to this paper was carried out within the project "A New Dawn of Intuitionism: Mathematical and Philosophical Advances" (ID 60842) funded by the John Templeton Foundation. Partial support has come from the programme "Dipartimenti di Eccellenza 2018–2022" of the Italian Ministry of Education, Universities and Research (MIUR), and the project "Categorical localisation: methods and foundations" (CATLOC) funded by the Università degli Studi di Verona within the programme "Ricerca di Base 2015". The final version of this paper was prepared within the project "Reducing complexity in algebra, logic, combinatorics – REDCOM" belonging to the programme "Ricerca Scientifica di Eccellenza 2018" of the Fondazione Cariverona.[14] Essential parts of this paper were conceived when both authors visited the Hausdorff Research Institute for Mathematics (HIM), University of Bonn, on the occasion of the trimester program "Types, Sets, and Constructions", May–August 2018. The related financial support is gratefully acknowledged.

The authors express their gratitude for interesting discussions and valuable hints to Ingo Blechschmidt, who was so kind as to have a look at the manuscript, as well as to Thierry Coquand, Henri Lombardi, Stefan Neuwirth, Davide Rinaldi, Ihsen Yengui, and, last but not least, to the referee for expertly remarks and an appreciative reading of the manuscript.

References

Aczel, Peter. 1978. "The type theoretic interpretation of constructive set theory." In *Logic Colloquium '77 (Proc. Conf., Wrocław, 1977)*, volume 96 of Studies in logic and the foundations of mathematics, pages 55–66. Amsterdam: North-Holland.

———. 1982. "The type theoretic interpretation of constructive set theory: Choice principles." In *The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium (Noordwijkerhout, 1981)*, volume 110 of Studies in logic and the foundations of mathematics, pages 1–40. Amsterdam: North-Holland.

———. 1986. "The type theoretic interpretation of constructive set theory: Inductive definitions." In *Logic, methodology and philosophy of science*, VII *(Salzburg, 1983)*, volume 114 of Studies in logic and the foundations of mathematics, pages 17–49. Amsterdam: North-Holland.

[14] The opinions expressed in this paper are those of the authors and do not necessarily reflect the views of those foundations.

———. 2006. "Aspects of general topology in constructive set theory." *Annals of Pure and Applied Logic* 137 (1–3): 3–29.

Aczel, Peter, and Michael Rathjen. 2000. "Notes on constructive set theory." Technical report, Institut Mittag–Leffler. Report No. 40.

———. 2010. "Constructive set theory." Book draft. URL: https://www1.maths.leeds.ac.uk/~rathjen/book.pdf.

Arapović, Miroslav. 1983. "On the embedding of a commutative ring into a 0-dimensional commutative ring." *Glasnik Matematički Ser.* III 18 (1): 53–59.

Atiyah, Michael F., and Ian G. Macdonald. 1969. *Introduction to commutative algebra*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Banaschewski, Bernhard. 1983. "The power of the ultrafilter theorem." *Journal of the London Mathematical Society* 27 (2): 193–202.

———. 1994. "A new proof that 'Krull implies Zorn'." *Mathematical Logic Quarterly* 40:478–480.

Banaschewski, B., and J. J. C. Vermeulen. 1996. "Polynomials and radical ideals." *Journal of Pure and Applied Algebra* 113 (3): 219–227.

Berger, Ulrich. 2004. "A computational interpretation of open induction." In *Proceedings of the nineteenth annual IEEE symposium on logic in computer science*, edited by F. Titsworth, pages 326–334. IEEE Computer Society.

Bishop, Errett. 1967. *Foundations of constructive analysis*. New York: McGraw-Hill.

Bishop, Errett, and Douglas Bridges. 1985. *Constructive analysis*. Springer.

Blechschmidt, Ingo. 2017. *Using the internal language of toposes in algebraic geometry*. Doctoral dissertation, University of Augsburg.

Boileau, André, and André Joyal. 1981. "La logique des topos." *Journal of Symbolic Logic* 46 (1): 6–16.

Brewer, Jim, and Fred Richman. 2006. "Subrings of zero-dimensional rings." In *Multiplicative ideal theory in commutative algebra: A tribute to the work of Robert Gilmer*, edited by James W. Brewer, Sarah Glaz, William J. Heinzer, and Bruce M. Olberding, pages 73–88. New York: Springer Science+Business Media.

Campbell, Paul J. 1978. "The origin of 'Zorn's Lemma'." *Historia Mathematica* 5:77–89.

Cederquist, Jan, and Thierry Coquand. 2000. "Entailment relations and distributive lattices." In *Logic Colloquium '98: Proceedings of the annual European summer meeting of the Association for Symbolic Logic, Prague, Czech Republic, August 9–15, 1998*, edited by Samuel R. Buss, Petr Hájek, and Pavel Pudlák, volume 13 of Lecture notes in logic, pages 127–139. Natick, MA: A. K. Peters.

Coquand, Thierry. 1997. "A note on the open induction principle." Technical report, University of Gothenburg. URL: www.cse.chalmers.se/~coquand/open.ps.

———. 2009. "Space of valuations." *Annals of Pure and Applied Logic* 157:97–109.

Coquand, Thierry, Lionel Ducos, Henri Lombardi, and Claude Quitté. 2009. "Constructive Krull dimension. I: Integral extensions." *Journal of Algebra and Its Applications* 8 (1): 129–138.

Coquand, Thierry, and Henri Lombardi. 2002. "Hidden constructions in abstract algebra: Krull dimension of distributive lattices and commutative rings." In *Commutative ring theory and applications*, edited by M. Fontana, S.-E. Kabbaj, and S. Wiegand, volume 231 of Lecture notes in pure and applied mathematics, pages 477–499. Reading, MA: Addison-Wesley.

———. 2006. "A logical approach to abstract algebra." *Mathematical Structures in Computer Science* 16:885–900.

Coquand, Thierry, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. 2019. "Lattice-ordered groups generated by an ordered group and regular systems of ideals." *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 49 (5): 1449–1489.

Coquand, Thierry, Henri Lombardi, and Marie-Françoise Roy. 2005. "An elementary characterisation of Krull dimension." In *From sets and types to topology and analysis*, edited by L. Crosilla and P. Schuster, volume 48 of Oxford logic guides, pages 239–244. Oxford University Press.

Coquand, Thierry, and Stefan Neuwirth. 2017. "An introduction to Lorenzen's 'Algebraic and logistic investigations on free lattices' (1951)." Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/1711.06139.

Coquand, Thierry, and Henrik Persson. 1998a. "Gröbner bases in type theory." In *Types for proofs and programs*, edited by T. Altenkirch, B. Reus, and W. Naraschewski, pages 33–46. Springer.

———. 1998b. "Integrated development of algebra in type theory." *Calculemus and Types Workshop*, 98.

Coquand, Thierry, Giovanni Sambin, Jan Smith, and Silvio Valentini. 2003. "Inductively generated formal topologies." *Annals of Pure and Applied Logic* 124:71–106.

Coste, Michel, Henri Lombardi, and Marie-Françoise Roy. 2001. "Dynamical method in algebra: Effective Nullstellensätze." *Annals of Pure and Applied Logic* 111 (3): 203–256.

Crosilla, Laura, and Peter Schuster. 2014. "Finite methods in mathematical practice." In *Formalism and Beyond: On the Nature of Mathematical Discourse*, edited by G. Link, volume 23 of Logos, pages 351–410. Boston, MA, and Berlin: Walter de Gruyter.

Curi, Giovanni. 2010. "On some peculiar aspects of the constructive theory of point-free spaces." *Mathematical Logic Quarterly* 56 (4): 375–387.

Eisenbud, David. 1995. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of Graduate texts in mathematics. New York: Springer.

Español, Luis. 1982. "Constructive Krull dimension of lattices." *Revista de la Academia de Ciencias Exactas ... Zaragoza (2)* 37:5–9.

Fine, Arthur. 1993. "Fictionalism." *Midwest Studies in Philosophy* 18:1–18.

Fourman, Michael, and Robin Grayson. 1982. "Formal spaces." In *The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium (Noordwijkerhout, 1981)*, volume 110 of Studies in logic and the foundations of mathematics, pages 107–122. Amsterdam: North-Holland.

Goldman, Oscar. 1951. "Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz." *Mathematische Zeitschrift* 54 (2): 136–140.

Hertz, Paul. 1922. "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. I. Teil: Sätze ersten Grades." *Mathematische Annalen* 87 (3): 246–269.

———. 1923. "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. II. Teil: Sätze höheren Grades." *Mathematische Annalen* 89 (1): 76–102.

———. 1929. "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme." *Mathematische Annalen* 101 (1): 457–514.

Hodges, Wilfrid. 1979. "Krull implies Zorn." *Journal of the London Mathematical Society* 19:285–287.

Howard, Paul, and Jean Rubin. 1998. *Consequences of the Axiom of Choice*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Jacobsson, Carl, and Clas Löfwall. 1991. "Standard bases for general coefficient rings and a new constructive proof of Hilbert's basis theorem." *Journal of Symbolic Computation* 12 (3): 337–372.

Johnstone, Peter T. 1982. *Stone spaces* (Cambridge studies in advanced mathematics 3). Cambridge University Press.

———. 2002. *Sketches of an elephant: A topos theory compendium, volume 2*, volume 44 of Oxford logic guides. Oxford: Clarendon Press.

Kemper, Gregor, and Ihsen Yengui. 2019. "Valuative dimension and monomial orders." URL: https://arxiv.org/abs/1906.12067

Krull, Wolfgang. 1929. "Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung." *Mathematische Annalen* 101 (1): 729–744.

Kunz, Ernst. 1991. *Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Lal, Harbans. 1971. "A remark on rings with primary ideals as maximal ideals." *Mathematica Scandinavica* 29:72.

Legris, Javier. 2012. "Paul Hertz and the origins of structural reasoning." In *Universal logic: An anthology: From Paul Hertz to Dov Gabbay*, edited by Jean-Yves Béziau, Studies in universal logic, pages 3–10. Basel: Birkhäuser.

Lombardi, Henri. 2002. "Dimension de Krull, Nullstellensätze et évaluation dynamique." *Mathematische Zeitschrift* 242:23–46.

Lombardi, Henri, and Claude Quitté. 2015. *Commutative algebra: Constructive methods: Finite projective modules*, volume 20 of Algebra and applications. Dordrecht: Springer Netherlands.

Lorenzen, Paul. 1950. "Über halbgeordnete Gruppen." *Mathematische Zeitschrift* 52 (1): 483–526.

———. 1951. "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände." *Journal of Symbolic Logic* 16 (2): 81–106.

———. 1952. "Teilbarkeitstheorie in Bereichen." *Mathematische Zeitschrift* 55 (3): 269–275.

———. 1953. "Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen." *Mathematische Zeitschrift* 58 (1): 15–24.

———. 1953. "Eine Bemerkung über die Abzählbarkeitsvoraussetzung in der Algebra." *Mathematische Zeitschrift* 57:241–243.

———. 2017. "Algebraic and logistic investigations on free lattices." Transl. by Stefan Neuwirth of Lorenzen 1951. URL: https://arxiv.org/abs/1710.08138

Mines, Ray, Fred Richman, and Wim Ruitenburg. 1988. *A course in constructive algebra*. Universitext. New York: Springer.

Moore, Gregory H. 1982. *Zermelo's axiom of choice: Its origins, development, & influence*. Mineola, NY: Dover Publications 2013. Unabridged republication of the work originally published as volume 8 in the series "Studies in the history of mathematics and physical sciences" by Springer-Verlag, New York.

Negri, Sara. 2014. "Proof analysis beyond geometric theories: from rule systems to systems of rules." *Journal of Logic and Computation* 26 (2): 513–537.

Negri, Sara, and Jan von Plato. 1998. "Cut elimination in the presence of axioms." *Bulletin of Symbolic Logic* 4 (4): 418–435.

Perdry, Hervé. 2004. "Strongly Noetherian rings and constructive ideal theory." *Journal of Symbolic Computation* 37 (4): 511–535.

Perdry, Hervé, and Peter Schuster. 2011. "Noetherian orders." *Mathematical Structures in Computer Science* 21:111–124.

———. 2014. "Constructing Gröbner bases for Noetherian rings." *Mathematical Structures in Computer Science* 24:e240206.

Raoult, Jean-Claude. 1988. "Proving open properties by induction." *Information Processing Letters* 29 (1): 19–23.

Rathjen, Michael. 2005. "Generalized inductive definitions in constructive set theory." In *From sets and types to topology and analysis: Towards practicable foundations for constructive mathematics*, edited by Laura Crosilla and Peter Schuster, volume 48 of Oxford logic guides, pages 23–40. Oxford: Clarendon Press.

Richman, Fred. 1974. "Constructive aspects of Noetherian rings." *Proceedings of the American Mathematical Society* 44:436–441.

Rinaldi, Davide. 2014. *Formal methods in the theories of rings and domains*. Doctoral dissertation, University of Munich.

Rinaldi, Davide, and Peter Schuster. 2016. "A universal Krull–Lindenbaum theorem." *Journal of Pure and Applied Algebra* 220:3207–3232.

Rinaldi, Davide, Peter Schuster, and Daniel Wessel. 2017. "Eliminating disjunctions by disjunction elimination." *Bulletin of Symbolic Logic* 23 (2): 181–200.

———. 2018. "Eliminating disjunctions by disjunction elimination." *Indagationes Mathematicae (N.S.)* 29 (1): 226–259.

Rinaldi, Davide, and Daniel Wessel. 2018. "Extension by conservation. Sikorski's theorem." *Logical Methods in Computer Science* 14 (4:8): 1–17.

———. 2019. "Cut elimination for entailment relations." *Archive for Mathematical Logic* 58 (5–6): 605–625.

Sambin, Giovanni. 2003. "Some points in formal topology." *Theoretical Computer Science* 305 (1–3): 347–408.

Satyanarayana, Motupalli. 1967. "Rings with primary ideals as maximal ideals." *Mathematica Scandinavica* 20:52–54.

Scholz, Heinrich. 1919. "Die Religionsphilosophie des Als-ob." *Annalen der Philosophie* 1 (1): 27–113.

Schuster, Peter. 2012. "Induction in algebra: A first case study." In *2012 27th annual ACM/IEEE symposium on logic in computer science*, pages 581–585. IEEE Computer Society Publications. Proceedings, LICS 2012, Dubrovnik, Croatia.

———. 2013. "Induction in algebra: A first case study." *Logical Methods in Computer Science* 9 (3): 20.

Scott, Dana. 1954. "Prime ideal theorems for rings, lattices, and Boolean algebras." *Bulletin of the American Mathematical Society* 60 (4): 390.

———. 1971. "On engendering an illusion of understanding." *Journal of Philosophy* 68:787–807.

———. 1974. "Completeness and axiomatizability in many-valued logic." In *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol.* xxv*, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, edited by Leon Henkin, John Addison, C. C. Chang, William Craig, Dana Scott, and Robert Vaught, pages 411–435. Providence, RI: American Mathematical Society.

———. 1973. "Background to formalization." In *Truth, syntax and modality (Proc. Conf. Alternative Semantics, Temple Univ., Philadelphia, Pa., 1970)*, volume 68 of Studies in logic and the foundations of mathematics, edited by Hugues Leblanc, pages 244–273. Amsterdam: North-Holland.

Seidenberg, Abraham. 1974. "What is Noetherian?" *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano* 44:55–61.

Simpson, Stephen G. 2009. *Subsystems of second order arithmetic*, second edition. Perspectives in Logic. Cambridge: Cambridge University Press.

Steinitz, Ernst. 1910. "Algebraische Theorie der Körper." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 137:167–309.

Vaihinger, Hans. 1922. *Die Philosophie des Als Ob: System der theoretischen, praktischen und religiösen Fiktionen der Menschheit auf Grund eines idealistischen Positivismus*. 7. u. 8. Aufl. Leipzig: Verlag von Felix Meiner.

———. 1924. *The philosophy of 'as if': A system of the theoretical, practical and religious fictions of mankind*. Translated by C. K. Ogden. London: Routledge & Kegan Paul.

Wessel, Daniel. 2018. "Points, ideals, and geometric sequents." Technical report, University of Verona.

———. 2020. "A note on connected reduced rings." *Journal of Commutative Algebra*. Forthcoming. URL: https://projecteuclid.org/euclid.jca/1561363253

Yengui, Ihsen. 2008. "Making the use of maximal ideals constructive." *Theoretical Computer Science* 392:174–178.

———. 2015. *Constructive commutative algebra: Projective modules over poly-*

nomial rings and dynamical Gröbner bases, volume 2138 of Lecture notes in mathematics. Cham: Springer.

Zermelo, Ernst. 1904. "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann." *Mathematische Annalen* 59:514–516.

———. 1908. "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung." *Mathematische Annalen* 65:107–128.

Zorn, Max. 1935. "A remark on method in transfinite algebra." *Bulletin of the American Mathematical Society* 41:667–670.

Regular Entailment Relations

Thierry Coquand, Henri Lombardi and Stefan Neuwirth

Abstract Inspired by the work of Lorenzen on the theory of preordered groups in the forties and fifties, we define regular entailment relations and show a crucial theorem for this structure. We also describe equivariant systems of ideals à la Lorenzen and show that the remarkable regularisation process he invented yields a regular entailment relation. By providing constructive objects and arguments, we pursue Lorenzen's aim of "bringing to light the basic, pure concepts in their simple and transparent clarity".

Introduction

Paul Lorenzen carried out, in a series of four articles, an analysis of multiplicative ideal theory in terms of embeddings into an l-group. In Lorenzen 1939, he formulated the problem in the language of semigroups instead of integral domains. The endeavour of Lorenzen 1950 was to remove the condition of commutativity; the unavailability of the Grothendieck group construction led him to discover the "regularity condition" and to propose a far-reaching reformulation of embeddability into a product of linearly preordered groups in terms of "regularisation". He also arrived at the formulation of the concept of equivariant system of ideals, as below, and of

Thierry Coquand
Computer Science and Engineering Department, University of Gothenburg, Sweden, e-mail: coquand@chalmers.se

Henri Lombardi
Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université Bourgogne Franche-Comté, France, e-mail: henri.lombardi@univ-fcomte.fr

Stefan Neuwirth
Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université Bourgogne Franche-Comté, France, e-mail: stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_7

entailment relation. The article Lorenzen 1952 broadened his analysis to the more general case of a monoid acting on a preordered set. Our research started as a study of Lorenzen 1953, in which he proved a result that suggested Theorem 1 to us.

If $(G, 0, +, -, \leqslant)$ is a preordered commutative group and we have a morphism $f\colon G \to L$ with L an l-group, then we can define a relation $A \vdash B$ between *nonempty* finite subsets of G by $\bigwedge f(A) \leqslant_L \bigvee f(B)$. This relation satisfies the following conditions.

(R_1) $A \vdash B$ if $A \supseteq A'$ and $B \supseteq B'$ and $A' \vdash B'$. (weakening)
(R_2) $A \vdash B$ if $A, x \vdash B$ and $A \vdash B, x$. (cut)
(R_3) $a \vdash b$ if $a \leqslant b$ in G.
(R_4) $A \vdash B$ if $A + x \vdash B + x$. (translation)
(R_5) $a + x,\ b + y \vdash a + b,\ x + y$. (regularity)

We make the following abuses of notation for finite sets: we write a for the singleton consisting of a, and A, A' for the union of the sets A and A'; note that our framework requires only a naive set theory. We call any relation which satisfies these conditions a *regular entailment relation* for the preordered group G. The remarkable last condition is called the *regularity condition*.

Note that the converse of a regular entailment relation for $(G, 0, +, -, \leqslant)$ is a regular entailment relation for $(G, 0, +, -, \geqslant)$ (the group with the converse preorder). When we use this, we say that a result follows from another one *symmetrically*.

Any relation satisfying the first three conditions defines in a canonical way a(n unbounded) distributive lattice L with a natural monotone map $G \to L$ (see Lorenzen 1951, Satz 7; Cederquist and Coquand 2000, Theorem 1 [obtained independently]).

The goal of this note is essentially to show that this distributive lattice has a (canonical) l-group structure, simplifying some arguments in Lorenzen 1953. This is done in Theorem 1. In Section 2, we explain how to define a regular entailment relation through a predicate on nonempty finite subsets of G. In Section 3, we define "equivariant systems of ideals" à la Lorenzen and show how to express this notion through a predicate on nonempty finite subsets of G. In Section 4, we explain how Lorenzen "regularises" an equivariant system of ideals, which leads to the Lorenzen group of this system of ideals (Theorem 2). In Section 5, we explain the link with a constructive version of the Lorenzen–Clifford–Dieudonné theorem. In Section 6, we explain the link with the Prüfer way of defining the Lorenzen group of a system of ideals. In Section 7, we give a constructive version of a remarkable theorem of Lorenzen which uses the regularity condition in the noncommutative case. Finally, in Section 8, we give examples illustrating some constructions described in the paper.

The results of this research complement the ones of Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019: we introduce various equivalent presentations of regular entailment relations and we also provide a noncommutative version and several examples.

1 General properties of regular entailment relations

A first consequence of regularity is the following.

Proposition 1 *We have $a, b \vdash a+x,\ b-x$ and $a+x,\ b-x \vdash a, b$. In particular, $a \vdash a+x,\ a-x$ and $a+x,\ a-x \vdash a$.*

Proof By regularity, we have $x+(a-x),\ (b-2x)+2x \vdash x+(b-2x),\ (a-x)+2x$, which is $a, b \vdash a+x,\ b-x$. The other claim follows symmetrically. □

Corollary 1 *In the distributive lattice L defined by the (unbounded) entailment relation $\vdash$, $\bigwedge A \leqslant \bigwedge(A+x) \vee \bigwedge(A-x)$.*

Proof In L, we have $\bigwedge(A+x) \vee \bigwedge(A-x) = \bigwedge_{a\in A}(a+x) \vee \bigwedge_{b\in A}(b-x) = \bigwedge_{a,b\in A}\big((a+x) \vee (b-x)\big)$, so that this follows from Proposition 1. □

Corollary 2 *If we have $A,\ A+x \vdash B$ and $A,\ A-x \vdash B$, then $A \vdash B$. Symmetrically, if $A \vdash B,\ B+x$ and $A \vdash B,\ B-x$, then $A \vdash B$.*

Lemma 1 *We have $A,\ A+x \vdash B$ iff $A \vdash B,\ B-x$.*

Proof We assume $A,\ A+x \vdash B$ and we prove $A \vdash B,\ B-x$. By Corollary 2, it is enough to show $A,\ A-x \vdash B,\ B-x$, but this follows from $A,\ A+x \vdash B$ by translating by $-x$ and then weakening. The other direction is symmetric. □

Lemma 2 *If $0 \leqslant p \leqslant q$, then $a,\ a+qx \vdash a+px$.*

Proof We prove this by induction on q. It holds for $q=0$ and $q=1$. If it holds for $q \geqslant 1$, we note that we have $a,\ a+(q+1)x \vdash a+x,\ a+qx$ by regularity, and since $a,\ a+qx \vdash a+x$ by induction hypothesis, we get $a,\ a+(q+1)x \vdash a+x$ by cut. By induction hypothesis, we have $a,\ a+qx \vdash a+px$ for $p \leqslant q$, and hence $a+x,\ a+(q+1)x \vdash a+(p+1)x$. By cut with $a,\ a+(q+1)x \vdash a+x$ we get $a,\ a+(q+1)x \vdash a+(p+1)x$. □

Given a regular entailment relation $\vdash$ and an element x, we now describe the regular entailment relation $\vdash_x$ for which we force $0 \vdash_x x$. This relation exists by universal algebra, but let us define that $A \vdash_x B$ holds iff there exists p such that $A,\ A+px \vdash B$, iff (by Lemma 1) there exists p such that $A \vdash B,\ B-px$. We are going to show that this is the least regular entailment relation containing $\vdash$ and such that $0 \vdash_x x$. We have $0 \vdash_x x$ since $0, x \vdash x$.

Note that, by using Lemma 2, if we have $A,\ A+px \vdash B$, we also have $A,\ A+qx \vdash B$ for $q \geqslant p$.

Proposition 2 *The relation $\vdash_x$ is a regular entailment relation. It is the least regular entailment relation containing $\vdash$ and such that $0 \vdash_x x$.*

Proof The only complex condition is the cut rule. We assume $A,\ A+px \vdash B, u$ and $A,\ A+qx,\ u,\ u+qx \vdash B$, and we prove $A \vdash_x B$. By Lemma 2, we can assume $p = q$. We write $y = px$ and we have $A,\ A+y \vdash B, u$ and $A,\ A+y,\ u,\ u+y \vdash B$. We write $C = A,\ A+y,\ A+2y$ and we prove $C \vdash B$.

We have, by weakening, $C \vdash B, u$ and $C,\ u,\ u+y \vdash B$ and $C \vdash B+y,\ u+y$. By cut, we get $C, u \vdash B,\ B+y$. By Lemma 1, this is equivalent to $C,\ u,\ C-y,\ u-y \vdash B$. We also have $C,\ u,\ C+y,\ u+y \vdash B$ by weakening $C,\ u,\ u+y \vdash B$. Hence by Corollary 2 we get $C, u \vdash B$. Since we also have $C \vdash B, u$, we get $C \vdash B$ by cut.

By Lemma 2 we have $A,\ A+2y \vdash B$, which shows $A \vdash_x B$. □

Proposition 3 *If $A \vdash_x B$ and $A \vdash_{-x} B$, then $A \vdash B$.*

Proof We have $A,\ A+px \vdash B$ and $A,\ A-qx \vdash B$. Using Lemma 2 we can assume $p = q$ and then conclude by Corollary 2. □

Proposition 3 implies that in order to prove an entailment involving certain elements, we can always assume that all elements occurring in the proof are linearly preordered for the relation $a \vdash b$. This corresponds to the informal covering principle by quotients for l-groups (Lombardi and Quitté 2015, Principle XI-2.10). Here are two direct applications.

Proposition 4 *We have $A \vdash b_1, \ldots, b_m$ iff $A-b_1,\ \ldots,\ A-b_m \vdash 0$.*

Thus $A \vdash B$ iff $A-B \vdash 0$ iff $0 \vdash B-A$. The first equivalence is exactly Proposition 4, and the second equivalence follows symmetrically.

Proposition 5 *If $A+b_1,\ \ldots,\ A+b_m \vdash b_j$ for $j = 1, \ldots, m$, then $A \vdash 0$.*

It follows from Proposition 5 that if we consider the monoid of formal elements $\bigwedge A$ with the operation $\bigwedge A + \bigwedge B = \bigwedge(A+B)$, preordered by the relation $\bigwedge A \leqslant \bigwedge B$ iff $A \vdash b$ for all b in B, we get a *cancellative* monoid.

The *Grothendieck l-group* of a meet-monoid $(M, +, 0, \wedge)$ is the l-group that it freely generates. Its group structure is given by the Grothendieck group of the monoid $(M, +, 0)$.

Corollary 3 *The distributive lattice defined by the Grothendieck l-group of the previously defined cancellative monoid coincides with the distributive lattice defined by the relation $\vdash$.*

We have realised in this way our goal.

Theorem 1 *The distributive lattice V generated by a regular entailment relation has a canonical l-group structure for which the natural preorder morphism $\varphi\colon G \to V$ is a group morphism.*

Note that we may have $a \vdash b$ without $a \leqslant b$, so φ is not necessarily injective.

Here is another consequence of the fact that we can always assume that elements are linearly preordered for the relation $a \vdash b$.

Corollary 4 *If* $a_1 + \cdots + a_n = 0$ *then* $a_1, \ldots, a_n \vdash 0$.

Corollary 5 *If* $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ *then* $a_1, \ldots, a_n \vdash b_1, \ldots, b_n$.

Proof We have $\sum_{i,j}(a_i - b_j) = 0$ and we can apply the previous result and Proposition 4. $\square$

2 Another presentation of regular entailment relations

It follows from Proposition 4 that the relation $\vdash$ is completely determined by the predicate $A \vdash 0$ on nonempty finite subsets A of the group. Let us analyse the properties satisfied by this predicate $R(A) = A \vdash 0$. Firstly, it satisfies

(P_3) $R(a)$ if $a \leqslant 0$ in G.

Secondly, it is *monotone*:

(P_1) $R(A)$ if $R(A')$ and $A' \subseteq A$.

The cut rule can be stated as $R(A-B)$ if $R(A-B,\, x-B)$ and $R(A-B,\, A-x)$, so we get the following property, since we can assume $x = 0$ by translating and replace B by $-B$:

(P_2) $R(A+B)$ if $R(A+B,\, A)$ and $R(A+B,\, B)$.

Finally, the regularity condition gives $R(a-b,\, b-a,\, x-y,\, y-x)$, which simplifies, using (P_1), into

(P_5) $R(x, -x)$.

We get in this way another presentation of a regular entailment relation as a predicate satisfying the conditions (P_1), (P_2), (P_3), (P_5): if R satisfies these properties and $A \vdash B$ is defined by $R(A-B)$, then we get a regular entailment relation (we have one axiom less since the translation property "$A \vdash B$ if $A+x \vdash B+x$" is automatically satisfied).

3 Equivariant systems of ideals

Let us make the same analysis for the notion of *equivariant system of ideals*. A *system of ideals for a preordered set* G can be defined à la Lorenzen as a single-conclusion entailment relation, i.e. a relation $A \rhd x$ between nonempty finite subsets A of G and elements x of G satisfying the following conditions.

(S_1) $A \rhd x$ if $A \supseteq A'$ and $A' \rhd x$.
(S_2) $A \rhd x$ if $A, y \rhd x$ and $A \rhd y$.

(S_3) $a \rhd x$ if $a \leqslant x$ in G.

A system of ideals for a preordered group G is said to be *equivariant* when it satisfies the condition

(S_4) $A \rhd x$ if $A+y \rhd x+y$.

When we have an equivariant system of ideals, let us consider the predicate $S(A) = A \rhd 0$. This predicate satisfies the following conditions.

(P_1) $S(A)$ if $A \supseteq A'$ and $S(A')$.
(P_2') $S(A)$ if $S(A, u)$ and $S(A-u)$.
(P_3) $S(a)$ if $a \leqslant 0$ in G.

Conversely, if S satisfies (P_1), (P_2') and (P_3) and if we define $A \rhd x$ by $S(A-x)$, then $\rhd$ is an equivariant system of ideals, so that S is just another presentation for it.

To an equivariant system of ideals S we can clearly associate the relation $A \leqslant_S B$ given by "$A \rhd b$ for all b in B", and we define thus a preordered monoid with $A+B$ as monoid operation and $A \wedge B = A, B$ as meet operation. We call the corresponding preordered monoid *the meet-monoid generated by S on G*.

Conversely, consider for a preordered group $(G, \leqslant)$ any preorder $\leq$ on the monoid of finite nonempty subsets with $a \leqslant b \Rightarrow a \leq b$, the meet operation $A \wedge B$ defined as A, B and the monoid operation $A+B$. Then we get the equivariant system of ideals $A \rhd b = A \leq b$.

4 Regularisation of an equivariant system of ideals

Note that both notions, reformulations of regular entailment relation and of equivariant system of ideals, are now predicates on nonempty finite subsets of G. We say that an equivariant system of ideals is *regular* if it satisfies (P_2) and (P_5).

The following proposition follows from Proposition 5.

Proposition 6 *Let S be an equivariant system of ideals for a preordered group G. Then the meet-monoid generated by S on G is cancellative if, and only if, S is regular.*

Proof If S is regular, then $\leqslant_S$ is cancellative by Proposition 5. Conversely, if $\leqslant_S$ is cancellative, then the meet-monoid it defines embeds into its Grothendieck l-group, which is a distributive lattice. $\square$

We always have the *least* equivariant system of ideals for a preordered group G: $S_{\mathrm{M}}(A) = A \rhd_{\mathrm{M}} 0$ iff A contains an element $\leqslant 0$ in G. It clearly satisfies (P_1) and (P_3), and it satisfies (P_2'): if $A, u \rhd_{\mathrm{M}} 0$ then either $A \rhd_{\mathrm{M}} 0$ or $u \rhd_{\mathrm{M}} 0$, and if $u \rhd_{\mathrm{M}} 0$ then $A \rhd_{\mathrm{M}} u$ implies $A \rhd_{\mathrm{M}} 0$.

Note also that equivariant systems of ideals are closed under arbitrary intersections and directed unions.

Let S be an equivariant system of ideals. We define $T_x(S)$ to be the least equivariant system of ideals Q containing S and such that $Q(x)$. We have $T_xT_y = T_yT_x$ and $T_x(S \cap S') = T_x(S) \cap T_x(S')$ directly from this definition. Lorenzen (1950, 516) found an elegant direct description of $T_x(S)$.

Proposition 7 *$T_x(S)(A)$ iff there exists $k \geqslant 0$ such that $S(A, A-x, \dots, A-kx)$.*

Proof If we have $A, A-x, \dots, A-kx \leqslant_S u$ and $A, A-x, \dots, A-lx, u, u-x, \dots, u-lx \leqslant_S v$, then we have, by l cuts, $A, A-x, \dots, A-(k+l)x \leqslant_S v$. $\square$

Remark 1 Note that, in contradistinction with Lemma 2, we cannot simplify this condition to $S(A, A-kx)$ in general: see Examples 1 and 2 in Section 8.

We next define $U_x(S) = T_x(S) \cap T_{-x}(S)$. We have $U_xU_y = U_yU_x$.

Lemma 3 *If S is an equivariant system of ideals such that $U_x(S) = S$ for all x, then S is regular.*

Proof We show that conditions (P_5) and (P_2) hold.

We have $S(x, -x)$ since we have both $T_x(S)(x, -x)$ and $T_{-x}(S)(x, -x)$. This shows (P_5).

Let us show (P_2). We assume $\bigwedge(A+B) \wedge \bigwedge B \leqslant_S 0$ and $\bigwedge(A+B) \wedge \bigwedge A \leqslant_S 0$, and we show $\bigwedge(A+B) \leqslant_S 0$.

Note that we have $T_a(S)(A+B)$ for any a in A by monotonicity: forcing $a \leqslant_S 0$, we have $\bigwedge(A+B) \leqslant_{T_a(S)} \bigwedge B$, and so $\bigwedge(A+B) \leqslant_{T_a(S)} 0$ follows from $\bigwedge(A+B) \wedge \bigwedge B \leqslant_{T_a(S)} 0$. Let T be the composition of all the T_{-a} with a in A: we force $0 \leqslant_S a$ for all a in A. We have $\bigwedge B \leqslant_{T(S)} \bigwedge(A+B)$, and so $\bigwedge B \leqslant_{T(S)} 0$ follows from $\bigwedge(A+B) \wedge \bigwedge B \leqslant_{T(S)} 0$. This implies $\bigwedge(A+B) \leqslant_{T(S)} \bigwedge A$, and so $\bigwedge(A+B) \leqslant_{T(S)} 0$ follows from $\bigwedge(A+B) \wedge \bigwedge A \leqslant_{T(S)} 0$. Together, these two facts prove, for the composition U of all the U_a with a in A, that $\bigwedge(A+B) \leqslant_{U(S)} 0$. Since $U(S) = S$, we get $\bigwedge(A+B) \leqslant_S 0$, as desired. $\square$

Let us define $L(S)$ as the (directed) union of the $U_{x_1} \cdots U_{x_n}(S)$, as Lorenzen (1953, §2 and p. 23) did. We get the following theorem.

Theorem 2 *$L(S)$ is the least regular system containing S, in other words, it is the* regularisation *of S. The l-group granted by Theorem 1 for $L(S)$ is called the* Lorenzen l-group *associated to the equivariant system of ideals S.*

5 A constructive version of the Lorenzen–Clifford–Dieudonné Theorem

In particular, we can start from the least equivariant system of ideals for a given preordered group G. In this case, we have $L(S_{\mathrm{M}})(A)$ iff there exist

$x_1, \dots, x_n$ such that for any choice $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ of signs ± 1 we can find $k_1, \dots, k_n \geqslant 0$ and a in A such that $a + \varepsilon_1 k_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n k_n x_n \leqslant 0$. We clearly have by elimination: if $L(S_{\mathrm{M}})(a)$, then $na \leqslant 0$ for some $n > 0$. We can then deduce from this a constructive version of the Lorenzen–Clifford–Dieudonné Theorem.

Theorem 3 *For any commutative preordered group G, we can build an l-group L and a map $f \colon G \to L$ such that $f(a) \geqslant 0$ iff there exists $n > 0$ such that $na \geqslant 0$. More generally, we have $f(a_1) \vee \cdots \vee f(a_k) \geqslant 0$ iff there exist $n_1, \dots, n_k \geqslant 0$ such that $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k \geqslant 0$ and $n_1 + \cdots + n_k > 0$.*

Note that this l-group L is the l-group freely generated by the preordered group G.

6 Prüfer's definition of the regularisation

Prüfer (1932) found the following direct definition of the regularisation, which follows at once from Proposition 6.

Theorem 4 *The regularisation R of an equivariant system of ideals S can be defined by $R(A)$ holding iff there exists B such that $A + B \leqslant_S B$.*

This gives another proof that if we have $L(S_{\mathrm{M}})(a)$, then $na \leqslant 0$ for some $n > 0$: if we have B such that $a + B \leqslant_{S_{\mathrm{M}}} B$, then we can find a cycle $a + b_2 \leqslant b_1$, $\dots$, $a + b_1 \leqslant b_n$ with $b_1, \dots, b_n \in B$, and then $na \leqslant 0$.

7 The l-group structure in the noncommutative case

If G is a not necessarily commutative preordered group, we use a multiplicative notation and we define a *regular entailment relation* by the following conditions.

(R_1) $A \vdash B$ if $A \supseteq A'$ and $B \supseteq B'$ and $A' \vdash B'$.
(R_2) $A \vdash B$ if $A, x \vdash B$ and $A \vdash B, x$.
(R_3) $A \vdash B$ if $a \leqslant b$ in G.
(R_4) $A \vdash B$ if $xAy \vdash xBy$.
(R_5) $xa, by \vdash xb, ay$.

Note that (R_5) is satisfied in linearly preordered groups: if $a \leqslant b$, then $xa \wedge by \leqslant xa \leqslant xb \leqslant xb \vee ay$, and if $b \leqslant a$, then $xa \wedge by \leqslant by \leqslant ay \leqslant xb \vee ay$.

Let $\vdash$ be a regular entailment relation and let $(V, \leqslant_V)$ be the corresponding distributive lattice; then (R_4) shows that we have a left and right action of G on $\leqslant_V$.

We define $\leqslant_{a,b}$ to be the lattice preorder with left and right action of G on it obtained from $\leqslant_V$ by forcing $b \leqslant_{a,b} a$.

We define $u \leqslant^{a,b} v$ by "$xa \wedge uy \leqslant_V xb \vee vy$ for all x and y in G".

Lemma 4 *We have $xa \wedge by \leqslant_V xb \vee ay$ for all a and b in V and all x and y in G.*

Proof This holds for a and b in G. Then, if we have $xa_1 \wedge by \leqslant_V xb \vee a_1 y$ and $xa_2 \wedge by \leqslant_V xb \vee a_2 y$, we get $xa \wedge by \leqslant_V xb \vee ay$ for $a = a_1 \wedge a_2$ and for $a = a_1 \vee a_2$. □

Proposition 8 (see Lorenzen 1952, Satz 3) *The preorder $\leqslant^{a,b}$ defines a lattice quotient of V with left and right action of G on it such that $b \leqslant^{a,b} a$ if a and b are in G.*

Proof We have $b \leqslant^{a,b} a$ since $xa \wedge by \leqslant_V xb \vee ay$ for all x and y by the previous Lemma.

If we have $u \leqslant^{a,b} v$ and $v \leqslant^{a,b} w$, then $xa \wedge uy \leqslant_V xb \vee vy$ and $xa \wedge vy \leqslant_V xb \vee wy$ for all x and y. By cut, we get $xa \wedge uy \leqslant_V xb \vee wy$ for all x and y, that is, $u \leqslant^{a,b} w$. This shows that the relation $\leqslant^{a,b}$ is transitive. This relation is also reflexive, since $xa \wedge uy \leqslant_V uy \leqslant_V xb \vee uy$ for all x and y in G.

Finally, if we have $u \leqslant^{a,b} v$, that is, $xa \wedge uy \leqslant_V xb \vee vy$ for all x and y in G, then we also have $zut \leqslant^{a,b} zvt$, that is, $xa \wedge zuty \leqslant_V xb \vee zvty$ for all x and y in G, since we have $z^{-1}xa \wedge uty \leqslant_V z^{-1}xb \vee vty$ for all x and y in G. □

By definition, $u \leqslant_{a,b} v$ implies $u \leqslant^{a,b} v$, since $\leqslant_{a,b}$ is the *least* invariant preorder relation forcing $a \leqslant_{a,b} b$.

Also by definition, note that we have $u \leqslant^{a,b} v$ iff $a \leqslant^{u,v} b$, since $xa \wedge uy \leqslant_V xb \vee vy$ is equivalent to $x^{-1}u \wedge ay^{-1} \leqslant_V x^{-1}v \vee by^{-1}$.

Proposition 9 *$u \leqslant_{a,b} v$ and $u \leqslant_{b,a} v$ imply $u \leqslant_V v$.*

Proof In fact, $u \leqslant_{a,b} v$ implies $u \leqslant^{a,b} v$, which implies $a \leqslant^{u,v} b$. But $u \leqslant_{b,a} v$ implies that u is less than or equal to v in any lattice quotient in which a is less than or equal to b; therefore $u \leqslant^{u,v} v$. So $xu \wedge uy \leqslant_V xv \vee vy$ for all x, y. In particular, for $x = y = 1$, we have $u \leqslant_V v$. □

It follows from this that V admits a group structure which extends the one on G. In fact, Proposition 9 reduces the verification of the required equations to the case where G is linearly preordered by $x \vdash y$, for which $V = G$. This is the noncommutative analogue of Theorem 1.

The difference between the noncommutative case and the commutative one is the following. In the commutative case, we give an *explicit* description of the relation $\vdash_x$; then we use Proposition 3 to show that we can reason by case distinction, forcing $0 \leqslant x$ or $x \leqslant 0$. In the noncommutative case, we use Proposition 9 to show that we can reason by case distinction, forcing $a \leqslant b$ or $b \leqslant a$, without recourse to an explicit description of the relation $\leqslant_{a,b}$. The proof is shorter and very smart, but gives less information than in the commutative case.

8 Examples

Examples 1 and 2 illustrate Remark 1 made after Proposition 7.

Example 1 The following example is from numerical semigroups.

Let us consider the group $\mathbf{Z} = (\mathbb{Z}, 0, +, -)$ preordered by the relation $x \leqslant y$ defined as $y \in x + 60\mathbb{N}$. We consider the meet-monoid $(S, 0, +, -, \leqslant_S)$ freely generated by $\mathbf{Z}$. The elements of S are formal finite meets of elements of $\mathbf{Z}$. For example, we have in S:

$$a = 10 \wedge 24 \leqslant_S b = 130 \wedge 84,$$

since $10 \leqslant 130$ and $24 \leqslant 84$.

Now let us consider the equivariant system of ideals $T_{-7}(S)$ that we get by forcing $0 \leqslant_{T_{-7}(S)} 7$, i.e. $-7 \leqslant_{T_{-7}(S)} 0$ (see Proposition 7).

We have $3 \leqslant_{T_{-7}(S)} b$, since

$$3 \wedge (3+7) \wedge (3+21) = 3 \wedge a \leqslant_S a \leqslant_S b.$$

Yet $3 \wedge (3+21) \not\leqslant_S b$.

On the other hand, we see easily that $-1 \leqslant_{U_1(S)} 0$, so that in the regularisation of S we have $0 \vdash 1$, which shows that this regularisation is the group $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ with the usual linear order.

Example 2 The following similar example is from algebraic number theory.

We consider the ring $\mathbb{Z}[x]$ with x an algebraic integer solution of $x^3 - x^2 + x + 7 = 0$. We denote by $a_1, \ldots, a_k \rhd_{\mathrm{d}} b$ the Dedekind equivariant system of ideals for the divisibility group G of $\mathbb{Z}[x]$, defined as $b \in (a_1, \ldots, a_k)\mathbb{Z}[x]$ for b and the a_i's in the fraction field $\mathbb{Q}(x)$. In fact, the finitely generated fractional ideals form a meet-monoid $(S, \leqslant_S)$ extending the divisibility group G. The corresponding preorder is given by $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \leqslant_S b_1 \wedge \cdots \wedge b_h$ iff each b_i belongs to $(a_1, \ldots, a_k)\mathbb{Z}[x]$.

The ring $\mathbb{Z}[x]$ is not integrally closed. The element $y = 1/2(x^2+1)$ of $\mathbb{Q}(x)$ is integral over $\mathbb{Z}$ and a fortiori over $\mathbb{Z}[x]$: $y^3 = y^2 - 4y + 4$, or equivalently, $1 = z - 4z^2 + 4z^3$ with $z = y^{-1}$.

Let us denote by $\vdash$ the regularisation of S. Now let us consider, for $u \in S$, the equivariant system of ideals $T_u(S)$ that we get by forcing $u \leqslant_{T_u(S)} 1$. We see that $1 \vdash y$, i.e. $z \vdash 1$, by showing $z \leqslant_{T_z(S)} 1$ (which holds by definition) and $z \leqslant_{T_y(S)} 1$, which is certified (using Proposition 7) by z, z^2, $z^3 \leqslant_S 1$, since the fractional ideal $z\mathbb{Z}[x] + z^2\mathbb{Z}[x] + z^3\mathbb{Z}[x]$ contains 1.

Yet z, $z^3 \not\leqslant_S 1$, as announced in Remark 1 after Proposition 7, since $z\mathbb{Z}[x] + z^3\mathbb{Z}[x]$ does not contain 1.

Example 3 Let us consider the group $\mathbf{Z} = (\mathbb{Z}, 0, +, -)$ preordered by the relation $x = y$. We compute the corresponding Lorenzen l-group.

We denote by $\mathbb{Z}$ the group $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ with the usual order $\leqslant$, and by sup and inf the associated supremum and infimum. We denote by $\mathbb{Z}^\circ$ the conversely preordered group.

We consider the meet-monoid $(S, 0, +, -, \leqslant_S)$ freely generated by $\mathbf{Z}$. The elements of S are formal finite meets of elements of $\mathbf{Z}$. We have $\bigwedge A \leqslant_S b$ iff $b \in A$, and $\bigwedge A \leqslant_S \bigwedge B$ iff $B \subseteq A$.

We denote by $T_n(S)$ the equivariant system of ideals that we get by forcing $n \leqslant_{T_n(S)} 0$. Note that $0 \leqslant_{T_{-1}(S)} b$ for $b \geqslant 0$. Using Proposition 7, we find that $A \leqslant_{T_{-1}(S)} b$ iff $b \geqslant \inf(A)$, and $A \leqslant_{T_1(S)} b$ iff $b \leqslant \sup(A)$. We deduce that the regularisation of $(S, \leqslant_S)$ can be described as the set of intervals $[\![m\,..\,n]\!]$ inside $\mathbb{Z}$ with the order by inclusion. Equivalently, it is identified as the set of pairs $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\circ$ such that $m \leqslant n$. Now it is easy to see that the corresponding Grothendieck l-group is $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\circ$, where the opposite of (m, n) can be identified with $(-m, -n)$. The canonical morphism $\mathbf{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\circ$ is $m \mapsto (m, m)$.

Note that since $\mathbf{Z}$ is the free abelian group on a singleton, we recover in this rather complicated way $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\circ$ as the free l-group on a singleton.

Acknowledgements

The authors thank the Hausdorff Research Institute for Mathematics for its hospitality and for providing an excellent research environment in May and June 2018; part of this research has been done during its Trimester Program *Types, Sets and Constructions*.

References

Cederquist, Jan, and Thierry Coquand. 2000. "Entailment relations and distributive lattices." In *Logic Colloquium '98: Proceedings of the annual European summer meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Prague, Czech Republic, August 9–15, 1998*, edited by Samuel R. Buss, Petr Hájek, and Pavel Pudlák, pages 127–139. Lecture notes in logic 13. Urbana: Association for Symbolic Logic.

Coquand, Thierry, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. 2019. "Lattice-ordered groups generated by an ordered group and regular systems of ideals." *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 49:1449–1489. doi:10.1216/rmj-2019-49-5-1449.

Lombardi, Henri, and Claude Quitté. 2015. *Commutative algebra: Constructive methods: Finite projective modules*. Algebra and applications 20. Dordrecht: Springer. Translated from the French (Paris: Calvage & Mounet, 2011, revised and extended by the authors) by Tania K. Roblot.

Lorenzen, Paul. 1939. "Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie." *Mathematische Zeitschrift* 45:533–553. URL: http://eudml.org/doc/168865.

———. 1950. "Über halbgeordnete Gruppen." *Mathematische Zeitschrift* 52:483–526. URL: http://eudml.org/doc/169131.

———. 1951. "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände." *Journal of Symbolic Logic* 16:81–106. URL: http://www.jstor.org/stable/2266681. Translation by Stefan Neuwirth: Algebraic and logistic investigations on free lattices, URL: http://arxiv.org/abs/1710.08138.

———. 1952. "Teilbarkeitstheorie in Bereichen." *Mathematische Zeitschrift* 55:269–275. URL: http://eudml.org/doc/169251.

———. 1953. "Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen." *Mathematische Zeitschrift* 58:15–24. URL: http://eudml.org/doc/169331.

Prüfer, Heinz. 1932. "Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 168:1–36. URL: http://eudml.org/doc/149823.

Connecting Sequent Calculi with Lorenzen-Style Dialogue Games

Christian G. Fermüller

Abstract Lorenzen has introduced his dialogical approach to the foundations of logic in the late 1950s to justify intuitionistic logic with respect to first principles about constructive reasoning. In the decades that have passed since, Lorenzen-style dialogue games turned out to be an inspiration for a more pluralistic approach to logical reasoning that covers a wide array of nonclassical logics. In particular, the close connection between (single-sided) sequent calculi and dialogue games is an invitation to look at substructural logics from a dialogical point of view. Focusing on intuitionistic linear logic, we illustrate that intuitions about resource-conscious reasoning are well served by translating sequent calculi into Lorenzen-style dialogue games. We suggest that these dialogue games may be understood as games of information extraction, where a sequent corresponds to the claim that a certain information package can be systematically extracted from a given bundle of such packages of logically structured information. As we will indicate, this opens the field for exploring new logical connectives arising by consideration of further forms of storing and structuring information.

1 Introduction

In the preface of their recent monograph *Linking Game-Theoretical Approaches with Constructive Type Theory*, Clerbout and Rahman (2015) identify the talk entitled 'Logik und Agon',[1] presented by Paul Lorenzen in 1958 to the World Congress of Philosophy in Venice, as inaugurating event for a broad and steady stream of research connecting logic, games, and epistemology. While the corresponding research paradigm may look back to conceptions of logic

Christian G. Fermüller
Technical University Vienna, Austria, e-mail: chrisf@logic.at

[1] Published as Lorenzen 1960 and included in the collection Lorenzen and Lorenz 1978.

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_8

in antiquity and medieval philosophy, Clerbout and Rahman also view it as providing foundations to recent developments in the fields of theoretical computer science, computational linguistics, artificial intelligence, social sciences, and legal reasoning. Indeed, Lorenzen's dialogical approach to logic is often mentioned as an important early contribution to what Johan van Benthem and others call the 'dynamic turn' of contemporary logic (van Benthem 2014; Peregrin 2003). More specifically, the field of substructural logics, which takes Gentzen's sequent calculus as its starting point and, most prominently, includes Girard's (1987) Linear Logic, engendered a host of work on so-called game semantics. This field has been initiated by Blass (1992), who duly cites Lorenzen as a source of inspiration. However, it is also evident that the current understanding of the paradigm that interprets formulas as games and logical connectives as operators for constructing new games out of given ones is quite distant from Lorenzen's original concerns about a dialogical foundation for constructive reasoning. In fact, the 'games' that interpret formulas in contemporary game semantics, as exemplified, e.g., by Abramsky and Jagadeesan (1994) are quite abstract entities which relate to computational processes, but are hardly any longer connected to (idealized) dialogues between human agents. At least to some extent, this is at odds with the motivation of the move from classical or intuitionistic logic to substructural logics in terms of resource-conscious reasoning.

An example of resource consciousness consists in dropping the contraction rule from Gentzen's sequent calculus, which can be seen as a means to keep track of the number of times a particular assumption is explicitly used in a proof in order to obtain a certain conclusion. Likewise, deriving a sequent without using the (left) weakening rule amounts to a proof that uses all and only those assumptions listed as formula occurrences on the left side of the end sequent. Similarly, dropping the exchange rule (permutation) means that the use of listed assumptions has to follow a certain order. In any case, the crucial point of substructural logics is that a more fine-grained analysis of proofs along the indicated lines leads to new connectives that arise as different refinements of classical or intuitionistic connectives, when proper attention is paid to the use of formulas in corresponding sequent rules.

The main purpose of this contribution is to introduce and explore an interpretation of substructural sequent calculi that is arguably closer to Lorenzen's original dialogue game for intuitionistic logic than the contemporary forms of game semantics mentioned above. This exploits the fact that, quite generally, the logical inference rules of sequent calculi can be interpreted as modeling an interaction between a Proponent **P** and an opponent **O**. For example, the lower sequent of the rule

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge, \mathrm{r})$$

for introducing conjunction on the right side can be seen as representing a state in a dialogue game where **P** seeks to defend her assertion of $A \wedge B$ in the context of a multiset Γ of formulas that have already been granted by **O**. The branching in the rule expresses the fact that **P** can only successfully defend her claim if she is prepared to defend both, A as well as B, in the context Γ. This in turn means that the dialogue game is to be continued either in a state represented by the sequent $\Gamma \vdash A$ or in one represented by $\Gamma \vdash B$. Crucially, it is **O** who decides which of these two states should be chosen. In contrast, if **P** defends an assertion $A \vee B$, then she herself can choose whether the game should continue in a state where she claims that A can be defended if **O** has granted Γ or with her claim that B can be defended in the presence of Γ.

To emphasize aspects of information processing implicitly entailed in interpretations of structural sequent rules, we will explore a variation of this idea by interpreting every (single-conclusion) sequent $\Gamma \vdash F$ as state of a game in which an agent seeks to extract the package of information represented by the formula F from the bundle of information represented by the formulas contained in Γ.[2] In a sense, our aim is quite modest: we only want to discuss a particular reading of sequents for a certain family of substructural calculi and make no pretensions as to nontrivial mathematical results here. However, in another sense, we actually propose a rather ambitious research program, triggered by our specific interpretation. We argue that the proposed game-based view of sequents as states in games of information extraction leads not only to new perspectives on known calculi, but rather opens a way to new research directions, involving new types of formal systems of reasoning. Some of these systems are quite different from established calculi. For example, we will see that there are cases where cut admissibility is neither to be expected nor even justified on semantic grounds.

There is a potential source of misunderstanding about our endeavor that we should clarify right away. In speaking of 'Lorenzen-style games', we only refer to certain structural features of the framework that Lorenzen has introduced, but not to the philosophical aims that informed his writings on dialogical logic. Lorenzen and Kuno Lorenz, his principal collaborator in this endeavor, aimed not merely at a characterization of intuitionistic logic in terms of a two-player perfect-information game, but explicitly strove to derive their logical system from first principles about correct reasoning in mathematics and beyond. For example, in the introduction to the collection of relevant papers and book excerpts, Lorenzen and Lorenz (1978) emphasize that they not only aim at a *characterization* of intuitionistic and classical logic, but that they believe to have found a *justification* and *explanation* (*Begründung*) for those logics (see also Lorenz 2001). This strong claim has been met with skepticism. For instance, Hodges (2001) explicitly

[2] A first version of this interpretation has been presented in Fermüller and Lang 2017. Here we take a broader, less technical view of the topic. A different, but vaguely related, analysis of sequent rules in terms of a proof search game is offered by Lang, Olarte, Pimentel, and Fermüller 2019.

rejects this claim as untenable on several accounts. The more sympathetic account of Lenk (1982)[3] puts Lorenzen's dialogical approach into the context of a number of earlier attempts to provide *a priori* reasons for singling out certain connectives as 'logical', but arrives at largely negative conclusions as to the possibility of such an endeavor as well. It is probably fair to say that later developments in logic, alluded to by Clerbout and Rahman (2015), as mentioned above, persuaded most logicians to ignore the philosophical concerns of Lorenzen regarding the foundations of mathematical reasoning. In particular, contemporary logic is informed by a pragmatic pluralism regarding logical formalisms. It is shaped by a vast and fast-growing number of nonclassical logics that provide tools for modeling and analyzing many different aspects of formal reasoning, but these logics are hardly seen as competitors in the quest for determining the 'one and only' correct form of inference. In any case, our attempt to connect substructural sequent calculi with a type of game that is inspired by Lorenzen's logical dialogue games is informed by a very pragmatic approach to logic. We do not seek to contribute to the debates about the feasibility of dialogical logic as a foundational program, but rather want to illustrate, by way of a specific, but very flexible, approach to substructural calculi, that Lorenzen's innovations continue to inspire contemporary research in logic, independently of the fate of his own philosophical concerns.

The rest of the paper is organized as follows. Section 2 revisits Gentzen's sequent calculus LI for intuitionistic logic as a reference point, as well as our main example of a substructural calculus: intuitionistic linear logic (ILL). In Section 3 we first present an information extraction game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ motivated by different ways of structuring and accessing information. We then define a resource-conscious variant $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$. As pointed out in Section 4, winning strategies for player $\mathbf{P}$ in $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ directly correspond to proofs in ILL. As also explained there, the relation between $\mathbf{P}$'s winning strategies in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ and LI-proofs is less obvious, but can be established by well-known proof-theoretic transformations. Section 5 clarifies in which sense our information extraction games can be classified as Lorenzen-style. Section 6 provides a selective overview over some other substructural calculi and corresponding information extraction games. The final Section 7 briefly recapitulates the overall story conveyed here and concludes with comments on a number of topics for further research, which are intended to show that connecting concerns about resources in sequent-based inference with Lorenzen-style games constitutes a varied and fruitful research paradigm that largely still remains to be explored.

[3] That essay is an expanded version of a talk originally presented in the context of the author's habilitation procedure at TU Berlin, 1966.

2 Some sequent calculi

In his seminal paper on the concept of logical consequence, Gentzen (1935) introduced the sequent calculus for intuitionistic as well as for classical logic as the main tool of investigation. We will only refer to the propositional part of the intuitionistic version LI[4] here, which is presented in Table 1. In fact LI,

Axioms (initial sequents): $A \vdash A$

Structural rules:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{w,l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{w,r}) \qquad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{c})$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \vdash \Delta}\ (\mathrm{p}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut})$$

Logical rules (rules for propositional connectives):

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \Big/ \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge,\mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge,\mathrm{r})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\vee,\mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \Big/ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee,\mathrm{r})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\to,\mathrm{l}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to,\mathrm{r})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\neg A, \Gamma \vdash}\ (\neg,\mathrm{l}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg,\mathrm{r})$$

Table 1 An additive version of Gentzen's LI.

as presented in Table 1, constitutes a variant of Gentzen's original calculus, where the logical rules that branch do not split the context of formulas denoted by Γ. In Girard's terminology (see below), we use the *additive* formulations of rules. This is somewhat unusual for the implication rule $(\to,\mathrm{l})$, which is traditionally presented in the context-splitting *multiplicative* form, as shown in rule $(\multimap,\mathrm{l})$ in Table 2. The reason for this deviation from tradition is that sequent proofs can be more directly interpreted as corresponding to **P**'s winning strategy in a Lorenzen-style dialogue game if purely additive rules are used (see, e.g., Fermüller 2003). The notational conventions there are as usual: A, B are arbitrary formulas; Γ, Σ, and Π denote (possibly empty) sequences of formula; Δ is either empty or a single formula; '$\vdash$' is called the 'sequent arrow'. The term 'substructural' refers to the structural rules,

[4] In the literature, Gentzen's intuitionistic sequent calculus is often referred to as 'LJ'. This seems to be due to the fact that now-obsolete typographical conventions let the letter following 'L' in Gentzen's original naming of the calculus appear to look more like a 'J' than an 'I' to later readers. But in any case, it is clear that the letter was meant to abbreviate the (German) word *intuitionistisch*, as opposed to the 'K' in 'LK', which abbreviates *klassisch*.

rendered here as (w, l), (w, r), (c), and (p), for 'weakening left', 'weakening right', 'contraction', and 'permutation', respectively.[5] The prefix 'sub' in 'substructural' indicates that one is interested in the effect of dropping, or at least restricting, some or even all of these rules. A host of different logics, with a diverse range of intended applications, arises in this manner. For details, we refer to Paoli 2002 and Restall 2002. Here, we just present the sequent calculus for intuitionistic linear logic ILL (see Table 2). In contrast

Axioms: $A \vdash A$ $\quad \Gamma \vdash \top$ $\quad \vdash 1$ $\quad 0, \Gamma \vdash \Delta$

Weakening with 1**:**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{1, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{w}_1)$$

Rules for propositional connectives:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \otimes B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\otimes, \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Sigma \vdash B}{\Gamma, \Sigma \vdash A \otimes B}\ (\otimes, \mathrm{r})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \& B, \Gamma \vdash \Delta} \Big/ \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \& B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\&, \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ (\&, \mathrm{r})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \oplus B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\oplus, \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B} \Big/ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ (\oplus, \mathrm{r})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Sigma \vdash \Delta}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \vdash \Delta}\ (\multimap, \mathrm{l}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ (\multimap, \mathrm{r})$$

Rules for the exponential:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{w}!) \qquad \frac{!A, !A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{c}!) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\ (!, \mathrm{l}) \qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\ (!, \mathrm{r})$$

Table 2 Sequent calculus ILL for intuitionistic linear logic.

to LI, the left side of a sequent in ILL is a *multiset*, rather than a sequence, of formulas. This entails that the 'comma' separating formula occurrences is now to be interpreted as multiset union rather than as concatenation. Moreover, the permutation rule of LI is redundant in ILL. Unlike in LI, in ILL the right side of a sequent is never empty; i.e., Δ in Table 2 always denotes a formula. The cut rule is omitted in Table 2; it is the same as for LI (see Table 1).

Linear logic has been introduced by Girard (1987) and has triggered a steady stream of research, due to its tight connections with computational paradigms. Note that ILL features two forms of conjunction: $\otimes$ ('times' or multiplicative conjunction) and & ('with' or additive conjunction). It is not hard to see that the rules for $\otimes$ and & are interderivable if we add (unrestricted) weakening and contraction to the calculus. In that sense, $\otimes$ and &

[5] The rule (cut), too, is structural. However, in contrast to the other structural rules, its admissibility and, in fact, stepwise eliminability (cut elimination, as expressed in Gentzen's *Hauptsatz*) is usually deemed essential also for substructural sequent calculi.

are different refinements of ordinary conjunction. The connective ! ('bang' or 'of course') is referred to as 'exponential'. It is used to restrict applications of weakening and contraction to specific formulas. The rules for the exponential, (w!), (c!), (!, l), and (!, r), are called 'weakening', 'contraction', 'dereliction', and 'promotion', respectively. In the promotion rule, $!\Gamma$ denotes the multiset of formulas arising from prefixing each formula in Γ by the exponential.

As already indicated in the introduction, substructural logics and in particular also ILL are intended to model resource-conscious reasoning. We recall a frequently cited example presented by Girard:

> In linear logic, two conjunctions $\otimes$ (*times*) and & (*with*) coexist. They correspond to two radically different uses of the word "and". Both conjunctions express the availability of two actions; but in the case of $\otimes$, both will be done, whereas in the case of &, only one of them will be performed (but we shall decide which one). To understand the distinction consider A, B, C:
>
> A: to spend \$1,
> B: to get a pack of Camels,
> C: to get a pack of Marlboro.
>
> An action of type A will be a way of taking \$1 out of one's pocket (there may be several actions of this type since we own several notes). Similarly, there are several packs of Camels at the dealer's, hence there are several actions of type B. An action type $A \multimap B$ is a way of replacing any specific dollar by a specific pack of Camels.
>
> Now, given an action of type $A \multimap B$ and an action of type $A \multimap C$, there will be no way of forming an action of type $A \multimap B \otimes C$, since for \$1 you will never get what costs \$2 (there will be an action of type $A \otimes A \multimap B \otimes C$, namely getting two packs for \$2). However, there will be an action of type $A \multimap B \& C$, namely the superimposition of both actions. In order to perform this action, we have first to choose which among the two possible actions we want to perform, and then to do the one selected. (Girard 1995, p. 2)

The idea of interpreting formulas as action types has indeed turned out to be very fruitful. But here we are interested in a particular ambiguity in the above-cited presentation. Girard says that to perform an action of type $B \& C$ *we* have to choose whether to perform A or to perform B. One may ask: who is 'we'? At first glance, it might seem nit-picking to insist on an answer to this question. However, in order to interpret a disjunctive formula (written as $B \oplus C$ in ILL), one has to speak of a choice as well. But presumably it should not be the same agent that is to choose between B and C when faced with $B \oplus C$ or with $B \& C$, respectively, when these formulas occur on the same side of a sequent.

At this point a look at Lorenzen's dialogical logic may help to clarify the semantic intuitions regarding conjunction and disjunction. Recall that in Lorenzen's dialogue game for intuitionistic logic (see Lorenzen and Lorenz 1978) there are two players: a proponent **P** and an opponent **O**. The rules of the game stipulate that, if **P** asserts $B \wedge C$ then **O** is entitled to choose either B or C and **P** has to assert the chosen conjunct. But if **P** asserts $B \vee C$, then, if attacked by **O**, **P** herself gets to choose whether to continue the dialogue with asserting B or with asserting C. Revisiting Girard's presentation above, we may say that Lorenzen decided to model conjunction as &, which in his context actually coincides with $\otimes$, since in intuitionistic logic unrestricted (implicit or explicit) contraction and weakening are present. Moreover, from this perspective it becomes apparent that the agent referred to as 'we' by Girard should actually be split into two roles, akin to the proponent and the opponent in Lorenzen's dialogue game. Indeed, game-based models of linear logic, starting with Blass 1992, do exactly that. On the other hand, contemporary game semantics quickly departs from Lorenzen's concept of dialogical logic by interpreting formulas as (abstract) games, rather than as concrete assertions. To bridge the gap, we propose a game that does not interpret formulas as games, but rather as packages of information.

3 Two different information extraction games

We suggest to interpret a (single-conclusion) sequent $\Gamma \vdash F$ as a situation in which a client seeks to obtain the information represented by F from the bundle of information Γ provided by a server.[6] The purpose of the game is to stepwise reduce claims of the form 'The client can obtain F from a server providing Γ' to less complex claims of the same form until an obviously true or an obviously false statement appears. The reduction proceeds by an interaction between two players: a proponent **P**, who acts in the interest of the client and thus seeks to reduce the initial claim to an obviously true one; and an opponent **O**, who acts as adversary to **P** (and thus also the client). The rules guiding this interaction refer to the topmost operator used to form a selected *information package* (*ip*) from simpler ips. For now, we just consider three such operators:

- $\mathsf{any\,of}(F_1, \ldots, F_n)$, with the intended meaning that the client can get any of the ips F_1 or ... or F_n she likes, if $\mathsf{any\,of}(F_1, \ldots, F_n)$ is among those currently offered by the server;

[6] We do not claim any direct relevance to client–server configurations as studied in contemporary computer science. Moreover, one might object to our use of the term 'information': since we do not care about any specific content, but only about the type of structuring, it may be more appropriate to just speak of '(types of) packages of data'. However, we think that no corresponding confusion will arise in our context and hence prefer to stick with the term 'information packages', introduced in Fermüller and Lang 2017. In the latter paper the players of the game are identified with the client and the server, respectively. Here, we will speak of a 'proponent' and an 'opponent', instead, which refer to client–server situations of the indicated type. This shift in terminology is arguably more in line with a simple and coherent interpretation of the game and the underlying sequent calculus. Another advantage is its obvious relation to Lorenzen's scenario for dialogical logic.

- $\mathsf{some\ of}(F_1, \ldots, F_n)$, where the client also gets one of $F_1, \ldots, F_n$, but she (respectively player **P**, acting in her interest) has no control over which of those ips gets picked;
- F_1 given F_2, where the client can get F_1 under the condition that F_2 can be obtained as well from whatever is currently offered by the server.

Among the *atomic* ips, which admit no further reduction, there is the special ip $*$, which may be viewed as a 'wildcard': if $*$ is offered by the server then, since it can stand in for any ip that the client may want to obtain, **P** wins the game.

At first glance, it may seem that we have lost the connection with formulas of intuitionistic and linear logic by introducing the above operators. We immediately restore this connection, by first observing that it is sufficient to consider binary versions of $\mathsf{any\ of}$ and $\mathsf{some\ of}$. Clearly the indicated intended meaning justifies the following corresponding identities:

$$\mathsf{any\ of}(F) = F, \qquad \mathsf{some\ of}(F) = F,$$

$$\mathsf{any\ of}(F_1, \ldots, F_n) = \mathsf{any\ of}\Big(F_1, \mathsf{any\ of}(F_2, \ldots, \mathsf{any\ of}(F_{n-1}, F_n) \ldots)\Big),$$

$$\mathsf{some\ of}(F_1, \ldots, F_n) = \mathsf{some\ of}\Big(F_1, \mathsf{some\ of}(F_2, \ldots, \mathsf{some\ of}(F_{n-1}, F_n) \ldots)\Big).$$

Secondly, from now on, we write $\mathsf{any\ of}(F_1, F_2)$ as $F_1 \wedge F_2$, $\mathsf{some\ of}(F_1, F_2)$ as $F_1 \vee F_2$, F_1 given F_2 as $F_2 \to F_1$, and $*$ as $\bot$.

So far, we have only alluded to the intended meaning of the operators for the case where they occur among ips provided by the server. But we also want to consider states where the ip the client seeks to obtain is structured likewise. In particular, if the client wants to get $\bot$, the only way to succeed is to find $\bot$ also on the server's side. To fully fix the meaning of the operators, we have to specify additional reduction rules that refer to compound ips on the client's side.

More precisely, states of the game $\mathcal{G}_\mathsf{I}$ are denoted as $\Gamma \triangleright F$, where F is an ip and Γ is a multiset of ips. $\{G\} \cup \Gamma$ is denoted as G, Γ. The game proceeds in *rounds*. Each round is initiated by **P** choosing an occurrence of a compound ip, called the 'selected ip', in the current state. We will indicate the selected ip by underlining it. The following rules regulate the transition from the exhibited current state to its successor state.

$(\wedge_l^{\mathcal{G}})$ $\underline{F \wedge G}, \Gamma \triangleright H$:
: **P** chooses whether to extract F or G from the ips provided by the server; i.e., **P** decides whether the game continues in state $F, F \wedge G, \Gamma \triangleright H$ or in state $G, F \wedge G, \Gamma \triangleright H$.

$(\vee_l^{\mathcal{G}})$ $\underline{F \vee G}, \Gamma \triangleright H$:
: **O** chooses whether the server provides F or provides G; accordingly, the game continues in state $F, F \vee G, \Gamma \triangleright H$ or in state $G, F \vee G, \Gamma \triangleright H$.

$(\to_l^{\mathcal{G}})$ $\underline{F \to G}, \Gamma \triangleright H$:
: **O** chooses whether the server simply provides G or whether the next

state should correspond to the claim that G can be obtained from F together with other ips stored on the server. Accordingly, the game continues in state $G, F \to G, \Gamma \rhd H$ or in state $F \to G, \Gamma \rhd F$.

$(\wedge_r^{\mathcal{G}})$ $\Gamma \rhd \underline{F \wedge G}$:
O chooses whether the claim reduces to one about obtaining F or about obtaining G; i.e., **O** decides whether the game continues in state $\Gamma \rhd F$ or in state $\Gamma \rhd G$.

$(\vee_r^{\mathcal{G}})$ $\Gamma \rhd \underline{F \vee G}$:
P chooses whether the claim reduces to one about obtaining F or about obtaining G; i.e., **P** decides whether the game continues in state $\Gamma \rhd F$ or in state $\Gamma \rhd G$.

$(\to_r^{\mathcal{G}})$ $\Gamma \rhd \underline{F \to G}$:
No choice is involved; the game continues in state $F, \Gamma \rhd G$.

Any state of the form $H, \Gamma \rhd H$ or $\bot, \Gamma \rhd H$ is a *winning state* for **P**.

A *play* or *run* of the game is a (finite or infinite) sequence of states where each successor state arises from the previous one according to one of the above rules. **P** *wins* the play if the last state is a winning state for **P**. A *strategy* (*for* **P**) σ for some *initial state* S is given by a tree of states rooted in S. The branches of σ consist in runs of the game starting with S. If S' is a node (state) in σ, then it has a single successor node if, according to the rules, it is on **P** to choose the succeeding state in the play. If, however, the rules require **O** to choose between two possible successor states, then σ branches at S' with those two states as child nodes. If every branch of σ ends in a leaf node that is a winning state for **P**, then σ is a *winning strategy* (for **P**).

Let us make some observations regarding the structure and rules of the game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ from a semantic perspective:

- Since **P** selects the ip to focus on next, we may call **P** the 'scheduler' of the game. We will retain this feature when, in later games, we decide to assign even more 'scheduling power' to **P**.
- We did not specify winning states for **O**. The role assigned to **O** is to prevent **P** from reducing the game to a state where she (**P**) wins. Since the rules of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ entail that all decomposed ips provided by the server are retained, **P** may force the game to loop ad infinitum, if at least one compound ip is provided initially. But such infinite plays are never won by **P** and may thus be classified as won by **O**.
- Notice that the rules $(\wedge_l^{\mathcal{G}})$ and $(\vee_l^{\mathcal{G}})$ directly capture the intended meaning of any of and some of, respectively.
- The rules $(\wedge_r^{\mathcal{G}})$ and $(\vee_r^{\mathcal{G}})$ are strictly dual to $(\wedge_l^{\mathcal{G}})$ and $(\vee_l^{\mathcal{G}})$, respectively: a choice of a subformula by one of the players implies a corresponding choice by the other player, if the selected formula occurrence is on the other side. This furthermore entails that the rules for $\wedge$ arise from those for $\vee$ (and vice versa) by exchanging the roles of **P** and **O**.
- While the rule $(\to_r^{\mathcal{G}})$ is rather self-explanatory, it is less obvious that $(\to_l^{\mathcal{G}})$ corresponds to the indicated meaning of the conditional packag-

ing operator 'given'. To capture the intended semantics more directly, it seems more appropriate to apply a rule $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{10})$ which stipulates that the state $\underline{F \rightarrow G}, \Gamma \triangleright H$ is succeeded by the state $G, \Gamma \triangleright H$, provided that F occurs in Γ. Indeed, $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{10})$ is sound, but redundant in the presence of $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{1})$. This is easy to see, as follows. Up to a copy of F, the states $F, F \rightarrow G, \Gamma \triangleright H$ and $F \rightarrow G, \Gamma \triangleright H$ are identical if $F \in \Gamma$. This means that $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{10})$ amounts to an instance of $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{1})$ when $H = G$, because in that case the other possible successor state, according to $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{1})$, is $F \rightarrow G, \Gamma \triangleright G$. Since the latter is a winning state for **P**, we may assume without loss of generality that **O** never chooses this option.

Seen in this light, $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{1})$ arises, since the fact that G can be obtained from $F \rightarrow G$ in the presence of F does not entail the following more general claim: if $F \rightarrow G$ is provided, the client may obtain H from G (and the other provided ips) if she has a way to obtain F from the ips provided by the server. The two involved sub-claims (about obtaining H from G, and about obtaining F, respectively) directly correspond to the two possible successor states according to rule $(\rightarrow^{\mathcal{G}}_{1})$. Since it is **O**'s role to point out, if possible, that at least one of the two claims is wrong, the rule lets **O** choose in which of the two states the game should continue.

In Section 4, we will show that **P** has a winning strategy for $\Gamma \triangleright F$ in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ if and only if $\Gamma \vdash F$ is provable in LI. More important for our topic is the fact that $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ invites certain modifications that are motivated by a resource-conscious reading of the claim that the client can obtain certain information from the server. Winning strategies in those variations of the game can be shown to correspond to proofs in appropriate substructural sequent calculi.

We conclude this section with the game $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ for intuitionistic linear logic. The overall format of the game is as in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$. The language is as in ILL, i.e., ips are built up from simpler ips using the operators $\&$, $\otimes$, $\oplus$, and $\multimap$. Among the atomic ips are the following special ones: 0, 1, and $\top$. The rules for reducing selected compound information packages are as follows.

$(\otimes^{\mathcal{G}}_{1})$ $\underline{F \otimes G}, \Gamma \triangleright H$:
The game continues in state $F, G, \Gamma \triangleright H$.

$(\&^{\mathcal{G}}_{1})$ $\underline{F \& G}, \Gamma \triangleright H$:
P decides whether the game continues in state $F, \Gamma \triangleright H$ or in state $G, \Gamma \triangleright H$.

$(\oplus^{\mathcal{G}}_{1})$ $\underline{F \oplus G}, \Gamma \triangleright H$:
O decides whether the game continues in state $F, \Gamma \triangleright H$ or in state $G, \Gamma \triangleright H$.

$(\multimap^{\mathcal{G}}_{1})$ $\underline{F \multimap G}, \Gamma \triangleright H$:
P chooses a partition of Γ into disjoint multisets Γ_1 and Γ_2; then **O** decides whether the game continues in state $\Gamma_1 \triangleright F$ or in state $G, \Gamma_2 \triangleright H$.

$(!^{\mathcal{G}}_{l})$ $\underline{!F}, \Gamma \rhd H$:
P has three different options: she may convert the selected ip $!F$ into F or add a copy of it or dismiss it. Accordingly, **P** decides whether the game continues in state $F, \Gamma \rhd H$, in state $!F, !F, \Gamma \rhd H$ or in state $\Gamma \rhd H$.

$(\otimes^{\mathcal{G}}_{r})$ $\Gamma \rhd \underline{F \otimes G}$:
P chooses a partition of Γ into disjoint multisets Γ_1 and Γ_2; then **O** decides whether the game continues in state $\Gamma_1 \rhd F$ or in state $\Gamma_2 \rhd G$.

$(\&^{\mathcal{G}}_{r})$ $\Gamma \rhd \underline{F \& G}$:
O decides whether the game continues in state $\Gamma \rhd F$ or in state $\Gamma \rhd G$.

$(\oplus^{\mathcal{G}}_{r})$ $\Gamma \rhd \underline{F \oplus G}$:
P decides whether the game continues in state $\Gamma \rhd F$ or in state $\Gamma \rhd G$.

$(\multimap^{\mathcal{G}}_{r})$ $\Gamma \rhd \underline{F \multimap G}$:
The game continues in state $F, \Gamma \rhd G$.

$(!^{\mathcal{G}}_{r})$ $!\Gamma \rhd \underline{!H}$:
The game continues in state $!\Gamma \rhd H$. Note that **P** can only select $!H$ on the client's (right) side if all ips on the server's (left) side have ! as their outermost operator.

$(1^{\mathcal{G}})$ $\underline{1}, \Gamma \rhd H$:
The game continues in state $\Gamma \rhd H$.

States of the form $H \rhd H$, $\Gamma \rhd \top$, $\rhd 1$, or $0, \Gamma \rhd H$ are *winning states* for **P**. The definition of plays and winning strategies is as for $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$.

Like for the game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ above, we offer remarks on the structure and rules of $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ that refer to the intended interpretation of the game.

- We still want to read a state $\Gamma \rhd H$ as expressing the claim that a client can obtain the ip H from the multiset Γ of ips offered by a server. However, we add the qualification 'exactly'; in other words, $\Gamma \rhd H$ asserts that to get the ip H no less *and no more* than the resources Γ are needed.
- Disregarding the different language for forming ips, arguably the most essential difference between $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ and $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ is the fact that the selected ips on the server's (left) side now disappear when reduced. We view this as a hallmark of resource consciousness: compound information packages can be 'unpacked' upon request of **P**, but only the corresponding parts (depending on the type of packaging operator) remain available for further reduction or immediate use by the client.
- Except for the just-mentioned removal of the selected ip on the server's side, the rules for & and $\oplus$ are the same as for $\wedge$ and $\vee$, respectively. This means that we suggest to read & as a resource-conscious (binary) version of any of, and $\oplus$ as a corresponding version of some of.
- The informal reading of $F \otimes G$ suggested by $(\otimes^{\mathcal{G}}_{l})$ is that of a package containing both F and G. Rule $(\otimes^{\mathcal{G}}_{l})$ signifies explicit resource consciousness: in order to reduce the claim that the client can obtain $F \otimes G$ from the bundle of information Γ provided by the server, **P** has to

declare which part of Γ is needed to get F and which (disjoint) part of Γ is needed to obtain G.

- Rule $\left(\multimap_{\mathrm{r}}^{\mathcal{G}}\right)$ is exactly as $\left(\rightarrow_{\mathrm{r}}^{\mathcal{G}}\right)$ of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$. The explanation that we gave for $\left(\rightarrow_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$ above also applies to $\left(\multimap_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$ but has to be augmented by attention to the same type of resource consciousness that we just pointed out for the case of $\left(\otimes_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$: unpacking $F \multimap G$ entails that **P** has to declare which part of the provided resources is used to get G from F and which part is used to get F.
- The special operator ! is used to 'protect' ips from removal from the server if **P** wishes to retain them. Roughly, ! corresponds to 'arbitrarily often'.[7] Considered as a packaging operator, the reader is invited to think of $!A$ as a special 'protected' resource that, upon request, can be converted into an ordinary instance of A, but that also can be copied (and hence protected) or removed if desired. Note that the option of removal is significant because (disregarding special atomic ips) it is **P**'s aim to maneuver the game into a final state where only the ip that the client wants to obtain is provided by the server. The rule $\left(!_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}}\right)$ directly reflects the indicated understanding of protection. The rule $\left(!_{\mathrm{r}}^{\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}}\right)$ expresses the stipulation that the client can obtain $!A$ itself from resources offered by the server if those resources are all likewise protected and if A can be obtained from them.
- In $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ the only atomic ip with a fixed meaning is the 'wildcard' $*$, written as $\bot$. In $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ we have three special atomic ips:
  - The intended meaning of 1 is that of an empty resource (piece of information). Nothing has to be and nothing should be provided by the server in order for the client to obtain it. This explains why $\triangleright 1$ is a winning state for **P**. But it also explains why, according to rule $\left(1^{\mathcal{G}}\right)$, it may be removed from the ips provided by the server whenever **P** wishes to do so.[8]
  - The ip 0 is a kind of joker for the client. As soon as **P** finds it among the ips provided by the server, she wins (on behalf of the client). On the other hand, the claim that the client can get hold of this joker, i.e., that **P** can win in state $\Gamma \triangleright 0$, can only be verified by pointing out that 0 itself is provided by the server. (Obviously, 0 is closely related to the 'wildcard' $\bot$ of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$.)
  - $\top$ serves as a specific kind of winning signal for the client: a state in which $\top$ appears on the client's (right) side is winning for **P**, independently of what is currently provided by the server.

---

[7] As pointed out by Fermüller and Lang (2017), the reading of $!A$ as 'arbitrarily many copies of A' is somewhat problematic. We consider our information extraction games as a tool for connecting the informal semantics of substructural logics with formal semantics in a manner that sheds light on some of the subtleties and ambiguities involved in the informal reading.

[8] Note that $\left(1^{\mathcal{G}}\right)$ corresponds to the weakening rule for 1 in ILL.

While we are not concerned here with the systematic search for **P**'s winning strategies in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ and $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$, one may still point out a correlation between the technique of 'focusing' in proof search and the pattern of **P–O** interaction emerging in the above rules. Focusing has spawned quite a stream of literature; we refer to Andreoli 2001 and Liang and Miller 2009 for detailed presentations. To see the connection, note that for some of the above game rules, e.g., $(\otimes_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}})$, $(\&_{\mathrm{r}}^{\mathcal{G}})$, and $(\multimap_{\mathrm{r}}^{\mathcal{G}})$, no choice of **P** is involved. However, other rules, like $(\otimes_{\mathrm{r}}^{\mathcal{G}})$ and $(\multimap_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}})$, require **P** to partition the context Γ of the current state. The first type of rules corresponds to invertible, the second type to non-invertible sequent rules. Focusing recognizes that applications of invertible and non-invertible rules, respectively, are best bundled into different phases of proof search. Whereas, in a 'negative phase', invertible rules can be applied exhaustively in any order, non-invertible rules are applied in a chain-like fashion, in the 'positive phase'. In terms of our games, these phases relate to the respective necessity or lack of choices by **P** that may have to be withdrawn to guarantee a successful play for **P**. We refer to Sticht 2018 for a presentation of multi-agent games for intuitionistic and modal logics that makes the connection to focusing in corresponding sequent calculi very explicit.

4 Relating games and calculi

Notice that the winning states (for **P**) in game $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ turn into the axioms of the sequent calculus ILL if we replace '$\triangleright$' by '$\vdash$'. Moreover, the rules of $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ also directly correspond to the rules of ILL. Except for the three sequent rules referring to the exponential on the left side, which we have mapped into a single game rule, there is a one-to-one correspondence between ILL-rules and $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$-rules. Branching sequent rules are interpreted as game rules calling for a corresponding choice of **O**. Choices between different applicable rules or different instances of the same rule are left to **P**. Since we have defined winning strategies for **P** as trees of game states, the outlined correspondence generalizes to the level of proofs and winning strategies, respectively.

Theorem 1 *Every cut-free* ILL*-proof of a sequent $\Gamma \vdash F$ directly corresponds to a winning strategy for* **P** *in $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ with initial state $\Gamma \triangleright F$, and vice versa.*

Mathematically minded readers may be disappointed about the 'shallowness' of Theorem 1. Indeed, the immediacy of the relation between ILL-proofs and winning strategies in $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ just invites a particular reading or viewpoint of proofs, without involving any deeper insights into the properties of ILL. We consider this to be a virtue rather than a defect. After all, our aim here is to show that the game-based interpretation sheds light on the informal, resource-conscious semantics of the (unmodified) sequent calculus. But we readily admit that this interpretation only obtains genuine profile if we take it as a principle for the analysis of 'substructurality' in general, rather than as an isolated form of attaching meaning to ILL-derivations. To this aim, we will look in Section 6 at different ways to variate and generalize $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ that are triggered by semantic intuitions rather than by the goal to find alternative characterizations of known sequent calculi. In the rest of the current section, we want to cast light on the relation between intuitionistic logic and (intuitionistic) linear logic from the point of view of information extraction.

In contrast to the case for ILL, the relation between LI-proofs and **P**'s winning strategies in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ is not immediately obvious. To establish a one-to-one correspondence between these strategies and proofs in a sequent calculus that is sound and complete for intuitionistic logic, we precede by stepwise transforming Gentzen's LI into its variant LIp.

1. Gentzen introduced the sequent calculus as a kind of meta-calculus, dealing with inferential forms (*Schlußweisen*) rather than directly representing informal mathematical proofs.[9] He found it natural to organize the assumptions, i.e., the formulas on the left side[10] of sequents, as sequences of formulas. The presence of the permutation rule (p) of LI corresponds to the irrelevance of the order in which assumptions are presented. In principle, we could model Gentzen's approach in a corresponding game by allowing **P**, in her capacity as scheduler, to re-order the ips on the server's side whenever she wants. However, we prefer to follow the by-now-usual format of dispensing with permutation and instead declaring the left side of sequents to be a multiset of formulas (like in ILL).
2. To get rid of the weakening rule (w), we generalize the axiom sequents by allowing arbitrary 'side formulas' to additionally occur on the left side. This corresponds to shifting weakenings to the axioms.
3. The contraction rule (c) also becomes redundant when we keep a copy of the principal formula (the one exhibited) in the upper sequent(s) of the rules $(\wedge,\mathrm{l})$, $(\vee,\mathrm{l})$, and $(\rightarrow,\mathrm{l})$.
4. Finally, note that in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ there is no operator corresponding to negation and that in any state there is some ip that the client wants to obtain. The latter feature corresponds to requiring that the right side of sequents is never empty. Since $(\neg,\mathrm{r})$ is the only rule where—read from bottom to top—a formula disappears from the right side, the two mentioned features are intimately related. LI-sequents can be brought in line with game states by declaring $\neg F$ to be an abbreviation of $F \rightarrow \bot$ and adding an axiom referring to the occurrence of the new constant $\bot$ on the left side of sequents.

[9] The latter task was assigned to the calculus of Natural Deduction (*natürliches Schließen*).

[10] In the classical sequent calculus LK, also the formulas on the right side of a sequent, representing alternative conclusions, appear as a sequence.

The sequent calculus LIp resulting from these modifications is exhibited in Table 3. One may add to LIp a cut rule, which is exactly as for LI; but, like

Axioms (initial sequents): $A, \Gamma \vdash A \qquad \bot, \Gamma \vdash A$

Logical rules (rules for propositional connectives):

$$\frac{A,\, B,\, A\wedge B,\, \Gamma \vdash C}{A\wedge B,\, \Gamma \vdash C}\ (\wedge, \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\wedge B}\ (\wedge, \mathrm{r})$$

$$\frac{A,\, A\vee B,\, \Gamma \vdash C \quad B,\, A\vee B,\, \Gamma \vdash C}{A\vee B,\, \Gamma \vdash C}\ (\vee, \mathrm{l}) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A\vee B} \Big/ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\vee B}\ (\vee, \mathrm{r})$$

$$\frac{A \to B,\, \Gamma \vdash A \quad B,\, A\to B,\, \Gamma \vdash C}{A\to B,\, \Gamma \vdash C}\ (\to, \mathrm{l}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to, \mathrm{r})$$

Table 3 The 'proof-search-friendly' variant LIp of Gentzen's LI.

for LI itself, it is redundant.

Actually, LIp is neither new nor specific to concerns about a game-based interpretation. The textbook by Troelstra and Schwichtenberg (2000) presents a closely related variant under the name G3i and establishes the equivalence with LI and thus soundness and completeness with respect to intuitionistic logic. While the rules that absorb contraction may seem awkward if read in the usual top-to-bottom fashion, LIp amounts to a natural way of presentation if viewed from the point of view of goal-directed (bottom-up) proof search. Incorporating contraction into the logical rules corresponds to the fact that we do not have to decide during proof search how many copies of identical formulas may eventually be needed. Similarly, shifting weakening to the axioms means that we do not have to decide in advance which formulas will actually be needed to establish the proof. Anyway, for our current purpose it suffices to rely on the fact that LIp, just like LI, is sound and (cut-free) complete for intuitionistic logic. This entails that the following statement expresses that the information extraction game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ characterizes intuitionistic logic.

Theorem 2 *Every cut-free* LIp*-proof of a sequent $\Gamma \vdash F$ directly corresponds to a winning strategy for* **P** *in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ with initial state $\Gamma \triangleright F$, and vice versa.*

In light of the correspondence between *cut-free* sequent proofs and winning strategies expressed in Theorems 1 and 2, one may wonder whether there is a game-based interpretation of the cut rule as well. Indeed, we have the following fact.

Proposition 1 *For $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ as well as $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$: whenever* **P** *has winning strategies for $\Gamma \triangleright F$ and for $F, \Pi \triangleright H$,* **P** *has a winning strategy for $\Gamma, \Pi \triangleright H$ as well.*

Note that, for $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$, Proposition 1 is a direct consequence of Theorem 1 and the well-known fact that the cut rule is admissible in ILL. In fact, the cut rule is not just admissible, but constructively eliminable. That is, any given ILL-proof can be stepwise transformed into a cut-free one (see, e. g., Troelstra 1992). The case for $\mathcal{G}_\mathsf{I}$ is analogous, except that in appealing to Theorem 2, we rely on the fact that LI- and LIp-proofs can be translated into each other (following, e. g., Troelstra and Schwichtenberg 2000). Thus, while not adding any technical insights to well-established proof-theoretical facts, Proposition 1 suggests a reading of cut-elimination in terms of information extraction. If H can be extracted from some bunch of ips augmented by the ip F, and F in turn can be extracted from yet another multiset of ips, then H can be extracted from the union of the two indicated multisets of ips. Thus, in a sense, the proposition serves as a sanity check for the games.[11] Actually, as is well known, cut is not only redundant in standard sequent calculi, but applications of the cut rule can be eliminated from given proofs by algorithmic, stepwise transformations.[12] For corresponding games this means that given winning strategies can be combined *effectively* in the indicated fashion.

5 Lorenzen-style games?

At least at a first glance, the format of our information extraction games seems to be very different from that of Lorenzen's dialogue game for intuitionistic logic. We nevertheless prefer to speak of 'Lorenzen-style games', which calls for some explanation. Let us start by presenting Lorenzen's game in a manner close to his own, in particular also followed by his student and collaborator Kuno Lorenz.[13]

While Lorenzen always also had quantifiers and interpreted statements (e. g., of arithmetic) in view, we confine attention to formal—as opposed to material—dialogue systems for purely logical, constructive reasoning at the propositional level. There are several versions of formal dialogue systems that can be traced back to Lorenzen's original contributions. For an overview and historical remarks, we refer to Lorenzen and Lorenz 1978, Krabbe 1985, Barth and Krabbe 1982, and Lorenz 2001. Here, we sketch a version that retains the overall structure and essential features of Lorenzen's game for intuitionistic logic, but that will also allow us to highlight the close relation to the information extraction game $\mathcal{G}_\mathsf{I}$ presented in Section 3.

A *dialogue* (run of the game) starts with the assertion of a formula by the proponent **P**, who seeks to defend his assertion against systematic attacks by the opponent **O**. The dialogue proceeds by strictly alternating moves

[11] Note, however, that the indicated combination of strategies depends on the organization of the information offered by the server as multisets of ips. As we will see in Section 6, organizing this information in the form of, e. g., a stack may well prevent strategies from being composable in this manner.

[12] In the case of LI, this is established in the proof of the *Hauptsatz* of Gentzen 1935.

[13] The book Lorenzen and Lorenz 1978 collects corresponding papers and book excerpts.

between **P** and **O**, in accordance with the rules presented in Table 4. The

assertion by **X**	attack by **Y**	defense by **X**
$A \wedge B$	$?_l$ or $?_r$ (**Y** chooses)	A or B, accordingly
$A \vee B$	$?$	A or B (**X** chooses)
$A \to B$	A	B
$\neg A$	A	(no defense possible)

If **X** is **P**, then **Y** is **O**; if **X** is **O**, then **Y** is **P**.

Table 4 Lorenzen's dialogue rules for propositional connectives.

special symbols ? and $?_l/?_r$ are used to denote attack moves on disjunctions and conjunctions, respectively. Observe that attacking an implication or a negated formula consists in asserting a corresponding (sub)formula. Therefore, in general, both players must attack the other player's assertions as well as defend their own assertions during a dialogue. There are different ways to define what it means to win a dialogue. If one wants to stick with the idea that a dialogue has been won by **P** if and only if **O** has no legitimate way to continue it, then one has to impose special rules that prevent **O** from forcing the game to cycle indefinitely around the same assertion(s). This is achieved by artificially setting, at the beginning of each dialogue, a limit on the number of times that **O** may attack each assertion of **P** or defend each of his own assertions. Here, we prefer to declare **P** the winner of the dialogue if **O** attacks an assertion of **P** that **O** himself has already asserted previously. Following Barth and Krabbe (1982), one may speak of an *ipse dixisti* rule ('you said it yourself').

Another, rather inconsequential, matter concerns negation. Rather than viewing $\neg$ as a primitive logical symbol, we may follow the route already taken in Section 4 for the transition from LI to LIp and declare $\neg A$ to be an abbreviation of $A \to \bot$. The atomic statement $\bot$ is indefensible, of course. Hence any state in which **O** has asserted $\bot$ is a winning state for **P** too.

The above rules and conventions are not yet sufficient to characterize intuitionistic validity via the existence of a winning strategy for **P**. We have to impose further *structural rules* (*Rahmenregeln*, in Lorenzen's diction) to achieve this. Again, this can be done in various ways, for which we refer the interested reader to Krabbe 1985 and Felscher 1986. For our current purpose it suffices to just highlight a rule that regulates the progress of dialogues in a manner that is central for capturing intuitionistic rather than classical logic:

Intuitionistic Round Closure Rule: Player **X** can only defend against the *last* attack of the other player **Y**.

Traditionally, dialogues are presented in a table with two columns, where the left column records the moves of **O** and the right column those of **P** and where defense moves are placed in the same row as a corresponding attack move by the other player. This convention lets states of the dialogue game appear to be quite different from the sequent-like states of the game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$. However, already Barth and Krabbe (1982) had introduced the notion of a *dialogue sequent* for recording a state of a dialogue game. These dialogue sequents contain more information than an ordinary sequent. This is necessary since dialogue games are usually not organized in rounds as in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$, where the formula (ip) selected by **P** has to be reduced immediately. These reduction steps correspond to (possibly implicit) attacks by **O**, followed by an immediate reply (defense) by **P**. Certainly, a comparison between Table 4 and the rules of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ reveals a close connection in the treatment of conjunction, disjunction, and implication, which carries over to negation modulo the definition $\neg A = A \rightarrow \bot$.

Concerning the more liberal interaction between moves by **P** and **O** in dialogue games, compared to our information extraction games, let us point out that already Felscher (1985) had introduced a structural rule ('*E*-rule') that requires **O** to always react to the immediately preceding move by **P**. This rule brings dialogue strategies closer to sequent derivations, or equivalently, to analytic tableaux, in the case of Felscher 1985. An essential part of Felscher's proof of the adequateness of Lorenzen's dialogue game for intuitionistic logic consists in showing that the *E*-rule is actually redundant. However, adding just the *E*-rule to Lorenzen's original dialogue system does not yet enforce that dialogues proceed in rounds akin to those of the game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$. To achieve a direct correspondence between plays of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ and formal dialogues one would have to impose an additional structural rule that requires also **P** to immediately reply to any attack by her opponent **O**.

We hope that the above remarks suffice to make clear that the game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$, despite its quite different terminology and motivation, may be seen as a variant of Lorenzen's dialogue game, where a stricter regime on the succession of attack and defense moves is enforced, but where logical connectives are treated in a very similar fashion. In any case, we invite the reader to compare $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ and its substructural cousin $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ with the game-based semantics of (fragments of) linear logic, presented by, e. g., Blass (1992) and Abramsky and Jagadeesan (1994). The central paradigm underlying the latter type of game semantics is to interpret *formulas as games* and *logical connectives as operators on games*. This view has certainly turned out to be very fruitful for providing compositional, abstract semantics to various formalisms, including functional programming languages, but it involves a major *structural*—and not just motivational—deviation from Lorenzen's dialogical logic. In Lorenzen's dialogues, like in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ and $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$, one cannot simply identify (sub)formulas with (sub)games: states in those games are inherently more complex than single formulas, but they can be denoted as (possibly augmented) sequents.

6 Game variants for other substructural calculi

In the last section, we have pointed out that Lorenzen's dialogical approach to the foundations of constructive reasoning and our characterization of intuitionistic logic in terms of interactive information extraction are closely related. On the other hand, we have already seen in Section 3 that a few straightforward modifications turn the information extraction game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ into the game $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ for intuitionistic linear logic. In this section we want to emphasize that the two just-mentioned games are only examples of a whole class of related games that allow one to model a wide range of substructural calculi as specific systems of information extraction.

Recall that we have interpreted a state $\Gamma \triangleright H$ in $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ as the claim that *no less and no more* than the resources (ips) Γ are needed to obtain the ip H. A particularly simple and natural variation $\mathcal{G}_{\mathsf{aILL}}$ of $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ arises if we want to interpret $\Gamma \triangleright H$ as 'The resources (ips) Γ *suffice* to obtain H', instead.[14] That is, like in the game $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ for intuitionistic logic, **P** is not required to use *every* resource provided by the server when showing how the client can obtain the desired information package. On the other hand, like in $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$, but unlike in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$, we want to remain resource-conscious in all other respects. In particular, we maintain that in 'unpacking' a selected ip, only (one of) its sub-ips are (is) retained, unless the selected ip is 'protected' by the exponential (!). In accordance with the modified interpretation, we define winning states in $\mathcal{G}_{\mathsf{aILL}}$ as in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$, rather than as in $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$: **P** wins in any state of the form $H, \Gamma \triangleright H$ or $\bot, \Gamma \triangleright H$. We also retain $\Gamma \triangleright \top$ as winning state, but the connectives 0 and 1 are dropped from the language, since our modifications render them redundant. Moreover, we modify rule $(!^{\mathcal{G}}_{\mathsf{r}})$ of $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ as follows. For selecting $!H$ on the client's side (right side of $\triangleright$) we no longer require that ips on the server's (left) side are protected by !; but we stipulate that all unprotected ips (i.e., those not preceded by !) are dropped from the server (left side of $\triangleright$) when reducing the client's desired $!H$ to H. Readers familiar with the corresponding terminology will recognize that the modified game $\mathcal{G}_{\mathsf{aILL}}$ directly corresponds to the sequent calculus aILL for *affine* linear logic.

Paoli (2002) bases his take on substructural logics on the sequent calculus LL that corresponds to linear logic without exponentials. In light of Theorem 1 of Section 4, it is quite obvious that a single-conclusion (i.e., intuitionistic) version of Paoli's LL corresponds to the game arising from $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$ by simply dropping the rules for !. Analogously, we may model (partially) contraction-free versions of intuitionistic logic by composing a game where we select rules for particular connectives from either $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ or $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$, as appropriate. Different options for dropping contraction—and thus for introducing some limited form of resource consciousness—in intuitionistic logic thus arguably receive a more tangible meaning. For example, let us consider conjunction $(A \wedge B)$, which in $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ we interpreted as $\mathsf{any\ of}(A, B)$, indicating

[14] This interpretation was already considered by Fermüller and Lang (2017).

that the client can get either A or B from this ip, if offered by the server. Clearly, it makes a difference whether the ip $\mathsf{any\,of}(A, B)$ remains available for further extraction after one of its sub-ips has been extracted, as in the rule $\left(\wedge_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$ of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$, or whether it is removed upon such an extraction, as in the rule $\left(\&_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$ for $\mathcal{G}_{\mathsf{ILL}}$. In the first case, both conjuncts can be obtained, even more than once if desired, whereas in the second case, only one of the conjuncts is available for the client in any given play. Replacing $\left(\wedge_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$ with $\left(\&_{\mathrm{l}}^{\mathcal{G}}\right)$, where & is identified with $\wedge$, but leaving the rest of the rules of $\mathcal{G}_{\mathsf{I}}$ unchanged, is indeed adequate for a version of intuitionistic logic that is contraction-free for conjunctions. Yet other versions of contraction-free intuitionistic logics can be obtained from $\mathcal{G}_{\mathsf{aILL}}$ by letting different combinations of left and right rules for $\otimes$ and & refer to a single conjunction operator. As discussed, e.g., by Troelstra (1992), not all such combinations result in contraction-free calculi where the cut rule is admissible. But in any case, we may use information extraction games to illustrate the intended meaning of these calculi in terms of resource-conscious reasoning.

An arguably more interesting variation of a substructural sequent calculus arises from the fact (pointed out, e.g., in Danos, Joinet, and Schellinx 1993) that the exponentials (! and ?) of linear logics are not uniquely determined by the corresponding logical rules. For the single-conclusion sequent setting this means that we may have different, non-equivalent variants of !, called 'subexponentials', in the calculus. For example, we may enrich ILL by replacing the rules $(\mathrm{w!})$, $(\mathrm{c!})$, $(!,\mathrm{l})$ with different copies of them that refer to corresponding variants, say $!^a$, of the original exponential !, where a is an element of some finite set of labels. Moreover, we impose some partial order $\preceq$ on the labels and introduce the following variant of the rule $(!,\mathrm{r})$:

$$\frac{!^{a_1}A_1, \ldots, !^{a_n}A_n \vdash B}{!^{a_1}A_1, \ldots, !^{a_n}A_n \vdash !^{a}B}\ (!^a,\mathrm{r}) \quad \text{provided that } a \preceq a_i \text{ for } 1 \leq i \leq n.$$

For the rich and versatile setting of subexponential calculi arising by this kind of modification, we refer to, e.g., Nigam, Olarte, and Pimentel 2017. Here, we just want to emphasize that information extraction games provide a flexible tool for capturing certain semantic intuitions that motivate those modifications. For a concrete example, we refer to Fermüller and Lang 2017, where an information extraction game is introduced for a set of subexpontials in which the corresponding labels are linearly ordered and interpreted as 'safety levels'. The underlying idea is that the access to information packages might be limited according to some hierarchical scheme. In particular, the client may extract an ip $!^aH$ from the server only if the information packages stored there are marked by labels that indicate that they can be used 'safely' with respect to level a.

Yet another, more daring variant of information extraction games has been explored, at least in a preliminary fashion, in Fermüller and Lang 2017. So far, we have confined attention to the case where the collection of ips offered by the server is represented by a multiset of ips, entailing that the order of access to these resources is unrestricted, even if the number of copies of identical ips might matter. It seems natural to ask what happens if we confine access by organizing the server's ips using a more restrictive data structure. For this reason we have introduced a stack-based game and corresponding calculus in Fermüller and Lang 2017. The calculus features the following rules for a new connective ';', where the intended reading of $(A;B)$ is 'first A, then B':

$$\frac{\Gamma, B, A \vdash C}{\Gamma, (A;B) \vdash C}\ (;,\mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash B \quad \Gamma_2 \vdash A}{\Gamma \vdash (A;B)}\ (;,\mathrm{r})$$

For the intended interpretation of these rules it is important to keep in mind that the right side of a sequent $\Gamma \vdash F$ is understood as a stack rather than as a multiset of formulas: only the top element of the stack, denoted by the right-most formula in the list Γ of formulas, can be accessed. Moreover, Γ_1, Γ_2 denotes a stack which results from putting the elements of Γ_2 on top of those of Γ_1.[15] Correspondingly, in the information extraction game, **P** can only select the right-most of the ips offered by the server, i.e., of those ips that are listed to the left of $\triangleright$. The rules for the new connective can be formulated as follows.

$(;^{\mathcal{G}}_{\mathrm{l}})$ $\Gamma, \underline{(F;G)} \triangleright H$:
The game continues in state $\Gamma, G, F \triangleright H$.

$(;^{\mathcal{G}}_{\mathrm{r}})$ $\Gamma \triangleright \underline{(F;G)}$:
P splits the stack Γ into a lower part Γ_1 and an upper part Γ_2; **O** decides whether the game continues in state $\Gamma_2 \triangleright F$ or in state $\Gamma_1 \triangleright G$.

Note that in $(;^{\mathcal{G}}_{\mathrm{l}})$, Γ, G, F denotes the stack that results from stack Γ by first pushing G and then F on its top. This means that in Γ, G, F, one can only access *first* F and *then* G, as intended. In $(;^{\mathcal{G}}_{\mathrm{r}})$, **O**'s choice between the two indicated successor states corresponds to the fact that **P** has to be prepared to establish two claims: (1) F can be obtained from some number of ips stored in Γ that have to be accessed in the intended top-first fashion and hence constitute an upper part Γ_2 of Γ; (2) G can be obtained from the rest of the stack Γ_1, i.e., from the stack resulting from Γ when the 'higher-up' elements contained in Γ_2 have been consumed and thus only the lower part of the stack remains.

---

[15] In contrast to the usual sequent calculi, the stack-based calculus does not admit a cut rule. However, in light of the intended interpretation this is neither surprising nor should it be seen as a defect. It simply corresponds to the fact that, in general, one cannot compose strategies for extracting information from *stacks* in the same direct manner as for *multisets* or (permutable) *lists*.

7 Conclusion – an extended research agenda

Resource consciousness is routinely cited as a motivation for substructural logics. However, the reference to resources is usually kept informal, like in Girard's cigarette example. Game semantics for fragments and variants of linear logics (see, e.g., Abramsky and Jagadeesan 1994; Blass 1992) redress this situation by identifying formulas with games, and connectives with operators on games. While useful in the context of providing abstract semantics for programming languages, this paradigm amounts to a rather radical departure from the oldest type of game semantics, namely Lorenzen's dialogue games. On the other hand, Lorenzen attempted to justify constructive (and classical) mathematical reasoning from first principles and did not consider resource consciousness in the sense of substructural logics. To connect Lorenzen-style games with substructural calculi, we introduced the concept of information extraction games. While motivated very differently, these latter games share important structural features with Lorenzen's game for intuitionistic logic, as pointed out in Section 5.

We have already indicated in Section 6 that information extraction games are not just a tool for characterizing provability in some specific well-known sequent calculi, but reach beyond established formats of calculi and corresponding logics. In fact, we prefer to think of information extraction games as a paradigm that opens up a varied landscape of new research questions related to, but not necessarily limited by, the field of substructural logics. Therefore we want to conclude with a list of topics for further research.

- It should be clear that multisets, permutable lists, and stacks (underlying ILL, LI, and the stack-based calculus of Section 6, respectively) constitute only three particular ways to organize access to formulas, interpreted as packages of information. The organization of the server's information could be extended to cover also (versions of) other substructural calculi, like the one of Lambek (1958). More ambitiously, one may devise a general approach to this type of interpretation that is guided by a systematic account of the many different data structures that are available for data storage and retrieval.
- We have interpreted logical connectives as operators for forming structured information packages. Certainly various further forms of packaging data are conceivable. In particular, there remains the challenge of interpreting, not just propositional connectives, but also quantifiers in this fashion.
- One of the distinguishing features of a game-based approach to logics is that it brings into focus notions that remain marginal in alternative frameworks. For example, the central notion of a play (run of a game) corresponds to a single branch in a derivation or, more generally, a branch of a proof search tree. Considering variations, restrictions, and extensions on that level may have interesting repercussions also for

sequent-based approaches to logical inference.

- So far, we have analyzed information extraction games only from the proponent's (**P**'s) perspective. The reason for this is clear: **P**'s winning strategies correspond to proofs. However, from a game-theoretic point of view, it seems natural to investigate **O**'s strategies as well. A winning strategy for **O** establishes that there is no guarantee that the agent can extract the desired information from the server, which, in logical terms, shows that a particular formula does *not* follow from given premises. Thus there is a close relation between **O**'s winning strategies and counterexamples, which might be exploited to devise new forms of semantics.
- It seems natural to consider various restrictions of strategies. The requirement that they should be computable seems obvious and thus does not amount to any real restriction in the games considered so far. However, one might want to further restrict strategies with respect to their complexity, uniformity, specific representability, etc.
- In the presented information extraction games, **P** always acts as the *scheduler*, meaning that **P** can always freely select the (compound) ip that is to be reduced in the next round. It might be interesting to consider game variants with other forms of scheduling, including random selections, assigning scheduling rights to **O**, or some mixed form of scheduling.
- As they stand, our games are perfect-information games: both players are aware of each of the other player's moves and thus always know the current state. Considering a variant where **P** or **O** may not always be fully informed about the other player's choice amounts to a game of imperfect information. In general, such games are not determined, i.e., neither **P** nor **O** may have a winning strategy. In the context of Hintikka's evaluation game for classical first-order logic, admitting imperfect information leads to so-called independence-friendly (IF) logic (see, e.g., Mann, Sandu, and Sevenster 2011). For the corresponding kind of games, one can define an *equilibrium semantics*, which refers to equilibrium values for randomized strategies, where one identifies winning with pay-off 1 and losing with pay-off 0. The concept can also be transferred to other logical games, as demonstrated by Fermüller and Majer (2015) for the case of Giles's game for Łukasiewicz logic (Giles 1974; Giles 1977). It would be interesting to see whether information extraction games with imperfect information can be treated analogously.
- Fermüller and Metcalfe (2009) describe a tight connection between a "hypersequent" calculus for Łukasiewicz logic and the above-mentioned game of Giles 1974. Another interpretation of hypersequent calculi for intermediary logics in terms of *parallel* versions of Lorenzen-style games has been presented by Fermüller 2003. Analogously, one may consider parallel runs of information extraction games.

This may lead to alternative interpretations of various known, but also new, hypersequent systems via different options for the exchange of information between parallel runs of the game.

The above list is not exhaustive, of course. In any case, it is offered here to bear witness to the fact that Lorenzen's dialogical approach to methodical reasoning continues to inspire contemporary research.

References

Abramsky, Samson, and Radha Jagadeesan. 1994. "Games and full completeness for multiplicative linear logic." *Journal of Symbolic Logic* 59 (2): 543–574.

Andreoli, Jean-Marc. 2001. "Focussing and proof construction." *Annals of Pure and Applied Logic* 107 (1–3): 131–163.

Barth, Else M., and Erik C. Krabbe. 1982. *From axiom to dialogue: A philosophical study of logics and argumentation*. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Blass, Andreas. 1992. "A game semantics for linear logic." *Annals of Pure and Applied Logic* 56 (1–3): 183–220.

Clerbout, Nicolas, and Shahid Rahman. 2015. *Linking game-theoretical approaches with constructive type theory: Dialogical strategies, CTT demonstrations and the axiom of choice*. Cham: Springer.

Danos, Vincent, Jean-Baptiste Joinet, and Harold Schellinx. 1993. "The structure of exponentials: Uncovering the dynamics of linear logic proofs." In *Computational logic and proof theory: Third Kurt Gödel Colloquium, KGC'93*, edited by Georg Gottlob, Alexander Leitsch, and Daniele Mundici, pages 159–171. Lecture notes in computer science 713. Berlin: Springer.

Felscher, Walter. 1985. "Dialogues, strategies, and intuitionistic provability." *Annals of Pure and Applied Logic* 28 (3): 217–254.

———. 1986. "Dialogues as a foundation for intuitionistic logic." In *Handbook of philosophical logic*, edited by Dov M. Gabbay and Franz Guenthner, Volume III: *Alternatives to classical logic*, pages 341–372. D. Reidel.

Fermüller, Christian G. 2003. "Parallel dialogue games and hypersequents for intermediate logics." In *International conference on automated reasoning with analytic tableaux and related methods, TABLEAUX 2003*, edited by Marta Cialdea Mayer and Fiora Pirri, pages 48–64. Springer.

Fermüller, Christian G., and Timo Lang. 2017. "Interpreting sequent calculi as client–server games." In *International conference on automated reasoning with analytic tableaux and related methods, TABLEAUX 2017*, edited by Renate A. Schmidt and Cláudia Nalon, pages 98–113. Springer.

Fermüller, Christian G., and Ondrej Majer. 2015. "Equilibrium semantics for

IF logic and many-valued connectives." In *International Tbilisi symposium on logic, language, and computation*, pages 290–312. Springer.

Fermüller, Christian G., and George Metcalfe. 2009. "Giles's Game and the proof theory of Łukasiewicz logic." *Studia Logica* 92:27–61.

Gentzen, Gerhard. 1935. "Untersuchungen über das logische Schließen" I & II. *Mathematische Zeitschrift* 39 (1): 176–210, 405–431.

Giles, Robin. 1974. "A non-classical logic for physics." *Studia Logica* 4 (33): 399–417.

———. 1977. "A non-classical logic for physics." In *Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi*, edited by Ryszard Wójcicki and Grzegorz Malinowski, pages 13–51. Polish Academy of Sciences.

Girard, Jean-Yves. 1987. "Linear logic." *Theoretical Computer Science* 50 (1): 1–101.

———. 1995. "Linear logic: Its syntax and semantics." In *Advances in linear logic*, edited by Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Laurent Regnier, pages 1–42. Cambridge University Press.

Hodges, Wilfrid. 2001. "Dialogue foundations: A sceptical look." *Aristotelian Society Supplementary Volume* 75:17–32.

Krabbe, Erik C. W. 1985. "Formal systems of dialogue rules." *Synthese* 63 (3): 295–328.

Lambek, Joachim. 1958. "The mathematics of sentence structure." *American Mathematical Monthly* 65 (3): 154–170.

Lang, Timo, Carlos Olarte, Elaine Pimentel, and Christian G. Fermüller. 2019. "A game model for proofs with costs." In *International conference on automated reasoning with analytic tableaux and related methods,* TABLEAUX *2019*, edited by Serenella Cerrito and Andrei Popescu, pages 241–258. Springer.

Lenk, Hans. 1982. "Zur Frage der apriorischen Begründbarkeit und Kennzeichnung der logischen Partikeln." In *Logik und Pragmatik: Zum Rechtfertigungsproblem logischer Sprachregeln*, edited by Carl Friedrich Gethmann, pages 11–35. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Liang, Chuck, and Dale Miller. 2009. "Focusing and polarization in linear, intuitionistic, and classical logics." *Theoretical Computer Science* 410 (46): 4747–4768.

Lorenz, Kuno. 2001. "Basic objectives of dialogue logic in historical perspective." *Synthese* 127 (1–2): 255–263.

Lorenzen, Paul. 1960. "Logik und Agon." In *Atti del* XII *congresso internazionale di filosofia*, volume 4, pages 187–194. Sansoni.

Lorenzen, Paul, and Kuno Lorenz. 1978. *Dialogische Logik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Mann, Allen L., Gabriel Sandu, and Merlijn Sevenster. 2011. *Independence-friendly logic: A game-theoretic approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nigam, Vivek, Carlos Olarte, and Elaine Pimentel. 2017. "On subexponentials, focusing and modalities in concurrent systems." *Theoretical*

Computer Science 693:35–58.
Paoli, Francesco. 2002. *Substructural logics: A primer*. Kluwer.
Peregrin, Jaroslav. 2003. *Meaning: The dynamic turn*. Elsevier.
Restall, Greg. 2002. *An introduction to substructural logics*. Routledge.
Sticht, Martin. 2018. "Multi-agent dialogues and dialogue sequents for proof search and scheduling in intuitionistic logic and the modal logic S4." *Fundamenta Informaticae* 161 (1–2): 191–218.
Troelstra, Anne S. 1992. *Lectures on linear logic*. Stanford, CA: Center for the Study of Language and Information.
Troelstra, Anne S., and Helmut Schwichtenberg. 2000. *Basic proof theory*. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press.
van Benthem, Johan. 2014. *Logic in games*. Cambridge, MA: MIT Press.

Lorenzen's Reshaping of Krull's Fundamentalsatz for Integral Domains (1938–1953)

Stefan Neuwirth

Abstract Krull's Fundamentalsatz, the generalisation of the main theorem of elementary number theory to integral domains, is the starting point of Lorenzen's career in mathematics. This article traces a conceptual history of Lorenzen's successive reformulations of the Fundamentalsatz on the basis of excerpts of his articles. An edition of the extant correspondence of Lorenzen with Hasse, Krull, and Aubert provides a better understanding of the context of these investigations.

1 Introduction

In the period considered, Paul Lorenzen is a professional mathematician whose research in abstract algebra leads to new insights on the way algebraic objects are given to us. His genuine interest in mathematical logic certainly triggers these insights; conversely, they also influence his conception of a consistency proof for elementary number theory as the construction of an embedding of a preordered set into a σ-complete pseudocomplemented semilattice (see Coquand and Neuwirth 2020).

The broader framework in which this happens is that of lattice theory getting to the core of mathematical research, after the work of the precursors Dedekind, Schröder, and Skolem. The introduction of lattice theory into ideal theory is credited to Wolfgang Krull (1926), whose assistant Lorenzen is from 1939 until his habilitation in 1946.

Herbert Mehrtens (1979, 146), in considering Steinitz' work, describes the development of modern algebra in the following terms: 1. the algebraic structure of concrete objects is unveiled; 2. it is given an abstract axiomatic

Stefan Neuwirth
Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université Bourgogne Franche-Comté, France,
e-mail: stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_9

formulation; 3. the abstract concepts are subjected to a detailed investigation of their structure. It is at this third stage that lattice theory becomes instrumental:

> After the first step, where the algebraic fundamental structures had emerged in the investigation of numbers, equations, and functions, and the second phase, where the abstract-axiomatic formulation had been achieved, now the abstract concepts became the base of a careful structural investigation.
>
> Seen in this way, the third phase in the development of abstract algebra, the "modern age", starts with Steinitz. Dedekind's work belongs to the first, concrete phase; it is part of this developmental stage by virtue of containing the germ of the further development. This is also attested by the fact that, in one detail, he himself carried out all three phases – in the investigation of the dual group [the lattice]. For abstract algebra, the third phase is marked by E. Noether, E. Artin, H. Hasse, W. Krull, and others, whose most productive time were the 20s and 30s.

This article proposes to follow Lorenzen's work in algebra by focusing on a specific theorem, Krull's Fundamentalsatz for integral domains. The theorem is introduced on the basis of excerpts of articles by Krull (1930; 1932; 1936) with a short comment. Thus the starting point of Lorenzen's research is described. Then, excerpts of each of his four articles on the subject (1939; 1950; 1952; 1953) are given and commented on, in chronological order, so as to follow his enterprise of deepening the understanding of the Fundamentalsatz. In his letter to Krull dated 6 June 1944 (page 234), Lorenzen describes his goal as follows:

> And yet the simplification and clarification of the proof methods is precisely the proper main goal of my work. I have not tried to generalise the theorems of multiplicative ideal theory at any price, even at the price of complicating – on the contrary, I rather care only to discern the basic ideas of the proof methods in their ultimate simplicity. If e.g. I replace the concept of valuation by "homomorphism of a semilattice into a linearly preordered set", then I see therein a conceptual simplification instead of a complication. For the introduction of the concept of valuation (e.g. the prima facie arbitrary triangle inequality) is justified only by the subsequent success, whereas the concept of homomorphism bears its justification in itself. I would say that the homomorphism into a linear preorder is the "pure concept" that underlies the concept of valuation. And the underlying, pure concept seems to me to be undeniably the simpler one.
>
> If I am mistaken in this point, then I urge you to tell it to me, because it has to date always been my endeavour in my whole mathematical work to bring to light these underlying, pure concepts themselves in their simple and transparent clarity.

> In this tendency toward conceptual clarification, the paper [Lorenzen 1950] also differs from my dissertation [Lorenzen 1939]. That this clarification, this understanding of the inner significance, as you call it once, is the most urgent duty has really become evident to me only in the last years.

This article allows for several different readings, according to the objectives of the readers and to their German language skills. Krull's formulation and analysis of his Fundamentalsatz and Lorenzen's reshaping of it are presented as a process that takes place in seven articles, of which the arguments relevant for our history are presented in a comprehensive way, sometimes accompanied by translations of selected paragraphs; then, excerpts of the original article, chosen so as to allow for a direct and coherent reading and comparison with my presentation, are reproduced. The correspondence of Lorenzen with Hasse, Krull, and Aubert, together with a few documents, provides an insight into their respective conceptions as well as into the human and administrative component of this history.

2 Krull 1930: a first attempt at introducing valuations for an integral domain

Krull 1930 describes the goal of a Fundamentalsatz for integral domains: it should generalise the "main theorem of elementary number theory" to the case of an integral domain $\mathfrak{O}$ with field of fractions $\mathfrak{K}$. The theorem to be generalised answers the question of when a nonzero element α of $\mathfrak{K}=\mathbb{Q}$ is divisible by another nonzero element β, i.e. of when the quotient $\alpha\cdot\beta^{-1}$ lies in $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}$. It does so in terms of the difference between the exponents with which each prime number p appears in the numerator and the denominator of α (the *value of α at p*) and of β: the value of α must be greater than or equal to the value of β at each p.

Krull proposes an abstract version of these differences of exponents by defining valuations as functions $\mathfrak{K}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ satisfying three properties 1, 2 and 3, and investigates when valuations decide divisibility.

Excerpt

Our excerpt is from pages 531–532 of "Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II", *Mathematische Zeitschrift* 31.

§ 1.

Bewertung; Begriff der Zahlentheorie.

Das Grundproblem und der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie kann folgendermaßen formuliert werden:

Frage: Wann ist das Element α aus dem Körper $\mathfrak{K}_r$ der rationalen Zahlen hinsichtlich der Ordnung $\mathfrak{O}_r$ der ganzen rationalen Zahlen durch das gleichfalls zu $\mathfrak{K}_r$ gehörige Element β teilbar, d.h. wann liegt der Quotient $\alpha \cdot \beta^{-1}$ in $\mathfrak{O}_r$?

Antwort: Man ordne jeder Primzahl p aus $\mathfrak{O}_r$ eine „Stelle" P zu und verstehe für beliebiges $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{K}_r$ unter dem Wert von α in P die Differenz der Exponenten, mit denen die zu P gehörige Primzahl p bei einer Quotientendarstellung von α durch ganze Zahlen in Zähler und Nenner aufgeht. Dann gilt der Satz: α ist dann und nur dann durch β teilbar, wenn der Wert von α in bezug auf eine beliebige Stelle niemals kleiner ist als der Wert von β in bezug auf die gleiche Stelle.

Es bedeute von jetzt ab $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Körper, unter einer *Ordnung* $\mathfrak{O}$ möge ein Unterring von $\mathfrak{K}$ verstanden werden, der das Einheitselement enthält, von $\mathfrak{K}$ selbst verschieden ist und die Eigenschaft besitzt, daß jedes Element aus $\mathfrak{K}$ als Quotient von Elementen aus $\mathfrak{O}$ geschrieben werden kann, daß also $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{O}$ darstellt. Wir nennen das Körperelement α durch das Körperelement β *hinsichtlich* $\mathfrak{O}$ *teilbar*, wenn $\alpha \cdot \beta^{-1}$ zu $\mathfrak{O}$ gehört und fragen:

Welche Eigenschaften muß $\mathfrak{O}$ besitzen, damit über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente von $\mathfrak{K}$ hinsichtlich $\mathfrak{O}$ nach dem Vorbild der elementaren Zahlentheorie durch Einführung von „Stellen" und zugehörigen „Bewertungen" entschieden werden kann?

Um die aufgeworfene Frage zu präzisieren, haben wir vor allem genau festzulegen, was unter einer Stelle mit zugehöriger Bewertung verstanden werden soll. Von einer *Bewertung von* $\mathfrak{K}$ sprechen wir, wenn jedem Körperelement $\alpha \neq 0$ eindeutig eine reelle Zahl r, der Null das Symbol $+\infty$ als *Wert* zugeordnet ist, und wenn dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. *Der Wert von $\alpha \cdot \beta$ ist gleich der Summe der Werte von α und β.* 2. *Der Wert von $\alpha + \beta$ ist nie kleiner als der kleinere der Werte von α und β.* 3. *Nicht alle Elemente haben den Wert* 0.

3 Krull 1932: the Fundamentalsatz for integral domains

Krull (1932) discovers that the concept of valuation in Krull 1930 is too narrow for deciding divisibility. He starts by redefining a valuation as a surjective function $w\colon \mathfrak{K}^* \to \Gamma$, with Γ an abelian linearly preordered group, not necessarily Archimedean, such that

$$w(a \cdot b) = w(a) + w(b), \tag{1}$$

$$w(a+b) \geq \min\bigl(w(a), w(b)\bigr). \tag{2}$$

The former concept corresponds to subgroups Γ of the additive group $\mathbb{R}$ and is from now on called "special valuation". A valuation defines the *valuation ring* $\mathfrak{B}$ formed by 0 together with the elements where it is nonnegative.

For example, if $\mathfrak{K} = \mathbb{Q}$ and p is a prime number, then the value of $a \in \mathbb{Q}^*$ at p may be defined by writing $a = p^n a'$ with $n \in \mathbb{Z}$ and p dividing neither the numerator nor the denominator of a', and by letting $\Gamma = \mathbb{Z}$ and $w(a) = n$. Then $\mathfrak{B}$ is the ring of those fractions that can be written with a denominator not divisible by p.

Krull starts by proving two characterisations of a valuation ring $\mathfrak{B}$:

1. It is a subring of the field of fractions $\mathfrak{K}$ that preorders $\mathfrak{K}$ linearly by divisibility: if $a \in \mathfrak{K}$, then $a \in \mathfrak{B}$ or $a^{-1} \in \mathfrak{B}$. It is here that he needs the freedom of constructing an arbitrary abelian linearly preordered group Γ.

2. It is a local ring (i.e. its nonunits form an ideal) such that every ring $\mathfrak{B}'$ with $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{K}$ contains the inverse of a nonunit of $\mathfrak{B}$. Note that this property gives rise to nonconstructive instantiations of such an inverse of a nonunit in arguments by contradiction.

Then he focuses on the connection with integral closedness:

> As usual, the element p is to be called *integrally dependent on the ring* $\mathfrak{R}$ if it satisfies an equation $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ with coefficients a_i in $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}$ will be termed *integrally closed* if every element in the field of fractions $\mathfrak{K}$ that is integrally dependent on $\mathfrak{R}$ already belongs to $\mathfrak{R}$.

He observes on the way that valuation rings are integrally closed. This proves one direction of the Fundamentalsatz for integral domains, viz.:

> **Theorem 7.** *A proper subring $\mathfrak{R}$ of $\mathfrak{K}$ may be represented as the intersection of (finitely or infinitely many) valuation rings if and only if it is integrally closed.*

The other direction follows from the fact that if $a \in \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{R}$ with $\mathfrak{R}$ integrally closed, then a^{-1} is a nonunit of $\mathfrak{R}[a^{-1}]$: if a does not belong to $\mathfrak{R}$, then it is not integrally dependent on $\mathfrak{R}$ either, and this may be expressed as the absence of a relation of the form $a^{-1}\bigl(a_1 + a_2 a^{-1} + \cdots + a_n (a^{-1})^{n-1}\bigr) = 1$. Then Zorn's lemma provides a maximal subring $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{K}$ containing $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ but not a; $\mathfrak{B}$ turns out to be a valuation ring by the second characterisation of a valuation ring.

Excerpt

Our excerpt is from pages 163–165 and 168–169 of "Allgemeine Bewertungstheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 167.

§ 1. Definition und Grundeigenschaften der allgemeinen Bewertungen.

$\mathfrak{K}$ bedeutet stets einen Körper, Γ eine Abelsche Gruppe mit der Addition als Verknüpfungsrelation und der 0 als Einheitselement. … Γ bzw. $\mathfrak{K}$ soll *linear geordnet* heißen, wenn zwischen den Elementen von Γ bzw. $\mathfrak{K}$ eine Ordnungsbeziehung definiert ist mit den üblichen charakteristischen Eigenschaften:

…………………………………………………………………

Von einer *Bewertung B von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe Γ* soll gesprochen werden, wenn jedem Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ eindeutig ein Element $\alpha = w(a)$ aus Γ als *Wert* zugeordnet ist, und wenn dabei folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. $w(a \cdot b) = w(a) + w(b)$. – 2. $w(a+b) \geq \min\bigl(w(a), w(b)\bigr)$. – 3. Zu jedem α aus Γ gibt es ein a aus $\mathfrak{K}$, so daß $\alpha = w(a)$.

…………………………………………………………………

Die Gesamtheit der Elemente a, die in einer festen Bewertung B von $\mathfrak{K}$ nichtnegative Werte haben, bildet zusammen mit dem Nullelement einen echten Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$, den *„zu B gehörigen Bewertungsring“*.

…………………………………………………………………

Satz 1. *Ein echter Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn $\mathfrak{B}$ den Körper $\mathfrak{K}$ zum Quotientenkörper hat und wenn in $\mathfrak{B}$ von zwei Elementen a_1 und a_2 stets (mindestens) eines durch das andre teilbar ist.*

…………………………………………………………………

§ 3. Kennzeichnung der ganz abgeschlossenen Ringe.

Das Element p soll wie üblich *vom Ringe $\mathfrak{R}$ ganz abhängig* heißen, wenn es einer Gleichung $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}$ genügt; $\mathfrak{R}$ wird *ganz abgeschlossen* genannt, wenn jedes von $\mathfrak{R}$ ganz abhängige Element aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ bereits zu $\mathfrak{R}$ selbst gehört. Bezeichnen wir für beliebiges a mit $\mathfrak{R}[a]$ stets den Ring aller Polynome in a mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, so können wir die von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente auch folgendermaßen charakterisieren:

Das Element p hängt von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann ganz ab, wenn p^{-1} in $\mathfrak{R}[p^{-1}]$ Einheit ist.

In der Tat, $p^n - a_1 p^{n-1} - \cdots - a_n = 0$ ist vollkommen gleichwertig mit $1 = p^{-1} \cdot \bigl(a_1 + a_2 p^{-1} + \cdots + a_n (p^{-1})^{n-1}\bigr)$ und das Bestehen einer Gleichung der letzteren Form mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß p^{-1} in $\mathfrak{R}[p^{-1}]$ Einheit ist. – Aus unserm Kriterium für ganz abhängige Elemente folgt sofort:

Ist a Nichteinheit in $\mathfrak{R}$, so kann a^{-1} niemals von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen.

Wäre nämlich a^{-1} von $\mathfrak{R}$ ganz abhängig, so müßte $a = (a^{-1})^{-1}$ in $\mathfrak{R}[a] = \mathfrak{R}$ gegen Voraussetzung Einheit sein.

Satz 5. *Ein echter Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn in $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der Nichteinheiten ein Ideal bildet, und wenn* *in $\mathfrak{K}$ jeder echte Oberring von $\mathfrak{B}$ mindestens ein Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält.*

Daß jeder Bewertungsring die in Satz 5 angegebenen Eigenschaften besitzt, ist klar nach § 1. – Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ irgendein Ring mit diesen Eigenschaften, so muß zunächst $\mathfrak{B}$ ganz abgeschlossen sein. Denn der Ring $\mathfrak{B}^*$ aller von $\mathfrak{B}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ muß mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, weil er sicher kein einziges Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält. Es seien ferner a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$, und es sei etwa a_2 nicht in $\mathfrak{B}$ durch a_1 teilbar, also $a_2 \cdot a_1^{-1} = p$ nicht Element von $\mathfrak{B}$. Bilden wir dann $\mathfrak{B}[p]$, so muß in $\mathfrak{B}[p]$ das Reziproke a^{-1} einer gewissen Nichteinheit a aus $\mathfrak{B}$ auftreten, es muß also eine Gleichung $a^{-1} = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{B}$ gelten. Diese Gleichung kann aber in die Form $(a_0 \cdot a - 1) \cdot (p^{-1})^n + a_1 \cdot a \cdot (p^{-1})^{n-1} + \cdots + a_n \cdot a = 0$ gebracht werden, und hier muß wegen der besonderen Eigenschaften von $\mathfrak{B}$ der Koeffizient $a_0 \cdot a - 1$ als Differenz einer Nichteinheit und einer Einheit selbst Einheit sein. Es ist also p^{-1} von $\mathfrak{B}$ ganz abhängig und somit nach dem bereits Bewiesenen Element von $\mathfrak{B}$. – Wir haben jetzt gezeigt: Sind a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$, so ist in $\mathfrak{B}$ entweder a_1 durch a_2 oder a_2 durch a_1 teilbar. Nach Satz 1 muß $\mathfrak{B}$ daher Bewertungsring sein. – Mit Hilfe von Satz 5 beweisen wir weiter:

Satz 6. *Zu jedem echten Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ gibt es (mindestens) einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}$ enthält.*

Es sei a eine beliebige Nichteinheit aus $\mathfrak{R}$. Dann existiert, wie aus trivialen Wohlordnungsschlüssen zu ersehen, in $\mathfrak{K}$ mindestens ein Ring $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}$, aber nicht a^{-1} enthält, und der außerdem die Eigenschaft hat, daß a^{-1} in jedem echten Oberring von $\mathfrak{B}$ vorkommt. $\mathfrak{B}$ wird nach Satz 5 Bewertungsring sein, wenn die Gesamtheit der Nichteinheiten in $\mathfrak{B}$ ein Ideal bildet. Es sei nun $\mathfrak{p}$ irgendein Primidealteiler von a in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ bedeute den Ring aller der Elemente, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ mit durch $\mathfrak{p}$ unteilbarem Nenner schreiben lassen. Dann enthält $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ das Element a^{-1} nicht, und es muß daher $\mathfrak{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{B}$ sein. Das ist aber nur möglich, wenn $\mathfrak{p}$ gerade aus *allen* Nichteinheiten von $\mathfrak{B}$ besteht.

Satz 7. *Ein echter Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ läßt sich dann und nur dann als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Bewertungsringen darstellen, wenn er ganz abgeschlossen ist.*

Daß alle Bewertungsringe und damit auch alle Durchschnitte von Bewertungsringen ganz abgeschlossen sind, wurde beim Beweise von Satz 5 mitbewiesen. Es sei jetzt umgekehrt $\mathfrak{R}$ irgendein ganz abgeschlossener Ring, a ein nicht in $\mathfrak{R}$ vorkommendes Element aus $\mathfrak{K}$. Dann haben wir nur zu zeigen, daß mindestens ein Bewertungsring $\mathfrak{B}$ existiert, der zwar $\mathfrak{R}$, aber nicht a enthält. Wir bilden $\mathfrak{R}[a^{-1}]$; in diesem Ringe kann a nicht vorkommen, denn andernfalls wäre a^{-1} in $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ Einheit, und es müßte daher a von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen und damit gegen Voraussetzung in $\mathfrak{R}$

enthalten sein. Da also a^{-1} in $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ Nichteinheit ist, gibt es nach dem Beweise von Satz 6 einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der Obermenge von $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ also erst recht auch von $\mathfrak{R}$ ist, in dem aber a nicht vorkommt. Damit ist schon alles bewiesen. – Um die Bedeutung von Satz 7 noch klarer hervortreten zu lassen, führen wir den Begriff der *Hauptordnung* ein. Der Ring $\mathfrak{R}$ soll Hauptordnung heißen, wenn in $\mathfrak{R}$ über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente durch Einführung von Bewertungen entschieden werden kann, d.h. wenn sich (endlich oder unendlich viele) Bewertungen $\mathfrak{B}_\tau$ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ so definieren lassen, daß der folgende Satz gilt: In $\mathfrak{R}$ ist das Element a dann und nur dann durch das Element b teilbar, wenn a in keiner der Bewertungen $\mathfrak{B}_\tau$ einen kleineren Wert besitzt als b.

Man sieht ohne Schwierigkeit, daß der Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann Hauptordnung ist, wenn er als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ dargestellt werden kann. Aus Satz 7 ergibt sich daher:

Satz 7*. *Ein echter Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Hauptordnung, wenn er ganz abgeschlossen ist.*

Wie man in plausibler und naheliegender Weise zu dem Begriff der Hauptordnung gelangt, habe ich bereits früher ausführlich auseinandergesetzt. Doch konnte ich dort die Hauptordnungen nicht so einfach und befriedigend charakterisieren, wie es hier durch Satz 7* geschehen ist. Der Grund für diesen Mangel meiner früheren Arbeit lag einfach darin, daß ich damals nur Bewertungen mit archimedischer Wertgruppe in den Kreis der Betrachtung zog. Satz 7* zeigt also, daß die Einführung der allgemeinen Bewertungen nicht nur naheliegend, sondern auch für die naturgemäße Behandlung mancher arithmetischer Probleme schlechtweg notwendig ist.

4 Krull 1936a: the computational content of the Fundamentalsatz

In the introduction to his 1936, Krull explains that the Fundamentalsatz is the basis for a proof method: if a theorem is to be proved for an integrally closed integral domain, then it mostly suffices to prove it in a valuation ring, in which the property of linearity grants very simple computational arguments.

He also explains the defect of the Fundamentalsatz: its proof does not construct the valuation rings, and the example of polynomial rings shows that this goal is out of reach.

A. The valuation rings are characterised by the fact that in them, of two arbitrary elements, one is always divisible by the other. –

> **B. Every integrally closed integral domain $\mathfrak{J}$ may be represented as an intersection of valuation rings.**
>
> A. and B. form the basis of an important proof method: if a theorem on $\mathfrak{J}$ is to be derived which one knows to hold for the intersection of arbitrarily many rings provided that it holds for each individual component ring, then, according to B., the theorem concerned needs to be proved only for valuation rings, and in this latter case, on account of A., usually a quite elementary computation leads to the goal.
>
> On the other hand, B. serves as a connecting link for novel questions, whose fruitfulness is to be substantiated in this contribution. B. is a pure existence theorem. For the "proof method", this does not constitute a drawback; nevertheless it seems theoretically desirable to go beyond the bare standpoint of existence. This goal would be reached if one were in a position to represent in some constructive manner, for an arbitrary given $\mathfrak{J}$, the set of all those valuation rings out of the field of fractions $\mathfrak{K}$ that contain the integral domain $\mathfrak{J}$. Yet even the consideration of quite elementary special cases, e. g. of polynomial rings, indicates that one is there confronted with an, at least so far, unsolvable task. – On the other hand, it becomes apparent that, surprisingly, already the attempt to turn the given task into the ideal-theoretic leads to very curious connexions with certain penetrating investigations by H. Prüfer that refer chiefly to Kronecker.

Excerpt

Here is the source of our translation, from page 546 of "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I: Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme und Kroneckersche Funktionalringe", *Mathematische Zeitschrift* 41.

> A. Die Bewertungsringe sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen von zwei beliebigen Elementen stets eines durch das andere teilbar ist. – B. Jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ läßt sich als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellen.
>
> A. und B. bilden die Grundlage für eine wichtige Beweismethode: Soll ein Satz über $\mathfrak{J}$ abgeleitet werden, von dem man weiß, daß er für den Durchschnitt beliebig vieler Ringe richtig ist, sobald er nur für jeden einzelnen Komponentenring gilt, so braucht der betreffende Satz nach B. nur für Bewertungsringe bewiesen zu werden, und in diesem letzteren Fall führt wegen A. meistens eine ganz einfache Rechnung zum Ziel.
>
> Andererseits dient B. als Anknüpfungspunkt für neuartige Fragestellungen, deren Fruchtbarkeit in diesem Beitrag nachgewiesen werden soll.

> B. ist ein reines Existenztheorem. Für die „Beweismethode“ bedeutet das keinen Nachteil; trotzdem scheint es theoretisch wünschenswert, über den bloßen Existenzstandpunkt hinauszukommen. Dieses Ziel wäre erreicht, wenn man imstande wäre, bei beliebig gegebenem $\mathfrak{J}$ die Menge aller der Bewertungsringe aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, die den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ umfassen, irgendwie konstruktiv darzustellen. Doch lehrt schon die Betrachtung ganz einfacher Spezialfälle, z. B. der Polynomringe, daß man da vor einer wenigstens vorläufig unlösbaren Aufgabe steht. – Dagegen zeigt es sich überraschenderweise, daß bereits der Versuch, die gestellte Aufgabe ins Idealtheoretische zu wenden, zu sehr merkwürdigen Zusammenhängen mit gewissen tiefeindringenden, vorwiegend an Kronecker anknüpfenden Untersuchungen von H. Prüfer führt.

5 Lorenzen 1939: the Fundamentalsatz for preordered cancellative monoids

Lorenzen 1939 is an “abstract foundation of multiplicative ideal theory” on the theory of preordered cancellative monoids. Lorenzen’s letter to Krull dated 22 March 1938 (page 191) provides a dictionary that translates the concepts of ring theory into a framework that takes into account only the multiplicative structure of an integral domain $\mathfrak{J}$: its nonzero elements form a cancellative monoid $\mathfrak{g}$, and the nonzero elements of its field of fractions form what is today called the Grothendieck group $\mathfrak{G}$ of $\mathfrak{g}$. Divisibility is the equivariant preorder $\preccurlyeq$ on $\mathfrak{G}$ whose positive cone is $\mathfrak{g}$: $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow \mathfrak{g} \ni b \cdot a^{-1}$.

Lorenzen’s analysis of Krull’s valuation theory proceeds in three steps: elaborating a theory of ideals that fits preordered monoids (Subsection 5.1), making a valuation-theoretic analysis of lattice-preordered groups (Subsection 5.2), and establishing a transfer of valuations between a preordered monoid and the positive cone of the Grothendieck lattice-preordered group of its system of ideals (Subsection 5.3).

5.1 Systems of ideals

Prüfer (1932) proposes to define a system of r-ideals as an operation $\{a_1, \ldots, a_n\} \mapsto \{a_1, \ldots, a_n\}_r$ on finite subsets of the field of fractions of an integral domain. Lorenzen adapts this definition into an operation on finite or infinite bounded-from-below subsets $\mathfrak{a}$ of the group $\mathfrak{G}$ (i. e. subsets such that there is a $c \in \mathfrak{G}$ with $\mathfrak{g} \supseteq c\mathfrak{a}$; Lorenzen’s notation for this is $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$), taking values in subsets of $\mathfrak{G}$, and satisfying four conditions: 1. $\mathfrak{a}_r \supseteq \mathfrak{a}$; 2. $\mathfrak{b}_r \supseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b}_r \supseteq \mathfrak{a}_r$; 3. $\{a\}_r = a \cdot \mathfrak{g}$; 4. $a \cdot \mathfrak{a}_r = (a \cdot \mathfrak{a})_r$.

For example, the system of t-ideals, used in Subsection 5.2, is defined by

$$\mathfrak{a}_t = \left\{ b \in \mathfrak{G} \;\middle|\; \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a} \;\; \forall a \in \mathfrak{G} \;\; a \preccurlyeq a_1, \ldots, a \preccurlyeq a_n \Rightarrow a \preccurlyeq b \right\}$$

for finite or infinite bounded-from-below sets $\mathfrak{a}$ as the set of those elements b that are greater than or equal to every lower bound a of some finite subset $\{a_1, \ldots, a_n\}$ of $\mathfrak{a}$.

A system of ideals has the structure of a meet-semilattice-preordered monoid (a *meet-monoid* for short) for the multiplication $\mathfrak{a}_r \cdot \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})_r$ and the meet operation $\mathfrak{a}_r \wedge \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$. Item 3 above means that the group $\mathfrak{G}$ may be embedded into this meet-monoid by identifying a with $a \cdot \mathfrak{g}$.

The system of Dedekind ideals corresponds to the operation that associates to $\mathfrak{a}$ the set $\mathfrak{a}_d$ of nonzero elements of the module generated by $\mathfrak{a}$ in the integral domain $\mathfrak{I}$ hidden behind $\mathfrak{g}$. The definition of this operation therefore takes into account the additive structure of $\mathfrak{I}$, but once the definition is done, it will be forgotten. Let us show how this works for the three following concepts: 1. valuation ring, 2. integral closedness, 3. integral dependence.

1. Lorenzen separately analyses Equality (1) and Inequality (2) of the definition of a valuation given on page 145.

• He says that a supermonoid $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{g}$) is *linear* if for $a \in \mathfrak{G}$ either $a \in \mathfrak{B}$ or $a^{-1} \in \mathfrak{B}$, i.e. if the preorder on $\mathfrak{G}$ having $\mathfrak{B}$ as its positive cone is linear.

• Inequality (2) expresses that a valuation ring is closed under addition. He observes that this is equivalent to $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow \mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\}_d$.

2. Prüfer (1932) shows that an integral domain is integrally closed if

$$\{a_1, \ldots, a_n\}_d \supseteq a \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}_d \quad \text{implies} \quad \mathfrak{g} \supseteq a \cdot \mathfrak{g},$$

i.e. $1 \preccurlyeq a$. This means that $\{a_1, \ldots, a_n\}_d$ can be cancelled in the containment $\{a_1, \ldots, a_n\}_d \supseteq a \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}_d$.

3. He further shows that an element a is integrally dependent on $\{a_1, \ldots, a_n\}_d$ if and only if there is $\{c_1, \ldots, c_p\}$ such that $\{a_1, \ldots, a_n\}_d \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_d \supseteq a \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_d$.

On the basis of these observations, Lorenzen proposes the following definitions in the multiplicative setting of a system of r-ideals for the cancellative monoid $\mathfrak{g}$:

1. The multiplicative counterpart of a valuation ring is a linear *r-supermonoid of* $\mathfrak{g}$, i.e. a linear supermonoid $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow \mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\}_r$.
2. The monoid $\mathfrak{g}$ is *r-closed* if $\{a_1, \ldots, a_n\}_r \supseteq a \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}_r \Rightarrow 1 \preccurlyeq a$.
3. The r_a-operation is given by setting $\{a_1, \ldots, a_n\}_{r_a}$ equal to

$$\left\{ a \in \mathfrak{G} \;\middle|\; \exists \{c_1, \ldots, c_p\} \;\; \{a_1, \ldots, a_n\}_r \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_r \supseteq a \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_r \right\},$$

i.e. to the set of elements that are *r-dependent* on $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Note that the r_a-operation satisfies Item 3 of the definition of a system of ideals if and only if $\mathfrak{g}$ is r-closed.

Lorenzen observes that the arguments of Prüfer (1932, 18) show that the cancellativity of the meet-monoid of r-ideals may be forced by passing to the meet-monoid of r_a-ideals. One may then construct the Grothendieck lattice-preordered group $\mathfrak{h}^*$ of this system of r_a-ideals (see, for this construction, Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019, § 3A). Its positive cone $\mathfrak{h}$ is formed by the fractions $\frac{\{a_1,\ldots,a_n\}_{r_a}}{\{b_1,\ldots,b_m\}_{r_a}}$ such that $\{b_1,\ldots,b_m\}_{r_a} \supseteq \{a_1,\ldots,a_n\}_{r_a}$. The group $\mathfrak{G}$ may be embedded into $\mathfrak{h}^*$ by identifying a with $\frac{a\cdot\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}$.

5.2 Ideals in a lattice-preordered group

For developing a "valuation theory" of $\mathfrak{g}$ when $\mathfrak{G}$ is a lattice-preordered group (an *ℓ-group* for short), Lorenzen uses the t-ideals, whose definition, thanks to the existence of finite meets, simplifies to

$$\mathfrak{a}_t \;=\; \Big\{\, b \in \mathfrak{G} \;\Big|\; a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \preccurlyeq b \text{ for some } a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a} \,\Big\}.$$

Clifford (1940, 470) emphasises their similarity with the semilattice-theoretic ideals. A finite t-ideal $\{a_1,\ldots,a_n\}_t$ is the set $(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)\mathfrak{g}$ and may thus be thought of as $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, and the set-theoretic clothing is needed only for an infinite t-ideal, which is a colimit of finite ones, in particular for a *prime* t-ideal, i.e. a t-ideal $\mathfrak{p}$ such that $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ or $b \in \mathfrak{p}$.

Lorenzen shows that the linear t-supermonoids of $\mathfrak{g}$ are the localisations $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$, i.e. the monoids of fractions $\frac{a}{b}$ with $a \in \mathfrak{g}$ and $b \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{p}$, where $\mathfrak{p}$ is a prime t-ideal. In fact, the nonunits of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ have the form $\frac{p}{s}$ with $p \in \mathfrak{p}$ and $s \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{p}$; if $\frac{p'}{s'}$ is another nonunit, then the meet $\frac{p}{s} \wedge \frac{p'}{s'} = \frac{s'p \wedge sp'}{ss'}$ is again a nonunit because $ss' \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{p}$ by primeness, $s'p, sp' \in \mathfrak{p}$ by Items 2 and 3 of the definition of a system of ideals, and $s'p \wedge sp' \in \mathfrak{p}$ by t-idealness. But this shows that $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ is linear, as every $a \in \mathfrak{G}$ satisfies $a = \frac{a_+}{a_-}$ with $a_-, a_+ \in \mathfrak{g}$ and $a_- \wedge a_+ = 1$, so that either a_- or a_+ is a unit of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ and either a or $a^{-1} = \frac{a_-}{a_+}$ is in $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

The Fundamentalsatz follows easily in this case, in the following two shapes.

Theorem 11. *Let N be a set of prime t-ideals of $\mathfrak{g}$ such that every nonunit of $\mathfrak{g}$ lies in at least one $\mathfrak{p} \in N$, then $\mathfrak{g}$ is the intersection of the linear supermonoids $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$* $(\mathfrak{p} \in N)$

$$\mathfrak{g} = \bigcap_N \mathfrak{g}_\mathfrak{p}.$$

For if $a \in \mathfrak{G}\backslash\mathfrak{g}$, then a_- is a nonunit of $\mathfrak{g}$, so that it lies in some $\mathfrak{p} \in N$ and is a nonunit of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$; therefore $a = \frac{a_+}{a_-} \notin \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Theorem 12. *If N contains all maximal prime t-ideals, then, for all t-ideals $\mathfrak{a}$ of $\mathfrak{g}$, the intersection representation $\mathfrak{a} = \bigcap_N \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ holds.*

For if $a \notin \mathfrak{a}$, then $\mathfrak{g}$ contains properly the t-ideal $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}$. Zorn's lemma provides a maximal prime t-ideal $\mathfrak{p}$ that contains it, so that its elements are nonunits of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$. Therefore $a^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p} \not\ni 1$ and $\mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p} \not\ni a$.

Krull's well-ordering argument is confined to the proof of this last theorem.

5.3 Transfer to the system of t-ideals

To consider a linear r-supermonoid $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{g}$) is to consider a linear t-supermonoid $\mathfrak{L}$ of the positive cone $\mathfrak{h}$ of the Grothendieck lattice-preordered group $\mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}^* \supseteq \mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{h}$).

1. If $\mathfrak{L}$ is given, then $\mathfrak{B} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{G}$ (using the identification of a with $\frac{a \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}$) is a linear supermonoid of $\mathfrak{g}$. Furthermore, if $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}$, then $\mathfrak{L} \supseteq \{\frac{a_1 \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}, \dots, \frac{a_n \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\}$, so that, by hypothesis, $\mathfrak{L} \supseteq (\frac{a_1 \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}} \wedge \dots \wedge \frac{a_n \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}})\mathfrak{h} = \frac{\{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}}{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_r$. At this point of his argument, Lorenzen compares it to Krull 1936, Satz 15.

2. Conversely, if $\mathfrak{B}$ is given, then $\mathfrak{B}$ is even an r_a-supermonoid: if $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ and $\{a_1, \dots, a_n\}_{r_a} \ni a$, consider $\{c_1, \dots, c_p\}$ such that $\{a_1, \dots, a_n\}_r \cdot \{c_1, \dots, c_p\}_r \supseteq a \cdot \{c_1, \dots, c_p\}_r$; one may suppose that c_1 is minimal w.r.t. the linear monoid $\mathfrak{B}$ among $c_1, \dots, c_p$, i.e. $\mathfrak{B} \supseteq \{1, \dots, c_1^{-1}c_p\}$, so that $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\} \cdot \{1, \dots, c_1^{-1}c_p\}$; by hypothesis, $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_r \cdot \{1, \dots, c_1^{-1}c_p\}_r \ni a$, and we conclude that $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}$. For every finite subset $\{a_1, \dots, a_n\}$ of $\mathfrak{G}$, one may suppose that a_1 is minimal w.r.t. $\mathfrak{B}$ among $a_1, \dots, a_n$, i.e. $\mathfrak{B} \supseteq \{1, \dots, a_1^{-1}a_n\}$, and then $\mathfrak{B} \supseteq \{1, \dots, a_1^{-1}a_n\}_{r_a}$ and $a_1\mathfrak{B} = \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}\mathfrak{B}$. Consider

$$\mathfrak{L} = \left\{ \frac{\{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}}{\{b_1, \dots, b_m\}_{r_a}} \;\middle|\; \{b_1, \dots, b_m\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}\mathfrak{B} \right\}:$$

as for all $a, b \in \mathfrak{G}$ either $b\mathfrak{B} \supseteq a\mathfrak{B}$ or vice versa, $\mathfrak{L}$ is a linear supermonoid of $\mathfrak{h}$; it is a linear t-supermonoid of $\mathfrak{h}$ because the meet of two elements of $\mathfrak{L}$ is in $\mathfrak{L}$: if $\{b_1, \dots, b_m\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}\mathfrak{B}$ and $\{d_1, \dots, d_q\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{c_1, \dots, c_p\}_{r_a}\mathfrak{B}$, then $\{b_1d_1, \dots, b_md_q\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{a_1d_1, \dots, a_nd_q, b_1c_1, \dots, b_mc_p\}_{r_a}\mathfrak{B}$. Finally, note that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{B}$.

This transfer proves at once

Theorem 14. *Every r-closed monoid is an intersection of linear r-supermonoids.*

Excerpt

Our excerpt is from pages 535–537, 540, and 544–546 of "Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie", *Mathematische Zeitschrift* 45.

Note that in this article and in his 1938 letters to Krull, Lorenzen consistently makes a choice opposite to the now standard one: he considers $\mathfrak{g}$ as the cone of nonpositive elements of $\mathfrak{G}$, so that his preorder $\preccurlyeq$ satisfies $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in \mathfrak{g}$. Consistently, he writes $a \vee b$ and $\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r$ where we write $a \wedge b$ and $\mathfrak{a}_r \wedge \mathfrak{b}_r$, respectively. He probably does so to match the preorder relation $\subseteq$ between subsets of $\mathfrak{G}$.

§ 1.

Idealsysteme.

Wir wollen eine Menge $\mathfrak{g}$, für deren Elemente $a, b, c, \ldots$ eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, eine *Halbgruppe* nennen, wenn

1. aus $ac = bc$ stets $a = b$ folgt,
2. $\mathfrak{g}$ ein Einselement 1 enthält.

Zu jeder Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gibt es eindeutig die Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus den Quotienten $\frac{a}{b}$ besteht. $\mathfrak{G}$ heißt die Quotientengruppe von $\mathfrak{g}$. So ist z. B. die Menge der von Null verschiedenen Elemente eines Integritätsbereiches eine Halbgruppe, und die von Null verschiedenen Elemente des Quotientenkörpers bilden die Quotientengruppe.

Viele Definitionen der Teilbarkeitstheorie in Integritätsbereichen lassen sich unmittelbar auf Halbgruppen übertragen. Von den Elementen von $\mathfrak{G}$ nennen wir die Elemente von $\mathfrak{g}$ die ganzen Elemente, b heißt ein Teiler von a, und a heißt Vielfaches von b, wenn $\frac{a}{b}$ ganz ist. Das Hauptideal (a) besteht aus allen Vielfachen von a. Ist eine Verwechslung ausgeschlossen, dann wird das Hauptideal (a) einfach mit a bezeichnet. Ein ganzes Element a heißt Einheit, wenn a^{-1} ganz ist.

Die Dedekindsche Definition der Ideale in Integritätsbereichen läßt sich natürlich nicht übertragen, da in Halbgruppen ja keine Addition erklärt zu sein braucht. Dagegen ist der Begriff der Idealsysteme, wie er von Prüfer und Krull aufgestellt worden ist, fast unmittelbar auch in Halbgruppen anzuwenden. Zur Formulierung der Definition wollen wir, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Untermengen von $\mathfrak{G}$ sind, unter $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Menge der Elemente ab mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ und unter $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ die Menge der Elemente c mit $c\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ verstehen. Statt $(1) : \mathfrak{a}$ schreiben wir $\mathfrak{a}^{-1}$.

Definition 1. Es seien zu jeder endlichen oder zu jeder beliebigen Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$, für die $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ ist, eine Untermenge $\mathfrak{a}_r$ von $\mathfrak{G}$ so definiert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_r$,
2. aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}_r$ folgt $\mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{b}_r$,
3. für ein Element a ist $a_r = (a)$,

4. $a\mathfrak{a}_r = (a\mathfrak{a})_r$.

$\mathfrak{a}_r$ heißt dann das *aus* $\mathfrak{a}$ *erzeugte r-Ideal*. Ist $\mathfrak{a}$ endlich, so heißt $\mathfrak{a}_r$ ein endliches r-Ideal. Die Menge aller r-Ideale nennen wir das *r-Idealsystem*. Ist sogar für jede Untermenge $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ ein r-Ideal definiert, so nennen wir die Menge aller r-Ideale das *totale r-Idealsystem*.

Die Summe zweier Ideale wird durch $\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$, das Produkt durch $\mathfrak{a}_r \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_r$ definiert. Diese Definitionen sind unabhängig von der Erzeugung der Ideale. Wegen 4. gilt das Distributivgesetz:

$$(\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r)\mathfrak{c}_r = \mathfrak{a}_r \mathfrak{c}_r + \mathfrak{b}_r \mathfrak{c}_r.$$

. . . .

Für beliebige Halbgruppen konstruieren wir jetzt zwei wichtige Idealsysteme. Wir setzen:

$$\mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (a), \qquad \mathfrak{a}_v = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq (a)} (a).$$

. . . .

Definition 2. Eine Halbgruppe heißt *r-abgeschlossen*, wenn $\mathfrak{c}_r : \mathfrak{c}_r = 1$ für jedes endliche r-Ideal $\mathfrak{c}_r$ gilt.

. . . .

Die Bedeutung der r-Abgeschlossenheit liegt darin, daß in jeder r-abgeschlossenen Halbgruppe die folgende Konstruktion eines neuen Idealsystems möglich ist . . . :

Definition 3. Ist $\mathfrak{a}$ eine endliche Untermenge von $\mathfrak{G}$, und ist $\mathfrak{g}$ r-abgeschlossen, so soll $\mathfrak{a}_{r_a}$ aus den Elementen a bestehen, für die es ein endliches r-Ideal $\mathfrak{c}_r$ gibt mit $a\mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{a}_r \mathfrak{c}_r$.

Die Mengen $\mathfrak{a}_{r_a}$ bilden dann ein Idealsystem, das System der r_a-Ideale. Die r_a-Ideale haben nun die Eigenschaft, eine *Halbgruppe* zu bilden, d.h. für beliebige endliche r_a-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. . . .

. . . .

§ 2.

Totale Idealsysteme, Endlichartigkeit.

. . . Wir bezeichnen dazu mit $\mathfrak{e}$ stets Mengen aus endlich vielen Elementen von $\mathfrak{G}$. Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$, so setzen wir

$$\mathfrak{a}_{r_s} = \bigcup_{\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{e}_r, \qquad \mathfrak{a}_{r_v} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{e}_r} \mathfrak{e}_r.$$

. . . .

Wir nennen das v_s-System kürzer das t-System.

. . . .

§ 3.

Vollständige Halbgruppen.

Im § 4 werden wir zeigen, wie der Idealbegriff dazu dienen kann, viele Fragen über Halbgruppen auf die Untersuchung der folgenden sehr speziellen Klasse von Halbgruppen zurückzuführen:

Definition 5. Eine Halbgruppe heißt *vollständig*, wenn je zwei Elemente a, b einen größten gemeinsamen Teiler $a\vee b$ besitzen.

. . . .

Außerdem müssen wir noch den Begriff der Quotientenringe eines Integritätsbereiches auf Halbgruppen übertragen. Sei dazu $\mathfrak{g}$ eine beliebige Halbgruppe, S eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, dann soll $\mathfrak{g}_S$ die Halbgruppe aller Quotienten $\frac{a}{b}$ $(a\in\mathfrak{g},\ b\in S)$ sein. $\mathfrak{g}_S$ heißt eine *Quotientenhalbgruppe* von $\mathfrak{g}$ (vgl. Grell [1]).

Die Nichteinheiten von $\mathfrak{g}_S$, die gleichzeitig in $\mathfrak{g}$ liegen, bilden ein s-Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$. Bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ die Quotientenhalbgruppe der Elemente $\frac{a}{b}$ $(a\in\mathfrak{g},\ b\in\mathfrak{g},\ b\notin\mathfrak{p})$ so wird $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}=\mathfrak{g}_S$. Die Quotientenhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den *s-Primidealen* von $\mathfrak{g}$.

Ist nun $\mathfrak{g}$ vollständig, so auch jede Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_S$, denn sind s, s' Elemente von S, so liegt mit $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$ auch

$$\frac{a}{s}\vee\frac{a'}{s'} = \frac{s'a\vee sa'}{ss'}$$

in $\mathfrak{g}_S$ und liefert gleichzeitig den größten gemeinsamen Teiler von $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$ bezüglich der Teilbarkeit in $\mathfrak{g}_S$.

Umgekehrt ist aber auch jede Oberhalbgruppe $\overline{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}$ (natürlich $\mathfrak{g}\subseteq\overline{\mathfrak{g}}\subseteq\mathfrak{G}$), die mit zwei Elementen a, b auch $a\vee b$ enthält, eine Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, denn für jedes Element a von $\mathfrak{G}$ gilt $a=\frac{a(1\vee a)^{-1}}{(1\vee a)^{-1}}$, wobei $a(1\vee a)^{-1}$ und $(1\vee a)^{-1}$ Elemente von $\mathfrak{g}$ sind. Ist $a\in\overline{\mathfrak{g}}$, so folgt $1\vee a\in\overline{\mathfrak{g}}$ und damit $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}_S$, wenn S aus den Einheiten von $\overline{\mathfrak{g}}$ besteht, die in $\mathfrak{g}$ liegen.

Die wichtigsten Quotientenhalbgruppen sind die Quotientenhalbgruppen $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$, bei denen $\mathfrak{p}$ ein t-Primideal von $\mathfrak{g}$ ist, denn es gilt:

Satz 10. *Jede Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ nach einem t-Primideal $\mathfrak{p}$ ist linear.*

Jede Nichteinheit von $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ läßt sich nämlich als Quotient $\frac{p}{s}$ $(p\in\mathfrak{p},\ s\notin\mathfrak{p})$ darstellen, und sind $\frac{p}{s}$, $\frac{p'}{s'}$ zwei Nichteinheiten, so ist auch

$$\frac{p}{s}\vee\frac{p'}{s'} = \frac{s'p\vee sp'}{ss'}$$

Nichteinheit, da $s'p\vee sp'\in\mathfrak{p}$. Für jedes $a\in\mathfrak{G}$ folgt also aus

$$\frac{1}{1\vee a} \vee \frac{1}{1\vee a^{-1}} = 1,$$

daß $\frac{1}{1\vee a}$ oder $\frac{1}{1\vee a^{-1}}$ Einheit von $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ ist, d.h. $a \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Satz 11. *Es sei N eine Menge von t-Primidealen von $\mathfrak{g}$ derart, daß jede Nichteinheit von $\mathfrak{g}$ in mindestens einem $\mathfrak{p} \in N$ liegt, dann ist $\mathfrak{g}$ Durchschnitt der linearen Oberhalbgruppen $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \in N$)*

$$\mathfrak{g} = \bigcap_N \mathfrak{g}_\mathfrak{p}.$$

Denn ist $a \notin \mathfrak{g}$, so ist $(1\vee a)^{-1}$ Nichteinheit von $\mathfrak{g}$. Also gibt es ein $\mathfrak{p} \in N$ mit $(1\vee a)^{-1} \in \mathfrak{p}$, und hieraus folgt $a \notin \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Satz 12. *Enthält N alle maximalen t-Primideale, so gilt für alle t-Ideale $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ die Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{a} = \bigcap_N \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.*

Denn ist $a \notin \mathfrak{a}$, so ist $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$. Es gibt also ein $\mathfrak{p} \in N$ mit $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{p}$, woraus wieder $a \notin \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ folgt.

Diese Sätze gestatten zunächst für vollständige Halbgruppen Fragen über die linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ in rein idealtheoretische Fragen zu verwandeln. Diese Reduktion auch für allgemeinere Halbgruppen durchzuführen, ist das Ziel von § 4.

§ 4.

Idealbrüche.

Die Konstruktion der vollständigen Halbgruppe, auf die die Strukturuntersuchung allgemeinerer Halbgruppen zurückgeführt werden soll, ist z.B. für total abgeschlossene Halbgruppen $\mathfrak{g}$ leicht geschehen, denn dann bilden ja die sämtlichen ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$ ihrerseits eine vollständige Halbgruppe. Ebenso, wenn $\mathfrak{g}$ eine Multiplikationshalbgruppe bezüglich irgendeines Idealsystems ist, d.h. also wenn jedes endliche Ideal umkehrbar ist, so bilden die ganzen Ideale der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ endliche Ideale sind, eine vollständige Halbgruppe. Gehört nämlich noch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ dazu, so auch der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$; denn dieser ist:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})^{-1}.$$

Aber wir brauchen von unserer Halbgruppe, in der etwa das System der r-Ideale gegeben sei, nur vorauszusetzen, daß sie r-abgeschlossen ist, um auf eine vollständige Halbgruppe zu kommen. Denn ist $\mathfrak{g}$ r-abgeschlossen, so bilden die endlichen r_a-Ideale eine Halbgruppe; wir können also deren Quotientengruppe bilden. Diese besteht aus den „*Idealbrüchen*" $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ endliche r_a-Ideale sind. Wir definieren dann für zwei Idealbrüche $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Es wird dadurch die Relation $\subseteq$ fortgesetzt in die Quotientengruppe.

Betrachten wir nun alle Idealbrüche $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq 1$. Diese bilden eine Halbgruppe $\mathfrak{h}$, und zwar eine vollständige Halbgruppe. Der größte gemeinsame Teiler von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ und $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$ ist natürlich durch $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ gegeben. Ist $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq 1$, so nennen wir $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ einen *„ganzen Idealbruch"*. Die vollständige Halbgruppe der ganzen Idealbrüche ersetzt uns den Kroneckerschen Funktionalring, wie er in Prüfer [1] konstruiert worden ist. Das wichtige Ergebnis, das Krull [5] über den Funktionalring beweist, läßt sich auf $\mathfrak{h}$ übertragen. Es handelt sich dabei um die linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ einerseits, $\mathfrak{h}$ andererseits. Ist $\mathfrak{L}$ eine lineare Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$, so bilden die Elemente a von $\mathfrak{G}$, deren Hauptideal (a) in $\mathfrak{L}$ liegt, ersichtlich eine ebenfalls lineare Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$. Enthält $\mathfrak{L}$ mit endlich vielen Elementen auch deren größten gemeinsamen Teiler, so hat $\mathfrak{B}$ noch folgende Eigenschaft:

$\mathfrak{B}$ enthält mit endlich vielen Elementen $a_1, \ldots, a_n$ auch das r-Ideal $(a_1, \ldots, a_n)_r$.

Nennen wir Halbgruppen mit dieser Eigenschaft r-Halbgruppen, so können wir unser Ergebnis kurz so fassen:

Jede lineare t-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$ liefert eine lineare r-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{g}$.

Dieser Satz läßt sich nun umkehren. Ist nämlich eine lineare r-Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$ gegeben, so zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{B}$ auch r_a-Oberhalbgruppe ist. Dazu sei $d \in (a_1, \ldots, a_n)_{r_a}$, $a_\nu \in \mathfrak{B}$ ($\nu = 1, \ldots, n$), d.h. es gibt ein endliches r-Ideal $\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_m)_r$, so daß $d\mathfrak{c} \subseteq (a_1, \ldots, a_n)_r\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{B}$ linear ist, gibt es unter den Elementen $c_1, \ldots, c_m$ eines – etwa c_1 –, so daß $c_1^{-1}c_\nu \in \mathfrak{B}$ ($\nu = 1, \ldots, m$). Dann folgt wegen

$$d(1, c_1^{-1}c_2, \ldots, c_1^{-1}c_m)_r \subseteq (a_1, \ldots, a_n)_r \bigl(1, c_1^{-1}c_2, \ldots, c_1^{-1}c_m\bigr)_r,$$

daß d in einem endlichen r-Ideal liegt, das aus lauter Elementen von $\mathfrak{B}$ erzeugt wird, also muß d in $\mathfrak{B}$ liegen. $\mathfrak{B}$ ist somit lineare r_a-Oberhalbgruppe, woraus weiter folgt, daß für jedes endliche r_a-Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)_{r_a}$ stets $\mathfrak{a}$ in dem aus $a_1, \ldots, a_n$ erzeugten s-Ideal von $\mathfrak{B}$ enthalten ist. $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ ist also Hauptideal in $\mathfrak{B}$. Wir definieren jetzt eine lineare Oberhalbgruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{h}$ durch $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{L}$, wenn

$$\mathfrak{a}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{L}$ ist dann eine lineare t-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$ und enthält ein Hauptideal (a) genau dann, wenn a in $\mathfrak{B}$ liegt. Insgesamt erhalten wir unter Berücksichtigung von § 3:

Satz 13. *Die linearen r-Oberhalbgruppen einer r-abgeschlossenen Halbgruppe entsprechen umkehrbar eindeutig den linearen t-Oberhalbgruppen der Halbgruppe* $\mathfrak{h}$ *der ganzen Idealbrüche und damit den t-Primidealen von* $\mathfrak{h}$.

Als Folgerung dieses Satzes ergibt sich sofort:

Satz 14. *Jede r-abgeschlossene Halbgruppe ist Durchschnitt von linearen r-Oberhalbgruppen.*

> . . . .
>
> **Literaturverzeichnis.**
>
> . . . .
>
> H. Grell.
> [1] Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen **97** (1927).
>
> . . . .
>
> W. Krull.
>
> . . . .
>
> [5] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, Beitrag I, Math. Zeitschr. **41** (1936).
>
> . . . .
>
> H. Prüfer.
> [1] Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften von Körpern, J. reine angew. Math. **168** (1932).

6 Lorenzen 1950: the Fundamentalsatz without valuations

Lorenzen 1950 takes place in the framework of preordered noncommutative monoids. It proposes an analysis of a system of ideals as an embedding into a semilattice:

> In the commutative setting, the systems of ideals are always introduced as systems of certain subsets. But if one removes this set-theoretic clothing, then the concept of an ideal may be defined quite simply: a system of ideals of a preordered set is nothing but an embedding into a semilattice.

This enables Lorenzen to analyse the concept of r-supermonoid of Lorenzen 1939 as *r-allowable monoid* corresponding to an *r-allowable preorder*, i.e. a preorder that is the restriction of a homomorphic image of the system of r-ideals. The reader is invited to return to the part of the letter to Krull dated 6 June 1944 that is translated in the introduction (page 142), and to reflect upon the simplification and clarification w.r.t. Inequality (2) of the definition of a valuation.

In the letter to Krull dated 13 March 1944 (page 226), Lorenzen stresses the importance of these discoveries in his research:

> E.g. the insight that a system of ideals is intrinsically nothing but a supersemilattice, and a valuation nothing but a linear preorder, strikes me as the most essential result of my effort.

In the noncommutative framework, integral dependence cannot be captured anymore by passing from the r- to the r_a-system. Therefore Lorenzen devises a new construction that may be considered as the birth of dynamical algebra. In the introduction, he describes it for the system of Dedekind ideals:

> Let I be an arbitrary integral domain, $\mathfrak{a}$ a (finite or infinite) ideal of I, a an element of the field of fractions K. We ask ourselves under what circumstances $a \in \mathfrak{a}B$ holds for every valuation superring B of I. For arbitrary $z \in K^*$ and any valuation superring B of I, it always holds that
>
> $$z \in B \quad \text{or} \quad z^{-1} \in B.$$
>
> Therefore, whenever $a \in \mathfrak{a}I[z]$ and $a \in \mathfrak{a}I[z^{-1}]$ holds, so does $a \in \mathfrak{a}B$. Likewise follows: if there are elements $z_1, \dots, z_n \in K^*$ for which
>
> $$a \in \mathfrak{a}I[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \tag{3)}$$
>
> holds for each of the 2^n combinations of signs, then, for every valuation superring B of I, it holds that
>
> $$a \in \mathfrak{a}B.$$
>
> This condition 3) is also necessary. Namely, if 3) is not fulfilled for any $z_1, \dots, z_n$, then a simple well-ordering argument shows that there is a maximal superring $\bar{I}$ of I with the property that, for all $z_1, \dots, z_n \in K^*$,
>
> $$a \notin \mathfrak{a}\bar{I}\left[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}\right]$$
>
> holds for at least one combination of signs. Therefore in particular $a \notin \mathfrak{a}\bar{I}$ holds. If this $\bar{I}$ were not a valuation ring, then there would be a $z \in K^*$ with $z \notin \bar{I}$ and $z^{-1} \notin \bar{I}$, therefore there would be elements $x_1, \dots, x_m$ and $y_1, \dots, y_n$ with
>
> $$a \in \mathfrak{a}\bar{I}[z]\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\right]$$
> $$a \in \mathfrak{a}\bar{I}\left[z^{-1}\right]\left[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}\right]$$
>
> for each combination of signs. But from this,
>
> $$a \in \mathfrak{a}\bar{I}\left[z^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}\right]$$
>
> would follow, i.e. a contradiction. Therefore $\bar{I}$ is a valuation ring.
>
> With that, the following new result is gained:
>
> $a \in \mathfrak{a}B$ holds for every valuation superring B of I exactly when there are elements $z_1, \dots, z_n \in K^*$ for which
>
> $$a \in \mathfrak{a}I\left[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}\right]$$
>
> holds for each combination of signs.
>
> . . . .
>
> a is integrally dependent on I if there are elements $z_1, \dots, z_n$ of the

field of fractions that fulfil $a \in I\left[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}\right]$ for each combination of signs.

The gist of Lorenzen's new construction is that in a computation in an integral domain I, one may at any time open two branches concerning an element z: in one branch, one supposes that I contains z; in the other, that I contains z^{-1}. If a result may be obtained in each branch by a computation, then there is a computation that yields this result without opening the branches. This construction embodies the computational content of the proof method described by Krull (1936): see page 148.

This leads to a reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains into Theorem 26. We postpone our discussion of this reshaping until the next section, on Lorenzen 1952, instead of dwelling on the 1950 version.

But let us stress another discovery reported in this article: the property of regularity (see Satz 8 on page 165). It consists in requiring of an ℓ-group that if $a \wedge xax^{-1} = 1$, then $a = 1$. This property may be seen as specifying the amount of commutativity that must be granted in an ℓ-group in order to be allowed to open branches in computations as described above. For more on this, see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2020.

Excerpt

Our excerpt is from pages 483–490, 492–494, 496–500, 502–503, 506, 509–512, and 515–518 of "Über halbgeordnete Gruppen", *Mathematische Zeitschrift* 52.

> Ein Integritätsbereich I definiert in der multiplikativen Gruppe K^* seines Quotientenkörpers K eine Teilbarkeitsrelation. ...
>
> . . . .
>
> Wie man der Theorie der kommutativen Halbgruppen entnehmen kann, sind die Ordnungen, die einen Bewertungsring B bestimmen, der I umfaßt, dadurch gekennzeichnet, daß sie zugleich eine Ordnung der Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... von I ermöglichen, so daß stets gilt:
>
> 5) $$\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a},\ \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{b} \ \Rightarrow\ \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$
>
> Genauer gesagt: die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von I sind die Ordnungen von K^*, die durch die Ordnungen des Idealsystems von I induziert werden, die 5) erfüllen. Die hier auftretenden Ordnungen des Idealsystems nennen wir die zulässigen Ordnungen.
>
> Wir definieren in § 4 Idealsysteme für beliebige halbgeordnete Mengen und insbesondere für halbgeordnete Gruppen. Wir definieren auch für diesen allgemeinen Fall die zulässigen Ordnungen eines Idealsystems und dann weiter:

Eine Ordnung einer halbgeordneten Gruppe G, zu der ein Idealsystem H gegeben ist, heißt zulässig (bezgl. H), wenn sie durch eine zulässige Ordnung von H in G induziert wird. Die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von I sind dann also genau die (bezgl. des Dedekindschen Idealsystems) zulässigen Ordnungen von K^*.

. . . .

Gegeben sei eine beliebige halbgeordnete Gruppe G und ein beliebiges Idealsystem H von G. Wann und wie ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar? ...

. . . .

Wie läßt sich eine halbgeordnete Gruppe in eine Verbandsgruppe einbetten – vorausgesetzt, daß eine solche Einbettung möglich ist?

. . . .

Wir erhalten die Antwort auf unsere Frage durch eine genaue halbordnungstheoretische Analyse des Idealbegriffs. Im Kommutativen werden die Idealsysteme stets als Systeme von gewissen Untermengen eingeführt. Beseitigt man aber diese mengentheoretische Einkleidung, so läßt sich der Idealbegriff ganz einfach definieren: ein Idealsystem einer halbgeordneten Menge ist nichts anderes als eine Einbettung in einen Halbverband. (Ich bemerke ausdrücklich, daß man hier statt „Halbverband“ nicht „Verband“ setzen darf.)

. . . .

Ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar, so gibt es ein Idealsystem H' von G, dessen v-Ideale eine reguläre Verbandsgruppe bilden. ...

Die hier auftretenden Idealsysteme H', die in der Arithmetik „arithmetisch brauchbar“ heißen, nennen wir auch im allgemeinen Fall „brauchbar“.

. . . .

Wie in der Arithmetik ergibt sich dann weiter, daß unter den brauchbaren Idealsystemen eines ausgezeichnet ist, zu dem alle anderen homomorph sind ...

. . . .

Zur Beantwortung unserer Ausgangsfragestellung für halbgeordnete Gruppen bleibt uns jetzt vor allem folgende Frage:

Wie läßt sich das ausgezeichnete brauchbare Idealsystem einer halbgeordneten Gruppe G konstruieren – vorausgesetzt, daß es überhaupt existiert.

Wir setzen also voraus, daß die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar ist. Bei der Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems wollen wir aber die Kenntnis dieser Ordnungen nicht voraussetzen, weil wir gerade mit Hilfe des Idealsystems die zulässigen Ordnungen bestimmen wollen.

Diese Konstruktion wird in der Arithmetik geliefert durch den PRÜFERschen Begriff der Ganzabhängigkeit von einem Ideal $\mathfrak{a}$ des gegebenen Integritätsbereiches I.

Ein Element a des Quotientenkörpers K heißt ganz abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a einer Gleichung

$$1) \qquad a^n + a_1 a^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit $a_\nu \in \mathfrak{a}^\nu$ genügt.

In der Theorie der kommutativen Halbgruppen tritt an die Stelle von 1) die Bedingung, daß es ein endliches Ideal $\mathfrak{c}$ geben soll, so daß

$$2) \qquad a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

gilt. Auch diese Bedingung 2) läßt sich jedoch nicht auf den nichtkommutativen Fall ausdehnen.

Um den Grundgedanken unserer neuen Konstruktion, die wir statt 1) oder 2) verwenden, deutlich zu machen, führe ich sie hier für den arithmetischen Spezialfall durch. § 6 des Textes bringt die Durchführung für beliebige halbgeordnete Gruppen.

I sei ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{a}$ ein (endliches oder unendliches) Ideal von I, a ein Element des Quotientenkörpers K. Wir fragen uns, wann für jeden Bewertungsoberring B von I gilt: $a \in \mathfrak{a}B$. Für beliebiges $z \in K^*$ und jeden Bewertungsoberring B von I gilt stets

$$z \in B \quad \text{oder} \quad z^{-1} \in B.$$

Gilt also $a \in \mathfrak{a}I[z]$ und $a \in \mathfrak{a}I[z^{-1}]$, so gilt stets $a \in \mathfrak{a}B$. Ebenso folgt: Gibt es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in K^*$, für die

$$3) \qquad a \in \mathfrak{a}I\left[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}\right]$$

für jede der 2^n Vorzeichenkombinationen gilt, so gilt für jeden Bewertungsoberring B von I:

$$a \in \mathfrak{a}B.$$

Diese Bedingung 3) ist auch notwendig. Ist nämlich 3) für kein $z_1, \ldots, z_n$ erfüllt, so zeigt ein einfacher Wohlordnungsschluß, daß es einen maximalen Oberring $\bar{I}$ von I gibt, mit der Eigenschaft, daß für jedes $z_1, \ldots, z_n \in K^*$

$$a \notin \mathfrak{a}\bar{I}\left[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}\right]$$

für mindestens eine Vorzeichenkombination gilt. Insbesondere gilt also $a \notin \mathfrak{a}\bar{I}$. Wäre dieses $\bar{I}$ kein Bewertungsring, so gäbe es ein $z \in K^*$ mit $z \notin \bar{I}$

und $z^{-1} \notin \bar{I}$, also gäbe es Elemente $x_1, \dots, x_m$ und $y_1, \dots, y_n$ mit

$$a \in \mathfrak{a}\bar{I}[z]\left[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\right]$$
$$a \in \mathfrak{a}\bar{I}\left[z^{-1}\right]\left[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}\right]$$

für jede Vorzeichenkombination. Hieraus würde aber

$$a \in \mathfrak{a}\bar{I}\left[z^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}\right]$$

folgen, d.h. ein Widerspruch. Also ist $\bar{I}$ Bewertungsring.

Damit ist das folgende neue Ergebnis gewonnen:

Es gilt genau dann $a \in \mathfrak{a}B$ für jeden Bewertungsoberring B von I, wenn es Elemente $z_1, \dots, z_n \in K^*$ gibt, für die

$$a \in \mathfrak{a}I\left[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}\right]$$

für jede Vorzeichenkombination gilt.

Der Beweis ist so einfach, daß er sich ohne weiteres in beliebigen halbgeordneten Gruppen durchführen läßt und hier sowohl eine Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems liefert (vorausgesetzt, daß es existiert), als auch die folgende Frage beantwortet:

Wann ist die Halbordnung einer halbgeordneten Gruppe G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar?

Zum Schluß zeigen wir, daß sich diese Ergebnisse mit den bekannten Ergebnissen im Kommutativen in Übereinstimmung befinden. ... Ferner erhält man für den grundlegenden Begriff der Ganzabhängigkeit eines Elementes a von einem Integritätsbereich I einen neuen gleichwertigen Ausdruck:

a ist genau dann ganz abhängig von I, wenn es Elemente $z_1, \dots, z_n$ des Quotientenkörpers gibt, die $a \in I\left[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}\right]$ für jede Vorzeichenkombination erfüllen.

§ 1.

Halbordnungen.

. . . .

Für jede Halbordnung benutzen wir außerdem zur Abkürzung:

$a \geqq b$, wenn $b \leqq a$ gilt,
$a \equiv b$, wenn $a \leqq b$ und $a \geqq b$ gilt,

. . . .

Die ganzen Elemente einer halbgeordneten Gruppe G bilden eine invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ von G. Es gilt nämlich

$$1 \geqq 1,$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \geqq 1,\ b \geqq 1 \ \Rightarrow\ ab \geqq 1,$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \geqq 1 \ \Rightarrow\ xax^{-1} \geqq 1.$$

Dies bedeutet für die Menge $\mathfrak{g}$ der ganzen Elemente

$$1 \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g} \ \Rightarrow\ ab \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \in \mathfrak{g} \ \Rightarrow\ xax^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Wir nennen die invariante Unterhalbgruppe der ganzen Elemente kurz die (zu $\leqq$) zugehörige Halbgruppe.

Satz 1. Die Halbordnungen einer Gruppe G entsprechen eineindeutig den invarianten Unterhalbgruppen von G.

....

§ 2.

Verbandsgruppen.

....

Wir nennen zwei Elemente a und b einer Verbandsgruppe teilerfremd, wenn $a \wedge b \equiv 1$ gilt, und schreiben hierfür $a \parallel b$. ...

....

§ 3.

Hauptgruppen.

....

Wir nennen diese direkten Produkte von geordneten Gruppen Vektorgruppen. ...

Satz 8. In einer Vektorgruppe G gilt für jedes $a, x \in G$

$$a \parallel xax^{-1} \ \Rightarrow\ a \equiv 1.$$

Beweis. Wir haben nur nachzuweisen, daß diese Bedingung für geordnete Gruppen gilt. Aus $a > 1 \ \Rightarrow\ xax^{-1} > 1$ folgt aber sofort $a > 1 \ \Rightarrow\ \min(a, xax^{-1}) > 1$.

Wir nennen jede Verbandsgruppe, die die Bedingung des Satzes 8 erfüllt, regulär. Also ist jede Vektorgruppe eine reguläre Verbandsgruppe.

Dieser Satz läßt sich nicht umkehren, wohl aber gilt, daß jede reguläre Verbandsgruppe Untergruppe einer Vektorgruppe ist. Dieses wollen wir im Folgenden beweisen.

Wir definieren zunächst: Jede Untergruppe einer Vektorgruppe heißt eine Hauptgruppe.

. . . .

Es seien H und H' Halbverbandshalbgruppen und $\rightarrow$ eine Abbildung von H in H', die für jedes $a, b \in H$, $a', b' \in H'$ mit $a \rightarrow a'$ und $b \rightarrow b'$ erfüllt:

1) $$a \leqq b \Rightarrow a' \leqq b'$$

2) $$a \wedge b \rightarrow a' \wedge b'$$

3) $$ab \rightarrow a'b'.$$

Eine solche Abbildung nennen wir einen Homomorphismus von H.

Jeder Homomorphismus definiert eine Relation $\dot{\leqq}$ in H auf folgende Weise. Wir setzen fest, daß $a \mathrel{\dot{\leqq}} b$ in H genau dann gelten soll, wenn $a' \leqq b'$ in H' gilt. H ist bzgl. dieser Relation wieder eine Halbverbandshalbgruppe und die Relation $\dot{\leqq}$ erfüllt:

I) $$a \leqq b \Rightarrow a \mathrel{\dot{\leqq}} b$$

II) $$x \mathrel{\dot{\leqq}} a,\ x \mathrel{\dot{\leqq}} b \Rightarrow x \mathrel{\dot{\leqq}} a \wedge b.$$

Es gilt auch die Umkehrung: Ist $\dot{\leqq}$ eine Halbordnung von H, die I) und II) erfüllt, so ist H bzgl. $\dot{\leqq}$ eine Halbverbandshalbgruppe (wir wollen diese mit H' bezeichnen) und die Abbildung $a \rightarrow a$ von H auf H' ist ein Homomorphismus.

. . . .

Aufgrund dieser Gleichwertigkeit betrachten wir statt der Homomorphismen von H nur die Halbordnungen von H, die I) und II) erfüllen. Wir nennen diese Halbordnungen kurz die zulässigen Halbordnungen von H.

Zwei Homomorphismen von H, die dieselbe zulässige Halbordnung definieren, nennen wir äquivalent. Es entsprechen dann also die Homomorphismen von H bis auf Äquivalenz eineindeutig den zulässigen Halbordnungen von H.

Für eine Verbandsgruppe G entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G aber auch eineindeutig gewissen Unterhalbgruppen von G. Aus Satz 1 folgt nämlich sofort:

Ist $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe einer Verbandsgruppe G, so entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G eineindeutig den invarianten Unterhalbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ von G, die für jedes $a, b \in G$

$$\text{I)}\quad \mathfrak{g} \subseteq \dot{\mathfrak{g}} \qquad \text{II)}\quad a \in \dot{\mathfrak{g}},\ b \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow a \wedge b \in \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllen.

Diese Halbgruppen $\mathfrak{g}$ nennen wir die zulässigen Halbgruppen von G. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen also bis auf Äquivalenz eineindeutig den zulässigen Halbgruppen von G.

Die zulässigen Halbgruppen einer Verbandsgruppe lassen sich nun durch „Quotientenbildung" aus der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gewinnen. Dazu haben wir invariante Unterhalbgruppen S von $\mathfrak{g}$ zu betrachten. Gilt für jedes $a, b \in \mathfrak{g}$

$$a \leqq b,\ b \in S\ \Rightarrow\ a \in S,$$

so nennen wir S vollständig.

Satz 9. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen bis auf Äquivalenz eineindeutig den vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$.

. . . .

Satz 13. Jede reguläre Verbandsgruppe ist Hauptgruppe.

. . . .

Zusammengefaßt erhalten wir also eine Kennzeichnung der Hauptgruppen, die unabhängig ist vom Ordnungsbegriff. Die Bedeutung dieser Kennzeichnung liegt darin, daß sich die Ordnungen einer Gruppe im allgemeinen nur mit Wohlordnungsschlüssen konstruieren lassen – die Oberverbandsgruppen dagegen lassen sich auch ohne Wohlordnung konstruieren mit Hilfe des Idealbegriffs.

§ 4.

Idealsysteme.

Wir definieren den Idealbegriff zunächst für beliebige halbgeordnete Mengen.

Unter einem Idealsystem $\mathfrak{S}$ einer halbgeordneten Menge M verstehen wir einen minimalen Oberhalbverband von M. Ein Oberhalbverband von M enthält zu endlich vielen Elementen a_μ von M $(\mu = 1, \ldots, m)$ stets den g. g. T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$. Er heißt minimal, wenn er nur aus Elementen dieser Form besteht. Es gibt dann nämlich keinen echten Unterhalbverband, der auch noch M umfaßt.

. . . .

Der Idealbegriff ist für halbgeordnete Gruppen in dieser Form noch zu unbestimmt. Als Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe H wollen wir nur diejenigen Idealsysteme der halbgeordneten Menge H bezeichnen, in denen durch die Festsetzung

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)(b_1 \wedge \ldots \wedge b_n)\ \equiv\ a_1 b_1 \wedge \ldots \wedge a_m b_n$$

eine Multiplikation definiert werden kann.

. . . .

Die Einführung der Idealsysteme geschieht, um mit ihrer Hilfe die Einbettung einer Hauptgruppe G in eine reguläre Verbandsgruppe konstruktiv ohne Benutzung der Ordnungen von G zu ermöglichen.

. . . .

§ 5.
r-Gruppen.

. . . .

Damit unsere Untersuchung der halbgeordneten Gruppen auch die speziellen Fragen der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche umfaßt, legen wir daher von jetzt ab eine halbgeordnete Gruppe zugrunde, zu der von vornherein ein festes Idealsystem gegeben ist. Ist dies das System der r-Ideale, so nennen wir die halbgeordnete Gruppe kurz eine r-Gruppe.

In einer r-Gruppe erklären wir nur diejenigen Halbordnungen als r-zulässig, die durch eine zulässige Halbordnung des r-Idealsystems induziert werden.

Die r-zulässigen Halbordnungen lassen sich unabhängig von dem Begriff der zulässigen Halbordnung eines Halbverbandes kennzeichnen. Ist nämlich eine beliebige halbgeordnete Gruppe G gegeben, und ist H ein Idealsystem von G, so gilt

S a t z 17. Eine Halbordnung $\dot{\leqq}$ von G wird genau dann durch eine zulässige Halbordnung von H induziert, wenn

$$1)\ a \leqq b \ \Rightarrow\ a \mathrel{\dot{\leqq}} b$$

erfüllt ist und wenn aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leqq a$ in H für jedes $x \in G$ folgt

$$2)\ x \mathrel{\dot{\leqq}} a_1,\ \ldots,\ x \mathrel{\dot{\leqq}} a_m \ \Rightarrow\ x \mathrel{\dot{\leqq}} a.$$

. . . .

Für die Ordnungen von G gilt darüber hinaus

S a t z 18. Die zulässigen Ordnungen von H entsprechen eineindeutig den Ordnungen von G, die 1) und 2) erfüllen.

. . . .

Ist G eine r-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe, so entsprechen die r-zulässigen Halbordnungen bzw. Ordnungen von G den invarianten Unterhalbgruppen bzw. den linearen, invarianten Unterhalbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ die

$$1)\ \mathfrak{g} \subseteq \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllen, und für die aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{r}{\leqq} a$ folgt:

2) $a_1 \in \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, a_m \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow a \in \dot{\mathfrak{g}}$.

Statt 2) läßt sich auch schreiben:

$$a_1 \in \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, a_m \in \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow (a_1, \ldots, a_m)_r \subseteq \dot{\mathfrak{g}}.$$

Wir nennen die invarianten Unterhalbgruppen von G, die 1) und 2) erfüllen, die r-zulässigen Halbgruppen von G.

Eine r-Gruppe G heißt r-Hauptgruppe, wenn die Halbordnung von G nicht nur Konjunktion von Ordnungen von G ist, sondern sogar Konjunktion von r-zulässigen Ordnungen ist. Das ist also genau dann der Fall, wenn die zugehörige Halbgruppe Durchschnitt von linearen r-zulässigen Halbgruppen ist.

. . . .

§ 6.

Die r-Abschließung.

Wir wollen in diesem § nachweisen, daß sich das ausgezeichnete r-brauchbare Idealsystem, das r_a-System, einer r-Hauptgruppe unabhängig von den Begriffen der vorhergehenden §§ kennzeichnen läßt.

Es sei G eine beliebige r-Gruppe, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe, $\dot{\mathfrak{g}}$ eine r-zulässige Halbgruppe, $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ eine endliche Untermenge von G und $a \in G$.

Wir bezeichnen das r-Ideal $(a_1, \ldots, a_m)_r$ mit $\mathfrak{a}_r$.

Wir definieren das Produkt $\mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$ als die kleinste Untermenge von G, die sämtliche Elemente $a\dot{g}$ mit $a \in \mathfrak{a}_r$ und $\dot{g} \in \dot{\mathfrak{g}}$ enthält und außerdem für jedes $x_1, \ldots, x_n \in G$ die Bedingung

$$x_1 \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}, \ \ldots, \ x_n \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}} \Rightarrow (x_1, \ldots, x_n)_r \subseteq \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllt.

. . . .

... bezeichnen wir für jedes $x \in G$ mit $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ den Durchschnitt aller r-zulässigen Halbgruppen, die $\dot{\mathfrak{g}}$ umfassen und außerdem x enthalten. $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ ist wieder eine r-zulässige Halbgruppe, die „r-Erweiterung" von $\dot{\mathfrak{g}}$ mit x.

. . . .

Wir definieren dazu eine Relation α_r zwischen den Elementen a und den Produkten $\mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$.

Wir setzen $a \ \alpha_r \ \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$, wenn es Elemente $x_1, \ldots, x_n$ von G gibt mit $a \in \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}\big(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}\big)_r$ für jede der 2^n möglichen Vorzeichenkombinationen.

S a t z 24. a ist genau dann r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$, wenn $a \ \alpha_r \ \mathfrak{a}_r . \dot{\mathfrak{g}}$ gilt.

. . . .

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß es jetzt möglich ist, für jede r-Hauptgruppe eine direkte Konstruktion des r_a-Idealsystems anzugeben.

....

... Gilt $a \,\alpha_r\, (1).\dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir a r-abhängig von $\dot{\mathfrak{g}}$, da $(1).\dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{g}}$ ist. Liegt jedes von $\dot{\mathfrak{g}}$ r-abhängige Element in $\dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir $\dot{\mathfrak{g}}$ r-abgeschlossen.

....

Satz 26. Eine r-Gruppe ist genau dann r-Hauptgruppe, wenn die zugehörige Halbgruppe r-abgeschlossen ist.

7 Lorenzen 1952: the Fundamentalsatz for semilattice domains

The first three sections of Lorenzen 1952 propose a streamlined version of Lorenzen 1950 in the more general framework of a *domain* $(B, \preccurlyeq_B, G)$, i.e. of a preordered set $(B, \preccurlyeq_B)$ with a monoid G of preorder-preserving operators on B. $(H, \preccurlyeq_H, G)$ is a *semilattice domain* if $(H, \preccurlyeq_H)$ is a semilattice and if the action of G preserves meets. A preorder $\preccurlyeq$ on a semilattice domain H is $\preccurlyeq_H$*-allowable* if it is coarser than $\preccurlyeq_H$ and if meets (w.r.t. $\preccurlyeq_H$) are also meets w.r.t. $\preccurlyeq$. One can similarly define lattice domains and the corresponding allowability.

A *domain of ideals* H_r for a domain B is a minimal supersemilattice domain. A preorder $\preccurlyeq$ on B is *r-allowable* if it is induced by an allowable preorder of H_r. B is an *r-principal domain* if its preorder is a conjunction of r-allowable linear preorders.

Krull's Fundamentalsatz for integral domains becomes a characterisation of an r-principal domain as a domain B in which behaving as if it were linearly preordered, i.e. assuming that certain pairs of elements $\alpha_1, \ldots, \alpha_e \in B\times B$ are linearly preordered, does not add new preordered pairs to the preorder. His formulation of this "as if" goes as follows: it is the simultaneous consideration of 2^e different preorders corresponding to preordering each pair one way or the other (a way described by a combination of signs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e = \pm 1$), and each of these preorders is the conjunction $R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r$ of all the r-allowable preorders coarser than $\preccurlyeq_B$ in which the pairs are preordered in the described way (here below, R is Lorenzen's notation for the preorder $\preccurlyeq_B$).

Theorem 1. *An r-domain B (w.r.t. R and G) is an r-principal domain if, and only if, for all pairs $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ from B,*

$$\bigcap_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_e\\ \varepsilon=\pm 1}} R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r \subset R$$

holds.

This final shape of the Fundamentalsatz corresponds to Satz 26 of Lorenzen 1950 (see above) and is obtained by the arguments developed there. The characterisation given in Theorem 1 is but a formulation of *r-closedness*: compare the formulation of integral dependence at the end of the introduction of Lorenzen 1950 (page 164, translated on page 160).

Note that the article Lorenzen 1951 shows that Lorenzen had the means of a considerably simpler formulation of this "as if" by starting from the logic-free and set-theory-free formal system given by H_r and by adding the e axioms corresponding to preordering the pairs (see, in this respect, Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019; 2020). He may have refrained from doing so in order to stick to a purely algebraic framework that would suit his potential readers.

In the last section, the property of regularity introduced in Lorenzen 1950 is given the following symmetrical form for a distributive lattice domain $(V, \preccurlyeq_V, G)$: if a, $b \in V$ and x, $y \in G$, then $xa \wedge yb \preccurlyeq_V xb \vee ya$.

Excerpt

Our excerpt is from pages 269–274 of "Teilbarkeitstheorie in Bereichen", *Mathematische Zeitschrift* 55.

§ 1.

Bereiche.

B sei eine Menge (Elemente a, b, ...), R eine zweistellige Relation in B und G eine Menge von Operatoren x, y, ... von B.

Definition 1. B heißt ein *Bereich* (bezügl. R und G), wenn für alle a, b, c und x gilt

(1.1) $a\,R\,a$

(1.2) $a\,R\,b,\ b\,R\,c \ \rightarrow\ a\,R\,c$

(1.3) $a\,R\,b \ \rightarrow\ xa\,R\,xb.$

Da (1.3) für den Operator 1 (definiert durch $1 \cdot a = a$) und für xy (definiert durch $(xy)a = x(ya)$) gilt, falls für x und y, sei im Folgenden stets angenommen, daß G eine Halbgruppe mit Einselement ist.

R heißt die Halbordnung von B. Statt $a\ R\ b$ werde $a < b$ oder $b > a$ geschrieben. $a = b$ bedeute $a < b$ und $b < a$ (= braucht nicht die Identität zu sein).

Gilt $a < b$ oder $a > b$ für alle a und b, dann heißt R eine *Ordnung*.

Definition 2. Ein Bereich B heißt ein *Halbverbandsbereich*, wenn für alle a, b ein größter gemeinsamer Teiler $a \wedge b$ existiert, so daß für alle c und x gilt

$$c < a \wedge b \longleftrightarrow c < a,\ c < b \tag{1.4}$$

$$x(a \wedge b) = xa \wedge xb. \tag{1.5}$$

. . . .

Definition 3. Eine Halbordnung S eines Halbverbandsbereiches B (bezügl. R und G) heißt *zulässig*, wenn für alle a, b, c und x gilt

$$R \subset S \tag{1.6}$$

$$a\,S\,b \rightarrow xa\,S\,xb \tag{1.7}$$

$$c\,S\,a,\ c\,S\,b \rightarrow c\ S\ a \wedge b. \tag{1.8}$$

. . . .

Die Halbordnung R eines Bereichs B induziert in jeder Untermenge B_0 von B eine Halbordnung R_0 von B_0. R heißt eine *Fortsetzung* von R_0 auf B. Ist B_0 zulässig bezügl. G (d.h. $xB_0 \subset B_0$ für alle x), dann induziert G eine Operatorenhalbgruppe G_0 von B_0. B heißt dann ein *Oberbereich* von B_0 (bezügl. R_0 und G_0).

§ 2.
Ideale.

B sei ein Bereich (bezügl. R und G).

Definition 4. Ein minimaler Halbverbandsoberbereich H von B heißt ein *Idealbereich* von B.

. . . .

Die Idealbereiche H werden durch einen Kennbuchstaben unterschieden. r sei eine Variable für diese Kennbuchstaben.

Ein Bereich B mit einem Idealbereich H_r heiße ein *r-Bereich.*

Definition 5. Eine Halbordnung S eines r-Bereiches B heiße *r-zulässig*, wenn S durch eine zulässige Halbordnung von H_r induziert wird.

. . . .

Definition 6. Ein r-Bereich B heißt *r-Hauptbereich*, wenn die Halbordnung R von B Konjunktion r-zulässiger Ordnungen von B ist.

. . . .

werde für jede r-zulässige Halbordnung S und jedes Paar $\alpha = a_1, a_2$ aus B die r-Erweiterung $S[\alpha]_r$ als Konjunktion aller r-zulässigen Halbordnungen $\bar{S}$ von B mit

$$S \subset \bar{S} \tag{2.1}$$

$$a_1\,\bar{S}\,a_2 \tag{2.2}$$

> definiert. Zur bequemeren Formulierung sei ferner gesetzt
>
> ....
>
> $$\alpha^{+1} = a_1, a_2, \qquad \alpha^{-1} = a_2, a_1.$$
>
> ....
>
> Satz 1. *Ein r-Bereich B (bezügl. R und G) ist genau dann ein r-Hauptbereich, wenn für alle Paare $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ aus B gilt:*
>
> $$\bigcap_{\varepsilon=\pm 1} {}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_e} R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r \subset R.$$
>
> ....
>
> § 4.
>
> **Reguläre Verbandsbereiche.**
>
> Definition 9. Ein Verbandsbereich V heißt *regulär*, wenn V distributiv ist und für a, b und x, y gilt: $xa \wedge yb < xb \vee ya$.
>
> ....
>
> Satz 3. *Die Halbordnung eines Verbandsbereiches V ist genau dann Konjunktion zulässiger Ordnungen von V, wenn V regulär ist.*

8 Lorenzen 1953: the Fundamentalsatz for integral domains as an embedding into a super-ℓ-group

The introduction of Lorenzen 1953 describes his state of the art on Krull's Fundamentalsatz for integral domains:

- Lorenzen 1950 shows that the problem of representing an integral domain I as an intersection of valuation rings may be reduced to the problem of constructing a super-ℓ-group of the divisibility group G of I such that the meets of elements of G form a homomorphic image of the system of Dedekind ideals.
- In fact, Satz 3 of Lorenzen 1952 (see above) establishes that the preorder of a regular lattice domain may be represented as a conjunction of allowable linear preorders, and this corresponds to an intersection of valuation rings in the case of an integral domain.

> According to the Fundamentalsatz, the integral domains I that are representable as intersections of valuation rings are characterised by being integrally closed. On the other hand, the representability of I as an intersection of valuation rings is equivalent to the existence of a lattice-preordered supergroup V of the multiplicative group G of the field of fractions K of I – where V must satisfy the condition that the domain of

ideals H (which consists of all g.c.d.s $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ with $a_\nu \in G$) contained in V is a homomorphic image of the domain of Dedekind ideals H_d of I.

This last equivalence results from the more general domain-theoretic theorem that the preorder of every regular lattice-preordered domain is a conjunction of allowable total orders – if one adds that every commutative lattice-preordered group is trivially regular. Therefore two routes to the proof of Krull's Fundamentalsatz are available: one has to construct, for an integrally closed integral domain, either an intersection representation through valuations or a lattice-preordered supergroup. Both proof possibilities are carried out for commutative groups – for noncommutative groups, however, and more generally for domains, only the first route has been hitherto practicable.

The present work describes the second proof course also in the general case. If afterwards one specialises the general method to divisibility in commutative fields K, then the following results. For the construction of a lattice-preordered supergroup it is only required to define when, for arbitrary elements a_μ, b_ν of the multiplicative group G of K,

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \prec b_1 \vee \cdots \vee b_n$$

is to hold ($\prec$ stands for "divides", $\wedge$ denotes the g.c.d., $\vee$ the l.c.m.).

For every integrally closed integral domain I, one obtains a lattice-preordered supergroup of G if one defines

(1)

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \prec b_1 \vee \cdots \vee b_n \quad \longleftrightarrow \quad 1 \in \sum_{1}{}_{\varkappa}\big(a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_\mu b_\nu^{-1}, \ldots, a_m b_n^{-1}\big)^{\varkappa}.$$

For $n = 1$, $b_1 = b$, this definition changes into the Prüferian definition of integral dependence of b on $(a_1, \ldots, a_m)$

(2)

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \prec b \quad \longleftrightarrow \quad b^k + c_1 b^{k-1} + \cdots + c_k \;=\; 0 \qquad \big[c_\varkappa \in (a_1, \ldots, a_m)^\varkappa\big].$$

Therefore (1) describes a suitable expansion of the concept of integral dependence.

In this last article on the subject, Lorenzen proposes the construction of an ℓ-group from a preordered group G and a semilattice of ideals H_r; G embeds into this ℓ-group if and only if it is r-closed. He does so by first constructing the distributive lattice generated by an "entailment relation" associated with H_r (see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2020) and then proving that it is a lattice-preordered group.

Excerpt

Our excerpt is from page 15 of "Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen", *Mathematische Zeitschrift* 58.

> Nach dem KRULLschen Fundamentalsatz [1] sind die Integritätsbereiche I, die als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar sind, dadurch charakterisiert, daß sie ganz abgeschlossen sind. Die Darstellbarkeit von I als Durchschnitt von Bewertungsringen ist andererseits äquivalent [3] mit der Existenz einer Verbandsobergruppe V der multiplikativen Gruppe G des Quotientenkörpers K von I – wobei V der Bedingung genügen muß, daß der in V enthaltene Idealbereich H (der aus allen g.g.T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ mit $a_\nu \in G$ besteht) ein homomorphes Bild des DEDEKINDschen Idealbereichs H_d von I ist.
>
> Diese letztere Äquivalenz ergibt sich aus dem allgemeineren bereichstheoretischen [4] Satz, daß die Halbordnung jedes regulären Verbandsbereiches Konjunktion von zulässigen Ordnungen ist – wenn man hinzufügt, daß jede kommutative Verbandsgruppe trivialerweise regulär ist. Daher stehen zum Beweis des KRULLschen Fundamentalsatzes zwei Wege zur Verfügung: Man hat für einen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich entweder eine Durchschnittsdarstellung durch Bewertungen oder eine Verbandsobergruppe zu konstruieren. Beide Beweismöglichkeiten sind für kommutative Gruppen durchgeführt – für nichtkommutative Gruppen und allgemeiner für Bereiche ist bisher jedoch nur der erste Weg gangbar.
>
> Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Beweisgang auch im allgemeinen Falle dar. Spezialisiert man anschließend die allgemeine Methode auf die Teilbarkeit in kommutativen Körpern K, so ergibt sich folgendes. Zur Konstruktion einer Verbandsobergruppe braucht nur definiert zu werden, wann für beliebige Elemente a_μ, b_ν aus der multiplikativen Gruppe G von K gelten soll [5]
>
> $$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \prec b_1 \vee \ldots \vee b_n$$
>
> ($\prec$ steht für „teilt", $\wedge$ bezeichnet den g.g.T., $\vee$ das k.g.V.).
>
> Für jeden ganz abgeschlossenen Integritätsbereich I erhält man eine Verbandsobergruppe von G, wenn man definiert
>
> (1)
> $$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \prec b_1 \vee \ldots \vee b_n \quad \longleftrightarrow \quad 1 \in \sum_1 {}_\varkappa \left(a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_\mu b_\nu^{-1}, \ldots, a_m b_n^{-1}\right)^\varkappa.$$
>
> Für $n = 1$, $b_1 = b$ geht diese Definition über in die PRÜFERsche Definition der Ganzabhängigkeit von b von $(a_1, \ldots, a_m)$
>
> (2)
> $$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \prec b \quad \longleftrightarrow \quad b^k + c_1 b^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \qquad \left[c_\varkappa \in (a_1, \ldots, a_m)^\varkappa\right].$$

> Daher stellt (1) eine zweckmäßige Ausdehnung des Begriffes der Ganzabhängigkeit dar.
>
> . . . .
>
> **Literatur.**
>
> [1] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160–196 (1931). – . . . [3] Lorenzen, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483–526 (1949). – [4] Lorenzen, P.: Teilbarkeitstheorie in Bereichen. Math. Z. **55**, 269–275 (1952). – [5] Lorenzen, P.: Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. J. Symb. Log. **16**, 81–106 (1951).

9 A letter from Krull to Scholz from 1953: the well-ordering theorem

Extract

We translate an extract from the letter that Krull sent to Scholz on 18 April 1953 (Heinrich Scholz Archive at University and State Library of Münster), edited on page 244.

> In working with the uncountable, in particular with the well-ordering theorem, I always had the feeling that one uses fictions there that need to be replaced some day by more reasonable concepts. But I was not getting upset over it, because I was convinced that in a careful application of the common "fictions", nothing false comes out, and because I was firmly counting on the man who would some day put all in order. Lorenzen has now found according to my conviction the right way . . . .

Well-ordering arguments and constructions

In his articles, Lorenzen uses well-ordering arguments in several places:

- in Lorenzen 1939 for the proof of Satz 4 (spelled out in our comment on the proof of Theorem 12 on page 153);
- in Lorenzen 1950 for the proof of Satz 24 (stated in the introduction for the case of integral domains, see page 163 and the translation on page 160); for the proof of Satz 13 and of Satz 1 in Teil II;
- in Lorenzen 1952 for the proof of his lemma for Theorem 1, a version of Lorenzen 1950, Satz 24; for the proof of Satz 3, a version of Lorenzen 1950, Satz 13.
- However, no well-ordering argument appears in Lorenzen 1953.

Three kinds of uses may be distinguished:

• Lorenzen 1939, Satz 4: Zorn's lemma is used in order to obtain a maximal prime ideal.

• Lorenzen 1950, Satz 24; Lorenzen 1952, lemma to Theorem 1: a "more reasonable concept", which amounts to behaving as if the domain were linearly preordered, is introduced to replace the "fiction" of valuations.

• Lorenzen 1950, Satz 13; Lorenzen 1952, Satz 3: Zorn's lemma is used to obtain linear preorders. These are "fictions", which are replaced by the "more reasonable concept" of an ℓ-group, in which one may compute as if it were linearly preordered.

We can retrace Lorenzen's position w.r.t. well-ordering arguments through his use of the word *construction* and related words. Let us gather the relevant passages.

1. In Lorenzen's correspondence edited in the next chapter, these words appear only in his letter to Krull, dated 25 April 1944 (page 230), in which he provides a detailed description of his habilitation, and in his last two letters to Hasse, dated July and September 1963.

2. In the introduction to Lorenzen 1950, he writes the following (see page 162):

> How can a preordered group be embedded into a lattice-preordered group – assuming that such an embedding is possible?
>
> ....
>
> How can the distinguished brauchbar[1] system of ideals of a preordered group G be constructed – assuming that it actually exists?
>
> We thus assume that the preorder of G is representable as a conjunction of allowable linear preorders of G. But we do not want to use the knowledge of these linear preorders, because the allowable linear preorders are just what we want to determine by dint of the system of ideals.
>
> In arithmetic, this construction is provided by the Prüferian concept of integral dependence on an ideal $\mathfrak{a}$ of the given integral domain I.

3. After presenting his "new construction", he adds the following (see page 164):

> The proof is so easy that it may be carried out in arbitrary preordered groups and here provides a construction of the distinguished brauchbar system of ideals (assuming that it exists), and also answers the following question:
>
> When is the preorder of a preordered group G representable as a conjunction of allowable preorders of G?

4. After having proved Satz 13, he makes the following comment (see page 167):

[1] In Lorenzen's approach, the distinguished brauchbar system of ideals is the system of r_a-ideals.

> The significance of this characterisation lies in the fact that, in general, the linear preorders of a group can be constructed only with well-ordering arguments – whereas the superlattice-preordered groups can also be constructed without a well-ordering, by means of the concept of ideal.

5. He repeats this a few pages later (see page 168):

> Systems of ideals are introduced in order to make possible by their aid the embedding of a principal group G into a regular lattice-preordered group constructively, without use of the linear preorders of G.

6. Satz 24 is accompanied by the following comment (see page 170):

> The significance of this theorem lies in the fact that it is now possible to state, for every r-principal group, a direct construction of the system of r_a-ideals.

7. Lorenzen 1952, 273, uses the following wording, which is the most explicit in the articles studied here:

> For ϱ-principal domains B, Theorem 2 provides a “constructive” definition of the domain of ϱ_a-superideals V_{ϱ_a} of B, i.e. a definition without use of the ϱ-allowable linear preorders of B.

8. Finally, Lorenzen 1953 uses the following formulation (see page 174):

> ... one has to construct, for an integrally closed integral domain, either an intersection representation through valuations or a lattice-preordered supergroup.

As these passages show, Lorenzen holds that a well-ordering argument provides a construction, but he makes distinctions: such an argument avers *that* something is possible, but not *how*; other strategies have to be developed in order to gain knowledge of the thing over and above its bare existence. He also specifies for each construction whether it relies on a well-ordering argument or not, in which latter case it is “direct”, or “constructive”. This adjective and the adverb “constructively” have a more restricted use than the word “construction” and mean that the well-ordering argument or the “fiction” of a linear preorder have been avoided.

The distinctions he makes show that, like Krull (1936), he thinks that well-ordering arguments provide only the “mere existence” of the thing constructed. He therefore devises new constructions that bypass them: systems of ideals, super-lattice-preordered groups, the right to compute as if everything were linearly preordered. However, we have not found any passage in which he explains the problem as clearly and simply as Krull does, or in which he motivates his work along the lines of Krull’s letter to Scholz.

* * *

Lorenzen’s reshaping of Krull’s Fundamentalsatz for integral domains can be presented as a process in three steps:

1. Lorenzen 1939 generalises Krull's well-ordering argument from integral domains to preordered cancellative monoids; valuation rings become linear r-supermonoids.

2. Lorenzen 1950 and 1952 successively generalise the well-ordering argument to preordered noncommutative monoids and to domains, so that valuations correspond to r-allowable linear preorders; the right to compute as if the monoid were linearly preordered is embodied in the relation α_r, which is shown to yield finite approximations of them on the proviso that they exist; Lorenzen describes a direct construction of an embedding into a lattice-preordered group on the proviso that it exists.

3. Lorenzen 1953 provides the construction of the free lattice-preordered group generated by a regular noncommutative monoid *without* this proviso by applying Satz 7 of Lorenzen 1951, nowadays called the *fundamental theorem of entailment relations* (see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019, § 2B).

Let us state a further step forward, which Lorenzen does not make:

4. The condition of integral closedness for an integral domain consists in the admissibility of the axiom that divisibility is linear for the formal system generated by the integral domain. The condition of r-closedness for a regular noncommutative monoid consists in the admissibility of the axiom that the preorder is linear.

In the articles discussed here, Lorenzen does not question the existence of a thing provided by a well-ordering argument, but the nonconstructive nature of its existence fails to provide the mathematical clarity needed for extending his work to a noncommutative setting.

The three steps made by Lorenzen are thus genuinely motivated by his endeavour to clarify mathematics, as he writes in his letter to Krull dated 6 June 1944 (page 234, partly translated on page 142), rather than philosophically: viz.,

1. to unveil the order-theoretic nature of the Fundamentalsatz;

2. to devise a counterpart of valuations that works in a noncommutative setting;

3. to bypass valuations by the direct construction of the free lattice-preordered group.

With Step 4 above, dynamical algebra is taking up this process of clarification: see Lombardi in progress.

References

Clifford, A. H. 1940. "Partially ordered abelian groups." *Annals of Mathematics* (2) 41:465–473. doi:10.2307/1968728

Coquand, Thierry, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. 2019. "Lattice-ordered groups generated by an ordered group and regular systems of ideals." *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 49:1449–1489. doi:10.1216/rmj-2019-49-5-1449

———. 2020. "Regular entailment relations." In this volume, pages 101–112.

Coquand, Thierry, and Stefan Neuwirth. 2020. "Lorenzen's proof of consistency for elementary number theory." *History and Philosophy of Logic*. doi:10.1080/01445340.2020.1752034

Krull, Wolfgang. 1926. "Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie." *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Societät zu Erlangen* 56–57 (1924–1925), 47–63.

———. 1930. "Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II." *Mathematische Zeitschrift* 31:527–557. http://eudml.org/doc/168193

———. 1932. "Allgemeine Bewertungstheorie." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 167:160–196. http://eudml.org/doc/149803

———. 1936. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I: Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme und Kroneckersche Funktionalringe." *Mathematische Zeitschrift* 41:545–577. http://eudml.org/doc/168685

Lombardi, Henri. In progress. "Théories géométriques pour l'algèbre constructive." http://hlombardi.free.fr/Theories-geometriques.pdf

Lorenzen, Paul. 1939. "Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie." *Mathematische Zeitschrift* 45:533–553. http://eudml.org/doc/168865

———. 1950. "Über halbgeordnete Gruppen." *Mathematische Zeitschrift* 52:483–526. http://eudml.org/doc/169131

———. 1951. "Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände." *Journal of Symbolic Logic* 16:81–106. http://www.jstor.org/stable/2266681. Translation by Stefan Neuwirth: "Algebraic and logistic investigations on free lattices," http://arxiv.org/abs/1710.08138

———. 1952. "Teilbarkeitstheorie in Bereichen." *Mathematische Zeitschrift* 55:269–275. http://eudml.org/doc/169251

———. 1953. "Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen." *Mathematische Zeitschrift* 58:15–24. http://eudml.org/doc/169331

Mehrtens, Herbert. 1979. *Die Entstehung der Verbandstheorie*. arbor scientiarum: Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte, volume VI in Reihe A: Abhandlungen. Hildesheim: Gerstenberg.

Prüfer, Heinz. 1932. "Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 168:1–36. http://eudml.org/doc/149823

Lorenzen's Correspondence with Hasse, Krull, and Aubert, Together with Some Relevant Documents

edited by Stefan Neuwirth

We propose an edition of the reports on Paul Lorenzen's Ph.D. thesis by Helmut Hasse and Carl Ludwig Siegel, of the known correspondence of Lorenzen with Hasse, Wolfgang Krull, and Karl Egil Aubert, and of a relevant letter from Krull to Heinrich Scholz. It provides evidence for the circumstances in which Lorenzen comes to his insights during the studied period of time.

The reports on Lorenzen's Ph.D. thesis, the letters from Lorenzen to Hasse, and the carbon copies of the letters from Hasse to Lorenzen, are in the University Archive Göttingen. The letters from 1938 are in the Wolfgang Krull Nachlass at Bonn University and State Library. The letters from Krull and Aubert to Lorenzen, the carbon copies of the letters from Lorenzen to Krull from 1943–1944, to Scholz dated 26 May and 2 June 1944, and to Aubert, as well as the "Bescheinigung" from 1942, are in the Paul Lorenzen Nachlass at the Philosophical Archive of the University of Konstanz. The request of statement to and statement from the *Dozentenbundsführer*, the Military Government of Germany *Fragebogen*, the report and certificates on Lorenzen's political attitude under national socialism, as well as the notification on Lorenzen's inaugural lecture, are in the University Archive Bonn. The other letters from Lorenzen to Scholz, the letter from Krull to Scholz, and the carbon copies of the letters from Scholz to Lorenzen, are in the Heinrich Scholz Archive at University and State Library of Münster.

Stefan Neuwirth
Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université Bourgogne Franche-Comté, France,
e-mail: stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr

G. Heinzmann and G. Wolters (eds.), *Paul Lorenzen – Mathematician and Logician*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science 51,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-65824-3_10

1 Synopsis

Let us start with a diachronic synopsis of Lorenzen's (L) correspondence with Hasse (H), Krull (K), and Karl Egil Aubert, together with the relevant correspondence between Hasse and Krull edited by Roquette (2004) (whose dates appear slanted below), of some relevant letters from Lorenzen to Heinrich Scholz, and of some related documents.

14.02.1938 H suggests to K that L spend some time with K in Erlangen to discuss ideal theory.
19.02.1938 L pays a visit to K.
02.03.1938 K expresses his satisfaction with L.
07.03.1938 H joins in this expression of satisfaction.
08.03.1938 L corrects certain points concerning v-ideals and total closedness.
13.03.1938 L finds the proof method of Lorenzen 1939a, § 3.
18.03.1938 L reports a success that will turn out to be spurious.
22.03.1938 L provides a glossary for his multiplicative ideal theory.
03.05.1938 H sends K the carbon copy of L's Ph.D. thesis and asks for a brief report.
22.05.1938 K sends H a very positive report on L's Ph.D. thesis.
24.05.1938 H writes a very positive report on L's Ph.D. thesis.
31.05.1938 H thanks K for his report and joins in his criticism of L's laconic style.
02.06.1938 Carl Ludwig Siegel writes a vacuous report on L's Ph.D. thesis.
09.06.1938 L pays a second visit to K.
21.06.1938 H emphasises his agreement with K on their appreciation of L.
30.06.1938 H tells L that he must meet the *Dozentenbundsführer* [leader of the union of lecturers] and asks a mathematical question.
06.07.1938 L answers H's question from Erlangen. He reports that he is also working on lattice theory with Gottfried Köthe.
01.09.1938 K reports to H that he and L have not been able to repair the defective proofs in L's Ph.D. thesis.
12.03.1939 K has L in mind for a position as assistant in Bonn and asks H whether he would agree to let L leave Göttingen.
17.03.1939 H agrees, but expresses some apprehension about how to replace L in Göttingen.
27.03.1939 K weighs at length the pros and cons of L leaving Göttingen for Bonn.
30.03.1939 H agrees with K that L should leave Göttingen for Bonn.
19.07.1939 K asks H for L's military address in order to tell him that he will be appointed in Bonn from 1 August on.
21.07.1939 H answers that he knows only L's home address in Bad Pyrmont.
09.08.1939 L thanks H for his years of supervision.
11.08.1939 H acknowledges L's thanks.

06.09.1939	War has been declared and L is waiting for his incorporation. He asks H for help in finding a position as a mathematician in the army.
28.09.1939	H suggests to K that L help him by composing a manuscript according to his drafts for a projected volume of *Crelles Journal* on groups.
11.10.1939	L thanks H again on the occasion of the printing of his Ph.D. thesis as an offprint of *Mathematische Zeitschrift*.
10.11.1939	L submits the manuscript of Lorenzen 1940 to H as editor of *Crelles Journal*.
16.11.1939	H acknowledges receipt of L's manuscript and asks a mathematical question.
17.11.1939	H spells out in detail his question from the day before.
13.12.1939	L answers H's question.
04.01.1940	H acknowledges receipt of L's announcement of marriage with Käthe and proposes that L apply for a military position under Alwin Walther by the Baltic sea.
09.01.1940	L thanks H and tells him that he is waiting for K's permission to apply.
10.01.1940	L applies for this military position.
01.02.1940	K informs H that L has been incorporated.
03.02.1940	Käthe Lorenzen does so too.
04.02.1940	L does so himself.
06.02.1940	H answers K and tells him that the process of L's candidature sent to Walther might take some time.
06.02.1940	H answers Käthe Lorenzen along the same lines.
09.02.1940	L asks H as treasurer of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung to waive his member fee.
21.04.1940	L sends an offprint to H and complains about his soul-killing service.
05.05.1940	L tells H that his candidature is still on the way and gratefully accepts a proposition by H to join him at the Oberkommando der Kriegsmarine (OKM, Supreme Command of the Navy).
09.05.1940	H answers that there is a misunderstanding: his proposition concerns a position as a cryptographer under Achim Teubner.
21.05.1940	L thanks H and tells him that he applies for the position under Teubner.
11.06.1940	L sends H some news of his application.
30.06.1940	L reports on his participation in the Battle of France.
23.10.1940	K greets L via H.
14.11.1940	H tells K that he has not seen L for a while and that he hopes to meet him on 30 November.
26.04.1941	L reports on his problems with the military hierarchy and on a little progress in group axiomatics made during a three-days arrest.

07.05.1941 H tells L what he thinks of his insubordination, stubbornness and unmilitariness, and presents Oswald Teichmüller as the example of a correct attitude. He warns L that he will also be judged in his scientific career according to his military attitude. He will not help L anymore, who should now prove his value as a soldier.

07.05.1941 Käthe Lorenzen asks H for advice regarding her husband's difficulties.

17.05.1941 L explains to H his attitude towards the military and asks for permission to write to him about his future assignment.

02.01.1942 K attests that L fulfils the requirements for being admitted to habilitation.

18.03.1942 L thanks H for his congratulations on the occasion of the birth of L's daughter Jutta and for his indication of Jean Dieudonné's interest in multiplicative ideal theory. He expresses satisfaction with his work as a teacher.

02.04.1942 H asks L for advice on a manuscript by Hans R. Weber.

07.04.1942 L answers that Weber's results are already known and can be found in Huntington's work.

12.05.1942 The director of the Mathematical Seminar in Bonn requests a statement of the leader of the union of lecturers on L's ideological and moral prerequisites for being appointed as assistant.

01.06.1942 Ernst Klapp, the representing leader of the union of lecturers, states that his political attitude is unobjectionable, but that he presents certains deficiencies of character that make his admission to lecturership undesirable: a self-conceit that has also prejudiced his career in the army.

07.05.1943 On the occasion of a review of Krull 1943, L makes an analysis of the axiomatics of the star-operation.

20.09.1943 L finds the proof method of Lorenzen 1950, the dynamical method in algebra.

04.01.1944 K discusses the details of the habilitation process with L and projects that it take place at the beginning of the summer term.

06.02.1944 K acknowledges receipt of a letter from H dated 23 January 1944, which must contain a strong criticism of the person and the work of L. He defends L's work in lattice theory, but reckons that L deserves a repeated lesson, so that he proposes to suspend the process of L's habilitation.

06.02.1944 In this letter to L, K expounds several obstacles to his habilitation.

19.02.1944 K acknowledges receipt of a postcard by H that enables him to treat L's habilitation in agreement with H.

19.02.1944 K writes to L that according to H his scientific publications do not suffice for letting him habilitate.

13.03.1944 L answers that he should be judged on his habilitation manuscript and advocates his research in logic as stemming from the same motivation as in algebra.

01.04.1944 K has begun to read L's habilitation manuscript and asks a question related to the condition of regularity (see page 161).

16.04.1944 Upon having received a postcard by L, K denounces the lattice-ordered groups as being "commutatively infected" and expresses his disappointment that the scope of L's work does therefore not cover the full noncommutative generality. He uses this for reiterating his judgment that L's work is not sufficient for a habilitation.

25.04.1944 L describes precisely his achievements, emphasises that his proof method is completely different from that of his Ph.D. thesis, and appends another manuscript in the hope of convincing K to change his mind.

05.05.1944 L writes Scholz an account of his letter to K.

26.05.1944 L accepts Scholz's proposal to contact Köthe.

29.05.1944 K praises the clearness of L's letter and expresses the suspicion that the intricate style of his manuscripts might hide their relevance. He does not, however, change his mind.

02.06.1944 L asks Scholz to send Köthe a copy of his manuscript.

06.06.1944 L motivates his research as a quest for simplicity and conceptual clarification. He also describes the difficult conditions of his work and career.

06.1944 L thanks Scholz for his intercession with Köthe.

22.06.1944 K writes that L's manuscript is a thorough failure and repeats his point with a reference to the requirement of high scientific quality.

28.06.1944 L writes Scholz an account of K's letter.

09.07.1944 L thanks Scholz for his encouragement; Köthe has written to him that he is willing to report on his habilitation; however, L sees no way to change K's negative judgment and to proceed with his project of habilitating.

16.07.1944 K expresses his sympathy with L after the bombing of Wesermünde.

01.10.1944 Although he is still not satisfied, K admits that L has improved his manuscript. He nevertheless suspects that L has not yet settled the noncommutative case, dealing only with a "semi-commutative" one.

25.07.1945 L asks H whether he has some news on the whereabouts of K, Scholz, Ackermann, and Gentzen.

02.09.1945 L reports on his political attitude under national socialism.

03.09.1945 L fills out the Military Government of Germany *Fragebogen*, providing a "chronological record of full-time employment and military service".

06.09.1945 Ernst Peschl certifies L's political attitude.

14.09.1945 A board of examiners (Hellmuth von Weber, Hans Fitting, and Carl Troll) certifies L's political attitude.

07.06.1946 L writes to Scholz that K agrees that he habilitate at once.
08.06.1946 L writes to Scholz about his perspectives in Bonn.
09.08.1946 L is habilitated by giving his inaugural lecture "On the concept of lattice".
15.08.1946 K writes H on the occasion of L's habilitation and expresses his disagreement with H on the scientific value of L's works in lattice theory and logic. But he shares H's objections to L as person.
10.09.1946 K distances himself from "the conception of mathematics as a pure 'theory of structure' in the sense of L (whom [he] tries otherwise to influence vigorously in the opposite direction)".
18.04.1953 K praises L in a letter to Scholz.
14.05.1953 L writes to H on the occasion of his talk on mathematics as science, art, and power (Hasse 1952), and asks him to which extent he considers formalisation as a danger. An annotation shows that H discusses this with L on 3 July 1953.
05.06.1953 H thanks L for his interest and announces that he will shortly pay a visit to Bonn and postpones his answer to that occasion.
09.06.1953 L invites H to his home in anticipation of the latter's visit to Bonn.
07.1959 L gives a sketch of proof of the assertion that the theory of commutative fields is undecidable.
01.08.1959 H has checked L's sketch but for the logical conclusion.
07.03.1960 H thanks L for sending a copy of Lorenzen 1960.
27.06.1961 H thanks L for sending an offprint of Lorenzen 1961 and invites him to give a couple of colloquia in Hamburg about his results on the foundations of mathematics.
04.07.1961 L gratefully accepts and proposes to question how the "assertions used as 'axioms' are to be *proved*".
08.07.1961 H organises L's visit to Hamburg.
11.07.1961 L fixes a last detail of his visit to Hamburg.
09.10.1962 H congratulates L on his appointment as professor in Erlangen and thanks him for the copy of Lorenzen 1962, expressing the hope of finding the time to read it up to the consistency proof for arithmetic.
07.1963 L thanks H for sending him a copy of Hasse 1963b. He considers H's construction of the completion of a valuated field as a flaw.
09.1963 L thanks H for his postcard from Notre Dame. Even though he did not want H to justify himself, he is happy that H agrees that "when one invokes 'all' sequences (e. g. of rational numbers), one always means only 'sufficiently many'". L illustrates his statement that "controlling that everywhere really always only 'sufficiently many' are used, however, is in [his] opinion not trivial" with Lorenzen 1953b.
21.02.1978 Aubert writes to L with an inquiry about K's attitude toward *t*-ideals (see page 150), which he considers "building blocks of

general arithmetics. They seem to form the true arithmetical divisors ...".

06.03.1978 L answers that he had almost no contact with K in Bonn, for "political reasons (K had prevented [his] habilitation during war)" and because of his "foundation-theoretic works that K did not acknowledge as 'mathematical' achievements"; he lost track of *t*-ideals when he focussed on divisibility theory in domains. He asks Aubert in return whether this latter theory has been developed by some algebraist.

10.04.1978 Aubert expands on the importance of *t*-ideals as universal objects and points out the only reference to Lorenzen 1952 that he is aware of.

18.06.1979 L thanks Aubert for sending him his article on divisibility theory and points out that it deals only with commutative groups: "Was the expansion to noncommutative groups perhaps only an intellectual luxury?"

2 The correspondence between Krull and Lorenzen, 1938

19.02.1938. Letter from Lorenzen to Krull

Göttingen, 19.2.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich danke Ihnen für Ihr freundliches Interesse, das Sie meiner Arbeit entgegenbringen,[1] und besonders für die Erlaubnis mit Ihnen persönlich darüber sprechen zu dürfen.

Da ich aus verschiedenen Gründen erst am Mittwoch von hier fahren kann, würde ich mir gestatten, Sie am Donnerstag, dem 24.2., morgens aufzusuchen. Falls Ihnen diese Zeit ungelegen sein sollte, können Sie mir ja dann eine andere Zeit sagen.

Ich freue mich sehr, Sie befragen zu dürfen, und hoffe mir, daß ich Ihnen nicht allzu lästig fallen werde.

Ihr sehr ergebener
Lorenzen.

[1] This interest is subsequent to a letter from Hasse to Krull dated 14 February 1938 (Roquette 2004, § 1.31).

08.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull

Gött., 8.3.
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich möchte Ihnen zunächst noch einmal herzlichst danken für die so sehr freundliche Aufnahme, die ich bei Ihnen gefunden habe.[2] Ich danke auch besonders Ihrer Frau Gemahlin. Es war für mich eine große Freude mit Ihnen über meine Arbeit sprechen zu können.

Was diese anbetrifft, so muß ich leider folgendes richtigstellen:

Sei $\mathfrak{I}$ eine v-abg[eschlossene] Halbgruppe, $\mathfrak{c}$ ein endliches v-Ideal, so folgt ($\mathfrak{I} = (1) = 1$)

$$1 : \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{c} = (1 : \mathfrak{c}^{-1}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{c} : \mathfrak{c} = 1$$

D.h. $\mathfrak{c}$ ist v-umkehrbar, aber $\mathfrak{c}^{-1}$ braucht nicht endlich zu sein.[3] Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ endliche v-Ideale so folgt $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{-1} + \mathfrak{b}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{-1} = 1$ (v-Summe).

Damit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ folgt, muß in $\mathfrak{I}$ die v-Summe zweier echter v-Ideale wieder echt sein. Ist $\mathfrak{I}$ primär,[4] so folgt dies nur für endliche v-Ideale. Wenn etwa gelten würde $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_v = (\mathfrak{a}_v \cup \mathfrak{b}_v)_{v_e}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ käme man auch durch. Aber so ohne weiteres nicht.

Übrigens sind die v_e-Ideale schon in der Arnold schen Arbeit[5] definiert, wie ich jetzt gesehen habe.

Für weitergehende Sätze besteht die Schwierigkeit, daß man aus der v-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{I}$ nicht auch die von $\mathfrak{I}_S$ schließen kann, da aus $\alpha \in (\mathfrak{c}\mathfrak{I}_S)_v$ nicht $\alpha s \in (\mathfrak{c}\mathfrak{I})_v$ $s \in S$ folgt (auch nicht bei endlichem $\mathfrak{c}$!).

Darf ich hier mir vielleicht eine Frage erlauben: Ist in einer speziellen Hauptordnung, stets auch $\mathfrak{I}_S$ spezielle H.?

Auf Ihre Anregung hin, habe ich mir die Arbeit von Akizuki[6] noch einmal angesehen, und habe die Kettensätze für v-Ideale untersucht. Es zeigt sich sofort: die v-Maximalbedingung ist stets mit der schwachen v-Min.bed. gleichwertig, denn sind $\mathfrak{a}_n$ $n = 1, \dots$ irgendwelche Ideale mit $(a) \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq 1$ so folgt zunächst $(a) \subseteq (a)\mathfrak{a}_n^{-1} \subseteq 1$ und für v-Ideale folgt aus $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1}$ bzw. $\mathfrak{a}_n \supset \mathfrak{a}_{n+1}$ sofort $a\mathfrak{a}_n^{-1} \supset a\mathfrak{a}_{n+1}^{-1}$ bzw. $a\mathfrak{a}_n^{-1} \subset a\mathfrak{a}_{n+1}^{-1}$. q.e.d. Weiter folgt aus der v-Max.bed., daß kein v-Id[eal] eine unendliche Basis hat und umgekehrt. (Es kann allgemein aber sein, daß ein Ideal gleichzeitig eine endliche und eine unendliche Basis hat.)

---

[2] This is corroborated by the correspondence between Krull and Hasse dated 2 and 7 March 1938 (Roquette 2004, §§ 1.32, 1.33).

[3] See Lorenzen 1938, 15; Lorenzen 1939a, 538.

[4] See Lorenzen 1938, 32; Lorenzen 1939a, 550.

[5] Arnold 1929.

[6] Most likely Akizuki 1935.

Hieraus ergibt sich ein neuer, in allen Schritten trivialer, Beweis für den Z. P. I.[7] aus der schw. Min.bed. und der totalen Abgeschlossenheit.

Denn jedes Primideal ist minimal, also v_e-Ideal, also v-Ideal wegen der v-Max.bed. Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset 1$ würde also $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})_v \subset 1$ folgen. q.e.d.

Umgekehrt folgt sofort die tot. Abg. und die Max.bed.; da jedes Ideal v-Ideal ist also auch die schw. Min.bed.[8]

Ich bitte um Entschuldigung, daß dieser Brief so lang ist, aber ich dachte, es würde Sie interessieren, denn noch einfacher kann der Beweis jetzt wohl nicht mehr gemacht werden.

Ich bitte um eine Empfehlung an Ihre Frau Gemahlin und um einen freundlichen Gruß an die beiden Kleinen.

Ihr
sehr ergebener
Paul Lorenzen.

13.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull

Göttingen, 13.3.38
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Diesmal muß ich wirklich um Entschuldigung bitten, daß ich Sie schon wieder belästige. Aber es hat sich eine wesentliche Vereinfachung ergeben, die ich Ihnen gerne mitteilen möchte.

Definition: Ein Ideal heißt $\bar{v}$-Ideal, wenn es mit zwei v-Idealen auch deren v-Summe enthält.

Satz: Es gibt stets maximale $\bar{v}$-Ideale.

Definition: Eine Halbgruppe $\mathfrak{g}$ (Quotientengruppe $\mathfrak{G}$) heißt primär, wenn es keine Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_S$ mit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_S \subset \mathfrak{G}$ gibt.

Satz: Eine primäre total abgeschlossene Halbgruppe ist linear.

Die Beweise sind ganz einfach, da mit den $\bar{v}$-Idealen jetzt wohl die zweckentsprechenden gefunden sind.

Besonders bemerkenswert finde ich, daß alle drei Begriffe des Satzes, primär, total abgeschlossen, linear ohne Benutzung eines speziellen Idealsystemes definiert sind. Es würde allerdings genügen die v-Abgeschlossenheit zu fordern.

Mit freundlichem Gruß
Ihr
sehr ergebener
Paul Lorenzen.

[7] "Zerlegungssatz in Primideale", see Krull 1935, 12.

[8] See Lorenzen 1938, § 5; Lorenzen 1939a, § 2.

18.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull

Göttingen, 18.3.
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Endlich kann ich Ihnen mitteilen, daß jede total abgeschlossene Halbgruppe spezielle Hauptordnung ist.[9]

Sei $\mathfrak{g}$ eine Halbgruppe, $a, b, \cdots$ Elemente der Quotientengruppe $\mathfrak{G}$.

Statt $\frac{a}{b} \in \mathfrak{g}$ schreibe ich $a \leq b$.

Definition: Eine Halbgruppe heißt vollständig, wenn es zu zwei Elementen a, b einen g. g. T. $a \vee b$ gibt.[10]

Die Existenz des k. g. V. $a \wedge b = \frac{ab}{a \vee b}$ folgt.

Definition: Eine Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$ heißt g-Modul, wenn sie zu jedem Element a alle Elemente $b \leq a$ und zu zwei Elementen a, b stets $a \vee b$ enthält. Ein g-Modul $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ heißt g-Ideal.

Die Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ heißen ganz, die Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ echt. Ein ganzes Ideal $\mathfrak{p}$ heißt Primideal, wenn die nicht in $\mathfrak{p}$ liegenden Elemente von $\mathfrak{g}$ eine Halbgruppe bilden.

Satz: Jedes echte Ideal besitzt ein Primoberideal.[11]

Satz: Die Primidealquotientenhalbgruppen sind linear.[12]

Satz: $\mathfrak{g}$ ist Hauptordnung.

$$\mathfrak{g} = \bigcap_{\tau} \mathfrak{L}_{\tau} \quad \mathfrak{L}_{\tau} \text{ linear}$$

Ich bezeichne mit a_{τ} das Element a als Element von $\mathfrak{L}_{\tau}$ (den „Wert" von a). Statt 1_{τ} einfach 1.

Darf $\mathfrak{L}_{\tau}$ bei der Darstellung von $\mathfrak{g}$ nicht weggelassen werden, so gibt es ein Element a mit $a_{\tau} > 1$, $a_{\lambda} \leq 1$ für $\lambda \neq \tau$. Und zwar gibt es ein solches Element, derart, daß a_{τ}^{-1} nur ein Primoberideal hat, da man sonst statt $\mathfrak{L}_{\tau}$ eine Primidealquotientenhalbgruppe $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_{\tau}$ von $\mathfrak{L}_{\tau}$ nehmen könnte.

Besitzt $\mathfrak{L}_{\tau}$ mehrere Primideale, so gibt es auch ein Element b mit $b_{\tau} \leq 1$, das mehrere Primoberideale hat. Dann wird

$$(1 \wedge b)(1 \vee a)^{n} \text{ ganz für alle } n$$

$1 \vee a$ nicht ganz.

---

[9] The argument for this assertion, which one can also find in Lorenzen 1938, is not conclusive. Tadasi Nakayama (1942a; 1942b; 1946) shows that the assertion does not hold in general.

[10] See Lorenzen 1939a, Definition 5, reproduced on page 156.

[11] See Lorenzen 1939a, Satz 4.

[12] See Lorenzen 1939a, Satz 10, reproduced on page 156.

Satz: Jede vollständige total abgeschlossene Halbgruppe ist spezielle Hauptordnung.

Ist $\mathfrak{g}$ beliebig total abgeschlossen, so bilden die ganzen v-Ideale eine vollständige total abgeschlossene Halbgruppe womit alles bewiesen ist.

Ich möchte Ihnen, gerade nachdem dieser Beweis jetzt geglückt ist, nochmals herzlichst danken für die schönen Tage in Erlangen, und die ausführlichen, für mich so wertvollen Besprechungen mit Ihnen.

Mit freundlichem Gruß
Ihr sehr ergebener
Paul Lorenzen.

22.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull

Göttingen, 22.3.
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Vielen Dank für Ihre Karte. Anschließend das gewünschte Lexikon:
Es sei $\mathfrak{g}$ eine Halbgruppe, $\mathfrak{G}$ die Quotientengruppe, $a, b, \dots \in \mathfrak{G}$.

Definitionen: a ganz, wenn $a \in \mathfrak{g}$

a Nichteinheit, wenn a ganz
a^{-1} nicht ganz

$a \leq b$, wenn $\frac{a}{b}$ ganz

$\mathfrak{g}$ linear, wenn stets $a \leq b$ oder $a \geq b$

$\mathfrak{g}$ einstufig linear, wenn $\mathfrak{g}$ linear und es zu jedem ganzen a und jeder Nichteinheit b einen Exponenten n mit

$$b^n \leq a \quad \text{gibt.}$$

$\mathfrak{g}$ Hauptordnung, wenn $\mathfrak{g}$ Durchschnitt von linearen Oberhalbgruppen ist.

$\mathfrak{g}$ spezielle Hauptordnung, wenn $\mathfrak{g}$ Durchschnitt von einstufig linearen Oberhalbgruppen ist.

$\mathfrak{g}$ vollständig, wenn jedes endliche v-Ideal Hauptideal ist, d.h., wenn es zu je zwei Elementen a, b stets einen g.g.T. $a \vee b$ gibt.

$\mathfrak{g}$ total abgeschlossen, wenn aus ca^n ganz für alle n, folgt a ganz.

Für Integritätsbereiche entspricht

linear — Bewertungsring
einstufig linear — spezieller Bewertungsring
total abgeschlossen — vollständig ganz abgeschlossen

Das Prinzip, das dem Beweis des Satzes:

Jede total abgeschlossene Halbgruppe $\mathfrak{g}$ ist spezielle Hauptordnung.

zu Grunde liegt, ist der Übergang von der gegebenen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ zur Halbgruppe G der ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$. G muß ebenfalls total abgeschlossen sein, und da G vollständig ist, erweist sie sich leicht als spezielle Hauptordnung. Aus der Durchschnittsdarstellung von G folgt dann die Darstellung v[on] $\mathfrak{g}$ als spezielle Hauptordnung. Ist $\mathfrak{g}$ ein Integritätsbereich so sind die linearen Oberhalbgruppen der Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{g}$, sogar Bewertungsringe. In Ihrer Terminologie, sind es gerade die Bewertungsringe, die zum v-Idealsyst., als arithmetisch brauchbarem System gehören.

Das Unglück der verschiedenen Terminologien liegt vor allem in „vollständig" „total abgeschlossen" und „vollständig ganz abgeschlossen".

Mit freundlichem Gruß
Ihr sehr ergebener
Paul Lorenzen.

09.06.1938. Letter from Lorenzen to Krull

Göttingen, 9.6.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihren Brief danke ich Ihnen vielmals. Etwas Besseres konnte ich mir ja gar nicht wünschen, als daß ich Sie noch einmal besuchen darf. Daß die Arbeit so knapp gefaßt ist,[13] lag z.T. auch am Zeitmangel, da ich ja dieses Semester Examen machen wollte. Wenn dieses nun vorbei ist, werde ich hoffentlich klarer, ausführlicher und deutlicher beschreiben können, was ich meine.

Ehe ich komme, gebe ich Ihnen noch Nachricht.

Mit Ihrem Diskriminantenkriterium[14] ist es mir in der Tat genau so ergangen, wie Sie vermuten. Ich wußte nur noch, daß es den allgemeinstmöglichen Fall enthielt, wußte aber nicht mehr die genaue Formulierung. Ob sich der Hassesche Beweis verallgemeinern läßt, weiß ich nicht, ist ja aber auch nicht so wichtig, da Ihr Resultat vorliegt.

Ich freue mich schon sehr darauf, Sie besuchen zu dürfen.

Mit freundlichem Gruß
Ihr sehr ergebener
Paul Lorenzen.

[13] Compare the criticism in Hasse's letter to Krull dated 31 May 1938 (Roquette 2004, § 1.36).

[14] This probably refers to the "Allgemeiner Diskriminantensatz" of Krull 1939a.

3 The reports on Lorenzen's thesis

[24.05.1938. Report by Hasse]

Mathematisches Institut
der Universität
Prof. Dr. Hasse.

Göttingen, den 24. Mai 1938.
Bunsenstraße 3/5

Siegel

Gutachten über die Dissertation Lorenzen.[15]

Seitdem Dedekind den Idealbegriff in die Arithmetik und Algebra eingeführt hat, sind vielfach Verallgemeinerungen dieses Begriffes vorgenommen worden, mit dem Ziel die Struktur beliebiger Integritätsbereiche ebenso einfach zu übersehen, wie man die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers durch die Dedekindschen Ideale übersieht. Lorenzen entwickelt eine zusammenfassende Theorie aller dieser Idealbegriffe von einem neuen einheitlichen Gesichtspunkt aus. Es erscheint dem Kenner fast paradox, dass dabei die Addition, auf der doch der Dedekindsche Idealbegriff wesentlich beruht, vollständig ausser Betracht gelassen wird, und nur die Multiplikation gebraucht wird. Erst durch diese Lorenzensche Auffassung des Idealbegriffs kommen die Zusammenhänge zwischen der idealtheoretischen und der bewertungstheoretischen Behandlung des Strukturproblems allgemeiner Integritätsbereiche klar und abgerundet heraus. Lorenzen gibt neue verblüffend einfache Beweise für die in dieser Richtung liegenden Sätze von Krull, Prüfer u. a.

Es gelingt ihm ferner, die Identität des Prüferschen mit dem Krullschen Idealsystem zu zeigen und dem Krullschen Hauptsatz über Durchschnitte von allgemeinen Bewertungsringen (beliebige nicht-archimedische Wertgruppe) einen entsprechenden Hauptsatz über spezielle Bewertungsringe (archimedische Wertgruppe) an die Seite zu stellen. Dieser Satz[16] gibt also eine idealtheoretische Charakterisierung derjenigen Integritätsbereiche, die bewertungstheoretisch durch das Positivsein von Exponentenbewertungen mit archimedischer Wertgruppe charakterisiert sind. Ferner gibt Lorenzen auch eine idealtheoretische Charakterisierung der diskreten Bewertungsringe. Diese beiden Charakterisierungen wurden von den Algebraikern lange gesucht. Sie stellen wertvolle wissenschaftliche Ergebnisse dar. Auch

---

[15] This report is written on the basis of a description given in a letter from Krull to Hasse dated 22 May 1938 as proposed by Hasse in a letter dated 2 March 1938 and gratefully accepted by Hasse in letters dated 7 March and 3 May 1938 (Roquette 2004, §§ 1.32–1.35).

[16] The proofs of this and of the next assertion, which one can find in Lorenzen 1938, are not conclusive: see Krull's letter to Hasse dated 1 September 1938 (Roquette 2004, § 1.38). As for this assertion, see footnote 9 on page 190. As for the next assertion, see the counterexample provided by Masayoshi Nagata (1952; 1955).

sonst finden sich in der Arbeit zahlreiche neue Einblicke in die Beziehungen zwischen den verschiedenen in der Idealtheorie studierten Begriffen.

Die Darstellung ist streng axiomatisch und leider von äusserster Knappheit. Für den Druck erscheint mir eine etwas ausführlichere Darstellung erwünscht und ausserdem auch eine stärkere Anlehnung an die Literatur durch Verweise.

Da die Arbeit wesentlich neue und originelle Gedanken enthält und wichtige Ergebnisse bringt, schlage ich die Annahme mit dem Prädikat

ausgezeichnet

vor.

Hasse

[02.06.1938. Report by Siegel]

Eine sorgfältige Nachprüfung der Abhandlung hätte für mich eine Arbeit von mehreren Monaten bedeutet, da der Text an vielen Stellen kaum zu verstehen ist und sich wegen der mangelnden Literaturangaben auch nur schwer ergänzen lässt. Ich muss mich deshalb eines genaueren Urteils über den Wert der Abhandlung enthalten. Das wenige, was ich mit Mühe habe verstehen können, macht den Eindruck, als ob der Verfasser jedenfalls über gute mathematische Fähigkeiten verfügt.

Siegel 1938 VI 2

4 The correspondence between Hasse and Lorenzen, 1938–1942

30.06.1938. Letter from Hasse to Lorenzen

30. Juni 1938.

Prof. Dr. Hasse.

Herrn

Dr. Paul Lorenzen

z. Zt. Erlangen.
per Adresse Herrn Prof. Krull
Burgbergstr. 53.

Lieber Herr Lorenzen,

wie ich eben sehe, ist es erwünscht, wenn Sie sich wegen Ihres Antrages an das Reichsdozentenwerk hier dem Dozentenbundsführer vorstellen. Diesen müssen Sie dann auch fragen, ob Sie sich auch sonst noch bei einem Referenten des Dozentenbundes vorzustellen haben. Die Sache ist nämlich die, dass in den Richtlinien von der Vorstellung bei dem Referenten die Rede ist. So viel ich weiss, ist aber hier in Göttingen gerade ein Wechsel eingetreten. Prof. Schriel, der dieses Amt bisher hatte, gibt es an Prof. Mattiat ab. Ich weiss aber nicht genau, zu welchem Zeitpunkt dieser Übergang erfolgt. Auch ist mir bekannt, dass Prof. Blume, der Dozentenbundsführer, stets Wert auf persönliche Vorstellung der Leute legt, über die er zu berichten hat. Es hat natürlich Zeit, wenn Sie dies nach Ihrer Rückkehr aus Erlangen tun, allerdings bleibt Ihr Gesuch dann so lange liegen.

Im Anschluss an meine letzten Bemerkungen im Seminar habe ich eine Bitte an Sie. Könnten Sie mir wohl mit Hilfe Ihrer idealtheoretischen Fähigkeiten bestimmen, welches die maximalen Primideale des folgenden Integritätsbereiches sind: k sei ein algebraischer Zahlkörper, K ein Funktionenkörper einer Unbestimmten über k als Konstantenkörper, $\mathfrak{O}$ ein Primdivisor ersten Grades von K bez. k und I sei die ganzalgebraisch abgeschlossene Hülle von $i[x]$ in K, wo i die Maximalordnung von k ist. Dieser Integritätsbereich I hängt ersichtlich nur von $\mathfrak{O}$ ab. Mit Bestimmung der maximalen Primideale meine ich eine vollständige Übersicht über diese, von den Primidealen von k und den Primdivisoren von K bez. k aus.

Für Ihre Arbeit mit Herrn Krull die besten Wünsche.

Ich bitte diesen und sich selbst recht herzlich zu grüssen

Ihr [Hasse]

06.07.1938. Letter from Lorenzen to Hasse

Erlangen, 6.7.38.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihre beiden Briefe herzlichen Dank. Da ich erst seit gestern hier in Erlangen bin, konnte ich nicht eher antworten.

Die Referate über die Arbeiten von Krull will ich gern übernehmen, wenn dies noch Zeit bis Ende Juli, Anfang August hat, da ich nicht eher zurück sein werde. [Ich möchte nämlich erst eine Reise durch Bayern anschließen, das ich gar nicht kenne.]

Falls dies zu spät ist, müßten Sie mir schon die Formblätter hierherschicken.

Zu Ihrer mathematischen Anfrage, kann ich Ihnen – nach Besprechung mit Herrn Prof. Krull – nur folgendes mitteilen: Sei – nur der Einfachheit halber – Γ der ganz rationale Zahlring, x eine Unbestimmte. Die maximalen Primideale von $\Gamma[x]$ bestimmen sich dann eindeutig durch eine Primzahl p

und ein Primelement von $P_p[x]$. Eine eindeutige Bestimmung aus den Primzahlen und den Primelementen von $P[x]$ ist dagegen nicht möglich: z. B. $(2, x) = (2, x-2)$.

Ich danke Ihnen für die Mitteilung, dass ich mich zunächst bei Herrn Prof. Blume vorstellen muß. Nach meiner Rückkehr werde ich dies sofort tun.

An meiner Arbeit gibt's hier viel zu tun. Augenblicklich bin ich dabei, für Köthe[17] einen verbandstheoretischen Exzerpt zu machen.

Mit freundlichem Gruß, auch von Herrn Prof. Krull

Ihr

sehr ergebener

Paul Lorenzen.

09.08.1939. Letter from Lorenzen to Hasse

Bonn, 9.8.39.
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor!

Es hat mir sehr leid getan, Sie am 6.8. nicht angetroffen zu haben. Ich hätte Ihnen so gern nochmal persönlich gedankt für die Fürsorge und das große Wohlwollen, das Sie mir während meiner Lehrjahre bei Ihnen stets erwiesen haben.

Aber ich hoffe sehr, daß dazu später einmal Gelegenheit sein wird.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Lorenzen.

11.08.1939. Letter from Hasse to Lorenzen

11.8.1939.

Herrn

Dr. Lorenzen

Bonn a. Rh.
Luisenstrasse 3

Lieber Herr Lorenzen!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Es hat mir sehr leid getan, dass ich Sie vor Ihrer endgültigen Übersiedlung nach Bonn nicht mehr hier

[17] Gottfried Köthe (1905–1989) is professor in Münster from 1937 to 1943, and then until 1946 in Gießen.

sah. Ich wünsche Ihnen alles Gute für Ihre neue Stelle. Ich darf ja sicher sein, dass Sie sich dort sehr wohlfühlen und viele Anregungen für weitere Arbeit bekommen werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir uns immer mal wiedersehen, ist zum Glück gross, denn die mathematische Welt ist doch recht klein. Sehr dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie mir gelegentlich aus Ihrem mathematischen Schaffen etwas für Crelles Journal geben könnten.

Indem ich Sie bitte, Herrn Krull bestens von mir zu grüssen,

bin ich stets in bester Erinnerung an die Zeiten gemeinsamer Arbeit,

Ihr [Hasse]

06.09.1939. Letter from Lorenzen to Hasse

Bonn, 6.9.39.
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor!

Zunächst möchte ich Ihnen herzlichst danken für Ihren freundlichen Brief. Meine Tätigkeit in Bonn, die ich mit soviel Hoffnung aufgenommen habe, erfährt jetzt ein schnelles Ende. Bisher bin ich zwar noch nicht einberufen, sondern warte darauf.

Um diese Wartezeit zu verkürzen, schreibe ich an Sie. Nun weiß ich allerdings nicht, wo Sie augenblicklich sind, aber wäre es Ihnen nicht möglich, für mich eine meine mathematische Ausbildung ausnützende Verwendung zu erreichen? Es ist doch offensichtlich, daß eine Verwendung der Mathematiker als Mathematiker nutzbringender für die Gesamtheit ist als jede andere. Natürlich liegt diese Verwendung auch sehr in meinem eigenen Interesse, hier fallen eben beide Interessen zusammen.

Welche Institute, Werke oder militärische Dienststellen in Frage kommen, weiß ich nicht, aber das aerodynamische Institut z. B. wird doch sicherlich Bedarf an Mathematikern haben.

Es erscheint mir als eine zu billige Phrase, wollte ich Ihnen meine Dankbarkeit im Falle Ihrer Hilfe in dieser Angelegenheit versichern. Habe ich Ihnen doch schon für so vieles zu danken. Ich schreibe daher lieber ganz offen, daß mir sehr viel drangelegen ist und daß ich mich an Sie wende, da ich die Überzeugung habe, daß Sie mir helfen werden.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie bin ich stets

Ihr

Lorenzen.

11.10.1939. Letter from Lorenzen to Hasse

Bonn, 11.10.39.

Sehr geehrter Herr Professor!

Meine Dissertation ist jetzt endlich gedruckt worden. Ich möchte dies zum Anlaß nehmen, Ihnen nochmals meinen Dank auszudrücken für die lange und schöne Zeit, die ich in Göttingen war.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie

Ihr

Lorenzen.

10.11.1939. Letter from Lorenzen to Hasse

Bonn, 10.11.39.

Sehr geehrter Herr Professor,

Im Zusammenhang mit den gruppenaxiomatischen Untersuchungen für Herrn Professor Scholz bin ich auf ein Axiomensystem gekommen, das ersichtlich einfacher ist als die bisher bekannten Systeme. Da dies Ergebnis jedoch völlig aus dem Rahmen der übrigen Untersuchungen fällt, würde ich es gern für sich veröffentlichen und möchte Sie daher fragen, ob eine Veröffentlichung[18] in Crelles Journal möglich ist.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Lorenzen

16.11.1939. Letter from Hasse to Lorenzen

16. Nov. 1939.

Herrn

Dr. P. Lorenzen

Bonn a. Rh.

Luisenstr. 3.

Lieber Herr Lorenzen!

Herzlichen Dank für Ihre kleine Note über Gruppenaxiome. Ich nehme sie gern in Crelles Journal auf, sie scheint ja auf demselben Gedanken

[18] Lorenzen 1940.

zu beruhen, der auch bei der Idealdefinition vorkommt, wo man nur die Subtraktion zu fordern braucht.

Ich habe noch eine kleine Frage zur algebraischen Funktionentheorie. Es handelt sich um die Darstellung der ganzen Divisoren eines Funktionenkörpers durch ganze homogene Ideale eines Integritätsbereichs. Es sei $x_1, \ldots, x_m$ ein Erzeugenden-System des Integritätsbereichs der für x ganzen Elemente des Körpers, wo x ein beliebiges nicht konstantes Element ist. Unter welchen Bedingungen entsprechen dann die ganzen Divisoren des Körpers umkehrbar eindeutig den ganzen Idealen des durch Homogenisierung der $x_1, \ldots, x_m$ entstehenden Integritätsbereichs? Ich kann zeigen, dass dies richtig ist, wenn man $x_1, \ldots, x_m$ als die von 1 verschiedenen Elemente der Basis eines Moduls $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ nimmt, wo $m \geqq 3g$ ist. Ich wüsste aber gern, welcher allgemeine Satz dahintersteckt. Die Bedingung $m \geqq 3g$ garantiert dafür, dass der Modul eine Normalbasis für $\mathfrak{o}$ enthält.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr [Hasse]

17.11.1939. Letter from Hasse to Lorenzen

Mathematisches Institut **Göttingen, den** 17.11.39
der Universität **Bunsenstraße** 3/5

Lieber Herr Lorenzen!

Die Frage in meinem gestrigen Brief war etwas knapp formuliert – ich diktierte einer nicht-mathematischen Dame in die Maschine! Ich will daher etwas klarer auseinandersetzen, was ich meine.

Sei K algebr. Funktionenkörper einer Unbestimmten über Konstantenkörper Ω vom Geschlecht g ($\geqq 1$), mit einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{o}$. Sei $K^{\mathfrak{o}}$ der Integritätsbereich der für alle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K. Man folgert dann leicht aus Riemann–Roch, daß der Ω-Modul $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ (der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{o}^m}$ aus K) für $m \geqq 3g$ den Integritätsbereich $K^{\mathfrak{o}}$ ergänzt, d.h. daß eine Ω-Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ ein Erzeugendensystem für $K^{\mathfrak{o}}/\Omega$ ist.

<u>Beweis.</u> Sei x ein nicht-konst. Element aus K mit einer möglichst niedrigen Potenz $\mathfrak{o}^n$ im Nenner, so ist $K^{\mathfrak{o}}$ die ganzalg.-abgeschl. Hülle von $\Omega[x]$ in K. Eine $\Omega[x]$-Basis von $K^{\mathfrak{o}}$ erhält man, indem man zu jeder Restklasse i mod. n ein Element y_i aus K wählt, dessen Nenner eine möglichst niedrige Potenz $\mathfrak{o}^{e_i}$ mit $e_i \geqq 0$, $e_i \equiv i \bmod n$ wählt ($y_0 = 1$). Da $\dim \mathfrak{o}^e = \dim \mathfrak{o}^{e-1} + 1$ für $e \geqq 2g$ gilt, und $n \leqq g+1$ ist (wegen $\dim \mathfrak{o}^e \geqq 2$ für $e \geqq g+1$), folgt $e_i \leqq 3g$. Für $m \geqq 3g$ enthält also $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ das Erzeugendensystem $x; y_i$ von $K^{\mathfrak{o}}/\Omega$.

Sei jetzt $1, x_1, \ldots, x_r$ ($r = m - g$) eine Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ ($m \geqq 3g$). Ist dann $\bar{\mathfrak{x}} \neq 0$ ein algebr. Punkt von K/Ω (Primdiv. der algebr.-abgeschl. Konstantenerweiterung $\overline{K}/\overline{\Omega}$), so seien

$$x_1(\bar{\mathfrak{x}}) = \bar{a}_1,\ \ldots,\ x_r(\bar{\mathfrak{x}}) = \bar{a}_r$$

als die Koordinaten von $\bar{\mathfrak{x}}$ bezeichnet. Sie beschreiben $\bar{\mathfrak{x}}$ eindeutig, und es gilt

$$\frac{\bar{\mathfrak{x}}}{\mathfrak{o}^m} = \left(x_1 - \bar{a}_1,\ \ldots,\ x_r - \bar{a}_r\right),$$

wo die Klammer rechts nicht etwa ein Ideal bedeuten soll, sondern nur den g. g. T. der eingeschlossenen Hauptdivisoren (definiert durch Minima der Exponenten in der Primdivisorzerlegung in $\overline{K}/\overline{\Omega}$). Entsprechend hat man auch

$$\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}^m} = (1, x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

wenn etwa das Basiselement x_r (als einziges) den genauen Nenner $\mathfrak{o}^m$ hat (d. h. $1, x_1, \ldots, x_{r-1}$ Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m-1}}\right)$ ist). |[2]

Ferner gilt: Ist u ein Element aus $K^{\mathfrak{o}}$, so stellt sich u als Polynom in $x_1, \ldots, x_r$ über Ω dar, dessen Grad $\leqq h$ ist, wenn u in $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right)$ liegt.

Beweis. Es genügt $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right) = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)^h$ zu zeigen. Der Beweis durch vollst. Induktion nach h läuft auf die Feststellung $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m(h+1)}}\right) = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ zurück. Nun zerfallen die natürlichen Zahlen e in Nennerzahlen und Lückenzahlen, je nachdem es in K ein Element mit dem Nenner $\mathfrak{o}^e$ gibt oder nicht ($\dim \mathfrak{o}^e = \dim \mathfrak{o}^{e-1} + 1$ oder $= \dim \mathfrak{o}^{e-1}$ ist). Es gibt genau g Lückenzahlen, und diese gehören der Reihe $1, \ldots, 2g-1$ an. Eine Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m(h+1)}}\right)$ mod. $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right)$ erhält man, wenn man zu jeder natürlichen Zahl $e = mh + \mu$ ($\mu = 1, \ldots, m$) ein Element aus K mit dem Nenner $\mathfrak{o}^e$ bestimmt. Es genügt dann zu zeigen, daß jedes solche e eine Darstellung als Summe einer Nennerzahl $\leqq mh$ und einer Nennerzahl $\leqq m$ hat. Dies leistet aber eine der $g+1$ Zerlegungen $e = (mh-\gamma) + (\mu+\gamma)$ $(\gamma = 0, 1, \ldots, g)$. Ist nämlich μ Lückenzahl, so ist $\mu + \gamma \leqq 3g - 1 < m$, und unter den $g+1$ Zahlen $\mu+\gamma$ ist mindestens eine Nennerzahl, während die Zahlen $mh - \gamma \geqq m - \gamma \geqq 2g$ sämtlich Nennerzahlen sind. Ist aber μ Nennerzahl, so genügt $\gamma = 0$.

Ich setze nun

(1.) $$x_1 = \frac{X_1}{X_0},\ \ldots,\ x_r = \frac{X_r}{X_0}.$$

Dabei sei X_0 ein beliebiges Element $\neq 0$ aus K, wodurch dann $X_1, \ldots, X_r$ bestimmt sind. Man kann dann die obigen Darstellungen der alg. Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ von K/Ω als g. g. T. auch so schreiben:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{(0,\ X_1 - \bar{a}_1 X_0,\ \ldots,\ X_r - \bar{a}_r X_0)}{(X_0, X_1, \ldots\ldots\ldots, X_r)} \qquad (\bar{\mathfrak{x}} \neq 0)$$

$$\mathfrak{o} = \frac{(X_0, X_1, \ldots, X_{r-1}, 0)}{(X_0, X_1, \ldots, X_{r-1}, X_r)},$$

unabhängig von der Wahl der Quotientendarstellung (1.). Nach dem Gaußschen Satz multiplizieren sich die Klammersymbole $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k)$ für den g.g.T. von Elementen $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\ldots$, $\mathcal{U}_k$ aus K formal wie die Polynome $\mathcal{U}_0 t^k + \mathcal{U}_1 t^{k-1} + \cdots + \mathcal{U}_k$ einer Unbestimmten t. Unter Anwendung dieser Multiplikation folgt durch Zusammensetzung der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω aus algebr. Punkten $\bar{\mathfrak{x}}$ von K/Ω (vollst. Systeme Konjugierter!), daß jeder ganze Divisor $\mathfrak{a}$ von K/Ω eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

(2.) $$\mathfrak{a} = \frac{(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{ra})}{(X_0, X_1, \ldots, X_r)^a}, |^3$$

wo a der Grad von $\mathfrak{a}$ ist, ferner $\mathcal{A}_0$, $\ldots$, $\mathcal{A}_{ra}$ homogene Polynome a-ten Grades über Ω in $X_0, \ldots, X_r$ sind.

Von diesen Darstellungen (2.) aus kann man eindeutig die Distributionen $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ erklären. Man wähle dazu für jeden Primdivisor $\mathfrak{x}$ von K/Ω eine besondere Quotientendarstellung (1.), nämlich so, daß $\mathfrak{x}$ zu $(X_0, X_1, \ldots, X_r)$ den Beitrag $\mathfrak{x}^0$ liefert (primitiv für $\mathfrak{x}$). Dann liefert die Festsetzung

(3.) $$\mathfrak{a}(\mathfrak{x}) = \frac{\big(\mathcal{A}_0(\mathfrak{x}), \ldots, \mathcal{A}_{ra}(\mathfrak{x})\big)}{\big(X_0(\mathfrak{x}), \ldots, X_r(\mathfrak{x})\big)^a}$$

ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ aus dem Restklassenkörper $K(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{x}$, und zwar unabh. von der Wahl der für $\mathfrak{x}$ primitiven Quotientendarstellung (1.). Man sieht sofort, daß $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ distributionsganz ist, daß nämlich der Nenner von $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ im Hauptnenner der Koeffizienten von $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{ra}$ aufgeht. Ferner gilt die Regel:

$$\text{aus} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_1(\mathfrak{x})\mathfrak{a}_2(\mathfrak{x}),$$

einfach auf Grund der Gültigkeit des Gaußschen Satzes sowohl für die Multipl. der g.g.T. von Hauptdivisoren als auch für die Multipl. der g.g. Teiler von Hauptidealen.

Um den Weilschen Hauptsatz zu beweisen, muß man dann noch wissen, daß die Definition (3.) im Sinne der Distributionsgleichheit von der Wahl der besonderen zuvor konstruierten Darstellung (2.) unabhängig ist, daß nämlich folgendes gilt: Ist

(2′.) $$\mathfrak{a} = \frac{(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_s)}{(X_0, X_1, \ldots, X_r)^k}$$

irgendeine Darstellung von $\mathfrak{a}$, wo $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\ldots$, $\mathcal{U}_s$ homog. Polynome in $X_0, X_1, \ldots, X_r$ vom Grade k sind, so ist auch

(3′.) $$\mathfrak{a}(\mathfrak{x}) \doteq \frac{\big(\mathcal{U}_0(\mathfrak{x}), \ldots, \mathcal{U}_s(\mathfrak{x})\big)}{\big(X_0(\mathfrak{x}), \ldots, X_r(\mathfrak{x})\big)^k} \qquad \text{(distributionsgleich!)}$$

Ich kann das zwar beweisen, indem ich den alten Schluß mit der algebraischen Gleichung (Charakt. der Nenner durch ganzalgebraische Abhängigkeiten) anwende; dazu brauche ich den Satz auf S. 2 oben. Besser würde mir jedoch der Weilsche Schluß aus *Actualités*[19] gefallen, der darauf beruht, daß die Klammersymbole in diesen Darstellungen auch als Ideale (lineare Komposita!) aufgefaßt werden dürfen, daß also die Gesamtheit der $\mathcal{U}$ mit $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_s) \mid \mathcal{U}$ durch eine homogene lineare Darstellung $\mathcal{U} = \mathcal{F}_0\mathcal{U}_0 + \cdots + \mathcal{F}_s\mathcal{U}_s$ gekennzeichnet ist. Wie ist das genau zu formulieren? Und wie ist es zu beweisen? Das sind meine Fragen. |4

Natürlich wüßte ich gerne eine möglichst allgemeine Regel über die Zuordnung der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω zu homogenen Idealen, möglichst unabhängig von der besonderen Wahl meiner Erzeugenden $x_1, \dots, x_r$.

Können Sie mir da helfen?

Herzlichst Ihr
Hasse

13.12.1939. Letter from Lorenzen to Hasse

Bonn, 13.12.39.

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich muß Sie sehr um Entschuldigung bitten, daß ich Ihnen jetzt erst antworte. Da ich nämlich gerade stark in anderen Fragen drin war, wollte mir durchaus nichts einfallen zu Ihrer Frage. So hab ich schließlich aus der Not eine Tugend gemacht und glaube jetzt Ihre Frage dahin beantworten zu müssen, daß eine Zurückführung der Divisorenteilbarkeit in K 1) auf die Idealteilbarkeit in $\Omega[X_0, \dots, X_r]$ nicht möglich ist mit einem $X_0 \in K$. Denn die ganzen homogenen Polynome in $X_0, \dots, X_r$ sind dann keine ganzen Divisoren, sondern gebrochene Hauptdivisoren.

Wenn man dagegen X_0 als neue Unbestimmte einführt, so gilt zunächst für rationale Funktionenkörper einer Unbestimmten

1) Die homogenen Elemente von $\Omega[X_0, X_1]$ entsprechen umkehrbar eindeutig den ganzen Divisoren von K,
2) Die Idealsummenbildung entspricht der Bildung des g. g.T. von Divisoren.

Für algebraische Funktionenkörper sind in 1) die Elemente durch homogene Ideale (im Sinne der Weilschen Äquivalenz) zu ersetzen, während 2) ungeändert bleibt. Für Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten sind in 1) und 2) die Ideale durch v-Ideale zu ersetzen (und außerdem eine Transzendenzbasis von K auszuzeichnen!)

[19] Weil 1935.

Gleichzeitig übersende ich Ihnen die Korrektur des „Axiomensystems für Gruppen“,[20] für dessen Aufnahme in Ihr Journal ich Ihnen nochmals herzlichst danken möchte.

Mit den ergebensten Grüßen
Ihr
Lorenzen

[1)] Ich nehme die Bezeichnungen aus Ihrem Brief, den ich beifüge.

04.01.1940. Letter from Hasse to Lorenzen

4.1.1940.

Herrn
Dr. Paul Lorenzen

Bonn a. Rh.
Luisenstr. 3.

Lieber Herr Lorenzen!

Ganz überraschend kam mir heute Ihre Vermählungsanzeige nicht. Man spricht in Göttingen schon davon. Nehmen Sie meinen herzlichsten Glückwunsch zu diesem, für Ihr ferneres Leben so bedeutsamen Schritt.

Auch unabhängig von diesem freudigen Anlass wollte ich Ihnen dieser Tage schreiben, und zwar in Verfolg Ihrer damaligen Anfrage nach einer kriegerischen Betätigung. Ich erhielt nämlich kürzlich eine Anfrage von Professor Walther (Darmstadt).[21] Dieser hat den Auftrag, Mathematiker für eine militärische Dienststelle an der Ostsee namhaft zu machen, für die er selbst tätig ist. Die Anstellung dort ist mit der Reklamation vom Heeresdienst verbunden. Die Bezahlung ist gut, Sie würden in Ihrem Falle, unter Berücksichtigung Ihres jetzigen verheirateten Standes – nach Abzug der Kürzungen – RM 418.74 im Monat erhalten. Falls Sie sich dafür zur Verfügung stellen wollen, bitte ich Sie, mir den beiliegenden Bogen ausgefüllt zurückzusenden, anderenfalls leer.

Mit besten Grüssen und Wünschen
Ihr [Hasse]

Anlage.

---

[20] See Lorenzen’s letter to Hasse dated 10 November 1939 on page 198.

[21] Alwin Walther (1898–1967) is a mathematician and engineer at the University of Darmstadt who participates in the V2 program at Peenemünde.

09.01.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Dr. Paul Lorenzen — Bonn, den 9. Januar 1940
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor,

diesesmal habe ich Ihnen wiederum für vieles zu danken. Und zwar zunächst für Ihren schönen Brief vom 18.12. Ich wünschte, ich fände die Zeit, um alles völlig zu verstehen. (Dazu brauche ich ja oft leider sehr viel Zeit!)

Dann danke ich Ihnen herzlichst auch im Namen meiner Frau für Ihre Glückwünsche zu unserer Hochzeit. Augenblicklich wohnen wir in einer möblierten Wohnung, wobei zur Vervollkommnung unseres Glückes eigentlich nur fehlt, daß der Krieg aufhört.

Damit komme ich zum dritten, für das ich Ihnen danken möchte, nämlich für die Übersendung des Fragebogens von Herrn Professor Walther. Da Herr Professor Krull zurzeit in Bonn ist, habe ich ihn zunächst gefragt, ob es mir – als Assistent – überhaupt möglich sei, zuzusagen. Herr Professor Krull hat sich die Antwort für einige Tage vorbehalten, da er der Meinung ist, es sei evtl. zunächst der Kurator zu fragen.

Ich rechne aber damit, sehr bald zusagen zu können und verbleibe bis dahin mit den ergebensten Grüßen

Ihr
Paul Lorenzen

10.01.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Dr. Paul Lorenzen — Bonn, den 10. Januar 1940
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor,

nach erneuter Rücksprache mit Herrn Prof. Krull habe ich die Erlaubnis bekommen, Ihnen den Fragebogen zuzusenden.

Allerdings würde mich das Math. Seminar hier nur sehr ungern gehen lassen, da – zumindestens für das laufende Trimester – ziemlich dringend zwei Assistenten benötigt werden. Falls Herr Prof. Walther mich also für seine Dienststelle gebrauchen könnte, möchte ich ihn bitten, sich dazu an Herrn Prof. Krull als den Direktor des Math. Seminars zu wenden. Da mit meiner Einberufung zum Wehrdienst doch wohl bald zu rechnen ist, würde Herr Prof. Krull in diesem Fall wahrscheinlich zustimmen, falls nicht meine Reklamation für die hiesige Universität sich inzwischen ermöglichen läßt.

Indem ich Ihnen für die viele Mühe, die Sie sich schon wieder für mich gemacht haben (ich hoffe nur, daß es nicht noch mehr wird) nochmals herzlichst danke, verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

Ihr
Paul Lorenzen

03.02.1940. Postcard from Käthe Lorenzen to Hasse

Lorenzen
Bonn, Luisenstr. 3

Herrn
Professor Hasse,
Göttingen
Bunsenstr. 2
Math. Institut

Bonn, 3.11.40

Sehr geehrter Herr Professor,

da ich nicht weiß, ob mein Mann Ihnen schon geschrieben hat, daß er seit dem 19.1. als Soldat eingezogen ist u. gestern die Beitragsrechnung für die Deutsche Mathematiker Vereinigung kam, möchte ich Ihnen doch noch einmal hiervon Mitteilung machen. Wahrscheinlich wird Ihnen mein Mann aber selbst noch davon schreiben, da der Transport jetzt beendet ist.

Mit ergebenen Grüßen

Frau K. Lorenzen.

06.02.1940. Letter from Hasse to Käthe Lorenzen

6.2.40.

Frau
Dr. Lorenzen
Bonn a. Rh.
Luisenstr. 3.

Sehr verehrte Frau Lorenzen!

Von der Einberufung Ihres Mannes erfuhr ich auch durch einen Brief von Professor Krull.[22] Es bleibt nun abzuwarten, ob die Heeresdienststelle an der Ostsee, für die sich Ihr Mann gemeldet hatte, seine Anstellung weiter betreibt und eine Freistellung erreicht. Jedenfalls scheint diese Stelle es nicht sehr eilig zu haben. Herr Eichler,[23] ein Assistent von hier, der sich kurz vor Ihrem Mann dort meldete, und der auch schon persönlich in Berlin mit dem Leiter der Stelle verhandelte, sollte an sich zum 1. Februar eingestellt

[22] Letter dated 1 February 1940 (Roquette 2004, § 1.72).

[23] The mathematician Martin Eichler (1912–1992) will join Walther's team in Peenemünde.

werden, hat aber bis heute keine Nachricht erhalten. Von Ihrem Mann direkt habe ich noch nichts gehört.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener [Hasse]

04.02.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Alsheim, 4.2.

Sehr geehrter Herr Professor,

So leid es mir tut, muß ich Sie – da Sie damals so liebenswürdig waren, bei der Anfrage an Herrn Prof. Walther an mich zu denken – nochmals in dieser Sache belästigen. Ich bin nämlich mittlerweile eingezogen worden. (Wahrscheinlich war das Wehrmeldeamt der Meinung, daß es mir nach meiner Heirat entschieden zu gut ging – – ich muß gestehen, daß diese Meinung nahe lag.)

Alsheim ist ein kleines Nest in der Nähe von Worms. Wir sind recht gut in Privatquartieren untergebracht und beschäftigen uns meist mit Schneeschaufeln. Ich finde das zwar nicht schön, aber es wird nun einmal gerade dieser „Einsatz" von mir gefordert.

Ich möchte Sie nun bitten, falls es nötig sein sollte, Herrn Prof. Walther mitzuteilen, daß ich am 19.1.40 einberufen bin und jetzt unter der Feldpostnummer 38503 c zu erreichen bin.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie verbleibe ich

Ihr

Paul Lorenzen

09.02.1940. Postcard from Lorenzen to Hasse

Gefr. Lorenzen
38503 c

Herrn
Prof. Dr. H. Hasse
Göttingen
Bunsenstr. 3 – 5

9.2.

Sehr geehrter Herr Professor,

Diesmal wende ich mich an Sie als Schatzmeister der D. M. V. und bitte Sie mir den Beitrag für 1940 zu erlassen.

Heil Hitler!

Ihr
sehr ergebener
Paul Lorenzen.

21.04.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

21.4.

Sehr geehrter Herr Professor,

ich freue mich sehr Ihnen aus dem kriegerischen Westen mal etwas so Unpolitisches wie dieses Separatulum[24] zusenden zu können. Für Ihre Vermittlung an Herrn Prof. Walther bin ich Ihnen noch täglich von Herzen dankbar. Es hat sich zwar noch nichts entschieden, ist aber meine einzige Hoffnung in meinem augenblicklichen geisttötenden Zustand, dessen evtl. lange Dauer ja das Schlimmste ist.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie verbleibe ich
Ihr
Paul Lorenzen.

05.05.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Hamburg, 5.5.40.

Sehr geehrter Herr Professor,

vorgestern bekam ich Ihren freundlichen Brief, über den ich mich sehr gefreut habe und für den ich mich vielmals bei Ihnen bedanken möchte.

Muß ich Ihnen doch so dankbar dafür sein, daß Sie auch in Ihrer neuen Tätigkeit gleich wieder an mich gedacht haben, der ich mich hier mit Pferden, Stiefeln, Karabinern u. ä. herumzuquälen habe.

Ich hoffe, daß Sie sich allmählich in Ihre jetzige Beschäftigung hineinfinden und sich die Reminiszenzen an Ihre Staatsexamensängste dabei verlieren werden. Wenn Ihnen genügend freie Zeit bliebe (was aber wohl kaum zu hoffen ist?) könnten Sie ja mit Herrn Rohrbach und Herrn Kochendörffer beinah eine „Filiale“ des math. Seminars Göttingen aufrechterhalten.

Bezgl. meiner Bewerbung für die „Dienststelle an der Ostsee“, die sich in Peenemünde befindet, hat sich noch nichts weiter ereignet. Auf eine direkte Anfrage von mir habe ich noch keine Antwort.

Daher gehe ich mit Freuden auf Ihre Anregung ein. Sie fragen, ob mir die Beschäftigung mit reichlich kniffligen Fragen der praktischen Physik

[24] The only candidate for this offprint seems to be Lorenzen 1939b.

liegen würde. Nun wage ich es natürlich nicht, zu entscheiden, in wieweit ich in Ihrer Forschungsgruppe zu gebrauchen wäre und muß es Ihnen daher überlassen, darüber zu urteilen.

Aber ich darf vielleicht soweit gehn und behaupten, daß mir jede theoretische Tätigkeit ausgesprochen mehr liegt als das, was ich augenblicklich zu tun habe.

Sie werden daher ermessen können, wie sehr froh ich wäre, wenn Sie eine Anforderung des A. A. erreichen könnten.

Zum Schluß erlaube ich mir noch, Sie um Grüße an die Herrn Rohrbach, Köthe und Kochendörffer zu bitten und verbleibe

mit den ergebensten Grüßen an Sie
Ihr
Paul Lorenzen.

09.05.1940. Letter from Hasse to Lorenzen

Oberkommando der Kriegsmarine Berlin, 9.5.1940
M Wa Stb F
Berlin W 35, Tirpitzufer 60–62

Lieber Herr Lorenzen,

Besten Dank für Ihren freundlichen Brief vom 5.5.40. Ich verstehe daraus, dass ich mich wohl nicht genügend klar ausgedrückt habe. In meiner Forschungsgruppe habe ich leider für Sie keinen Platz. Das Referat „Mathematik" ist bereits besetzt, übrigens auch durch einen früheren Göttinger (Schüler von Münzner). Dagegen hatte ich an eine Verwendung entsprechender Art innerhalb der Marine gedacht, wie sie Rohrbach und Kochendörffer im Auswärtigen Amt haben. Es handelt sich dabei um eine besondere Tätigkeit, die mathematische Fähigkeiten voraussetzt, und die etwa dem Lösen von Kreuzworträtseln vergleichbar ist. Sie können sich danach wohl ungefähr denken, was verlangt wird. Wie ich nun heute erfahren habe, hat die Marine in der Tat Verwendung für einen Mathematiker in dieser Stelle. Wenn Sie sich dafür interessieren, so bewerben Sie sich doch bitte unter Berufung auf mich (hinter meinen Namen OKM, M Wa Stb F setzen!) bei Herrn Korvettenkapitän Teubner,[25] Oberkommando der Kriegsmarine, Berlin W 35, Skl(B). Bei dieser Bewerbung müssen Sie sich als Mathematiker für den Dienst in der Dienststelle dieses Kapitäns anbieten, ohne näher auf die Art des Dienstes selbst einzugehen. Sie müssen ferner genau mitteilen, welchem Truppenteil Sie jetzt angehören.

---

[25] Achim Teubner (1905–1945) is officer at the Marinenachrichtendienst (Naval Intelligence Service).

Ob es dann gelingt, Sie dort freizubekommen, ist allerdings eine besondere Frage. Ich habe jedenfalls Kapt. Teubner ein ausführliches Gutachten über Sie gegeben und Ihre besondere Geeignetheit für diese Verwendung hervorgehoben. In der Tat glaube ich, dass von allen Gebieten der Mathematik die Algebra am besten für die fragliche Arbeit zu gebrauchen ist. Bitte lassen Sie mich laufend wissen, was in dieser Sache geschieht, damit ich gegebenenfalls von meiner zentralen Stelle aus helfend eingreifen kann.

Mit bestem Gruss und in der Hoffnung, Sie demnächst hier zu sehen, Ihr

[Hasse]

21.05.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Gefr. Lorenzen 21.5.40
38503 C

Sehr geehrter Herr Professor,

Ihr liebenswürdiger und für mich so erfreuliche Brief erreichte mich mitten in meiner ersten Schlacht, bei der unsre Batterie aber keine Verluste erlitten hat.

Augenblicklich sind wir – für wenige Tage – in Ruhestellung, in der aber leider uns der Dienst nicht das schöne Wetter genießen läßt.

Herrn Korvettenkapitän Teubner habe ich geschrieben und mich für seine Dienststelle als Mathematiker beworben.

Wie sehr ich mich freuen würde, wieder mich mathematisch betätigen zu können, ist wohl überflüssig zu betonen.

Aber ich kann ja leider nichts dazu tun als zu warten.

Von meiner Truppe habe ich nur die Feldpostnummer angegeben, da alles weitere verboten ist. Das O K M wird daraus ja sicherlich auch alles andere ermitteln können.

Indem ich Ihnen von ganzem Herzen danke für Ihre Bemühungen verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Paul Lorenzen.

11.06.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Gefr. Lorenzen
38503 C

Leutnant z. See
Prof. Dr. Hasse
O K M M Wa Stb F
Berlin W 35
Tirpitzufer 60–62

11.6.

Sehr geehrter Herr Professor,

vor wenigen Tagen habe ich vom OKM (3. Abt. Skl.) schon die Aufforderung erhalten meinen ausführlichen Lebenslauf einzuweisen. Mein jetziger Batteriechef wäre mit meiner Abkommandierung einverstanden. Diese beiden Tatsachen zusammen erleichtern mir augenblicklich meinen ziemlich ungemütlichen Aufenthalt in einem selbst gegrabenen Erdloch von 0,8 · 1,5 m (hoch 1,5 m) Aber man darf sich dadurch (d.h. durch dieses dauernde Granatenkrachen) nicht erschüttern lassen – hoffentlich kann ich mich ja bald sinnvoller beschäftigen.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Paul Lorenzen

30.06.1940. Letter from Lorenzen to Hasse

Fxx Vogesen, 30.6.

Sehr geehrter Herr Professor,

darf ich Ihnen, nachdem wir „unsern" Feldzug siegreich beendet haben, von hier, aus ruhiger Stellung, die ergebensten Grüße übermitteln.

Falls mit dieser Besatzungszeit, die hoffentlich nicht lange andauert, der Krieg für uns tatsächlich beendet sein sollte, so wird man nicht sagen können, daß es irgendwie schlimm gewesen sei. Der Durchbruch durch die Maginotlinie hat sich innerhalb zweier Tage vollzogen und danach hatten wir dauernd zu marschieren um hinter den Franzosen herzukommen, bis sie sich dann kampflos schließlich in den Vogesen ergeben haben.

Ich vermute aber stark, daß sich dieser geringe Widerstand hauptsächlich aus den vorangegangenen deutschen Erfolgen erklärt.

Von Herrn Korvettenkapitän Teubner habe ich, nachdem ich meinen Lebenslauf eingereicht habe, nichts mehr gehört. Ich würde mich über meine Abkommandierung natürlich – so lange dieser Krieg dauert (und der kann ja immer noch sehr lange sein) – immer noch sehr freuen, da ich mich sehr nach einer „geistigeren" Beschäftigung sehne, als es hier die Besetzung eines winzigen französischen Dorfes ist.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich stets

Ihr

Paul Lorenzen.

26.04.1941. Letter from Lorenzen to Hasse

Gotenhafen, 26/4

Sehr geehrter Herr Professor,

Wie sich jetzt herausgestellt hat, war meine unglückliche Stimmung, in der ich Sie in Berlin verlassen habe, vollauf berechtigt – obwohl doch alles so günstig aussah.

Ich empfinde es eigentlich als aufdringlich, Sie dauernd mit klagenden Berichten über mein Ergehen zu behelligen – ich kann mich nur damit entschuldigen, daß Sie sich bisher so wohlwollend meiner angenommen haben, und daß es eine menschliche Schwäche ist, ein solches Wohlwollen zu benutzen.

Ehe ich meinen Bericht fortsetze, bitte ich zunächst diese „offene Bemerkung" zu entschuldigen.

Der Kommandeur der Steuermannschule hat entschieden, daß ich aus militärischen Gründen als Lehrer an seiner Schule ungeeignet bin. Dazu hat ihn im wesentlichen die Beurteilung veranlaßt, die meine letzte Dienststelle über mich geschrieben hat, in der nämlich steht, daß ich – kurz und gut – unmilitärisch sei. Hinzu kam noch persönliches Pech, das mich veranlaßt hat, mich nichtsahnend hier am Montag morgen zum Dienst zu melden, was in Berlin völlig korrekt gewesen wäre, hier aber dazu führte, daß ich 3 Tage Arrest bekam, da ich schon seit Sonnabend im Standort war.

Ich darf an dieser Stelle in meinem Bericht etwas Mathematisches einschalten, worüber nachzudenken ich erfreulicherweise während der 3 Tage endlich Gelegenheit hatte:

Nach meiner Notiz über Gruppenaxiomatik, die Sie in Crelle aufgenommen haben, ist eine Menge $\mathfrak{G}$, in der eine stets ausführbare Verknüpfung $a:b$ definiert ist, eine Gruppe, wenn

1) $(a:c):(b:c) = a:b$
2) Es gibt ein a, zu dem für alle c ein b existiert mit $a:b = c$

erfüllt sind. Es war zu vermuten, daß sich 1), 2) zusammenfassen lassen zu einer – naturgemäß komplizierten – Formel. Dies hat sich bestätigt:

Nennt man die Elemente x und $(x:x):x$ invers zueinander und gilt für inverse Elemente a, a' und b, b' stets

$$a : \big(b : \big(a' : \big((b' : d) : (c : d)\big)\big)\big) = c$$

so ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe.[26]

Vermutlich erinnert Sie diese Zusammensetzung sehr an die Allüren der «*Fundamenta mathematica*», was sich vielleicht als Nachwirkung der polnischen Vorinsassen der Arrestzelle erklären läßt.

[26] Compare Lorenzen 1944.

Nachdem diese 3 Tage herum waren, hat man mir erklärt, daß ich abkommandiert würde; man weiß aber nicht wohin, da dieses der 2. Admiral der Nordseestation bewerkstelligt. Dennoch bin ich jetzt also genau so weit, wie zu Anfang des Krieges und möchte Sie daher auch genau wie damals bitten, mir zu einer Beschäftigung zu verhelfen. Irgendwelche Ansprüche zu stellen, steht mir natürlich nicht zu, und ich möchte es auch nicht: mir ist jede Tätigkeit irgendwo in einem Amtszimmer recht. Nur als braver Ehemann, füge ich den persönlichen Wunsch meiner Frau hinzu – der allerdings auch der meine ist – daß sie sich sehr nach einer ruhigeren Zeit sehnt, wozu z. B. Kiel und Wilhelmshaven gar nicht geeignet wären und wegen der Wohnungsverhältnisse auch Gotenhafen und sogar Berlin nicht besonders.

Ihre Behauptung, daß Gotenhafen „widerlich“ sei, ist wirklich nicht zu kraß formuliert. Wir sind hier nur behelfsweise untergekommen, und es scheint auch unmöglich zu sein, eine Wohnung zu finden, was sich ja aber auch erübrigt hat durch den Lauf der Dinge, den ich versucht habe, Ihnen darzustellen.

Mit den ergebensten Grüßen auch im Namen meiner Frau
verbleibe ich
Ihr
Paul Lorenzen.

07.05.1941. Letter from Hasse to Lorenzen

Korv.Kapt. Prof. Dr. Hasse
OKM, M Wa Stb F
Berlin W 35, Bissingzeile 13

Berlin, den 7.5.1941

Lieber Herr Lorenzen,

Ihr Brief hat mich sehr nachdenklich gemacht, und ich halte es für richtig, Ihnen ganz offen zu schreiben, was ich denke.

Ich bin zunächst sehr enttäuscht darüber, dass Sie sich auf dem Kommando, das ich Ihnen vermittelt hatte, eine derartig ungünstige militärische Beurteilung zugezogen haben. Wenn ich mich damals dazu entschlossen hatte, mich für Ihre Verwendung zu geistiger Arbeit einzusetzen, so geschah das selbstverständlich in der Erwartung, dass Sie dieser meiner Empfehlung Ehre machen würden, nicht nur durch Ihre dienstlichen Leistungen – ganz gleich welcher Art diese sein würden –, sondern auch durch Ihr ganzes soldatisches Verhalten. Dass Sie sich selbst als unmilitärisch empfinden und nicht die geringste Begeisterung für das Soldatsein aufbringen, ist in meinen Augen keine Entschuldigung, sondern im Gegenteil genau das, was mir nicht gefällt. Es gibt viele andere junge Wissenschaftler, die da eine durchaus andere und gesundere Auffassung haben, wie etwa Teichmüller, der seine eben erfolgte Abkommandierung zu der gleichen Tätigkeit wie Dr. Franz[27] als eine Herabsetzung empfindet und viel lieber wieder zu seiner Truppe in Norwegen zurückkehren würde. Jeder von uns muss heute seine persönliche Bequemlichkeit und seine eigenen Wünsche zurückstellen und sich in das grosse Ganze willig einfügen. Menschen, die sich dem entziehen wollen, können wir heute nicht gebrauchen, und sie gelten heute mit Recht nichts. Sie sind jung und körperlich kräftig. Sie haben für wissenschaftliche Arbeit noch ein langes Leben vor sich. Ich an Ihrer Stelle wäre glücklich, wenn ich in vorderster Front mit dabei sein könnte, wo immer um unsere Zukunft gekämpft wird. Und wenn Sie schon von sich aus keine Begeisterung für das Soldatsein aufbringen können, dann vergessen Sie doch bitte nicht, dass die Haltung, die Sie heute einnehmen, für alle Zukunft bei Ihrer Beurteilung ganz entscheidend mitspricht. Gerade von der Intelligenz unseres Volkes muss man mit vollstem Recht erwarten, dass sie auf Grund der vertieften Einsicht in die harte Notwendigkeit und tiefste Berechtigung dieses Kampfes mit allem ihren Denken und Fühlen bei der kämpfenden Truppe ist und in ihrer Einsatzbereitschaft allen anderen als leuchtendes Vorbild vorangeht. Es ist grundfalsch zu sagen, dass dies mit Ihrem späteren Beruf als Wissenschaftler nichts zu tun hat. Im späteren Leben werden eben die Menschen nicht nur nach ihren beruflichen Leistungen gemessen, sondern es wird der ganze Mann gewogen. Und es ist voll gerechtfertigt, wenn ein Mann, der in dieser höchsten Bewährungszeit zu leicht befunden wurde, auch für später diesen Stempel auf sich trägt.

Noch ist es für Sie Zeit, den Eindruck, den Sie bei mir und wohl auch schon bei anderen durch Ihre bisherige Haltung erzeugt haben, zu entkräften. Gerade weil ich glaube, dass Sie später einmal in der Wissenschaft vorwärts kommen können, mit Ihren schönen Gaben und Ihrem scharfen Blick für das Wesentliche in komplizierten begrifflichen Zusammenhängen, möchte ich heute Ihren Wunsch nach einer stillen ruhigen Amtszimmertätigkeit, weit entfernt vom Getöse des Krieges, in keiner Weise begünstigen, ganz abgesehen davon, dass ich es aus den genannten Gründen auch vor mir selbst gar nicht verantworten kann, noch einmal bei einer militärischen Dienststelle für Sie einzutreten. Tun Sie zunächst einmal als Soldat Ihre Pflicht – und mehr als das –, wohin auch immer man Sie jetzt stellt. Dann werden Sie später auch für sich selbst das schöne Gefühl haben, sich die Segnungen des kommenden Friedens wirklich verdient zu haben und nicht bloss durch andere mit dem Einsatz ihres Lebens haben verdienen zu lassen.

Mit besten Grüssen, auch an Ihre Frau,

Ihr [Hasse]

[27] The mathematician Wolfgang Franz (1905–1996) works in the Cipher Department of the Supreme Command of the Wehrmacht.

07.05.1941. Letter from Käthe Lorenzen to Hasse

Gotenhafen, 7.5.41
Leuthenstr. 21 b. Gaspersen

Sehr geehrter Herr Professor,

Sie haben durch den letzten Brief meines Mannes ja schon von unserem „Unglück" erfahren. Gewiß hat es meinen Mann nicht unverdient getroffen, da er wohl wirklich geradezu typisch unmilitärisch ist, aber es ist ja nicht damit zu ändern, daß man ihn deswegen bestraft u. in häßlicher Art beschimpft. Aber hier legt man leider mehr Wert auf militärische Erziehung, während wir uns in Berlin schon darauf gefreut hatten, daß das hier mehr in den Hintergrund treten würde. Ich habe schon oft versucht, meinen Mann auf sein unmilitärisches Verhalten aufmerksam zu machen, obwohl ich nicht unbedingt dafür bin, daß er sich grundlegend ändert, aber für Kriegsdauer wäre ich schon damit einverstanden. Das Schlimmste ist, daß sich dies alles, wie man an anderen Mathematikern sieht, noch nicht einmal mit seiner Wissenschaft entschuldigen läßt; und doch ist es ja die einzige Entschuldigung, denn es gibt ja wohl nur sehr wenige Stunden an einem Tage, in denen mein Mann nichts Mathematisches im Kopf hat. Nun erscheint es mir recht bedauerlich – um nicht ungerecht zu sagen – daß er unter Unteroffiziersaufsicht Flure fegt, Striche zieht oder ähnliche Tätigkeiten ausübt. Da ich nun täglich sehe, wie geradezu unglücklich mein Mann sich hierbei fühlt, wage ich es auch persönlich – ohne Wissen meines Mannes – mich an Sie zu wenden. Ich weiß ja gar nicht, wie weit es Ihnen möglich sein wird, an diesem Zustand etwas zu ändern, aber ich vermute doch, daß Sie unter Berücksichtigung der geschilderten Verhältnisse vielleicht schon mit einem guten, „richtigen" Rat helfen können. Ist es wohl nicht möglich, daß mein Mann (den die Marine ja nun auf Kriegsdauer beschäftigen muß u. den sie wegen Seekrankheit nicht auf ein Schiff stecken kann) irgendwo arbeiten könnte, wo er einen vernünftigen Vorgesetzten hat, der nicht <u>nur</u> das Militärische an einem Menschen gelten läßt.

Es ist natürlich eine sehr große Hoffnung mit wenig Aussicht darauf, daß diese Möglichkeit wirklich gefunden werden kann, aber Sie werden das sicherlich am besten beurteilen können, ob es überhaupt noch lohnt, sich an diese Hoffnung zu klammern. Ich denke mir auch, daß Sie am ehesten Gelegenheit haben werden, eine vernünftige, nutzbringende Beschäftigung herauszufinden, denn Sie reisen von dem zentralen Berlin aus ja in ganz Europa herum.

Vor allem aber vertraue ich darauf, daß Sie bereit sind, meinem Mann zu helfen, da Sie bisher schon sozusagen sein „guter Engel" gewesen sind – soweit ich aus Erzählungen weiß schon vor dem Kriege, u. wie ich aus Erfahrung weiß auch im Kriege.

Ich darf Ihnen versichern, wie dankbar ich Ihnen hierfür bin, ohne fürchten zu müssen, daß Sie diesen Dank für eine Phrase halten. Und ich freue mich auch, Ihnen meinen Dank nun auch ganz persönlich aussprechen zu können.

Mit freundlichen Grüßen bin ich

Ihre
sehr ergebene
Käthe Lorenzen.

17.05.1941. Letter from Lorenzen to Hasse

F. B. Gfr. Lorenzen Gotenhafen, 17/5
2. Komg. Strm.schule

Sehr geehrter Herr Professor,

Es fällt mir jetzt wesentlich schwerer, Ihnen zu schreiben, als das letzte Mal, wo es sich um rein militärische Dinge handelte, während ich dieses Mal gezwungen bin, mich persönlich vor Ihnen zu rechtfertigen. Ich kann es nämlich unmöglich ertragen, daß Sie aus meinem letzten Brief, in dem wohl steht, daß ich gern auf Kriegsdauer einem Amtszimmer zugewiesen würde, herauslesen, ich wolle mich drücken.

Ich darf Ihnen ganz kurz meine militärische Vergangenheit schildern: Nach dem freiwilligen Arbeitsdiensthalbjahr habe ich 1933/34 freiwillig aktiv gedient und bin dabei ein Jahr lang im Pferdestall so behandelt worden, daß ich für militärischen Arbeitsdienst, Exerzieren, Ehrenbezeigung erweisen u. ä. keine Begeisterung mehr übrig habe.

Ich sollte das nicht so laut sagen, aber da ich eben so sicher fühle, daß dies nichts mit einem Sich-Drücken-Wollen zu tun hat, unterlasse ich's leider doch selten.

Beim Durchbruch durch die Maginot-Linie habe ich es bestätigt bekommen, daß ich keine Angst vor dem Einsatz des Lebens habe. Dort bin ich nicht als „zu leicht" befunden. Trotzdem bin ich dort gern weggegangen, denn meine Hauptbeschäftigung außer Warten war wieder Pferdepflegen und in Ruhetagen Exerzieren. Ich wollte mich wirklich gerne nützlicher betätigen.

Wie es mir im O. K. M. ergangen ist, wissen Sie selbst. Ich bin viermal bei meinem Vorgesetzten gewesen, um zu sagen, daß ich nun das Abschreiben begriffen habe – wovon man aber keine Notiz genommen hat. Daraufhin habe ich – törichterweise wie immer – Kameraden gegenüber nicht verhehlt, daß ich auch für das Abschreiben keine Begeisterung mehr übrig hätte. Und daher stammt die schlechte Beurteilung.

Ich werde es wohl kaum noch lernen, mich zu verstellen; aber ich sehe ein, daß ich dann kein Recht habe, anders behandelt werden zu wollen, als ein Drückeberger. Da ich jetzt in der Funk-Beobachter-Laufbahn bin, ist es so gut wie sicher, daß ich erst zu meiner Stamm-Abteilung kommandiert werde, wo ich zu warten habe, (d.h. Kasernenreinigen und Exerzieren) bis bei einem

Marine-Nachrichten-Offizier oder in Berlin ein Funk-Beobachter-Gefreiter gebraucht wird.

Obwohl – wie Sie schreiben – nach dem Kriege noch viel Zeit sein wird, Mathematik zu treiben, ist es doch für mich ein bitteres Gefühl, gerade in diesen Kriegsjahren völlig nutzlos sein zu müssen.

Sehr geehrter Herr Professor, ich hoffe mit Zuversicht, Sie werden es mir nicht verargen, daß ich Ihnen so ausführlich und offen meine Einstellung geschildert habe. Der Notwendigkeit, für Deutschland das zu tun, was man von mir verlangt, gleichgültig, ob ich dafür geeignet bin oder nicht, werde ich mich selbstverständlich fügen. Es wäre mir eine große Freude, wenn Sie mir gestatten würden, Ihnen demnächst zu schreiben, wohin ich abkommandiert werde.

Mit den ergebensten Grüßen auch von meiner Frau

Ihr

Paul Lorenzen.

18.03.1942. Letter from Lorenzen to Hasse

Wesermünde, 18/3
4/1 Marineschule

Sehr geehrter Herr Professor,

für Ihren freundlichen Glückwunsch möchten meine Frau und ich Ihnen unsern herzlichsten Dank aussprechen.

Daß unser Töchterlein ebenfalls Jutta heißt, bitte ich nicht als Plagiat auffassen zu wollen – – soweit ich weiß, hat meine Frau davon unabhängig diesen Namen gewählt.

Ich bin Ihnen sehr dankbar für Ihren Hinweis, daß *J. Dieudonné* sich für die multiplikative Idealtheorie interessiert.[28] Es wäre sehr schön, wenn eine „Kollaboration“ sich anbahnen ließe, – – jedenfalls werde ich Herrn *Dieudonné* bald einmal schreiben.

Mit meiner Tätigkeit hier an der Schule bin ich sehr zufrieden, da ich hier, zum ersten Mal im Kriege, das Gefühl habe, nicht überflüssig zu sein.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich

Ihr

Paul Lorenzen.

[28] See Dieudonné 1941.

02.04.1942. Letter from Hasse to Lorenzen

[Betr. Ms. u. Korr.
Hans R. Weber, München]

Korv.Kapt. [Prof. Dr. Hasse]
Berlin-Wannsee
Am Sandwerder 5

Berlin, den 2.4.1942

Herrn
Dr. P. Lorenzen
4/1 M S
Wesermünde

Lieber Herr Lorenzen,

Besten Dank für Ihren freundlichen Brief. Ich sende Ihnen beiliegend eine Korrektur, über die ich gerne Ihren Rat erbitten möchte. Ich hatte damals das Ms. nur mit grossem Zögern Herrn Perron zuliebe angenommen, der es empfahl. Nachdem nun aber der Satz 6, der mich hauptsächlich zur Annahme bestochen hatte, weggefallen ist, glaube ich nicht, dass die Arbeit noch irgendetwas Neues oder Bedeutendes bringt. Wie denken Sie darüber?

Mit besten Grüssen an Sie und Ihre Frau

Ihr [Hasse]

07.04.1942. Letter from Lorenzen to Hasse

Wesermünde, 7/4
4/1 Marineschule

Sehr geehrter Herr Professor,

Das beiliegende Manuskript, das ich heute erhielt, kann ich leider wirklich nicht zur Veröffentlichung empfehlen, denn das Axiomensystem I–III ist schon etwa 1905 von Huntington[29] aufgestellt. Garver[30] hat außerdem inzwischen bewiesen, daß I überflüssig ist. Schließlich läßt sich III noch wesentlich abschwächen, worüber allerdings noch nichts veröffentlicht ist.[31]

Falls Herr Weber sich für diese Dinge interessiert, stehe ich ihm jederzeit nach Möglichkeit zur Verfügung. Vielleicht sind Sie so liebenswürdig Herrn Weber dies mitzuteilen, wenn Sie das Ms. zurücksenden sollten.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich Ihr

Paul Lorenzen

[29] This probably refers to Huntington 1905.

[30] This probably refers to Garver 1934.

[31] Soon after, Lorenzen will submit Lorenzen 1944 to remedy this.

5 Documents relating to Lorenzen's career, 1942

02.01.1942. Attestation by Krull for Lorenzen

Mathematisch-naturwissenschaftliche
Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

J.-Nr. 397

Bonn, den 2. Januar 1942

Bescheinigung

Dem M.Gefr. Dr. Paul Lorenzen wird bescheinigt, dass er die Bedingungen erfüllt, die von der Reichshabilitations-Ordnung für die Zulassung zur Habilitation gefordert werden. Falls Dr. Lorenzen imstande ist eine Arbeit rechtzeitig vorzulegen, die von der Fakultät als Habilitationsschrift angenommen wird, kann das Habilitationsverfahren noch in diesem Semester abgeschlossen werden.

Der Dekan
Krull

12.05.1942. Request of statement from the director of the Mathematical Seminar in Bonn

BUK – Az Lorenzen Bonn, den 12. Mai 1942

1) An den
Herrn Rektor der Universität
Bonn
– mit 2 Durchschlägen –

Der Direktor des Mathematischen Seminars beantragt mit den gegen gefl. Rückgabe beiliegenden Unterlagen Dr. Paul Lorenzen vom 1. Mai 1942 ab zum wissenschaftlichen Assistenten zu ernennen. Ich bitte, die Stellungnahme[32] des Dozentenschaftsleiters und Dozentenbundsführers zu den weltanschaulichen und charakterlichen Voraussetzungen des Vorgeschlagenen herbeizuführen und selbst zu dem Anstellungsantrage zusammenfassend Stellung zu nehmen.

[32] See Segal (2003, pages 174–181) for the signification of the *Dozentenschaft* reports: "Frequently, the *Dozentenführer* had no idea about an individual and had to ask a politically trusted member of his discipline for a report, which would then be passed on verbatim." It is plausible that the views expressed in the subsequent statement are Krull's.

I. A.

2) Wv. 25. Mai 1942.

01.06.1942. Statement by the Dozentenführer

Dozentenschaft der
Universität Bonn

Bonn, den 1. Juni 1942
Poppelsdorfer-Schloß
Fernruf 6294

Jahrbuch-Nr. 112
bei allen Antworten angeben

An
Se. Magnifizenz den Herrn Rektor der
Rhein. Friedr.-Wilhelms-Universität,
Bonn

Betr. Dr. P. Lorenzen, Ihr Schr. v. 16.5.42 Nr. 983

Dr. Lorenzen ist ein vielversprechender Mathematiker mit Begeisterung für seine Wissenschaft und großem Arbeitseifer.

Soweit bekannt, ist die politische Einstellung einwandfrei. Es soll jedoch nicht verschwiegen werden, daß L. wohl einige Charaktermängel aufzuweisen scheint, die es z. Zt. jedenfalls nicht erwünscht erscheinen lassen, ihn etwa zur Dozentur zuzulassen. L. neigt zu starker Selbstüberschätzung, was ihm offenbar auch in seiner Laufbahn bei der Wehrmacht geschadet hat.

Angesichts seiner großen Befähigung ist es daher nur erwünscht, wenn er jetzt Gelegenheit erhält als Assistent zu zeigen, wie weit er sich einzufügen vermag, und wie weit er sich für die Hochschullaufbahn eignet.

Der Antrag des Herrn Direktors des Mathematischen Seminars wird daher befürwortet.

Heil Hitler!
Klapp.[33]
Dozentenführer i. V.

[33] Ernst Klapp (1894–1975) is professor of agricultural sciences at the University of Bonn.

6 The correspondence between Krull and Lorenzen, 1943–1944

07.05.1943. Letter from Lorenzen to Krull

Wesermünde-Lehe, den 7. Mai 1943
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

von den „Fortschritten" erhielt ich Ihren Beitrag VIII[34] über die Λ-Operationen zum Referat.[35] Leider habe ich nun Ihren Beitrag I nicht zur Hand, dessen Kenntnis dazu nötig wäre. Insbesondere weiß ich nicht mehr, ob und in welchem Zusammenhang der folgende Satz darin enthalten ist:

Ist w eine arithmetisch brauchbare Operation eines Integritätsbereiches R (Quotientenkörper K), so entsprechen die arithmetisch brauchbaren $'$-Operationen, für die stets $\mathfrak{a}_w \subseteq \mathfrak{a}'$ gilt, eineindeutig denjenigen Quotientenringen M' des Funktionalringes M mit $M' \cap K = R$.

Dieser Satz läßt sich direkt mit der Halbgruppe der ganzen Idealbrüche beweisen. Denn der Übergang von $\mathfrak{a}_w$ zu $\mathfrak{a}'$ ist nichts anderes als eine homomorphe Abbildung der w-Ideale auf die $'$-Ideale.

Da in Beitrag VIII Ihre Bemerkungen zu den Definitionsformeln der $'$-Operationen (insbesondere Anmerkung 21) leider durch Druckfehler entstellt sind, möchte ich die Abhängigkeiten zwischen den Formeln:

$$
\begin{array}{llll}
1)\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' & 2)\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' & & \\
2')\ (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' & 2''\mathrm{a})\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' & 2''\mathrm{b})\ \mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}' \\
3)\ (a\mathfrak{a})' = a\mathfrak{a}' & 3')\ (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' & & \\
4)\ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' & 4')\ (a) = (a)' & &
\end{array}
$$

hier darlegen.[36]

I. Unter Voraussetzung von 1) ist 2) gleichwertig mit 2″a) und 2″b).

[34] Krull 1943.

[35] The *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ceases to appear with the volume on the year 1942.

[36] Cf. Lorenzen 1950, § 4.

Beweis: Es gelte 1) und 2). Dann gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}'$ nach 1)

und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}'$ nach 2)

also $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}'$,

ferner gilt $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}''$ nach 1)

und $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}'' \subseteq \mathfrak{a}'$ nach 2)

also $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}''$

Es gelte $2''$a) und $2''$b). Dann gilt

$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}''$ nach $2''$a)

also $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}'$ nach $2''$b)

II. Unter Voraussetzung von 1) ist 2) gleichwertig mit $2'$).

Beweis: Es gelte 1) und 2). Dann gilt $\mathfrak{a}' \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})'$

und $\mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})'$ nach $2''$a)

also $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})'$

und $(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}')' \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})'$ nach 2)

Es gelte 1) und $2'$). Dann gilt $\mathfrak{a}'' = (\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}')' = (\mathfrak{a}+\mathfrak{a})' = \mathfrak{a}'$

also $2''$b). Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} &\to \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \\
&\to (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})' = \mathfrak{b}' \\
&\to (\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}')' \subseteq \mathfrak{b}' && \text{nach } 2') \\
&\dot{\to}\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{b}' && \text{nach } 1) \\
\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} &\to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}'
\end{aligned}
$$

III. Unter Voraussetzung von 1) und 2) ist 3) gleichwertig mit $3'$).

Beweis: Es gelte 1), 2) und 3). Dann gilt für $b \in \mathfrak{b}$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}' \cdot b \subseteq (\mathfrak{a} \cdot b)' \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' \\
&\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' \quad \text{nach 3) und } 2''\text{a)}
\end{aligned}
$$

Genau so beweist man $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b})'$

also gilt $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'$ nach $2''$b)

$(\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'$ nach 2) und $2''$a)

Es gelte 1) und $3'$). Dann gilt

$$a \cdot \mathfrak{a}' \subseteq (a)' \cdot \mathfrak{a}' \subseteq \big((a)'\mathfrak{a}'\big)' = (a\mathfrak{a})' \quad \text{nach 1) und } 3')$$

Genau so beweist man $a^{-1}(a\mathfrak{a})' \subseteq (a^{-1}a\mathfrak{a})'$

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(a\mathfrak{a})' &\subseteq \mathfrak{a}' \\
(a\mathfrak{a})' &\subseteq a\mathfrak{a}'
\end{aligned}
$$

IV. Unter Voraussetzung von 3) ist 4) gleichwertig mit $4'$).

Beweis: Es gelte 3) und 4). Dann gilt

$$(a)' = (a \cdot \mathfrak{R})' = a\mathfrak{R}' = a \cdot \mathfrak{R} = (a)$$

Es gelte $4'$). Dann gilt $\mathfrak{R} = (1) = (1)' = \mathfrak{R}'$

Eine $'$-Operation läßt sich also durch 1), $2'$), $3'$), 4) definieren, wobei $2'$) und $3'$) nichts anderes als die Homomorphie aussagen. Sind daher die w- und die $'$-Operationen arithmetisch brauchbar, so hat man eine homomorphe Abbildung der Halbgruppe der w-Ideale auf die Halbgruppe der $'$-Ideale, und damit auch eine homomorphe Abbildung der Halbgruppe $\mathfrak{g}_w$

der ganzen w-Idealbrüche auf die Halbgruppe $\mathfrak{g}'$ der ganzen $'$-Idealbrüche. $\mathfrak{g}_w$ ist vollständig (nach der Terminologie in Prüfer und meiner Dissertation, ich würde jetzt lieber sagen: „$\mathfrak{g}_w$ ist Verbandshalbgruppe"). Die Homomorphismen einer Verbandshalbgruppe entsprechen aber eineindeutig deren Quotientenhalbgruppen. (Das ist Ihr Satz aus Beitrag 1, daß jeder Oberring eines Hauptidealringes stets Quotientenring ist, denn die Homomorphismen einer Verbandshalbgruppe entsprechen eineindeutig den Oberhalbgruppen, die mit a und b auch $a \vee b$ enthalten – vgl. in meiner Dissertation S. 545, Absatz 1 –).[37]

Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir mitteilen würden, ob Ihnen eine arithmetisch brauchbare $'$-Operation bekannt ist, die keine Λ-Operation ist. Es müßte dann $\mathfrak{g}'$ aus $\mathfrak{g}_w$ durch ein multiplikativ abgeschlossenes System S entstehen, das nicht nur Ideale, sondern auch Idealbrüche enthält.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich

Ihr

Lo[renzen]

20.09.1943. Letter from Lorenzen to Krull

Wesermünde-Lehe, den 20. September 1943
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

ich möchte Ihnen mitteilen, daß sich die Identität des r_a-Idealsystems mit dem r_b-Idealsystem auch für beliebige halbgeordnete Gruppen mit beliebigem r-Idealsystem beweisen läßt.

Die Beweismethode liefert für die kommutativen Integritätsbereiche folgende Vereinfachung:

Es sei I ein Integritätsbereich (Quotientenkörper K), $\mathfrak{a}$ ein Dedekindsches I-Ideal, $x \in K$.

Hilfssatz: Ist $a \in K$ ganz abhängig von $\mathfrak{a}I[x]$ und $\mathfrak{a}I[x^{-1}]$, so ist a ganz abhängig von $\mathfrak{a}$.

Beweis: Es gibt endliche Ideale $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ mit

$$\mathfrak{e}_1 a \subseteq \mathfrak{e}_1 \mathfrak{a} I[x]$$
$$\mathfrak{e}_2 a \subseteq \mathfrak{e}_2 \mathfrak{a} I[x^{-1}]$$

Also gilt für $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2$ und geeignete n_1, n_2

37 Lorenzen 1939a, first paragraph on page 545, reproduced on page 156 and spelled out on page 153.

$$\mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, x, \ldots, x^{n_1})$$
$$\mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, x^{-1}, \ldots, x^{-n_2})$$

und daher für $n = n_1 + n_2$

$$\mathfrak{e}a(1, x, \ldots, x^n) \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, x, \ldots, x^n)$$

Satz: Ist a nicht ganz abhängig von $\mathfrak{a}$, so gibt es einen Bewertungsoberring B von I mit $a \notin \mathfrak{a}B$.

Beweis: Es gibt einen maximalen Oberring B von I, für den a nicht ganz abhängig von $\mathfrak{a}B$ ist (Wohlordnungsschluß). Aus $B \subset B[x]$ und $B \subset B[x^{-1}]$ würde folgen, daß a ganz abhängig von $\mathfrak{a}B[x]$ und $\mathfrak{a}B[x^{-1}]$ ist, also von $\mathfrak{a}B$ (Hilfssatz). Also gilt $x \in B$ oder $x^{-1} \in B$.

In Schiefkörpern gilt der Hilfssatz nicht für die übliche Ganzabhängigkeit. Nennt man aber ein Element a

1. d_0-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn $a \in \mathfrak{a}$
2. d_{n+1}-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a d_n-abhängig von $\mathfrak{a}I[x]$ und $\mathfrak{a}I[x^{-1}]$
3. d-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a d_n-abhängig von $\mathfrak{a}$ für mindestens ein n,

so gilt der Hilfssatz für die d-Abhängigkeit. Also gilt auch der Satz für die d-Abhängigkeit. Die Umkehrung des Satzes ist trivial.

Indem ich hoffe, daß Sie diese Mitteilung interessiert hat, verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

[Ihr Lorenzen][38]

[38] The following notes were written on this carbon copy by hand.

Für kom[mutative] Gr[uppen]:

$$a \ \alpha_r \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g} \prec \bigvee_{\mathfrak{e}} \mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{g}$$

Beweis durch Ind[uktion]: $a \ \alpha_r^0 \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g} \prec a \in \mathfrak{a}\mathfrak{g}$

$$a \ \alpha_r^{n+1} \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g} \prec \bigvee_{x} a \ \alpha_r^n \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g}(x)_r \wedge a \ \alpha_r^n \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g}(x^-)_r$$

Ind[uktions]vor[aussetzung] $\prec \bigvee_{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2} \mathfrak{e}_1 a \subseteq \mathfrak{e}_1\mathfrak{a}\mathfrak{g}(x)_r \wedge \mathfrak{e}_2 a \subseteq \mathfrak{e}_2\mathfrak{a}\mathfrak{g}(x^-)_r$

$$\prec \bigvee_{\mathfrak{e}=\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2} \mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, \ldots, x^{n_1})_r \wedge \mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, \ldots, x^{-n_2})_r$$

$$\prec \bigvee_{n=n_1+n_2} \mathfrak{e}a(1, \ldots, x^n)_r \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, \ldots, x^n)_r$$

04.01.1944. Postcard from Krull to Lorenzen

Krull	Sonderführer (M)
Bonn	Dr. Paul Lorenzen
Kaiser-Friedrichstr. 18	Wesermünde
	Hafenstr. 92

Bonn, 4.1.44

Lieber Herr Lorenzen!

Durch den stellvertretenden Dekan, Herrn v. Antropoff erfuhr ich von Ihrem Habilitationsgesuch. Es freut mich sehr, dass Sie so bald nach Ihrem Unteroffizierskurs Ihre Arbeit abschliessen konnten. Dumm ist es nur, dass ich nun das Exemplar, das Sie mir zuschickten, nicht bekommen habe. Es liegt sicher in Greifswald, während ich hier zunächst festgehalten bin, da ich jetzt nach Ablauf meines „Genesungsurlaubs" nochmals – oder richtiger zum ersten Mal, denn ich war bisher dauernd in ambulanter Behandlung – ins Lazarett muss. Vielleicht bitte ich mir da einfach vom Dekan ein Exemplar aus. Allerdings glaube ich nicht, dass Sie schon damit rechnen können, Ende dieses Semesters sich zu habilitieren. Ich muss Ihre Arbeit immerhin ganz sorgfältig durchsehen, um für die Richtigkeit des Inhalts garantieren zu können, Sie wissen ja selber, wie leicht einem bei einer Arbeit gelegentlich ein Fehler unterläuft.[39] Ausserdem weiss ich ja nicht, wie stark mich eventuell die Lazarettbehandlung in anspruch nehmen wird. – Also richten Sie sich am besten gleich für eine Habilitation Anfang des SS ein. Die Themen fürs Kolloquium, die Sie an Herrn Besselhagen[40] geschickt haben, waren ganz passend, zum mindesten angesichts der Tatsache, dass Sie zur Zeit alle Ihre Wissenschaft nebenher arbeiten müssen. Ich würde am liebsten über die Gentzenschen Sachen Sie sprechen hören. – Übrigens, wüssten Sie einen Herrn ausserhalb Bonn, der Ihre wissenschaftlichen Leistungen begutachten könnte? Wir holen hier grundsätzlich bei jeder Habilitation solche Gutachter von auswärts ein. Mit den besten nachträglichen Neujahrswünschen Ihr

Wolfg. Krull.

06.02.1944. Postcard from Krull to Lorenzen

Krull	Sonderführer Dr.
Bonn	Paul Lorenzen
Kaiser-Friedrichstr. 18	23 Wesermünde
	Hafenstr. 92

[39] This is an allusion to Lorenzen's nonconclusive proofs, see footnote 16 on page 193.

[40] Erich Bessel-Hagen (1898–1946) is professor of mathematics in Bonn.

Bonn, 6.2.44.

Lieber Herr Lorenzen!

Leider habe ich die Reste meiner früheren Sonderabzüge irgendwie verkramt. Sobald ich sie aber wiederfinde, bekommen Sie das gewünschte Separat. – Nun aber zu Ihrer Habilitationsschrift.[41] Von Greifswald habe ich bisher nur die Anmerkungen, nicht aber das Manuskript selber bekommen. Hier auf dem Dekanat bekam ich auf mehrfache Anfrage immer nur die Antwort, es sei bisher von Ihnen nichts eingegangen. Das beunruhigt mich doch lebhaft. – Im übrigen, können Sie mir ausser Hasse und Scholz keinen anderen Referenten angeben. Hasse liegt Ihrer eigentlichen Richtung („Verbände") doch ziemlich fern, und Scholz ist halbwegs Philosoph. Dabei sind die auswärtigen Gutachter für mich, vor allem nach dem Standpunkt, den ich als Dekan immer eingenommen habe, sehr wichtig. Ferner bitte ich Sie um eine Zusammenstellung Ihrer bisherigen Veröffentlichungen.

Mit den besten Grüßen

Ihr Wolfgang Krull.

19.02.1944. Letter from Krull to Lorenzen

Bonn, 19.2.44

Lieber Herr Lorenzen!

Leider[42] muss ich mit meinem Brief Ihnen vermutlich eine ernsthafte Enttäuschung bereiten. Erstens: Ihre Habilitationsschrift nebst Bewerbung ist tatsächlich hier nicht eingetroffen. Wenn ich Ihnen früher in anderm Sinne schrieb, so nur deshalb, weil ich mich ohne Rückfrage bei dem Dekanat auf einen Brief verliess, den mir Besselhagen zur Verfügung gestellt hatte, und in dem Sie von Ihrem Schritt beim Dekanat als von einer Selbstverständlichkeit sprachen. Zweitens: Es ist in gewissem Sinne ein Glück, dass Ihr Gesuch verlorengegangen ist, wenigstens wenn Sie, wie ich hoffe, noch ein Exemplar Ihrer Arbeit in Händen haben. Prof. Hasse, auf dessen Gutachten Sie ja selber besonderen Wert legten, hat sich keineswegs so geäussert, wie Sie es wohl erwarteten. Er ist der Ansicht, dass Sie bisher noch sehr wenig mathematische Leistungen von wirklichem Belang aufzuweisen haben, und mit dieser Stellungnahme in der Hand ist es mir unmöglich, Ihre Habilitation im Augenblick zu befürworten, zumal da ich Hasses Bedenken beim Betrachten

[41] On the same day, Krull answers a letter from Hasse dated 23 January 1944 (Roquette 2004, § 1.89) that must contain a harsh criticism of Lorenzen and a refusal to write a report on Lorenzen's habilitation. Krull takes Lorenzen's defense, "at least scientifically", but concludes that "he is still so self-confident that a repeated lesson would do no harm at all".

[42] On the same day, Krull writes an answer to a postcard by Hasse (Roquette 2004, § 1.90), with whom he agrees on how to answer to Lorenzen.

der Liste Ihrer bisherigen Veröffentlichungen sehr gut verstehe. Auch für mich zählt von diesen außer der Dissertation eigentlich nur die im Druck befindliche Arbeit über den Verfeinerungssatz, und diese in gewissem Sinne nur halb, da mir die logistische Seite zu fern liegt. Natürlich bestände noch die Möglichkeit, dass Sie mir als Habilitationsschrift nicht nur eine solide, sondern eine ganz aussergewöhnliche Leistung vorlegen, der gegenüber alle Bedenken verstummen. Aber das halte ich nach dem, was ich bisher von Ihrer Arbeit weiss nicht für wahrscheinlich, und so kann ich Ihnen im Augenblick nur den einen Rat geben: Betrachten Sie Ihr Habilitationsgesuch als nicht erfolgt, legen Sie zunächst mir Ihre Arbeit vor, – (hoffentlich ist das Manuskript, das Sie nach Greifswald sandten, dort angekommen), – und wenn mir die Arbeit doch allein für die Habilitation noch nicht auszureichen scheint, so arbeiten Sie eben weiter. Suchen Sie vor allem Ihre Basis zu erweitern und auch unter den reinen Mathematikern bekannt zu werden. Prof. Scholz kommt als Philosoph mit mathematischen Interessen für mich nur als Mitbegutachter, nicht als Hauptreferent inbetracht, das müssen Sie immer berücksichtigen.

Es tut mir leid, wenn ich Ihnen mit diesem Brief, wie schon einmal früher, eine Enttäuschung bereiten muss, aber glauben Sie mir, es ist in Ihrem eigenen Interesse.

Mit den besten Grüssen

Ihr Wolfgang Krull.

13.03.1944. Letter from Lorenzen to Krull

Dr. Paul Lorenzen

Wesermünde-Lehe, den 13.3.44
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

ich bitte zu entschuldigen, daß ich auf Ihren Brief erst heute antworten kann. Durch die gegenwärtige starke dienstliche Inanspruchnahme sind die neuen Exemplare meiner Arbeit erst jetzt fertig geworden. Hoffentlich gelangt die Arbeit diesmal aber nun auch wirklich und endlich in Ihre Hände – darf ich Sie wohl bitten, mir den Eingang bestätigen zu wollen?

Allerdings werde ich befürchten müssen, daß meine Arbeit jetzt eine ungünstigere Aufnahme finden wird, als sie vor einem Vierteljahr gefunden hätte, da Sie mir schreiben, daß meine Habilitation unter normalen Umständen kaum möglich sein wird.

Ihrer Meinung, die auch die Meinung von Herrn Prof. Hasse ist, daß meine bisherigen Veröffentlichungen „keine Leistungen von wesentlichem mathematischen Belang" sind, möchte ich durchaus nicht widersprechen. Hierin bin ich völlig Ihrer Meinung, ein anderes Urteil wäre wohl auch kaum möglich.

Mit meinem Anliegen, mich zu habilitieren, stütze ich mich ja aber nicht auf diese bisherigen Veröffentlichungen, sondern auf die Habilitationsarbeit.

Soweit ich weiß und aufgrund der „Bescheinigung“, die Sie mir vor zwei Jahren ausstellten, annehmen mußte, bestehen keine Bestimmungen, die die Habilitation von vorausgegangenen Veröffentlichungen abhängig machen. Es ist der Nachweis wissenschaftlicher Tätigkeit zu erbringen – und da ist es nun ja nicht meine Schuld, daß ich die letzten vier Jahre hierfür – ganz allein auf mich gestellt – nur die dienstfreien Abende zur Verfügung hatte. (Daß ich diese voll ausgenutzt habe, werde ich aber sagen dürfen.) Sämtliche Examensbestimmungen, die für die Kriegszeit erlassen sind, gehen darauf hinaus, daß die notwendig entstehenden Härten für den Examinanden nach Möglichkeit auszugleichen sind. Mir scheint daher mein Wunsch, mich jetzt – 6 Jahre nach meiner Promotion – zu habilitieren, durchaus gerechtfertigt, da ich mich normalerweise doch schon vor mindestens 3 Jahren hätte habilitieren können.

Da ich nicht weiß, wie lange der Krieg noch dauert, und wie die Arbeitsbedingungen für mich werden, müßte ich, wenn Sie meine Habilitation jetzt ablehnen, die beiliegende Arbeit zurück erbitten – und weiterarbeiten, wie Sie mir schreiben. Allerdings muß ich dann noch damit rechnen, daß meine Arbeit völlig unnütz ist, weil Sie sie nicht gelten lassen werden. Im Anschluß an eine algebraische Untersuchung über orthokomplementäre Halbverbände versuche ich jetzt, den Zusammenhang dieser Fragen mit der Widerspruchsfreiheit der klassischen Logik herauszubekommen. Diesen Versuch möchte ich machen selbst auf die Gefahr hin, daß das evtl. Ergebnis von Ihnen gar nicht gezählt wird – weil ich nicht umhin kann, solche Fragen als Fragen von wesentlichem mathematischem Belang zu empfinden (und in dieser Auffassung der Logistik darf ich mich sogar auf Hilbert berufen).

Ich möchte Sie daher bitten, mir sagen zu wollen, ob es unmöglich ist, sich als Mathematiker zu habilitieren, wenn man etwa entschlossen ist, die eigene Forschungsarbeit an mathematisch-logistische Dinge zu wenden.

Diese Voraussetzung trifft allerdings auf mich noch nicht einmal zu, da ich selber eigentlich viel mehr an der algebraischen Seite der Beweistheorie interessiert bin als an der rein logischen. Genau dasselbe Interesse würde ich auch daran haben, die Fragestellungen der algebraischen Geometrie begrifflich zu durchdringen, in dem Sinne, wie es etwa die beiliegende Arbeit für die multiplikative Idealtheorie versucht. Aber auch auf diesem Gebiete fürchte ich, daß meine Auffassung von der Ihrigen abweicht. Z. B. erscheint mir die Erkenntnis, daß ein Idealsystem eigentlich nichts anderes als ein Oberhalbverband und eine Bewertung nichts anderes als eine Ordnung ist, als das wesentlichste Ergebnis meiner Bemühung. In diesem Sinne läßt sich sogar der Inhalt von § 6 als auf rein halbordnungstheoretischen Tatsachen beruhend erkennen, worauf ich aber in der Arbeit nicht näher eingegangen bin.

Es bleibt mir auch an dieser Stelle nur übrig, zu fragen, ob ich mit einer solchen Auffassung habilitationsfähig bin oder nicht.

Wenn das nicht der Fall sein sollte, so sehe ich eigentlich nicht, was ich anderes machen sollte, als mich nach einem anderen Beruf umzusehen, denn es wird schwer sein, meine Auffassung über den Sinn der mathematischen Forschung zu ändern.

Es wird jedoch ebenfalls sehr schwer für mich sein, mein Habilitationsgesuch als nicht geschehen zu betrachten, nachdem ich meine Absicht, mich zu habilitieren, ja nicht nur Ihnen gegenüber geäußert habe.

Ich möchte nichts unternehmen, was Ihrem Ratschlag widerspricht, muß aber doch um Verständnis bitten, daß ich mich nicht einfach damit abfinden kann, die Habilitation auf später zu verschieben, da ich entweder in den nächsten Jahren gar nicht werde arbeiten können, oder aber damit rechnen muß, daß meine Arbeit nicht gezählt wird.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich
Ihr
Paul Lorenzen

Für die Übersendung der beiden Separata bin ich Ihnen sehr zu Dank verbunden.

01.04.1944. Postcard from Krull to Lorenzen

Reg.Rat Prof. Krull
Greifswald
Mar[ine]obs.

Herrn Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde-Lehe
Hafenstr. 92

Greifswald, 1.4.44

Lieber Herr Lorenzen!

Auf Ihren ausführlichen Brief vom 13.3. möchte ich Ihnen heute noch nicht im Einzelnen antworten. Zunächst nur das eine, dass ich Ihre Arbeit ohne jedes Vorurteil, zum mindesten ohne jedes ungünstige, zu lesen angefangen habe. Indessen bin ich schon auf S. 8 auf eine Schwierigkeit gestossen, die ich Sie bitten muss, mir aufzuklären, da ich durch andere Untersuchungen (Korrelationstheorie) zu stark inanspruch genommen bin. Sie schreiben bei Satz 4:[43] „Aus $c \equiv a \cdot b^{-1}$ und $a \parallel b$ folgt $a \equiv b \cdot c$". D.h. aber anders ausgedrückt: „Aus $a \wedge b \equiv 1$ folgt $a \equiv bab^{-1}$", und diese Tatsache, die wenn richtig, unbedingt eine Formulierung als Satz verdient hätte, (weil hier ein sehr starkes kommutatives Element ins Nichtkommutative hineinkommt), konnte ich jedenfalls aus dem Handgelenk heraus nicht beweisen. Andernfalls scheint der weitere Wortlaut Ihres Textes zu zeigen, dass keineswegs nur ein Schreibfehler vorliegt, dass Sie nicht etwa $c \cdot b$ meinten und $b \cdot c$ schrieben. – Also bitte, klären Sie mir diesen Punkt auf!

[43] See Lorenzen 1950, Satz 4.

Mit den besten Grüßen Ihr Wolfgang Krull.

16.04.1944. Letter from Krull to Lorenzen

Greifswald, 16.4.44

Lieber Herr Lorenzen!

Vielen Dank für Ihre Karte! Dieser Punkt wäre also geklärt. Also die Tatsache, dass aus $a \wedge b \equiv 1$ stets $a \cdot b \equiv b \cdot a$ folgt, sollte unbedingt als Satz formuliert werden. Nicht nur, weil erst dadurch der Beweis von Satz 4 ganz in Ordnung kommt. Es handelt sich auch darum, zu zeigen, wie stark die Verbandsgruppen „kommutativ infiziert sind". – Und hier wären wir nun an einem Punkt, über den ich etwas ausführlicher werden muss. Ihre Arbeit hat mich insofern etwas enttäuscht, als sie doch anscheinend fürs Nichtkommutative wesentlich weniger bringt, als ich mir gedacht hatte. Im Verbandsbegriff steht eben ein so starkes kommutatives Moment, dass bei der Theorie Ihrer Verbandsgruppen die Beweise für kommutativ und nichtkommutativ völlig gleich laufen. Andererseits bedeutet die Beschränkung auf Verbandsgruppen vom Nichtkommutativen aus gesehen offenbar eine sehr starke Beeinträchtigung der Allgemeinheit. – Unter diesen Umständen hätte ich aber Ihre Arbeit auch ohne die Stellungnahme von Hasse nicht als Habilitationsschrift empfehlen können. Dazu bewegt sie sich doch gar zu sehr im Gedankenkreise Ihrer Dissertation. Aber natürlich bedeutet dieses Urteil keineswegs, dass ich Ihre Arbeit „nicht als mathematische Leistung zähle"; und wenn Sie mich mit weiteren Veröffentlichungen belehren würden, dass Ihre Methoden doch auch fürs Nichtkommutative grössere Bedeutung haben, als es mir bis jetzt scheint, so sollte mich das nur freuen. Das wäre eine Arbeitsrichtung, in der ich Sie lieber sehen würde als in der nach der Logistik hin. Ich halte die Spezialisierung nach der logistischen Seite hin nun einmal für nicht unbedenklich, so fern es mir liegt, bestreiten zu wollen, dass auch auf diesem Gebiete Bedeutendes geleistet werden kann (man denke nur etwa an Gödel oder Gentzen). – Also wenn Sie glauben, wirklich wesentlich neue Gedanken zur Beweistheorie zu haben, so lassen Sie sich ja nicht abhalten, sie auszuarbeiten. – Was die Tatsache angeht, dass Sie schon an verschiedenen Stellen über Ihre baldige Habilitation geredet habe, so war das eine Unvorsichtigkeit von Ihnen, die mir eigentlich unverständlich ist. Über solche Dinge redet man doch erst dann, wenn man seiner Sache absolut sicher ist. Und wo es möglich ist, wie in Ihrem Falle, legt man doch zu allererst die zukünftige Arbeit ganz persönlich dem voraussichtlichen Referenten vor, und macht die weiteren offiziellen Schritte erst im Einverständnis mit ihm! Wenn Sie so vorgegangen wären, wären Ihnen alle Peinlichkeiten erspart geblieben. Aber natürlich helfe ich Ihnen auch jetzt gerne so viel ich kann. Ihrer Dienststelle gegenüber wird es Ihnen ja nicht schwer fallen, irgend einen formalen Grund für die Hinausschiebung Ihrer

Habilitation zu erfinden. Unserm Dekan gegenüber brauchen Sie einfach von der Sache nicht mehr zu reden oder zu schreiben; dann wird er nicht mehr daran denken. Und Besselhagen und Peschl kann ich ja sagen, ich hätte gewünscht, dass Sie Ihre Untersuchungen über das bisher Vorliegende, zunächst zu Veröffentlichende hinaus und weiter aufs Nichtkommutative ausdehnten. Sie sehen, ich helfe Ihnen gerne, wo ich kann. – Was übrigens die Form der Veröffentlichung der bisherigen Ergebnisse angeht, so müssen wir uns darüber ein anderes Mal unterhalten. Ich glaube, Sie müssen die Sache im Sinne der Entlastung von allen irgendwie entbehrlichen Hilfsbegriffen sehr stark kürzen, wenn Sie wollen, dass ein gewisser Kreis von Fachgenossen sich die Arbeit wirklich genauer ansieht. Aber wie gesagt, davon das nächste Mal!

Mit den besten Grüßen Heil Hitler!
Ihr Wolfgang Krull.

25.04.1944. Letter from Lorenzen to Krull

Wesermünde, den 25.4.44
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

Ihren Brief habe ich vor einigen Tagen erhalten. Ich danke Ihnen für Ihre Freundlichkeit, mir in den Schwierigkeiten, die durch Ihr ablehnendes Urteil entstehen, helfen zu wollen. Allerdings bitte ich zuvor, mir erlauben zu wollen, mich gegen das Urteil, daß sich meine Behandlung der nichtkommutativen Gruppen „zu sehr in dem Gedankenkreis meiner Dissertation" befinde, zu verteidigen.

Die Sätze der §§ 1–3[44] sind allerdings tatsächlich im Anschluß an meine Dissertation entstanden. Ich habe damals die nichtkommutative Theorie jedoch liegen lassen, weil mir diese Übertragung vom Kommutativen aufs Nichtkommutative nicht interessant schien (mit Ausnahme der Regularitätsbedingung) – und vor allem, weil es aussichtslos war, die wesentlichen Bestandteile der kommutativen Theorie: die Konstruktionen des a-Idealsystems und der Gruppe der Idealbrüche auch im Nichtkommutativen durchzuführen.

Die Prüfersche Definition des a-Systems liefert im Nichtkommutativen nämlich kein Idealsystem. Andererseits kann man im Nichtkommutativen aus einer Halbgruppe mit $ac = bc \Rightarrow a = b$ keine Quotientengruppe konstruieren.

Erst nachdem mir – vor etwa 4 Jahren – endlich klar wurde, daß ein Idealsystem nichts anderes als ein Halbverband ist, ergab sich plötzlich die Möglichkeit, die Konstruktion der Gruppe der Idealbrüche durch etwas

[44] See Lorenzen 1950, §§ 1–3.

ganz Neues zu ersetzen: nämlich durch eine iterierte Anwendung des Idealbegriffs. Jede minimale Oberverbandsgruppe einer halbgeordneten Gruppe G ist das v-Idealsystem eines Idealsystems von G. Das ist der Inhalt von § 4.[45]

In der Hoffnung, auf dieser Grundlage die Theorie, sowie einige Ansätze über geordnete Gruppen, während eines Arbeitsurlaubs ausbauen zu können, habe ich Sie damals um Zulassung zur Habilitation gebeten.

Ich war mir bewußt, daß es erwünscht gewesen wäre, wenn ich ein Thema beantwortet hätte, dessen Fragestellung nicht in die Richtung der Dissertation fiel – hätte ich auch nur einmal wenigstens einige Literatur zur Einarbeitung in ein neues Problem zur Verfügung gehabt, so hätte ich das bestimmt vorgezogen.

Unter den gegebenen Umständen schien mir jedoch meine Bitte um Zulassung zur Habilitation nicht unangemessen zu sein.

Nachdem damals dieser Arbeitsurlaub sich wegen meiner Versetzung nach hier nicht verwirklichen ließ, hat sich nun inzwischen herausgestellt, daß der kommutative Aufbau:

1) Definition des a-Idealsystems nach Prüfer
2) Konstruktion der Idealbrüche (bzw. der Funktionale)
3) Identitätsbeweis des a- und b-Systems mit Hilfe der Idealbrüche bzw. Funktionale

im Nichtkommutativen wieder durch eine ganz andere Methode ersetzt werden muß. Zur Erläuterung dieser neuen Methode bitte ich Sie, die beiliegende Bemerkung durchblättern zu wollen. Diese Bemerkung ist vorläufig nicht zur Veröffentlichung bestimmt, sie soll nur versuchen, Ihnen darzulegen, daß diese Methode, deren Grundgedanke in § 6[46] meiner Arbeit enthalten ist, durchaus verschieden von den Methoden meiner Dissertation ist. Denn ich werde sagen dürfen, daß die Erkenntnis, daß solche Sätze wie die bewertungstheoretischen Fundamentalsätze mit rein halbordnungstheoretischen Mitteln zu erhalten sind, durchaus nicht im Gedankenkreis meiner Dissertation zu finden ist.

Als dritte „neue Methode“ hat meine Arbeit den Satz 3 der beiliegenden Blätter aufzuweisen, dessen Anwendung auf halbgeordnete Gruppen der Teil 2 meiner Arbeit durchführt.

Aufgrund dieser Ergebnisse – und gerade weil die entscheidenden Methoden von meiner Dissertation völlig abweichen trotz der gleichen Fragestellung – habe ich vor gut einem halben Jahre Ihnen mitgeteilt, daß ich glaubte, die Arbeit nun abschließen zu können. Wenn ich die Angelegenheit dann etwas überstürzte, so bitte ich das entschuldigen zu wollen, weil mir ausgerechnet mein militärischer Kursus dazwischen kam.

Mit den ergebensten Grüßen und nochmaligem Dank für die Mühe, die Sie sich in meiner Sache geben, verbleibe ich

---

[45] See Lorenzen 1950, § 4.

[46] See Lorenzen 1950, § 6.

[Ihr Paul Lorenzen][47]

29.05.1944. Postcard from Krull to Lorenzen

Sonderführer Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Hafenstr. 92

Lieber Herr Lorenzen! Greifswald, 29.5.44

---

[47] In a letter to Scholz dated 5 May 1944, Lorenzen gives an account of this writing,

> die darlegt, daß gewisse Fundamentalsätze der Krullschen Bewertungstheorie nicht nur für halbgeordnete Gruppen gelten, sondern sogar für beliebige halbgeordnete Mengen.
>
> Allerdings zweifle ich daran, ob gerade dieses Ergebnis, das der neuen Methode meiner Arbeit zu danken ist, sich dazu eignet, die Meinung von Herrn Prof. Krull zu meinen Gunsten zu wenden.
>
> Ich versuche, diese Fatalität in stoischem Sinne zu ertragen, es ist mir dabei aber ein schöner Trost, Ihnen darüber schreiben zu dürfen.

On 26 May 1944, he addresses the following letter to Scholz:

> Wesermünde, 26.5.44
>
> Sehr geehrter Herr Professor,
>
> Dieses darf ich Ihnen zunächst sagen, daß ich immer davon überzeugt bin, daß „man in Münster" wirklich an mich denkt – und nicht nur denkt.
>
> Trotzdem hätte ich es gern vermieden, Ihnen mit meiner Habilitationsangelegenheit explizit lästig zu fallen, weil ich annehmen muß, daß Sie genug anderes zu tun haben. Auf Ihren Brief vom 22/5, kann ich jetzt aber Ihre Hilfe nicht mehr ausschlagen – und darf Ihnen also versichern, wie sehr mir eine solche Hilfe gelegen kommt.
>
> Herr Prof. Krull hat mir noch nicht geantwortet, vielleicht ist mein letzter Brief gar nicht angekommen.
>
> Herrn Prof. Köthe habe ich schon in Würzburg versucht, meine Theorie vorzutragen – es war aber kaum ausreichend Zeit.
>
> Ich lege noch eine „Bemerkung" bei, die eine Fortführung des § 6 meiner Arbeit ist, ohne jedoch diese vorauszusetzen. Da diese Bemerkung rein halbordnungstheoretisch ist, wäre ich Ihnen auch für Ihr Urteil sehr dankbar.
>
> Würden Sie Herrn Prof. Köthe wohl mitteilen, daß mein Vortrag in Würzburg den Inhalt von § 3 zum Gegenstand hatte? Die Neuerungen gegenüber der kommutativen Theorie liegen in § 4 und § 6.
>
> Ich werde für jedes Urteil dankbar sein, denn wie sollte ich sonst lernen, was man in dieser Welt als „gut" bezeichnet.
>
> Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich
> Ihr [Lorenzen]
>
> Die fehlenden Anmerkungen werde ich Ihnen in den nächsten Tagen nachsenden.

Endlich komme ich dazu, Ihren Brief vom 25.4. zu beantworten. Ich wollte mir zunächst Ihr beigelegtes Manuskript ansehen, und dazu fand ich erst jetzt während der Pfingsttage Zeit. Am besten hat mir Ihr Brief selber gefallen, da sagen Sie am klarsten, worauf es ankommt. An Ihrem Manuskript ist wieder das störende, dass nicht zu sehen ist, was für einen Vorteil man aus der Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Bewertungstheorie auf bel. Halbordnungen und aus Ihrer Umformung des Kriteriums für „ganz abgeschlossen" gewinnt. So bleibt immer das Gefühl, ob nicht der umständliche Weg in keinem rechten Verhältnis zum Endergebnis steht, und das ist das gleiche bei diesem nicht für die Veröffentlichung bestimmten Manuskript ebenso wie bei Ihrer geplanten Habilitationsschrift. Ich halte es nun durchaus für möglich, dass das mehr ein Mangel der Darstellung ist, Sie wissen irgendwie aus Ihren Ideen nicht das zu machen, was man aus ihnen herausholen könnte. Aber das ist leider ein Punkt, den man schriftlich kaum richtig klären kann, wir müssten uns einmal sehr gründlich über alle Einzelheiten aussprechen, und dazu ist gerade augenblicklich leider keine Möglichkeit gegeben. Ich bedauere das vor allem deshalb, weil Sie nach meiner Ansicht den Inhalt Ihrer ursprünglich als Habilitationsschrift gedachten Untersuchungen veröffentlichen sollten, weil ich aber befürchte, dass in der vorliegenden Form die Arbeit nicht geeignet ist, Sie, wie es doch sein sollte, einem gewissen Kreis von Fachgenossen wirklich bekannt zu machen. Es wäre da zunächst eine sehr gründliche Umarbeitung nötig (starke Straffung, ev. Zweiteilung, an anderer Stelle wieder Erweiterung), und dabei würde ich Sie gerne beraten. Aber wir werden uns eben damit abfinden müssen, dass im Augenblick eine derartige Zusammenarbeit, die mündliche Besprechungen erfordert, nicht möglich ist. Seien Sie aber überzeugt, dass ich Ihnen wirklich gerne helfen möchte.

Mit den besten Grüßen Heil Hitler!

Ihr Wolfgang Krull.[48]

---

[48] In a letter dated 2 June 1944, Lorenzen gives an account of this letter to Scholz and writes:

> Da er von meiner Habilitation aber nichts mehr schreibt, will ich es noch ein letztes Mal versuchen, um seine Zustimmung zu bitten. Aber wird es was nützen? Darf ich Sie trotzdem bitten, Herrn Prof. Köthe das „Hasse-Exemplar" einschließlich der Bemerkung mit den beiliegenden Anmerkungen zu schicken. Das neue Exemplar stelle ich ganz zu Ihrer Verfügung.

Then, in an undated letter, he writes:

> Für Ihre so schnelle Vermittlung zu Herrn Prof. Köthe bin ich Ihnen sehr dankbar, – – ebenso auch für Ihr Gedenken bei unserm Angriff, bei dem unsere Wohnung immerhin so beschädigt wurde (wenn sie auch noch integrierbar sein wird), daß zunächst meine Frau mit Jutta in ein Dorf der Sächsischen Schweiz abgereist ist, und ich ein „möbliertes Zimmer" erworben habe.
>
> Ich werde Herrn Prof. Köthe Genaueres schreiben, werde ihm aber darin recht geben müssen, daß es leicht möglich ist, daß Herr Prof. Krull nicht

06.06.1944. Letter from Lorenzen to Krull

Dr. Paul Lorenzen (23) Wesermünde, den 6.6.44
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

für Ihre Karte von 29. 5. danke ich Ihnen sehr, obwohl sie mir eine sehr ernste Enttäuschung bereitet, indem als wesentlicher Mangel meiner Arbeit jetzt die Umständlichkeit des Verfahrens bezeichnet wird.

Dabei ist gerade die Vereinfachung und Klärung der Beweismethoden das eigentliche Hauptziel meiner Arbeit. Ich habe nicht versucht, die Sätze der multiplikativen Idealtheorie um jeden Preis zu verallgemeinern, auch um den Preis einer Komplizierung – sondern mir liegt im Gegenteil nur daran, die Grundgedanken der Beweismethoden in ihrer letzten Einfachheit zu erkennen. Wenn ich z. B. den Bewertungsbegriff ersetze durch einen „Homomorphismus eines Halbverbandes in eine geordnete Menge", so sehe ich darin nämlich eine begriffliche Vereinfachung, und nicht etwa eine Komplizierung. Denn die Einführung des Bewertungsbegriffs (z. B. die zunächst willkürliche Dreiecksungleichung) rechtfertigt sich nur durch den späteren Erfolg, der Homomorphiebegriff trägt dagegen seine Berechtigung in sich selbst. Ich würde sagen, daß der Homomorphismus in eine Ordnung der „reine Begriff" ist, der dem Bewertungsbegriff zugrunde liegt. Und der zugrundeliegende, reine Begriff scheint mir unbestreitbar der einfachere zu sein.

Wenn ich mich in diesem Punkte irren sollte, so bitte ich Sie aufs dringendste darum, es mir sagen zu wollen, weil es nämlich bei meiner ganzen mathematischen Arbeit bisher immer mein Bestreben war, diese zugrundeliegenden, reinen Begriffe selbst in ihrer einfachen und durchsichtigen Klarheit ans Licht zu bringen.

In dieser Tendenz der begrifflichen Klärung unterscheidet sich die Arbeit ebenfalls grundsätzlich von meiner Dissertation. Daß in dieser Klärung, in dem Verständnis der inneren Bedeutung, wie Sie es einmal nennen, die vordringlichste Aufgabe liegt, das ist mir nämlich erst in den letzten Jahren wirklich bewußt geworden.

Der Wert einer solchen begrifflichen Erkenntnis liegt m. E. vor allem in sich selbst. Nur in zweiter Linie kommt die Vereinfachung in Frage, die sich ergibt, wenn man die reinen Begriffe auf den ursprünglichen Spezialfall anwendet. (Z. B. wird der Beweis des bewertungstheoretischen Fundamentalsatzes fast trivial: Gilt für kein $z_1, \dots, z_n$ $a \in \mathfrak{a}\mathfrak{J}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$, so gibt es einen maximalen Oberring $\mathfrak{B}$ mit dieser Eigenschaft. Aus $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}[z^{\pm 1}]$ folgt

erbaut sein wird – – sondern eine Einmischung jedem Beteiligten sehr übelnehmen wird. Daher werde ich Herrn Prof. Köthe dankbar sein, wenn er Ihnen oder mir sein Urteil mitteilen wird.

$$a \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}[z^{+1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}] \quad \text{und} \quad a \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}[z^{-1}, y_1^{\pm 1}, \ldots, y_s^{\pm 1}]$$

also $a \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}[z^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, y_s^{\pm 1}]$. Widerspruch!)[49]

Ebenso ist es eigentlich nur ein Nebenergebnis, daß die Sätze jetzt auch im Nichtkommutativen gelten. Im Vordergrund steht stets die Erkenntnis der reinen Begriffe.

Ich bin natürlich weit davon entfernt, zu behaupten, daß diese Auffassung der Mathematik die richtige sei, aber daß sie eine berechtigte Auffassung ist, werde ich behaupten dürfen.

Wenn allerdings an dieser Auffassung meine Habilitation scheitern sollte, so will ich mich bemühen, mir eine gegenteilige Auffassung zu eigen zu machen, soweit das möglich ist.

Ich darf mich mit diesem Anliegen meiner Habilitation noch einmal an Sie wenden, da Ihnen ja nichts daran gelegen sein kann, mich einfach vor ein unabänderliches und auswegloses Nein zu stellen.

Die Gründe, die Sie meiner Habilitation entgegenhalten, daß ich nichts Wesentliches bisher veröffentlicht habe, daß meine Arbeit in Richtung der Dissertation liegt und daß sie ungerechtfertigt umständlich ist, kann ich – mit Ausnahme des letzten – nicht leugnen. Aber ich darf Sie bitten, auch die Bedingungen zu berücksichtigen, unter denen ich stehe: daß es mir nicht möglich war, ein neues Arbeitsgebiet ohne Literatur und Anregung (und ohne ausreichend Zeit) wirklich zu erschließen. Wenn ich die Gewißheit hätte, den Krieg abwarten zu können, so brauchte mir jetzt nicht so viel an meiner Habilitation gelegen zu sein. Ich würde die zuversichtliche Hoffnung haben, es nach dem Kriege zu schaffen – aber wer weiß, ob und wann wir normale Nachkriegszeiten erleben werden. Die Berufsausbildung, das Erreichen eines Abschlußes wird ja darum bei allen übrigen, wenn irgend möglich so gefördert. Es ist mir ja auch nicht nur praktisch unmöglich, einen anderen Beruf zu ergreifen, ich sehe vor allem aufgrund meiner Veranlagung keine Möglichkeit dazu, da eigentlich alle meine Gedanken und Bestrebungen sich ausschließlich auf die mathematische Erkenntnis richten.

Als eine besondere Härte muß ich die Nichtabgeschlossenheit meiner äußeren Berufsausbildung deshalb empfinden, weil mir dadurch auch in meinem gegenwärtigen Dienst mehrere Möglichkeiten abgeschnitten sind, die an die Bedingung der Habilitation geknüpft sind.

Was den zweiten Hinderungsgrund anbetrifft, daß meine Arbeit der Dissertation gegenüber nicht neu ist, so darf ich hier noch einmal wiederholen, daß die entscheidenden Methoden der Dissertation (a-Ideale für Halbgruppen, Idealbrüche, t-Ideale) weder explizit noch implizit in meiner Arbeit eine Rolle spielen.

Ich bitte Sie darum, dieses Ihren Gründen gegenüber halten zu wollen, und verbleibe mit den ergebensten Grüßen

---

[49] See Lorenzen 1950, 489, reproduced on page 163 and translated on page 160.

Ihr [Paul Lorenzen]

22.06.1944. Letter from Krull to Lorenzen

Greifswald, 22.6.44.

Lieber Herr Lorenzen!

Es fällt mir nicht ganz leicht, Ihren letzten Brief zu beantworten, denn ich muss Ihnen voraussichtlich noch einmal eine Enttäuschung bereiten. Zuerst: Seien Sie überzeugt, dass ich recht habe, wenn ich Ihre grosse, 53 Seiten lange Arbeit in ihrer derzeitigen Form für gründlich verfehlt erkläre. Ich glaube Ihnen gerne, dass wirklich neue Gesichtspunkte gegenüber Ihrer Dissertation drin stecken und ich erkenne auch Ihr Streben nach äusserster begrifflicher Klarheit grundsätzlich durchaus an. Aber gerade eine solche Klarheit, die sich auch in einer durchsichtigen Form der Darstellung äussern müsste, vermisse ich in Ihrer Arbeit durchaus. Und es langt nicht, dass Sie sich selbst über etwas klar sind, Sie wollen und müssen es auch den andern ebenso klar machen, darauf kommt es an. Schon das letzte Mal schrieb ich Ihnen, im Einzelnen müsse man sich über diese Dinge mündlich aussprechen. Wenn ich aber Ihnen schriftlich einen Rat geben soll, so kann es nur etwa der sein: Versuchen Sie doch einmal den Inhalt Ihrer Arbeit auf 20–25 Seiten zusammen zudrängen, aber so, dass Sie an den wirklich wesentlichen Stellen sich nicht scheuen deutlich zu sagen, was Sie wollen und nicht etwa hinter ein paar formalen Rechnungen die Gedanken verstekken. Ich denke, das müsste gehen, wenn es Ihnen auch zunächst unmöglich erscheint, und so kämen Sie dann vielleicht zu einer Arbeit, die wirklich geeignet wäre, Ihren Namen bekannter zu machen. Das wäre die nächste Aufgabe, die ich Ihnen stellen möchte, denn ich will natürlich nicht, dass Ihnen das, was Sie sich da alles überlegt haben, verloren geht. Und dann später ein neues, wenn möglich auf speziellere Anwendungen (etwa das Nichtkommutative) zugeschnittenes Problem angepackt! Denn mit dieser Arbeit allein lasse ich Sie noch nicht zur Habilitation zu, dabei bleibe ich, – wie ich überzeugt bin, in Ihrem eigenen Interesse. Die Habilitation ist kein Abschluss einer Laufbahn, eine „abgeschlossene Hochschulausbildung", wie sie z. B. auch für die höhere Wehrmachtsbeamtenlaufbahn gefordert wird, haben Sie als Promovierter schon längst. Und – entweder geht der Krieg einigermassen anständig aus, wie wir alle hoffen, dann werden Sie auch Ihre Arbeit für die Habilitation als Assistent in Ruhe in Angriff nehmen können, – oder, ja ich glaube, Sie sind sich nicht klar, dass es dann mit einer Hochschullaufbahn für Sie ohnehin alle wäre. Ein à la Baisse-Spekulieren kann und darf es heute bei niemandem geben. – Schliesslich, um es nochmal zu sagen: Die Habilitation ist nicht ein Abschluss, sondern ein neuer Anfang, gewissermassen als Gesellenstück für eine Laufbahn, die zu betrachten letzten Endes nur dann Sinn tut, wenn man einigermassen Gewissheit hat, dass man es irgendwann auch zum Meister bringt. Und so weit sind Sie eben noch nicht, wobei Ihnen gerne zugegeben sei, dass Sie unter den Kriegsbedingungen so gehemmt sind, dass niemand Ihnen deswegen einen Vorwurf machen dürfte. Aber es wäre unverantwortlich von mir, Ihnen jetzt schon das Tor zu öffnen, wo ich mir noch längst kein genügend sicheres Bild über Ihre zukünftige Weiterentwicklung machen kann.

Mit den besten Grüssen und Heil Hitler!
Ihr Wolfgang Krull.[50]

16.07.1944. Postcard from Krull to Lorenzen

Reg.Rat Prof. Krull
Greifswald
Mar[ine]obs.

Herrn Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Elbestr. 42 I.

Lieber Herr Lorenzen! Greifswald, 16.7.44

[50] In a letter to Scholz dated 28 June 1944, Lorenzen writes:

> Heute habe ich die endgültige Absage von Herrn Prof. Krull erhalten, da „meine Arbeit die begriffliche Klarheit durchaus vermissen läßt", und es „unverantwortlich wäre, mir schon jetzt das Tor (zum Dozenten) zu öffnen".
> Herrn Prof. Köthe habe ich geschrieben, er möchte zunächst mir sein Urteil mitteilen, da Herr Prof. Krull in der Tat vermutlich nicht erbaut sein würde über eine direkte Einmischung.

On 9 July, he writes:

> ich darf Ihnen versichern, wie dankbar ich Ihnen dafür bin, daß Sie sich so um mich kümmern. Für Ihre ermutigenden Worte danke ich Ihnen besonders. Wenn ich auch nicht im geringsten das Gefühl habe, durch das Urteil von Herrn Prof. Krull „umgeworfen" zu sein, so sind mir Ihre Zeilen doch sehr wohltuend gewesen. Und gerade kam auch ein ebenso wohltuender Brief von Herrn Prof. Köthe, der sich damit einverstanden erklärt, Herrn Prof. Krull gegenüber als Referent zu fungieren, und mir sogar ein positives Urteil zusagt. Auch für die Worte von Herrn Prof. Peschl bin ich sehr dankbar.
> Trotzallem muß ich die Absicht, mich zu habilitieren, zunächst fallen lassen, da ich es für völlig ausgeschlossen halte, daß sich jetzt noch eine Meinungsänderung bei Herrn Prof. Krull vollziehen wird (sodaß ich Herrn Prof. Köthe gar nicht als Referenten nennen können werde) und an eine neue Arbeit ist nicht zu denken, weil Herr Prof. Krull darauf besteht, die vorliegende Arbeit erst gründlich umzuarbeiten – obwohl mir diese jetzt gründlich verleidet ist, und ich eigentlich nur den Wunsch habe, endlich einmal etwas anderes zu machen, als immer irgendwelche Halbordnungen. Wie ich aus diesem Dilemma herauskommen werde, weiß ich noch nicht.
> ....
> Zum Schluß bitte ich noch, Herrn Prof. Köthe die Anmerkungen zu meiner Arbeit schicken zu wollen – – ich habe keine mehr, und meine Frau ist ja leider auch nicht da. Prof. Köthe hat um die Anmerkungen gebeten.

Vor allem diesmal die Versicherung, dass es mir aufrichtig leid getan hat, dass Sie jetzt auch vom Bombenspuk betroffen wurden. Ein Glück wenigstens, dass offenbar Ihre Angehörigen keinen Schaden genommen haben. Hoffentlich ist Ihnen nicht allzuviel von eigenen Sachen zerstört worden. Oder hatten Sie überhaupt wirklich gewohnt? Aus der Bemerkung, Sie hätten sich jetzt ein möbliertes Zimmer genommen, glaube ich leider auf das Gegenteil schliessen zu müssen. – Zu Ihrer Arbeit möchte ich Sie immer wieder daran erinnern, dass Sie stets bedenken müssen, dass Sie jetzt im Kriege nicht unter normalen Bedingungen schaffen, und dass Sie sich also nicht deprimieren lassen dürfen, wenn Sie noch nicht so weit gekommen sind, als Sie sich vorgestellt hatten. Persönlich bedaure ich es vor allem, dass ich mit Ihnen nicht mündlich öfter Ihre Untersuchungen durchsprechen kann. Nur auf diese Weise könnte ich Ihnen wirklich helfen, wie ich es gerne täte. Aber augenblicklich ist da eben leider keine Gelegenheit dazu.

Mit den besten Grüssen
Ihr Wolfgang Krull.

01.10.1944. Postcard from Krull to Lorenzen

Reg.Rat Prof. Krull
4 Greifswald
Mar[ine]obs.

Sonderführer Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Marinefachschule

Greifswald, 1.10.44

Lieber Herr Lorenzen!

Heute bin ich endlich dazu gekommen, Ihre ausführliche Inhaltsskizze durchzulesen. Entschuldigen Sie also bitte, dass ich Ihnen den Empfang erst heute bestätige. Ihre eigentliche Schrift werde ich Ihnen in den nächsten Tagen zusenden. In den letzten Wochen hatte ich es unter den verschiedensten Abhaltungen einfach vergessen. Was Sie mir diesmal zuschickten, war entschieden ein Fortschritt. Ich habe nur immer noch das Gefühl, dass man die Sache noch wesentlich kürzer und klarer sagen kann. Aber das sind eben Dinge über die man sich mündlich aussprechen müsste. Schriftlich gibt es zu leicht Missverständnisse. Ich würde mich aber auch an Ihrer Stelle im Augenblick garnicht an diese Aufgabe der Herstellung eines „wirksamen“ Manuskripts halten. Arbeiten Sie doch lieber etwas über das bisherige hinaus! Was mir immer noch zweifelhaft erscheint, ist die Frage, wie weit Sie wirklich das <u>Nicht</u>kommutative erledigt haben. Mein Eindruck war, dass bei Ihnen auch im Nichtkommutativen sehr viel an „Vertauschbarkeitsforderungen“ drin steckt, so dass man hierbei von einem „halbkommutativen“ Fall reden könnte. Wenn es Ihnen gelänge diese Bedenken zu zerstreuen, schiene mir das ein grosser Fortschritt.

Mit den besten Grüssen
Heil Hitler! Ihr Wolfgang Krull.

7 A postcard from Lorenzen to Hasse, 1945

25.07.1945. Postcard from Lorenzen to Hasse

Dr. Paul Lorenzen	Herrn
Bad Pyrmont	Prof. Dr. H. Hasse
Bahnhofstr. 8	Göttingen
German	Math. Sem. d. Univers.

[Antw. 1.8.45] 25/7

Sehr geehrter Herr Professor,

In der Hoffnung, daß Sie das Kriegsende glücklich überstanden haben, erlaube ich mir, Ihnen zu schreiben. Ich bin zur Zeit hier in Bad Pyrmont gut aufgehoben – – von Bonn habe ich noch keine Nachricht. Dürfte ich Sie um eine Mitteilung bitten, wenn Ihnen über den Verbleib von Herrn Prof. Krull etwas bekannt ist. Auch von Herrn Prof. Scholz, Herrn Ackermann und Herrn Gentzen, denen ich noch im Kriege geschrieben habe wegen einer neuen Methode für Widerspruchsfreiheitsbeweise habe ich keinerlei Nachricht.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich

Ihr
Paul Lorenzen

8 Documents relating to Lorenzen's career, 1945–1946

02.09.1945. Report by Lorenzen on his political attitude

Dr. Paul Lorenzen
Wissenschaftl. Assistent am
Mathemat. Seminar der Universität Bonn.

Bericht über meine politische Einstellung

Ich bin 1915 geboren und ging noch zur Schule, als Hitler an die Macht kam. In meinem Elternhaus bin ich politisch liberal erzogen worden und in den letzten Jahren antinationalsozialistisch, da mein Vater Freimaurer war. Ich selbst missbilligte am Nationalsozialismus am schärfsten die chauvinistischen und antisemitischen Tendenzen.

Nach dem Abitur habe ich zunächst ein halbes Jahr Arbeitsdienst abgeleistet. Im Herbst 1933 begann ich mein Studium und musste mich – ehe die Immatrikulation möglich war – zum Eintritt in die SA und in den NSDStB melden. Wegen meines passiven Widerstandes gegen den SA-Dienst bin ich dort nie Scharführer oder Ähnliches geworden.

Vom Herbst 1934 bis 1935 leistete ich ein Jahr aktiven Militärdienst ab, da die zweijährige Dienstpflicht drohte. Seit dieser Zeit bin ich entschiedener Antimilitarist und bin auf Grund dieser Einstellung während des Krieges erst im letzten halben Jahr Unteroffizier geworden.

Nach der Dienstzeit setzte ich mein Studium fort. 1936 wurde ich volljährig und trat aus der evangelischen Kirche aus. Dieser Austritt geschah nicht aus politischen Gründen, sondern auf Grund der Überzeugung, dass ich, wenn ich wahrhaftig sein wollte, mich nicht als gläubigen Christen bezeichnen konnte – und daher der Kirche nicht angehören dürfte.

1937 musste ich als Mitglied der SA in die Partei eintreten. Auch dort habe ich niemals ein Amt innegehabt. 1939 wurde ich Assistent am Mathematischen Seminar in Bonn und Anfang 1940 zum Heer eingezogen. Später aber kam ich zur Marine, wo ich seit 1942 als Mathematiklehrer in Wesermünde an der Marineschule tätig war, bis ich im Januar 1945 an die Marineschule Flensburg versetzt wurde.

Meine Frau, die ich 1939 heiratete, stammt aus einer streng kirchlichen Familie, war aktiv tätig für die Bekennende Kirche – und daher selbstverständlich Gegnerin des Nationalsozialismus. Sie war kein Parteimitglied.

Als Zeugen für meine Gegnerschaft führe ich Herrn Professor Scholz in Münster an, ferner Frau Dr. K. Wolff, Bonn, Luisenstr. 3, bei der ich seit 1939 wohnte. Frau Wolff ist die Witwe eines jüdischen Arztes.

Bonn, den 2. September 1945

Lorenzen

03.09.1945. Military Government of Germany *Fragebogen*: Chronological record of full-time employment and military service

29. Give a chronological account of your employment and military service beginning with 1st of January 1931, accounting for all promotions or demotions, transfers, periods of unemployment, attendance at educational institutions (other than those covered in Section B) or training schools and full-time service with para military organizations. (Part time employment is to be recorded in Section F.) Use a separate line for each change in your position or rank, or to indicate periods of unemployment or attendance at training schools or transfers from one military or para military organization to another.

29. Geben Sie in zeitlicher Folge eine Aufzählung Ihrer Beschäftigung und Ihres Militärdienstes seit dem 1. Januar 1931 an, mit Begründungen für alle Beförderungen oder Degradierungen, Versetzungen, Arbeitslosigkeit, Besuch von Bildungsanstalten (außer solchen, die bereits in B angeführt sind) oder Ausbildungsschulen, und Volldienst in militärähnlichen Organisationen (Nebenbeschäftigungen sind in Abschnitt F anzugeben). Benutzen Sie eine gesonderte Zeile für jeden Wechsel in Stellung oder Rang oder zur Angabe von Arbeitslosigkeits-Zeitabschnitten oder für den Besuch von Ausbildungsschulen oder für Versetzungen von einer militärischen oder militärähnlichen Organisation zu einer anderen.

From von	*To* bis	*Employer and Address or Military Unit* Arbeitgeber und Anschrift oder Militäranschrift	*Name and Title of Immediate Superior or C. O.* Name und Titel des Dienstvorgesetzten od. vorgesetzter Offz.	*Position or Rank* Stellung oder Dienstgrad	*Duties and Responsibilities* Art der Tätigkeit und Verantwortungsbereich	*Reasons for Change of Status or Cessation of Service* Grund für Änderung oder Beendigung des Dienstverhältnisses
Apr. 33	Sept. 33	Student. Arbeitslager	unbekannt	Arbeitsmann	Erdarbeit	Beginn des Studiums
Nov. 34	Okt. 35	reit. Artl. Abt. Verden	Hpt. Bamler	Kanonier	Stalldienst	Ende der Dienstverpflichtg.
Okt. 38	Juli 39	Universität Göttingen	Prof. Dr. Hasse	Stipendiat	Hilfsassistententätigkeit	Anstellung in Bonn
Aug. 39	gegwtg.	Universität Bonn	Prof. Dr. Krull	Assistent	Assistententätigkeit	
Jan. 40	Juli 40	38503 C	unbekannt	Gefreiter	Rechner	Kommandierung
Juli 40	Apr. 41	O. K. M.	Reg.rat Tranow	"	Schreiber	"
Apr. 41	Juli 41	Steuerm.schule Gotenhafen	Kaptl. Götz	"	"	"
Jul. 41	Jan. 42	M. N. O. Borkum	Kaptl. v. Lom	"	"	"
Jan. 42	Nov. 44	Mar.schule Wesermünde	Kapt. Köllner	Sonderf. (Feldwebel)	Mathematiklehrer	"
Nov. 44	Jan. 45	Mar. Schütz. Btl. 306	Kpt. Arlt	Unteroffizier	Schreiber	"
Jan. 45	Febr. 45	Mar.schule Flensburg	Kpt. Lüth	"	keine	"
Febr. 45	Apr. 45	8. M. E. A. Norden	unbekannt	"	Erdarbeit	

06.09.1945. Certificate by Ernst Peschl on Lorenzen's political attitude

Prof. Dr. Ernst Peschl
Bonn, Arndtstr. 2.

Bonn, den 6.9.45.

An den Prüfungsausschuß der Universität
in Hdn von Herrn Prof. H. von Weber

Bonn
Sternwarte.

Betrifft: Politische Einstellung des Herrn
Dr. Paul Lorenzen, geb. 24.3.15,
pl. Assistent am Math. Seminar d. Univ.

Ich kenne Herrn Dr. Lorenzen vor allem aus der Zeit vom August 39 bis zu seiner Einziehung zur Wehrmacht Anfang 40. In dieser Zeit hatte ich ausgiebig Gelegenheit mich mit ihm eingehend zu unterhalten, da ich ihn fast täglich sah. Aber auch vor dieser Zeit (36/37) wie auch nachher traf ich ihn aus Anlaß der Jahresversammlungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und hatte dabei ebenfalls längere Unterhaltungen mit ihm. Ich glaube ihn daher eingehendst zu kennen, zumal er seiner ganzen Veranlagung nach ein offener absolut aufrichtiger Charakter ist.

Er ist ein sehr kritischer Mensch und hatte vom ersten Augenblick seiner Fühlungnahme mit mir an stärkste Ausdrücke (meist sehr sarkastischer Art) der völligen Ablehnung des Nationalsozialismus und der Person Hitlers und aller seiner Trabanten geäußert. Dies entsprach auch seiner ganzen inneren Haltung. Desgleichen lehnte er jede Form von Militarismus scharf ab.

Auch sein mir bekannter Kirchenaustritt im Jahre 37 hat gar nichts mit politischen Motiven zu tun. Es war lediglich die aufrichtige Schlußfolgerung aus der Haltung eines philosophischen Agnostizismus, die sich nach langem ehrlichen Ringen um erkenntnistheoretische Fragen bei ihm herausgebildet hatte. Jede Feindseligkeit gegen religiöse Überzeugungen ist ihm völlig fremd. Im Gegenteil hat er eine Frau aus streng religiöser Familie der evangelischen Bekenntniskirche geheiratet.

Prof. Dr. Ernst Peschl.[51]

[51] Ernst Peschl (1906–1986) is professor of mathematics in Bonn. See Segal (2003, 461–462) on Peschl's attitude towards national socialism.

14.09.1945. Certificate by a board of examiners

In der Prüfungssache
des Assistenten am Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Seminar der Universität Bonn Dr. Paul Lorenzen
erstattet der Prüfungsausschuss bestehend aus den Professoren von Weber, Fitting und Troll in seiner Sitzung vom 14.9.1945 folgendes

Gutachten.

Lorenzen, geboren 1915, trat mit Beginn seines Studiums der SA und dem NSDStB bei. 1937 wurde er in die Partei übernommen. Er ist ein Schüler von Professor Scholz in Münster. Seine Haltung war eindeutig antinationalsozialistisch, wie auch das beiliegende Zeugnis von der Witwe des jüdischen Arztes Wolff bezeugt. Für die Partei hat er sich niemals betätigt.

Lorenzen ist nur formales Parteimitglied. Der Ausschuss befürwortet seine Belassung in seiner bisherigen Stellung.

von Weber

1 Anlage

13.08.1946. Notification on Lorenzen's inaugural lecture of 9 August 1946

Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität **Bonn, den** 13. August 1946

J.-Nr. 864

An
den Herrn Oberpräsidenten der Nordrheinprov.
Düsseldorf
durch Se. Magnifizenz, den Herrn Rektor
der Rheinischen Friedr.-Wilh.-Universität,

Namens der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn teile ich ergebenst mit, dass die Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät Herrn

Dr. Paul Lorenzen[52]

[52] In a letter to Scholz dated 7 June 1946, Lorenzen writes: "Herr Prof. Krull ist seit kurzem glücklicherweise zugelassen und hat sich mit meiner sofortigen Habilitation vollkommen einverstanden erklärt."

The day after, he writes to him: "Welche Aussichten dann hier bestehen, darüber weiß nach am 9.8.1946 gehaltener Antrittsvorlesung über:

„Über den Verbandsbegriff"

als Privatdozent für Mathematik zugelassen und die venia legendi verliehen hat.

gez. Reichensperger
Dekan

9 A letter from Krull to Scholz, 1953

18.04.1953. Letter from Krull to Scholz

Lieber Herr Scholz! Bonn, 18.4.53.

Was Sie mir über Lorenzen schrieben, hat mich sehr gefreut. Ich schätze seine Arbeiten zur Begründung der Analysis ausserordentlich hoch. Ich hatte bei dem Arbeiten mit dem Überabzählbaren, insbesondere mit dem Wohlordnungssatz, immer das Gefühl man benutzt da Fiktionen, die eines Tages durch vernünftigere Begriffsbildungen ersetzt werden müssen. Aber ich regte mich darüber nicht auf, weil ich überzeugt war, dass bei vorsichtiger Anwendung der geläufigen „Fiktionen" nichts Falsches herauskommt, und weil ich mit Sicherheit auf den Mann rechnete, der eines Tages alles in Ordnung brächte. Lorenzen hat nun nach meiner Überzeugung den richtigen Weg gefunden, und das ist allein schon eine Leistung, für die er ein Ordinariat verdiente. – Es ist mir nun eine grosse Befriedigung, dass auch Sie, – wenn auch unter einem etwas anderen Blickwinkel als dem meinen, – von Lorenzen so viel halten.[53] Dass es für die mathematische Logik und Grundlagenforschung an der nötigsten Stellenzahl fehlt, ist auch meine Überzeugung. Ich bin also sehr gerne bereit, Sie bei einer Aktion, die die Vermehrung der einschlägigen Stellen anstrebte, aufs wärmste zu unterstützen. In Bonn selbst wird sich allerdings im Augenblick in dieser Hinsicht nichts tun lassen, da wir gerade um unser Extraordinariat bzw. Ordinariat für Angewandte Mathematik kämpfen, und man nur schrittweise vorgehen kann. Aber schreiben Sie mir doch bitte, wie Sie sich das Aktionsprogramm vorstellen. – Es tut mir sehr leid, dass Sie wieder so lange und so schwer unter Magenkrämpfen litten. Hoffentlich bleiben Sie jetzt recht lange davon verschont!

---

ich nichts, aber ich vermute, daß ich hier irgendwie einen Lehrauftrag bekommen werde. Für dieses Semester habe ich – ausnahmsweise – einen Auftrag für eine Algebravorlesung bekommen."

[53] Compare Krull's letter to Hasse dated 15 August 1946 (Roquette 2004, § 1.95), in which he already expresses his appreciation of Lorenzen.

Mit herzlichen Grüssen Ihr Wolfgang Krull

10 The correspondence between Hasse and Lorenzen, 1953–1963

14.05.1953. Letter from Lorenzen to Hasse

Prof. Dr. P. Lorenzen
Bonn, Luisenstr. 3 [Mein R. bespr. 3.7.53] Bonn, den 14.5.53

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

aus Freude und Dankbarkeit darüber, dass Sie in Ihrem Vortrag über Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht[54] auch einmal die menschliche Seite der Mathematik – die Empfindungen und Beweggründe, die uns gerade an diese Wissenschaft vor allen anderen binden (obwohl Sie betonen, dass Sie nur Ihre subjektive Einstellung darstellen, haben Sie doch zugleich für viele andere gesprochen) – ins Bewusstsein heben, erlaube ich mir, Ihnen zu schreiben.

Das von Ihnen zuerst behandelte Motiv: Mathematik als reinste Wissenschaft, als Prototyp unvergänglicher Erkenntnis, das ist wohl auch im Verlauf der bisherigen Geschichte – seit Thales und den Pythagoräern – das wirksamste Motiv gewesen. Gegenwärtig scheint sich dieses Motiv allerdings in einer besonderen Gefahr zu befinden. Die Geometrie, die doch bisher – wie ja offiziell auch heute noch – immer zur Mathematik gerechnet wurde, hat seit dem vorigen Jahrhundert den Charakter der absoluten Sicherheit verloren. Die Mathematik hat sich daher bezüglich der Geometrie auf Implikationen der Form: „wenn die und die Axiome gelten, dann gilt auch ... “ zurückgezogen, also auf Aussagen, die kaum noch geometrisch zu heissen verdienen. Wenn ich Sie nicht missverstanden habe, verstehen Sie unter Mathematik den engeren Begriff, der nur Logik, Arithmetik und Analysis umfasst. Neben diesen konkreten Teilen der Mathematik würden dann die abstrakten Teile – also die axiomatischen Theorien der Algebra und Topologie – eine sekundäre Rolle spielen. Will man die Geometrie, eventuell zusammen mit der Mechanik nicht als ein eigenes Fach konstituieren, so wird man sie mit zur theoretischen Physik rechnen müssen. Gegenwärtig wollen nun manche sogar noch der Mathematik im engeren Sinne die unumstössliche Gültigkeit absprechen, also z. B. auch die Arithmetik auf Implikationen: „wenn die Peano-Axiome gelten, dann gilt auch ... “ reduzieren.

Dann gäbe es keine Mathematik als Wissenschaft mehr, es gäbe nur noch formales Ableiten aus Axiomen, die aufgrund pragmatisch-empirischer

[54] Hasse 1952.

Kriterien gewählt werden. Zieht man schliesslich die Logik mit in diesen Relativierungsprozess hinein, so würden auch noch die Regeln des formalen Ableitens aus Axiomen nur durch aussermathematische Kriterien zu gewinnen sein.

Ich wage, zu vermuten, dass es vor allem diese Gefahr ist, die Sie als Formalisierung eine inhärente Tragik der Mathematik nennen. Hier würde ich mir nun gern die Frage erlauben: ist diese Formalisierung zu unterscheiden von der „Formalisierung", die in Ihrer Betrachtung über die Bedeutung einer klaren und prägnanten Bezeichnungsweise als eine Gefahr dargestellt wird? Die Existenzaussage auf p. 22 würde nach Ersetzung der logischen Partikeln durch Symbole, nämlich von

wenn, so	durch	$\rightarrow$
und	durch	$\wedge$
es gibt	durch	$\bigvee$
ist	durch	ε

lauten:

$$p \; \varepsilon \; \text{prim} \wedge p = 4n+1 \quad \rightarrow \quad \bigvee_{x,y} p = x^2+y^2.$$

Zur „Formalisierung" der Eindeutigkeitsaussage könnte

es gibt genau ein durch $\overset{1}{\bigvee}$

ersetzt werden, und wir erhielten dann

$$p \; \varepsilon \; \text{prim} \wedge p = 4n+1 \quad \rightarrow \quad \overset{1}{\bigvee}_{x,y} x < y \wedge p = x^2+y^2.$$

Wenn man die logischen Symbole nur als prägnante Abkürzung für die umgangssprachlichen Partikel benutzt – ihnen also alle Inhaltlichkeit lässt, und die Aussagen jetzt nicht plötzlich als bedeutungslose Zeichenreihen behandelt – dann scheinen mir genau dieselben Gründe für diese Symbolik zu sprechen, die uns veranlasst haben, von:

„p ist die Summe der Quadrate von x und y"
zu $p = x^2+y^2$

überzugehen. Könnte man der letzten Formel vorwerfen, dass sie dem Fluss der suggestiven Sprache Gewalt antut?

Dadurch, dass die logische Symbolik von Hilbert zu dem Zweck gebraucht ist, eine inhaltliche Theorie in einen axiomatischen Formalismus zu verwandeln, scheint mir die Möglichkeit eines inhaltlichen Gebrauches der logischen Symbole zu kurz gekommen zu sein.

Ich bitte Sie herzlich, diese Bemerkungen nicht als Propaganda für die Logistik auffassen zu wollen – ganz im Gegenteil, es ist ja gerade die Logistik, die das inhaltliche Denken verkennt – ich würde mich aber freuen, wenn Sie diesen Brief als einen Ausdruck meiner Dankbarkeit annehmen wollen, dafür, dass Sie die geistigen Schmerzen eines „deutschen Aufsatzes" nicht gescheut haben, um einmal zur Besinnung auf unser Tun aufzurufen.

Mit den ergebensten Grüssen bin ich
Ihr
Paul Lorenzen

05.06.1953. Letter from Hasse to Lorenzen

5. Juni 1953

Prof. Dr. H. Hasse
Ahrensburg i. H.
Hamburgerstr. 43

Lieber Herr Lorenzen,

es ist sehr freundlich von Ihnen, dass Sie solches Interesse an meinem kleinen Büchlein genommen haben. Es fehlt mir jetzt mitten im Semesterbetrieb leider die Zeit, mich zu den von Ihnen gemachten Bemerkungen zu äussern. Da ich aber voraussichtlich noch im Laufe dieses Semesters nach Bonn kommen werde, können wir dann vielleicht einmal mündlich darüber sprechen.

Mit herzlichen Grüssen
Ihr [Hasse]

09.06.1953. Letter from Lorenzen to Hasse

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

für die freundliche Aufnahme meines Briefes zu Ihrem „Büchlein" danke ich Ihnen sehr. Wenn Ihr Plan, nach Bonn zu kommen, sich verwirklichte, wäre das sehr schön. Wenn Ihre Zeit nicht allzu knapp sein wird, darf ich Sie vielleicht für eine kurze Zeit bitten, bei uns sein zu wollen.

Mit den ergebensten Grüßen
bin ich stets Ihr
Paul Lorenzen.

Bonn, 9.6.53
Luisenstr. 3

July 1959. Letter from Lorenzen to Hasse

[P. Lorenzen, Juli 1959]

Sätze [Hasse J f M 152 (1923)]

$$\begin{aligned}
&p \equiv 1 \bmod 4,\ q \equiv 1 \bmod \overset{4}{\cancel{2}},\text{[55]} \left(\frac{q}{p}\right) = -1 && \rightarrow \ \bigwedge\nolimits_{\mathrm{rat}\,t} . \ \Phi(p,q,t) \leftrightarrow t \ p\text{-}q\text{-ganz.}\\
&p \equiv 3 \bmod 4,\ q = 2 && \rightarrow \ \bigwedge\nolimits_{\mathrm{rat}\,t} . \ \Phi(1,p,t) \leftrightarrow t \ p\text{-}q\text{-ganz.}
\end{aligned}$$

$$\Phi(r,s,t) \ \leftrightharpoons \ \bigvee\nolimits_{\mathrm{rat}\,x,y,z} x^2+ry^2-sz^2 = 2+rst^2.$$

Folgerungen

$$\bigwedge\nolimits_p \bigvee\nolimits_{q,m,n} \bigwedge\nolimits_t . \ \Phi(m,n,t) \ \leftrightarrow \ t \ p\text{-}q\text{-ganz.}$$

Für eine Klasse K von Paaren m, n gilt also

(1) $\bigwedge_{K\,m,n} \Phi(m,n,0)$

(2) $\bigwedge_{K\,m,n} \bigwedge_{\mathrm{rat}\,t} . \ \Phi(m,n,t) \ \rightarrow \ \Phi(m,n,t+1)$

(3) $\bigwedge_{\mathrm{rat}\,u} . \bigwedge_{K\,m,n} \Phi(m,n,u) \ \rightarrow \ u$ ganz.

Satz $\bigwedge_{\mathrm{rat}\,u} . u$ ganz $\leftrightarrow \bigwedge_{\mathrm{rat}\,r,s} . \Phi(r,s,0) \wedge \bigwedge_t . \Phi(r,s,t) \rightarrow \Phi(r,s,t+1) . \rightarrow \Phi(r,s,u).$
[J. Robinson J S L 14 (1949)]

Satz Die Theorie der kommutativen Körper ist unentscheidbar.

01.08.1959. Letter from Hasse to Lorenzen

1. August 1959

Lieber Herr Lorenzen,

Heute endlich bin ich dazu gekommen, mich mit den Kriterien über quadratische Darstellungen zu beschäftigen.

Es ist alles in Ordnung, nur dass es im Falle $p = 1$ mod. 4 auch $q = 1$ mod. 4 (statt nur mod. 2) heissen muss, was wohl auf einem Schreibfehler Ihrerseits beruht.

Die Kriterien lassen sich allerdings nicht unmittelbar meiner Dissertation entnehmen, in der ja von Ganzzahligkeit nicht die Rede ist. Dass aus der Darstellbarkeit die Ganzheit von t für p, q folgt, ergibt sich ohne weiteres durch Übergang zu der zugeordneten ganzzahligen primitiven homogenen

[55] This correction is by Hasse, see the following letter.

Gleichung und Kongruenzbetrachtung mod. p, q (wobei für $q = 2$ sogar mod. 4 oder gar 8 zu rechnen ist). Dass umgekehrt für p, q-ganze t wirklich Darstellbarkeit besteht, beruht darauf, dass in meiner Dissertation die ternäre Darstellbarkeit auf binäre lokale Nichtdarstellbarkeiten zurückgeführt ist. Schliesst man also indirekt, so führt die Annahme der ternären Nichtdarstellbarkeit auf binäre lokale Darstellbarkeiten, und daraus kann dann wie vorher durch Übergang zu den ganzzahligen primitiven homogenen Gleichungen hier auf die Nichtganzheit von t für p, q geschlossen werden.

Was die von Robinson gezogenen logistischen Folgerungen betrifft, so verstehe ich sie leider nicht ganz und habe hier auch keine Möglichkeit, das JSL einzusehen.

Mit besten Grüssen und Ferienwünschen, auch für Ihre Frau und Tochter,

Ihr [Hasse]

07.03.1960. Letter from Hasse to Lorenzen

7. März 1960

Herrn Prof. Dr. P. Lorenzen

Kiel

Philosophisches Seminar d. Universität

Lieber Herr Lorenzen,

recht herzlich möchte ich mich für die Zusendung Ihres kleinen Büchleins über die Entstehung der exakten Wissenschaften[56] bedanken. Ich habe es in den letzten Tagen mit grosser Freude gelesen.

Mit besten Grüssen, auch an die verehrte Gattin,

Ihr [Hasse]

27.06.1961. Letter from Hasse to Lorenzen

27. Juni 1961

Lieber Herr Lorenzen,

haben Sie zunächst recht herzlichen Dank für die Zusendung Ihres Sonderabdrucks „Ein didaktisches Konstruktivitätskriterium".[57] Wir haben schon seit längerer Zeit die Absicht, Sie um einen ausführlichen Vortrag über Ihre Ergebnisse zur Grundlegung der Mathematik zu bitten. In diesem Sommersemester liess sich das deshalb schlecht einrichten, weil wir laufend

---

56 Lorenzen 1960.

57 In fact "Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium", Lorenzen 1961.

auswärtige, insbesondere überseeische Gäste hatten und dazu auch noch einige Mathematiker aus Gründen der Besichtigung für eine evtl. Berufung einladen mussten. Ich möchte Sie heute fragen, ob es Ihnen möglich wäre, uns im Wintersemester die Freude Ihres Besuchs und eines Vortrags über Ihre Ergebnisse zu machen. Es würde uns daran liegen, dass dieser Vortrag uns Ihre Gedankengänge möglichst in einer uns allen wirklich verständlichen Form nahebringt. Wir würden Ihnen dafür auch gern zwei aufeinanderfolgende Kolloquiumstage (immer Dienstag 16 Uhr) zur Verfügung stellen, wo Sie dann jeweils maximal 60 Minuten Vortragszeit hätten. Selbstverständlich würden wir Ihnen Ihre Reise- und Aufenthaltskosten erstatten mit DM 150,– je Vortragstag. Ich schreibe schon heute, weil jetzt noch fast alle Dienstage des Wintersemesters zur Verfügung stehen, ausgenommen lediglich der erste Dienstag, nämlich der 7.11., an dem unser P. Jordan über ein Problem aus der Theorie der nichtkommutativen Verbände etwas erzählen wollte.

Sie würden uns wirklich eine sehr grosse Freude machen, wenn Sie auf diese unsere Bitte eingingen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr [Hasse]

04.07.1961. Letter from Lorenzen to Hasse

Prof. P. Lorenzen
Kiel
Clausewitzstraße 14

4/7 61

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

für Ihre liebenswürdige Anfrage und Einladung danke ich Ihnen herzlichst.

Ich gehe in der Tat gern auf dieses Anerbieten ein, weil ich meine gegenwärtige „Philosophie" ja nur umständehalber als Philosophie vertrete, während es doch nichts als eine mathematische Bemühung um die Frage ist, ob denn tatsächlich (wie man heute meint) die Arithmetik und Mengenlehre eine axiomatische Theorie – wie die Geometrie – sei. Ist diese Frage zu verneinen, so bleibt zu fragen, wie denn die Sätze, die als „Axiome" benutzt werden, zu beweisen sind.

Leider sind diese Fragen z. Zt. mit vielerlei unnötigem Ballast beladen, sodaß ich zur Verständlichkeit von dem Angebot zweier Kolloquien gerne Gebrauch mache. Am ersten Tage würde ich vorschlagen „Logik und Arithmetik" zu behandeln, am zweiten Tage „Geometrie und Mengenlehre".

Da ich mir die Tage noch aussuchen darf, schlage ich Dienstag, den 5. Dezember und Dienstag, den 12. Dezember vor.

Mit herzlichen Grüßen stets

Ihr P. Lorenzen

08.07.1961. Letter from Hasse to Lorenzen

8.7.1961

Lieber Herr Lorenzen,

Haben Sie recht herzlichen Dank für Ihre Zusage, über die wir uns alle sehr freuen. Wir sind mit Ihren Vorschlägen hinsichtlich Daten und Themen gern einverstanden, haben davon Vormerkung genommen und hoffen nur, daß nichts dazwischenkommt.

Für den Fall, daß wir für Sie Quartier besorgen sollen, geben Sie uns bitte rechtzeitig Nachricht. Oder wollen Sie jedesmal am Abend wieder nach Kiel zurückfahren?

Hit herzlichen Grüßen, auch von meiner Frau und an die Ihre,

Ihr [Hasse]

11.07.1961. Letter from Lorenzen to Hasse

Prof. P. Lorenzen
Kiel
Clausewitzstraße 14

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

herzlichen Dank für die Bestätigung.

Da ich von Hamburg ja noch gegen $23^{\underline{00}}$ nach Kiel kommen kann, werde ich sicherlich abends zurückfahren und werde also kein Quartier brauchen.

Mit herzlichen Grüßen stets
Ihr P. Lorenzen

Kiel 11/7 61

09.10.1962. Letter from Hasse to Lorenzen

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Prof. Dr. P. Lorenzen
Erlangen
Philosophisches Institut d. Universität

9.10.1962

Lieber Herr Lorenzen,

Mit meinen herzlichen Glückwünschen zur Ernennung in Erlangen verbinde ich meinen besten Dank für die Zusendung Ihres neuesten Opus

„Meta-Mathematik".[58] Nach genauer Lektüre der Einleitung und Gewinnung eines Überblicks über den Gang der Handlung habe ich dies sicher von hoher Warte mit größter Klarheit und bemerkenswertem didaktischen Geschick geschriebene Werk neben der Scholzschen „Metaphysik" in meinem Bücherschrank abgestellt, mit dem Vorsatz, wenigstens einmal bis zum Widerspruchsfreiheitsbeweis der Arithmetik im Einzelstudium vorzudringen. Vielleicht finde ich dazu nach meiner Emeritierung die Zeit.

Für heute recht herzliche Grüße und gute Wünsche von Haus zu Haus

Ihr [Hasse]

July 1963. Letter from Lorenzen to Hasse

Prof. P. Lorenzen
852 Erlangen
Saalestraße 1

[Beantw. 21.7.1963
Kritik anerkannt.
Aber in solchem Werk kein
Platz für Grundlagenfragen]

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

Ihr großes Buch[59] kam hier vor einigen Tagen an: welch ein vorteilhafter „Austausch" ist das für mich, da Sie ja nur das Metamathematikbändchen erhalten haben!

So versuche ich noch, meinen herzlichen Dank dazuzugeben. Daß die Zahlentheorie die Königin der mathematischen Disziplinen ist, ist mir durch Ihr Buch wieder einmal deutlich geworden. Welche Wohltat, daß am Anfang kein willkürliches Axiomensystem steht: die Gegenstände, die man zu erkennen trachtet, sind vielmehr von vornherein eindeutig durch Konstruktion gegeben. [Die axiomatischen Begriffe wie Körper, Gruppe, . . . dienen stets nur als ein Mittel, um die Beziehungen zwischen den konstruierten Gegenständen – vor allem also Beweiszusammenhänge – klar und deutlich zu erfassen]

Bei meiner notorischen Kritik am Cantorschen Mengenbegriff werden Sie es mir verzeihen, daß ich die „Konstruktion" der vollständigen Hülle eines bewerteten Körpers als einen Schönheitsfehler betrachte: es werden ja „alle" φ-konvergenten Folgen (a_n) betrachtet. Wie läßt sich diese Unmenge aber „konstruieren"?

M. E. kommt man zu den gewünschten Resultaten über die Fortsetzungen von Bewertungen, wenn man statt „aller" konvergenten Folgen immer nur „genügend viele" konvergente Folgen zur Erweiterung des bewerteten Körpers benutzt.

58 Lorenzen 1962.

59 Hasse 1963b.

Diese „puristische“ Kritik wäre wohl der Forderung zu vergleichen, etwa beim Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes ohne den vollen Körperraum (und Logarithmenraum) auszukommen: hier braucht man ersichtlich nicht alle reellen Zahlen, sondern könnte sich mit Abschätzungen behelfen.

Daher möchte ich – statt solcher Kritik – lieber meinen herzlichsten Dank noch einmal wiederholen.

Mit den ergebensten Grüßen
stets
Ihr P. Lorenzen

September 1963. Letter from Lorenzen to Hasse

Prof. P. Lorenzen
852 Erlangen
Saalestraße 1

[Gedankt
durch Postkarte
26.9.63]

September 1963

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

in der Hoffnung, daß Sie dieser Brief nach guter Rückkehr von der Amerikareise antrifft, möchte ich Ihnen vielmals für die Karte aus Morris Inn, Notre Dame (ich habe dort 1957 einmal übernachtet) danken.

Meine „Kritik“ war durchaus nicht so gemeint, daß es einer „Rechtfertigung“ Ihrerseits bedurft hätte: das Ziel des Buches, wirklich zu den Höhen der Zahlentheorie zu führen rechtfertigt – in unserer gegenwärtigen Situation – vollkommen die Benutzung der traditionellen Fundamente.

Trotzdem freue ich mich natürlich sehr über Ihre Zustimmung, daß dann, wenn z.B. von „allen“ Folgen (etwa rationaler Zahlen) geredet wird, immer nur „genügend viele“ gemeint ist. Die Kontrolle, daß überall in der Tat immer nur „genügend viele“ gebraucht werden, ist allerdings m.E. nicht trivial (In der Math. Zeitschr. 59, 1953, habe ich einen Beweis dafür dargestellt, daß in jedem abzählbaren bewerteten Körper K ein abzählbarer Oberkörper $\overline{K}$ existiert, derart daß sich die Bewertung von K auf $\overline{K}$ fortsetzen läßt und daß für jeden algebraischen Oberkörper M von $\overline{K}$ höchstens eine Bewertung von M existiert, die die Bewertung von $\overline{K}$ fortsetzt).

Vor einiger Zeit erhielt ich die Neuauflage Ihrer Höheren Algebra I.[60] Daß die determinantenfreie Algebra jetzt zu konstruktiven Entscheidbarkeits- und Berechenbarkeitsverfahren führt, ist eine wesentliche Verbesserung.

Mir fiel auf (aber auch das soll keine Kritik sein, weil es dazu zu unwichtig ist), daß für Körper und Gruppen immer die Eindeutigkeit der Division (bzw. Subtraktion) gefordert wird. In Satz 14 beweisen Sie aber die Eindeutigkeit des Einselementes, nämlich: $\mathscr{C}E_A = \mathscr{C}$ für alle $\mathscr{C}$

$$F_B\mathscr{C} = \mathscr{C} \text{ für alle } \mathscr{C}$$

60 Hasse 1963a.

also $F_B = F_B E_A = E_A$ (jedes F_B ist jedem E_A gleich, d.h. alle E_A und F_B sind dasselbe Element).

Ebenso beweisen Sie Satz 15 die Eindeutigkeit des Reziproken.

Mit ergebensten Grüßen

stets Ihr P. Lorenzen

11 The correspondence between Aubert and Lorenzen, 1978–1979

21.02.1978. Letter from Aubert to Lorenzen

UNIVERSITY OF OSLO

INSTITUTE OF MATHEMATICS BLINDERN, February 21, 1978

P. O. BOX 1053 – BLINDERN, OSLO 3

Dear Professor Lorenzen,

I am aware of the fact that you are now mainly working as a philosopher and not as a mathematician. But since the question I am going to ask you is really of a historical nature (although connected with technical mathematics) I am nevertheless taking the liberty to write to you. I believe that you are now (after Krull's death) the only person who could possibly enlighten me on the questions which I touch upon below. Hence I would be very thankful for any comment that you would be willing to give me concerning this letter.

For some time I have been puzzled by the fact that so few people know about *t*-ideals ("divisorial ideals of finite character"). Specialized books on the topic of general arithmetics or divisibility theory (multiplicative ideal theory, divisors, etc.) do not even mention this notion (like the books of Bourbaki, Gilmer, Larsen–McCarthy and Fossum).[61] This in spite of the fact that there is in my opinion an overwhelming evidence pointing in favour of *t*-ideals as the building blocks of general arithmetics. They seem to form the true arithmetical divisors with nice properties which are shared neither by the *d*-ideals nor by the *v*-ideals.

It is a puzzle to me how the basic arithmetical virtues of *t*-ideals have escaped the notice of the specialists – let alone the general mathematical public. The only book which seems to give a fair treatment of them is Jaffard's monograph "Les systèmes d'idéaux".[62] And Jaffard's main source when it comes to *t*-ideals is certainly your own 1939 paper.

I believe it is high time to make some propaganda for the *t*-ideals exhibiting them to a more general public in a somewhat more pedagogical and

[61] Bourbaki 1972; Gilmer 1972; Larsen and McCarthy 1971; Fossum 1973.

[62] Jaffard 1960. See Bosbach (2015, Chapter 13) for another fair treatment.

attractive way than has been done hitherto. I have hence decided to write an article on this subject with the tentative title "Divisorial ideals of finite character".[63] It is going to be partly expository and partly historical, but will also contain some more technical results of my own, going slightly further than the results which can be found in your 1939 paper and in Jaffard's monograph.

In connection with the history of the subject I am especially puzzled by finding that even Krull did not seem to have grasped the relevance of t-ideals – at least if we are to judge from his published works. I have not been able to spot a single reference to t-ideals in his papers or in his 'Idealbericht'.[64] I may of course have overlooked some part of his work, but I cannot really see what that should be. I have checked rather carefully his 'Idealbericht', his long series of papers on the arithmetics of integral domains[65] as well as his papers on Krull domains ('Endliche diskrete Hauptordnungen').[66] In doing so I have made a couple of strange observations. In a short historical and bibliographical note on v-ideals on page 121 of his 'Idealbericht' he refers among other things to Arnold's paper "Ideale in kommutativen Halbgruppen" from 1929[67] as if this paper were concerned with v-ideals. To describe the content of that paper Krull writes in a parenthesis: (v-Ideale in "Halbgruppen"). But Arnold's paper is concerned with t-ideals and not with v-ideals![68] My conjecture is simply that Krull was mainly interested in the arithmetics of integral domains and much less concerned with monoids. So he may not have studied Arnold's paper very attentively – in fact so superficially that the real content of that paper may have escaped him.

On the other hand Krull makes extensive reference to your 1939 paper (and in particular to the 'finite character property' of ideal systems) in the last paper (No VIII from 1943) of his long series of papers on the arithmetics of integral domains. And even on a first and rather superficial reading of your paper one could hardly avoid to see the crucial role played by the t-ideals. Only a glimpse should be enough for a man like Krull in order to recognize this – the t-ideals lying at the cross-road of two of his pet topics "Gruppensätze" and "Endliche diskrete Hauptordnungen": An integral domain is a Krull ring if and only if the fractional t-ideals form a group (under t-multiplication). (Satz 7 in your 1939 paper is equivalent to this result.) How could possibly this and many other basic arithmetical facts concerning t-ideals have escaped Krull's keen eye for the essentials?

The t-ideals put the Krull rings and the Dedekind rings on an equal footing describing the Krull rings simply as those rings which are "Dedekind"

63 Aubert 1979.

64 Krull 1968.

65 Krull 1936a; 1936b; 1937a; 1938a; 1937b; 1938b; 1939a; 1939b; 1942; 1943.

66 Krull 1951; 1952; 1953.

67 Arnold 1929.

68 Compare Lorenzen's letter to Krull dated 8 March 1938 (page 188).

relative to the t-ideals. In the same way the t-ideals also put the divisor class group on an equal footing with the ideal class group. They are just particular instances ($r = t$, $r = d$) of a general notion of an "r-class group". Not to mention that the unique factorization domains (monoids) are just those domains (monoids) where every t-ideal is principal. (See the footnote on page 543 in your 1939 paper.) In addition to this comes the fact that (in contradistinction to the case of v-ideals) the t-ideals are of finite character and hence allow the use of Zorn's lemma, allow a nice theory of localization, etc. And this is very far from exhausting the nice properties and the possible applications of t-ideals.

My question to you concerns the possible additional information you might have as to Krull's attitude to – or knowledge of – t-ideals. Since you and Krull shared some of the same arithmetical interests surrounding the notion of a t-ideal and at the same time being colleagues for a number of years in Bonn – I fancy that you may have had discussions with him on this particular topic and that you may possibly still have some recollections from such discussions. If you know of some written material which points in the direction of an awareness of the relevance of t-ideals on Krull's part, I would of course appreciate this still more.

I am asking you these questions because I want my historical remarks accompanying the above-mentioned projected paper to be as accurate as possible. This in itself is of course a detail, but I do not think it is just a detail or a matter of taste when Bourbaki as well as most other writers are founding their exposition of divisors, divisor class groups, Krull domains, etc. on the notion of a v-ideal and not on the notion of a t-ideal. But it is not only the v-ideals which on many occasions should be replaced by t-ideals – it is even more so in the case of d-ideals. And this touches upon an essential point of more far-reaching consequences: It seems inappropriate to force the heavily additive Dedekind notion of an ideal onto the solution of purely multiplicative problems of divisibility – just because there already happens to exist a well-developed commutative algebra surrounding this additive ideal concept. I would advocate another and more natural procedure, namely to use the t-ideals which are generally better suited for these purely multiplicative problems and develop the corresponding necessary piece of commutative algebra as adapted to this ideal concept (like for instance the localization technique, the seeds of which may already be found in your 1939 paper).

You may perhaps have lost all your former interest in t-ideals, but in that case I still hope that the slight leanings towards the history and philosophy of science of the present letter may catch your interest – or at least a sufficient interest to make a reaction possible!

Sincerely yours,

Karl Egil Aubert

P.S. We once met in Bonn in 1954. I also knew Krull from that time as well as from more recent encounters. But at that time I had not really grasped the importance of t-ideals, missing my opportunity to ask him these questions directly.

06.03.1978. Letter from Lorenzen to Aubert

6.3.1978

2323

Prof. Dr. Paul Lorenzen

Herrn
Prof. Karl Egil Aubert
Institute of Mathematics
University of Oslo
P. O. Box 1053
Blindern, Oslo 3

Lieber Herr Aubert,

auf Ihren Brief hin habe ich erst einmal in meiner Dissertation (das sind ja 40 Jahre her) nachsehen müssen, was t-Ideale sind. In meiner Habilitationsarbeit (Über halbgeordnete Gruppen, Math. Z. 52, 1949) treten sie nur noch einmal auf (p. 486): für nichtkommutative Verbandsgruppen treten "prime vollständige invariante Unterhalbgruppen" an die Stelle von t-Primidealen.

Durch die anschließende Verallgemeinerung der Teilbarkeitstheorie von Gruppen auf Bereiche (Math. Z. 55, 1952) habe ich die t-Ideale wohl ganz aus den Augen verloren – und bin dann ja auch immer mehr zu Grundlagenfragen der Logik und Mathematik gekommen, bis ich jetzt schließlich ein sog. „Wissenschaftstheoretiker" geworden bin.

Meine Zusammenarbeit mit Krull war in der ganzen Zeit unseres Zusammenseins schlecht. Ich wurde August 39, einen Monat vor Kriegsbeginn, sein Assistent. Erst seit 1946 waren wir wieder in Bonn zusammen, aber da war ich Dozent und wir waren fast ohne Kontakt. Das hatte politische Gründe (Krull hatte meine Habilitation während des Krieges verhindert)[69] und lag außerdem an meinen grundlagentheoretischen Arbeiten, die Krull nicht als „mathematische" Leistungen anerkannte.

Es kann also durchaus sein, daß er die Rolle der t-Ideale, im Unterschied zu den v-Idealen, nicht deutlich genug gesehen hat[70] – wir werden kaum jemals darüber gesprochen haben. Sofern ich damals überhaupt noch Algebra

[69] Lorenzen qualifies the reasons why he maintained almost no contact with Krull when they were both back in Bonn as "political" and not as personal. I see this as an indication that he was aware that the prevention of his habilitation by Krull (in agreement with Hasse) was connected with his lack of submissiveness under national socialism.

[70] See however Krull's letter to Hasse dated 22 May 1938 (Roquette 2004, § 1.35).

gemacht habe, war das ja diese „Teilbarkeitstheorie in Bereichen" (vgl. auch Math. Z. 58, 1953) oder Theorie der Korrespondenzen (Math. Z. 60, 1954).[71]

Obwohl das kaum eine befriedigende Antwort auf Ihre Fragen ist – es ist aber so gewesen – möchte ich eine Gegenfrage stellen: Kennen Sie Algebraiker, die die Teilbarkeitstheorie in Bereichen weiter entwickelt haben?

Mit besten Grüßen
Ihr
Lo[renzen]

10.04.1978. Letter from Aubert to Lorenzen

UNIVERSITETET I OSLO

MATEMATISK INSTITUTT
AVD. A: MATEMATIKK
AVD. B: MEKANIKK
AVD. C: STATISTIKK OG FORSIKRINGSMATEMATIKK

BLINDERN, OSLO 3, April 10, 1978
TELEFON *46 68 00

Dear Professor Lorenzen,

Many thanks for your letter of March 6. As you say yourself, your reply does not give a really positive answer to my specific question about Krull's eventual awareness of the relevance of t-ideals. In spite of this, your "negative" information is also a piece of information for me.

I have little time now to work on the projected paper on t-ideals which I mentioned in my first letter to you. But I hope to be able to finish it during the summer and I will then send you a copy of it. I am more and more convinced that there is a need for such a paper, although it will hardly be more than a reworking and a slight continuation of some of your own ideas. One essential idea which is intimately linked with t-ideals – and which I did not mention in my last letter to you – is the notion of a 'Lorenzen group' (in Jaffard's terminology). This is the purely multiplicative generalization of a 'Kronecker function ring' and is related to t-ideals and r-valuations in the same way as the Kronecker function ring is related to d-ideals and Krull valuations. What the concept of a Lorenzen group shows, is that the t-system in a way has a 'universal property' reducing (in certain situations) the study of r-systems to the study of the more concrete and well-behaved t-system in the corresponding Lorenzen group (which is lattice-ordered and hence 't-Bézout').

As to your "Gegenfrage" I will, generally speaking, say that there have not been any remarkable innovations in divisibility theory since your own contributions – which so far represent the end-point of a long-lasting German arithmetical tradition. Your 1939 paper is widely cited, but I have somehow the impression that only very few mathematicians have fully grasped the

71 Lorenzen 1952, 1953a, 1954, respectively.

content of it. One sign of this is precisely the almost total disregard of t-ideals in recent research literature as well as in the books which lately have been published on multiplicative ideal theory.

As to your more specific question concerning further developments of "Teilbarkeitstheorie in Bereichen" I must confess that I virtually know of no such contribution – except for one paper "Über verbandsgeordnete Vektorgruppen mit Operatoren" by I. Fleischer, published in Mathematische Nachrichten B 72 (1976).[72] The opening sentences of this paper seem to confirm the scarcity of contributions to this subject: "Es sind schon mehr als 20 Jahre vergangen, seitdem Lorenzen seine grundlegende Arbeit „Über halbgeordnete Gruppen" veröffentlicht hat. Dagegen scheint die Fortsetzung, Lorenzen [6] („Teilbarkeitstheorie in Bereichen") völlig unbeachtet geblieben zu sein, – leider, denn viele der nachfolgenden Abhandlungen ließen sich ja in ihren Rahmen zwangslos eingliedern."

It is hard to say why your papers on divisibility theory have not quite exercised the influence which I think they deserve. One reason may be that they are written in a style which many mathematicians find hard to penetrate. This latter remark also applies to Jaffard's monograph "Les systèmes d'idéaux" which is really a very fine book but which is written in a style and uses a terminology which may have prevented many from reading it who otherwise could have been attracted by its rich content.

I have for some time thought about writing a comprehensive treatise on ideal systems which should not only be limited to the arithmetical traditions of the theory – but rather be a kind of 'generalized commutative algebra' where the notion of an ideal system is also seen in connection with ideal concepts occurring outside of general arithmetics (like for instance in general ring theory, differential algebra, lattice theory, etc.). I have a lot of unpublished material on this topic, but I seem to refrain from the rather laborious enterprise of putting it all together.

With my best regards

Karl Egil Aubert

18.06.1979. Letter from Lorenzen to Aubert

18.6.1979
2323

Prof. Dr. Paul Lorenzen

[72] Fleischer 1976.

Herrn
Prof. Dr. K. E. Aubert
Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo
Postboks 1053
Blindern – Oslo 3
Norwegen

Lieber Herr Aubert,

herzlichen Dank für die Zusendung Ihrer Arbeit über die Teilbarkeitstheorie.[73] Ich habe ja diese Dinge fast ganz aus den Augen verloren, es freut mich aber selbstverständlich sehr, daß die multiplikative Idealtheorie bei Ihnen solche sorgfältige Neubearbeitung erfährt.

Es fällt mir auf, daß Sie sich auf kommutative Gruppen beschränken. War die Ausdehnung auf nichtkommutative Gruppen vielleicht nur ein intellektueller Luxus?

Mit herzlichen Grüßen
stets
Ihr
Lo[renzen]

References

Akizuki, Yasuo. 1935. "Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz." *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* (III) 17:327–336. doi:10.11429/ppmsj1919.17.0_327

Arnold, I. 1929. "Ideale in kommutativen Halbgruppen." *Matematičeskij sbornik/Recueil mathématique* 36:401–407. http://mi.mathnet.ru/msb7366

Aubert, Karl Egil. 1979. "Divisors of finite character." Preprint series: Pure mathematics 1979:1, Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo. http://www.duo.uio.no/handle/10852/43912

———. 1983. "Divisors of finite character." *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (4) 133:327–361. doi:10.1007/BF01766024

Bosbach, Bruno. 2015. "Ideal semigroups." In *Topics of divisibility: To contain is to divide*. Second lecture. Kassel: Universitätsbibliothek Kassel. http://d-nb.info/1068529288

Bourbaki, Nicolas. 1972. *Commutative algebra*. Elements of mathematics 8. Paris: Hermann. Translated from the French.

[73] Aubert 1979, published subsequently as Aubert 1983.

Dieudonné, Jean. 1941. "Sur la théorie de la divisibilité." *Bulletin de la Société Mathématique de France* 69:133–144. http://eudml.org/doc/86745

Fleischer, Isidore. 1976. "Über verbandsgeordnete Vektorgruppen mit Operatoren." *Mathematische Nachrichten* 72:141–144. doi:10.1002/mana.19760720112

Fossum, Robert M. 1973. *The divisor class group of a Krull domain*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 74. New York: Springer.

Garver, Raymond. 1934. "Note concerning group postulates." *Bulletin of the American Mathematical Society* 40:698–701. doi:10.1090/S0002-9904-1934-05948-2

Gilmer, Robert. 1972. *Multiplicative ideal theory*. Pure and applied mathematics 12. New York: Marcel Dekker.

Hasse, Helmut. 1952. *Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht*. Wiesbaden: Verlag für angewandte Wissenschaften.

———. 1963a. *Höhere Algebra I: Lineare Gleichungen*. Fifth edition. Berlin: Walter de Gruyter & Co.

———. 1963b. *Zahlentheorie*. Second, extended edition. Berlin: Akademie-Verlag.

Huntington, Edward V. 1905. "Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates." *Transactions of the American Mathematical Society* 6:181–197. doi:10.2307/1986297. Errata in vol. 7, p. 591.

Jaffard, Paul. 1960. *Les systèmes d'idéaux*. Travaux et recherches mathématiques IV. Paris: Dunod.

Krull, Wolfgang. 1935. *Idealtheorie*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4(3). Berlin: Springer.

———. 1936a. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I: Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme und Kroneckersche Funktionalringe." *Mathematische Zeitschrift* 41:545–577. http://eudml.org/doc/168685

———. 1936b. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche II: *v*-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche." *Mathematische Zeitschrift* 41:665–679. http://eudml.org/doc/168690

———. 1937a. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche III: Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie." *Mathematische Zeitschrift* 42:745–766. http://eudml.org/doc/168748

———. 1937b. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche IV: Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen." *Mathematische Zeitschrift* 42:767–773. http://eudml.org/doc/168749

———. 1938a. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche IIIa: Eine Ergänzung von Beitrag III." *Mathematische Zeitschrift* 43:767. http://eudml.org/doc/168786

———. 1938b. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche v: Potenzreihenringe." *Mathematische Zeitschrift* 43:768–782. http://eudml.org/doc/168787

———. 1939a. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche vi: Der allgemeine Diskriminantensatz. Unverzweigte Ringerweiterungen." *Mathematische Zeitschrift* 45:1–19. http://eudml.org/doc/168835

———. 1939b. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche vii: Inseparable Grundkörperweiterung. Bemerkungen zur Körpertheorie." *Mathematische Zeitschrift* 45:319–334. http://eudml.org/doc/168854

———. 1942. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Eine Bemerkung zu den Beiträgen vi und vii." *Mathematische Zeitschrift* 48:530–531. http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=PPN266833020_0048|log40

———. 1943. "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche viii: Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen." *Mathematische Zeitschrift* 48:533–552. http://eudml.org/doc/169005

———. 1951. "Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 189:118–128. http://eudml.org/doc/150196

———. 1952. "Über geschlossene Bewertungssysteme." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 190:75–92. http://eudml.org/doc/150217

———. 1953. "Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 192:230–252. http://eudml.org/doc/150259

———. 1968. *Idealtheorie*. Second, supplemented edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 46. Berlin, New York: Springer.

Larsen, Max D., and Paul J. McCarthy. 1971. *Multiplicative theory of ideals*. Pure and applied mathematics 43. New York: Academic Press.

Lorenzen, Paul. 1938. "Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie." Manuscript, University Archive Bonn.

———. 1939a. "Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie." *Mathematische Zeitschrift* 45:533–553. http://eudml.org/doc/168865

———. 1939b. "Die Definition durch vollständige Induktion." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 47:356–358. doi:10.1007/BF01695507

———. 1940. "Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 182:50. http://eudml.org/doc/150077

———. 1944. "Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik." *Mathematische Zeitschrift* 49:313–327. http://eudml.org/doc/169026

———. 1950. "Über halbgeordnete Gruppen." *Mathematische Zeitschrift* 52:483–526. http://eudml.org/doc/169131

———. 1952. "Teilbarkeitstheorie in Bereichen." *Mathematische Zeitschrift* 55:269–275. http://eudml.org/doc/169251

———. 1953a. "Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen." *Mathematische Zeitschrift* 58:15–24. http://eudml.org/doc/169331

———. 1953b. "Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie." *Mathematische Zeitschrift* 59:84–87. http://eudml.org/doc/169374

———. 1954. "Über die Korrespondenzen einer Struktur." *Mathematische Zeitschrift* 60:61–65. http://eudml.org/doc/169411

———. 1960. *Die Entstehung der exakten Wissenschaften*. Verständliche Wissenschaft 72. Berlin, Göttingen, and Heidelberg: Springer.

———. 1961. "Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium." In *Infinitistic methods: Proceedings of the symposium on foundations of mathematics, Warsaw, 2–9 September 1959*, pages 193–200. Oxford: Pergamon; Warsaw: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

———. 1962. *Metamathematik*. BI-Hochschultaschenbücher 25. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Nagata, Masayoshi. 1952. "On Krull's conjecture concerning valuation rings." *Nagoya Mathematical Journal* 4:29–33. http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118799310

———. 1955. "Corrections to my paper 'On Krull's conjecture concerning valuation rings'." *Nagoya Mathematical Journal* 9:209–212. http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118799698

Nakayama, Tadasi. 1942a. "On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. I." *Proceedings of the Imperial Academy* 18:185–187. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195573979

———. 1942b. "On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. II." *Proceedings of the Imperial Academy* 18:233–236. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195573941

———. 1946. "On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. III." *Proceedings of the Japan Academy* 22:249–250. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195572191

Roquette, Peter (ed.). 2004. *Briefwechsel H. Hasse – W. Krull*. http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~roquette/Transkriptionen/HASKRU_040310.pdf

Segal, Sanford L. 2003. *Mathematicians under the Nazis*. Princeton: Princeton University Press. doi:10.1515/9781400865383

Weil, André. 1935. *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques*. Actualités scientifiques et industrielles 206. Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand XI. Paris: Hermann & Cie.