

Frauke Wolf

Lorenzkurvendisparität

Neuere Entwicklungen, Erweiterungen und
Anwendungen



Frauke Wolf

Lorenzkurvendisparität

Die Disparitätsmessung hat in den letzten Jahrzehnten als Forschungsgegenstand und Anwendungsgebiet der Statistik eine ständig wachsende Bedeutung erlangt. Die bekanntesten Instrumente der klassischen Disparitätsmessung sind die Lorenzkurve und der Gini-Koeffizient. In der Arbeit wird aufgezeigt, in welcher vielfältiger Weise diese Konzepte dargestellt, interpretiert und weiterentwickelt werden können. Dabei wird insbesondere deutlich, daß die Konzepte weit über ihre ursprünglichen Anwendungsbereiche hinaus in neuen Forschungsgebieten überaus erfolgversprechend eingesetzt werden können. Wesentliche Bestandteile der umfangreichen klassischen und neuen Fachliteratur werden strukturiert dargestellt und ausgewertet. Eine Erörterung der Lorenz-Dominanzrelation und deren Bezüge zu anderen Ordnungsrelationen schließt die Arbeit ab.

Frauke Wolf wurde 1963 in Dormagen geboren. Von 1982 bis 1988 Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Hohenheim, von 1988 bis 1992 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie der Universität Hohenheim.

Lorenzkurvendisparität

Hohenheimer Volkswirtschaftliche Schriften

Herausgegeben von
Prof. Dr. Rolf Caesar, Prof. Dr. Harald Hagemann,
Prof. Dr. Klaus Herdzina, Prof. Dr. Jörn Kruse,
Prof. Dr. Renate Ohr, Prof. Dr. Walter Piesch, Prof. Dr. Ingo Schmidt,
Prof. Dr. Peter Spahn, Prof. Dr. Gerhard Wagenhals,
Prof. Dr. Helmut Walter

Band 25



PETER LANG

Frankfurt am Main · Berlin · Bern · New York · Paris · Wien

Frauke Wolf

Lorenzkurvendisparität

**Neuere Entwicklungen,
Erweiterungen und Anwendungen**



PETER LANG

Frankfurt am Main · Berlin · Bern · New York · Paris · Wien

Frauke Wolf - 978-3-631-75474-0

Downloaded from PubFactory at 01/11/2019 04:34:29AM

via free access

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Wolf, Frauke:

Lorenzkurvendisparität : neuere Entwicklungen, Erweiterungen
und Anwendungen / Frauke Wolf. - Frankfurt am Main ; Berlin ;
Bern ; New York ; Paris ; Wien : Lang, 1997

(Hohenheimer Volkswirtschaftliche Schriften ; Bd. 25)

Zugl.: Hohenheim, Univ., Diss., 1996

ISBN 3-631-31325-X

NE: GT

Open Access: The online version of this publication is published
on www.peterlang.com and www.econstor.eu under the
international Creative Commons License CC-BY 4.0. Learn more
on how you can use and share this work: <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>.



This book is available Open Access thanks to the kind support of
ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft.

D 100

ISSN 0721-3085

ISBN 3-631-31325-X

ISBN 978-3-631-75385-9 (eBook)

© Peter Lang GmbH

Europäischer Verlag der Wissenschaften

Frankfurt am Main 1997

Alle Rechte vorbehalten.

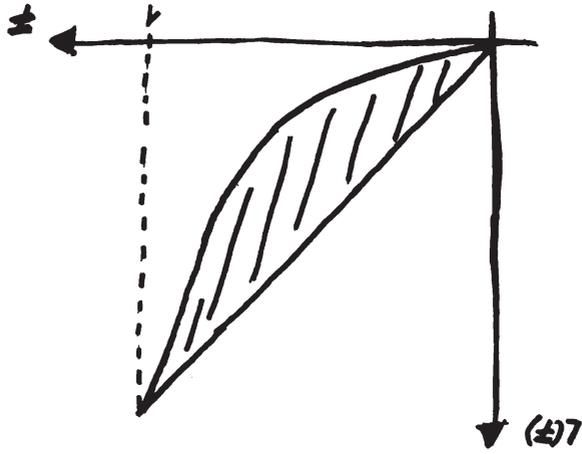
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich
geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des
Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages
unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für
Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die
Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Printed in Germany 1 2 3 4 6 7

Frauke Wolf - 978-3-631-75474-0

Downloaded from PubFactory at 01/11/2019 04:34:29AM

via free access



Matti, 2 Jahre: "Mama Kran malt, Badewanne dranhängt ?"

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde von der Fakultät Wirtschafts- und Sozialwissenschaften der Universität Hohenheim im Wintersemester 1995/96 als Dissertation angenommen.

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Walter Piesch, der diese Arbeit angeregt und betreut hat, danke ich sehr herzlich. Seine wissenschaftlichen Denkanstöße und Hilfestellungen, seine stete Gesprächsbereitschaft und der mir gewährte Forschungsfreiraum haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ausdrücklich danken möchte ich dabei auch für die Rücksichtnahme auf die besondere Rolle einer promovierenden Mutter.

Herrn Prof. Dr. Gerhard Wagenhals danke ich sehr für seine sofortige Bereitschaft als Zweitgutachter zur Verfügung zu stehen, sich damit diese Arbeit "aufzubürden" und mit konstruktiven Anmerkungen zu verbessern. Herrn Prof. Dr. Erhard Hanf danke ich für seine Mitwirkung am Promotionsverfahren.

Die Bereitschaft zum fachlichen Gedankenaustausch und das angenehme Arbeitsklima am Lehrstuhl mit allen Beteiligten, insbesondere mit Fr. Karin Bartel, Thomas Loetzner, Andreas Maurer, Andrea Reichelt, Ulrich Scheurle und Steffen Wirth haben meine Freude am wissenschaftlichen Arbeiten gesteigert und damit einen wichtigen Baustein für den Fortschritt des Projekts gebildet.

Bedanken möchte ich mich auch beim Universitätsbund der Universität Hohenheim für die finanzielle Unterstützung in Form eines großzügigen Druckkostenzuschusses.

Wesentliche Grundlage für den Erfolg des Vorhabens war der Rückhalt und die Unterstützung durch meine Familie. Meine Eltern haben durch ihr Vorbild und ihre liebevolle Erziehung den Grundstein für das Erreichte gelegt. In einem Klima der Geborgenheit durfte ich den Umgang mit Freiraum erlernen. Während der Promotionszeit mußten sicherlich mein Mann Rainer und mein Sohn Matthias sehr große Einschränkungen hinnehmen. Rainers Verständnis und Hilfsbereitschaft und die aufbauende Ablenkung durch Matti haben mir immer die innere Stärke und das Durchhaltevermögen zur Vollendung dieser Arbeit gegeben. Ihnen allen gegenüber empfinde ich tiefe Dankbarkeit.

Inhaltsübersicht

1. Einleitung	1
2. Grundlagen der Disparitätsmessung	5
3. Normierte inverse Verteilungsfunktion, Lorenzkurve und verallgemeinerte Lorenzkurve	13
4. Der Gini-Koeffizient und einige seiner Anwendungsbereiche	25
5. Ein alternativer Ansatz zur Lorenzkurve und zum Gini-Koeffizienten: Der Vorschlag von ZENGA zur Disparitätsmessung	73
6. Aus der normierten inversen Verteilungsfunktion abgeleitete Maße	81
7. Kumulierte Lorenzkurven, daraus abgeleitete Disparitätsmaße und deren Verallgemeinerung	103
8. Die Korrelations-Lorenzkurven und einige Anwendungsmöglichkeiten	125
9. Die Lorenzkurve und partielle Ordnungsrelationen	171
10. Abschließende Bemerkungen	219
Anhang	221
Literaturverzeichnis	229

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1 Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit	1
1.2 Aufbau der Arbeit	2
2. Grundlagen der Disparitätsmessung	5
2.1 Grundbegriffe und allgemeine einführende Überlegungen	5
2.2 Von Disparitätsmaßen geforderte Eigenschaften	7
3. Normierte inverse Verteilungsfunktion, Lorenzkurve und verallgemeinerte Lorenzkurve	13
3.1 Die normierte inverse Verteilungsfunktion	13
3.2 Die Lorenzkurve	15
3.2.1 Interpretationsmöglichkeiten der Lorenzkurve aus formaler Sicht	15
3.2.2 Die Lorenzkurve als Disparitätsindikator	18
3.2.3 Anwendungsbeispiele der Lorenzkurve	20
3.3 Die verallgemeinerte Lorenzkurve von SHORROCKS	23
4. Der Gini-Koeffizient und einige seiner Anwendungsbereiche	25
4.1 Verschiedene Darstellungsformen und daraus ableitbare Grenzen von R	27
4.2 Der Gini-Koeffizient als Disparitätsmaß	35
4.2.1 Der Gini-Koeffizient vor dem Hintergrund von Mittelwerten von Ordnungsstatistiken	36
4.2.1.1 Mittelwerte von Ordnungsstatistiken: Grundlegende Begriffe	36
4.2.1.2 Interpretation des Gini-Koeffizienten vor dem Hintergrund von Mittelwerten von Ordnungsstatistiken	42
4.2.2 Der Gini-Koeffizient im Vergleich mit V^2 und $V^2/1+V^2$	48
4.3 Der Gini-Koeffizient als Baustein eines Konzentrationsmaßes	52
4.4 Der Gini-Koeffizient als Baustein eines Asymmetrie- und eines Wölbungsmaßes	54
4.5 Der Gini-Koeffizient als Baustein von Armuts- und Überflußmaßen	58
4.6 Der Gini-Koeffizient bei der Messung von Preisvektoren-Distanzen	60

4.7 Die Sektorenaggregations-Darstellung des Gini-Koeffizienten und spezielle Anwendungsmöglichkeiten	62
4.7.1 Prüfung von Eigenschaften des Disparitätsmaßes R	66
4.7.2 Die Rekursionsform von R	66
4.7.3 Die Verwendung von R im Rahmen der Ungleichheitsmessung zwischen zwei Verteilungen	68
4.7.4 Die Verwendung von R im Rahmen der Dominanzmessung	70
5. Ein alternativer Ansatz zur Lorenzkurve und zum Gini-Koeffizienten: Der Vorschlag von ZENGA zur Disparitätsmessung	73
6. Aus der normierten inversen Verteilungsfunktion abgeleitete Kurvenzüge	81
6.1 Die "Adaptierte Lorenzkurve"	82
6.2 Die Gegenkurve zur "Adaptierten Lorenzkurve"	86
6.3 Die "Lückenkurve"	89
6.4 Interpretationsmöglichkeiten dieser Kurven vor verschiedenen Anwendungshintergründen	93
7. Kumulierte Lorenzkurven, daraus abgeleitete Disparitätsmaße und deren Verallgemeinerung	103
7.1 Von unten kumulierte Lorenzkurven	103
7.2 Von oben kumulierte Lorenzkurven	113
7.3 Der allgemeine Disparitätsindex I von PIESCH und MEHRAN	120
8. Die Korrelations-Lorenzkurven und einige Anwendungsmöglichkeiten	125
8.1 Grundbegriffe und zwei wesentliche Theoreme	125
8.2 Variablenaggregation und Interpretationsmöglichkeiten einzelner Komponenten	135
8.3 Ausgewählte Anwendungsbereiche der Korrelations-Lorenzkurven	144
8.3.1 Lorenzkurven höherer Momente und deren Anwendungsmöglichkeiten	145
8.3.2 Die Varianz-Korrelations-Lorenzkurve	152
8.3.3 Die Bayes-Korrelations-Lorenzkurve	155
8.3.4 Anwendung im Rahmen der Portfolio-Analyse	155
8.3.5 Anwendung vor finanzwissenschaftlichem Hintergrund: Verteilungswirkungen von Einkommensteuertarifen	158
8.3.6 Anwendung im Rahmen der Segregationsanalyse	166

9. Die Lorenzkurve vor dem Hintergrund partieller Ordnungsrelationen	171
9.1 Einige allgemeine Zusammenhänge zwischen Ordnungsrelationen	172
9.2 Überblick über bekannte Ordnungsrelationen	174
und deren Bezüge zur Lorenzkurve	
9.2.1 Die stochastische Dominanzordnung und deren Bezüge zur Lorenzkurve	177
9.2.2 Inverse stochastische Dominanz und deren Bezüge zur Lorenzkurve	181
9.2.3 Verhältnis–Dominanz und deren Bezüge zur Lorenzkurve	182
9.2.4 Inverse Verhältnis–Dominanz und deren Bezüge zur Lorenzkurve	184
9.2.5 Eine zusammenfassende Übersicht	188
9.3 Die Lorenz–Dominanzordnung	189
9.3.1 Äquivalente Darstellungsformen zur Lorenz–Dominanzordnung	189
9.3.2 Lorenz–Dominanz erzeugende und erhaltende Transformationen	192
9.3.3 Lorenz–Dominanz bei Aggregation und Mischung von Verteilungen	194
9.4 Die Bedeutung verschiedener Ordnungsrelationen für die Disparitätsmessung	197
9.4.1 Die Lorenz–Dominanzordnung und Ungleichheitsindizes	197
9.4.2 Die Bedeutung der Starshaped–Ordnung für die Ungleichheitsmessung	200
9.4.3 Inverse stochastische Dominanz, Dominanz der kumulierten Lorenzkurven	201
und Ungleichheitsmessung	
9.5 Streuungs– und Ungleichheitsordnungen im Vergleich	204
9.6 Partielle Ordnungen im Rahmen der Analyse von Lebensdauerverteilungen	209
und deren Bezüge zur Lorenzkurve	
9.6.1 Wesentliche Zusammenhänge in einer Übersicht	210
9.6.2 Bezüge wichtiger Ordnungsrelationen zur Lorenzkurve	213
9.7 Anwendung bei der Beurteilung risikobehafteter Anlageformen	215
10. Abschließende Bemerkungen	219
Anhang	221
Literaturverzeichnis	229

Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole

a	Absolutglied bei Lineartransformation/ Intervalluntergrenze, $a = \text{Min}_i a_i$
b	Proportionalitätsfaktor bei Lineartransformation/ Intervallobergrenze, $b = \text{Max}_i b_i$
A(F)	Funktionswert der Lückenkurve
cov(x,y)	Kovarianz von X und Y
C_g	Korrelationsmaß
C(p)	Punkt Konzentrationsmaß
D(F)	Funktionswert der Gegenkurve zur "Adaptierten Lorenzkurve"
E	Durchschnittswertoperator / exponentialverteilte Variable
f(x)	Dichtefunktion
$f_g(x)$	Dichte der gewogenen Verteilung
F_i	kumulierte relative Häufigkeiten
$F(x)$	Verteilungsfunktion
$F_{\tilde{X}}(x)$	Verteilungsfunktion der relativierten Variablen \tilde{X}
$F^{(\nu)}(x)$	kumulierte Verteilungsfunktion
$F(x)$	$1 - F(x)$
$F_g(x)$	gewogene Verteilung
$F_g(F_X)$	Funktionswert einer Korrelations-Lorenzkurve
G	Index zur Kennzeichnung der 50% größten Merkmalsträger einer Verteilung
GL(F)	Funktionswert der verallgemeinerten Lorenzkurve nach SHORROCKS
H	Herfindahl-Index
I	allgemeiner Disparitätsindex nach PIESCH und MEHRAN
J(F)	Gewichtsfunktion
K	Index zur Kennzeichnung der 50% kleinsten Merkmalsträger einer Verteilung
l(x)	erste Momentdichte
l_i	relative Merkmalssummen bei Einzelwertdarstellung
L(x)	erste Momentverteilung

L_i	kumulierte relative Merkmalssummen
$L(F)$	Funktionswert der Lorenzkurve
$L^{(\nu)}(F)$	Funktionswert der von unten kumulierten Lorenzkurve
$\bar{L}^{(\nu)}(F)$	Funktionswert der von oben kumulierten Lorenzkurve
m'_r	Ursprungsmomente
M	Mehran-Maß
$M_u(F)$	untere Mittelwertfunktion in Abhängigkeit von F
$M_u(x)$	untere Mittelwertfunktion in Abhängigkeit von x
$M_o(F)$	obere Mittelwertfunktion in Abhängigkeit von F
$M_o(x)$	untere Mittelwertfunktion in Abhängigkeit von x
n	Anzahl der Merkmalsträger
P	Piesch-Maß
$r(x), r(F)$	Hazardrate
R	Gini-Koeffizient
S	Schutz-Koeffizient
$v(x), v(F)$	mittlere restliche Lebensdauer
Var	Varianzoperator
$W(F)$	Funktionswert der "Adaptierten Lorenzkurve"
x_i, x_j	Beobachtungswerte
\mathbf{x}, \mathbf{y}	Vektoren von Beobachtungswerten
$x(F)$	Funktionswert der inversen Verteilungsfunktion
$\frac{x(F)}{\mu}$	Funktionswert der normierten inversen Verteilungsfunktion
$x^{(\nu)}(F)$	Funktionswert der kumulierten inversen Verteilungsfunktion
X, Y	Variablen/ als Index zur Kennzeichnung einer Verteilung
X	Merkmalssumme
\tilde{X}	relativierte Variable $\frac{X}{\mu}$
$\tilde{x}(F)$	inverse Verteilungsfunktion einer von unten und oben abgeschnittenen Verteilung
$X_{r:\nu}$	Ordnungsstatistik
Z	Median
$Z(p)$	Funktionswert der Zenga-Kurve
$\Gamma(X, \nu)$	erweiterter Gini-Koeffizient auf der Basis von "Minimum-Mittelwerten" $\mu_{1:\nu}$

$\Gamma'(X, \nu)$	erweiterter Gini-Koeffizient auf der Basis von "Maximum-Mittelwerten" $\mu_{\nu:\nu}$
$\Gamma'_{\bar{n}}(X, \nu)$	normierter erweiterter Gini-Koeffizient auf der Basis von "Maximum-Mittelwerten" $\mu_{\nu:\nu}$
$\Gamma(Y, X, \nu)$	erweiterte "Gini-Kovarianz"
$\Gamma'(Y, X, \nu)$	erweiterte "Gini-Kovarianz"
δ_{μ}	durchschnittliche absolute Abweichung von μ
δ_Z	durchschnittliche absolute Abweichung von Z
δ_x	durchschnittliche absolute Abweichung von beliebigem Wert x
ϵ	Elementzeichen
ξ	Zenga-Index / untere Abschneidegrenze
Δ	mittlere Differenz (mit Wiederholung)
η	obere Abschneidegrenze
$\eta_{x,y}$	Elastizität
μ	arithmetisches Mittel einer Verteilung
$\mu_{r:\nu}$	arithmetisches Mittel der Verteilung von $X_{r:\nu}$
$\mu_{1:\nu}$	"Minimum-Mittelwert"
$\mu_{\nu:\nu}$	"Maximum-Mittelwert"
$\mu_{r:\nu}^{(k)}$	k'tes Ursprungsmoment von $X_{r:\nu}$
μ_1	arithmetisches Mittel der ersten Momentverteilung
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\nu!$	ν 'te Fakultät

Übersicht über Ordnungsrelationen

$X \underset{\bar{L}}{\leq} Y :$	$L_X(F) \geq L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$, Lorenz-Dominanzordnung
$X \underset{\bar{W}}{\leq} Y :$	$W_X(F) \leq W_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$
$X \underset{\bar{D}}{\leq} Y :$	$D_X(F) \geq D_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$
$X \underset{\bar{A}}{\leq} Y :$	$A_X(F) \leq A_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$
$X \underset{L^{(\nu)}}{\leq} Y :$	$L_X^{(\nu)}(F) \geq L_Y^{(\nu)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$
$X \underset{(\nu)}{\leq} Y :$	$F_X^{(\nu)}(x) \geq F_Y^{(\nu)}(x)$ für $0 \leq x \leq b$, stochastische Dominanz
$X \underset{(1)}{\leq} Y :$	$F_X(x) \geq F_Y(x)$ für $0 \leq x \leq b$, First order Dominanz
$X \underset{(2)}{\leq} Y :$	$\int_0^x F_X(y) dy \geq \int_0^x F_Y(y) dy$ für $0 \leq x \leq b$, Second order Dominanz
$X \underset{(\nu)}{\leq}^{-1} Y :$	$x^{(\nu)}(F) \leq y^{(\nu)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$, inverse stochastische Dominanz
$X \underset{GL}{\leq} Y :$	$\mu_X L_X(F) \geq \mu_Y L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ (oder $X \underset{(1)}{>}^{-1} Y$)
$X \underset{(\nu)}{\leq}^{V+} Y :$	$\frac{F_X^{(\nu)}(x)}{F_Y^{(\nu)}(x)}$ nichtfallend für $a \leq x \leq b$, $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$
$X \underset{*}{\leq} Y :$	Verhältnis-Dominanz $\frac{y^{(\nu)}(F)}{x^{(\nu)}(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$, Inverse Verhältnis-Dominanz $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$, starshaped-Ordnung (oder $X \underset{(0)}{\leq}^{V+(-1)} Y$)
$X \underset{v}{\leq} Y :$	$\int_x^b (1-F_X(y)) dy \leq \int_x^b (1-F_Y(y)) dy$ für $0 \leq x \leq b$, "variability"-Ordnung

Verzeichnis der Übersichten

1: Darstellungsformen des Gini-Koeffizienten	28
2: Darstellungsformen des Gini-Koeffizienten über Mittelwerte von Ordnungsstatistiken	48
3: Darstellungsformen von R und V^2 bzw. $V^2/(1+V^2)$ im Vergleich	50
4: Darstellung von Armutmaßen in Abhängigkeit von R	59
5: Interpretation der in Kapitel 6 vorgestellten Kurven- züge vor verschiedenen Anwendungshintergründen	100
6: Zusammenfassende Übersicht der in Kapitel 7 bisher vorgestellten Maße	120
7: Lage der (Korrelations-)Lorenzkurven für verschiedene Transformationsfunktionen $g(x)$ und $g^*(x)$	134
8: Zusammenfassender Überblick über Komponenten der Zerlegung von $\Gamma(X, \nu)$ und $\Gamma'(X, \nu)$.	144
9: Überblick über die in den Anwendungsbeispielen des Kap. 8.3 verwendeten Transformationsfunktionen	145
10: Flächenprogressionsmaße im Überblick	164
11: Flächenprogressionsmaße bei linearem Steuertarif	165
12: Kriterien für Ordnungsrelationen zweier Funktionen und äquivalente Darstellungsformen	172
13: Wichtigste Zusammenhänge zwischen den in Kapitel 9.2 vorgestellten Ordnungsrelationen	188

13: Wichtigste Zusammenhänge zwischen den in Kapitel 9.2 vorgeestellten Ordnungsrelationen	188
14: Äquivalente Darstellungsformen zur Lorenz–Dominanzordnung	190
15: Wichtige partielle Ordnungsrelationen bei der Analyse von Lebensdauervertelungen	211

Verzeichnis der Schaubilder

1: Die Lorenzkurve	16
2: Darstellung von $\mu_{1:\nu}$	40
3: Darstellung von $\mu_{\nu:\nu}$	40
4: Darstellung von A^R und K_G im Lorenzkurvenschaubild	55
5 und 6: Äquivalente Flächen im Schaubild von $\frac{x(F)}{\mu}$ und $1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x})$	81
7: Ableitung von $W(F)$ aus dem Lorenzkurvenschaubild	83
8: Ableitung von $A(F)$ aus dem Lorenzkurvenschaubild	91
9: Darstellung der von unten kumulierten Lorenzkurven	105
10: Darstellung von $\Gamma(X, \nu)$	110
11: Darstellung von $\Gamma'(X, \nu)$	117

1. Einleitung

1.1 Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit

Die Konzentrationsmessung stellt ein wichtiges Teilgebiet der deskriptiven statistischen Methodenlehre dar. Sie gliedert sich in den Bereich der absoluten Konzentration und den Bereich der Disparitäts- oder Ungleichheitsmessung. Im Rahmen der Disparitätsmessung wird untersucht, wie gleich- bzw. ungleichmäßig sich Anteile von Merkmalssummen auf Anteile von Merkmalsträgern verteilen. Bekanntes Beispiel ist die Analyse der Einkommensverteilung im Hinblick auf die Ungleichheit. Aus statistischer Sicht sind dabei zwei Verteilungen, die extreme Gleichverteilung und die extreme Ungleichverteilung von Bedeutung. Extreme Gleichverteilung liegt immer dann vor, wenn jeder einen gleichen Teil besitzt. Von extremer Ungleichverteilung spricht man, wenn ein einziger Merkmalsträger die gesamte Merkmalsmasse auf sich vereinigt. Viele Disparitätsindizes können als Maß für den Abstand zwischen der gegebenen Verteilung und der extremen Gleichverteilung interpretiert werden.

Zentrale Kenngrößen dieses Fachgebietes sind die bereits Anfang dieses Jahrhunderts von M. O. LORENZ bzw. C. GINI entwickelten Maßgrößen "Lorenzkurve" und "Gini-Koeffizient". Werte der Lorenzkurve können einfach interpretiert werden. Es läßt sich z. B. an der Funktion ablesen, wieviel Prozent der Merkmalssumme auf die 20% kleinsten oder 10% größten Merkmalsträger entfällt. Der Gini-Koeffizient R kann im Lorenzkurven-Schaubild als zweifache Konzentrationsfläche veranschaulicht werden. Darüberhinaus ist er in einer Vielzahl von Schreibweisen darstellbar und interpretierbar, was zu immer neuen Einbindungsmöglichkeiten führt und u.a. seinen hohen Stellenwert erklärt.

Ausgehend von diesen beiden Kenngrößen wurden zahlreiche Erweiterungen und Abwandlungen vorgestellt, die ebenfalls für die Beurteilung der Disparität einer Verteilung herangezogen werden. Andererseits tauchen in der neueren Literatur zu den Schlagworten Lorenzkurve bzw. Gini-Koeffizient nicht nur Beiträge zur Disparitätsmessung auf. Auch für die Analyse weiterer Themenkreise wie Lebensdauerverteilungen oder Armutsmessung finden diese Maßgrößen inzwischen Verwendung.

Das Anliegen dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die vielfältigen Einsatzbereiche der Lorenzkurve, des Gini-Koeffizienten und deren Abwandlungen zu geben, die über die Disparitätsmessung hinaus gehen können.

In systematischer Form wird wesentliche Literatur zur Lorenzkurve, zum Gini-Koeffizienten und einigen Abwandlungen eingeordnet und aufbereitet. Darüberhinaus werden da, wo es sich aus der Systematik heraus anbietet, ergänzende Anmerkungen und Vorschläge gemacht bzw. Gedanken weiterentwickelt.

Die systematische Darstellungform soll dazu anregen, Anwendungsmöglichkeiten der bekannten Indikatoren im Rahmen anderer Zielsetzungen zu prüfen. Umgekehrt bedeutet natürlich die Verwendung bspw. des Gini-Koeffizienten als Baustein eines Maßes in einem disparitätsfremden Bereich, daß implizit Ungleichheitsaspekte dort eine Rolle spielen oder zumindest in eine erweiterte Interpretation einbezogen werden können.

Die Auswahl der Anwendungsbeispiele orientiert sich an den veröffentlichten Beiträgen. Die Anwendung könnte theoretisch auf weitere Sachverhalte ausgedehnt werden. Zudem werden Ansätze zum Schätzen und Testen der Kenngrößen ausgeklammert, da eine Erörterung im Rahmen dieser Arbeit zu weitführend wäre. Für einige interessante Ansätze, bspw. von TAGUCHI (1981,1987) oder BASU (1987) muß auf die Literatur verwiesen werden. Eine grundlegende und ausführliche Auseinandersetzung mit Eigenschaften der Lorenzkurve und des Gini-Koeffizienten findet sich bei PIESCH (1975), auf dessen Ergebnisse im Laufe dieser Arbeit immer wieder zurückgegriffen wird. Einen guten Überblick über die neuere Literatur zum Gini-Koeffizienten gibt die Monographie von GIORGI (1992), in der nach einer Zusammenfassung ausführlich die einzelnen Beiträge im Rahmen eines Literaturverzeichnisses vorgestellt und kommentiert werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Wie bereits an der Aufgabenstellung zu erkennen ist, werden in dieser Arbeit viele sehr unterschiedliche Aspekte einer eingehenderen Betrachtung unterzogen. Dies dokumentiert auch das Inhaltsverzeichnis. Grundsätzlich orientiert sich der Aufbau dieser Arbeit an der **formalen Struktur** der vorzustellenden Maßgrößen und nicht an deren Zielsetzung.

Innerhalb der einzelnen Kapitel wird versucht ein grobes Gliederungsraster einzuhalten: Der Vorstellung des zu betrachtenden Instrumentariums schließt sich in der Regel die Prüfung an, inwiefern die in **Kapitel 2** formulierten Kriterien eines Disparitätsmaßes erfüllt werden. Anschließend wird untersucht, inwieweit der Indikator in anderen

Themenbereichen Eingang findet. Dabei geben die veröffentlichten Beiträge im wesentlichen diese Bereiche vor, was zwangsläufig zu einer relativ willkürlichen und unvollständigen Auswahl führt. Dennoch gibt es eine Vielzahl von Schnittstellen zwischen den einzelnen Kapiteln, auf die über Vermerke im Text, in den Fußnoten und gegebenenfalls über Wiederholungen hingewiesen wird. Damit sollen auch solche Zusammenhänge berücksichtigt werden, die bei der gewählten Gliederungsstruktur sonst verloren gingen.

In **Kapitel 3** wird neben der Lorenzkurve als solcher und der normierten inversen Verteilungsfunktion als "vorgelagerter Steigungskurve" bereits eine erste Modifikation der Lorenzkurve vorgestellt. Diese spielt später im Zusammenhang mit Ordnungsrelationen eine große Rolle .

In **Kapitel 4** steht der Gini-Koeffizient im Zentrum. Zunächst werden in knapper Form die vielseitigen Darstellungsmöglichkeiten vorgestellt. Im folgenden wird zunächst seine Funktion als Disparitätsmaß unter zwei ausgewählten Aspekten beleuchtet. Daran schließt sich ein Überblick über seine vielfältige Verwendung in disparitätsfremden Gebieten an.

Kapitel 5 stellt gewissermaßen einen Exkurs dar. Hier wird ein von ZENGA (1984a) entwickeltes neues Instrumentarium zur Disparitätsmessung vorgestellt, welches eine Alternative zur Lorenzkurve und dem Gini-Koeffizienten darstellt, und gemäß den in Kapitel 2 aufgestellten Kriterien geprüft.

Kapitel 6 stellt Kurvenzüge vor, deren Funktionswerte im Schaubild der normierten inversen Verteilungsfunktion als Flächenstücke gedeutet werden können. Hierdurch lassen sich leicht Zusammenhänge zwischen Lorenzkurve bzw. Gini-Koeffizient und diesen Kurvenzügen herleiten. In der Literatur finden die Kurvenzüge wiederum Anwendung in ganz unterschiedlichen Bereichen, wie z. B. die Beiträge von CHANDRA/SINGPURWALLA (1981), DAGUM (1990), HEY/LAMBERT (1980), KAKWANI (1984), RIESE (1987) und YITZHAKI (1979) zeigen.

Kapitel 7 befaßt sich mit kumulierten Lorenzkurven, aus denen bekannte erweiterte Gini-Koeffizienten abgeleitet werden können, die Spezialfälle einer von PIESCH (1975) und MEHRAN (1976) vorgeschlagenen Klasse von Disparitätsmaßen sind. Für diese Indizes wird in einem Abschnitt eine flächenmäßige Darstellungsform hergeleitet.

Mit Hilfe der in **Kapitel 8** vorgestellten Korrelations–Lorenzkurven kann die Korrelation zweier funktional miteinander verbundener Merkmale gemessen werden. Die Zielsetzung Disparitätsmessung steht damit nicht mehr im Vordergrund.

Die Anwendungsmöglichkeiten dieser Funktionen sind sehr vielfältig, was neben KAKWANI insbesondere YITZHAKI in einer Vielzahl von Artikeln belegt.

Kapitel 9 widmet sich dem Themengebiet der partiellen Ordnungsrelationen im Zusammenhang mit der Lorenz–Dominanzordnung, womit sich z. B. auch ARNOLD (1987) und ALZAID (1990) befassen. Hinzuweisen ist in diesem Zusammenhang auf die ausführliche Aufarbeitung des Konzepts der Majorization von MARSHALL/ OLKIN (1979). Der Abschnitt stellt in gewisser Weise eine Abrundung der Arbeit dar, weil die in den einzelnen Kapiteln vorher vorgestellten, bisher unverbundenen Maßgrößen zum Teil in Beziehung zueinander gesetzt werden.

In den Kapiteln 3 bis 8 werden die Instrumente als solche und deren Eigenschaften beschrieben. Partielle Ordnungsrelationen werden dabei zwar definiert, aber erst Kapitel 9 befaßt sich gesondert und ausführlich mit den Zusammenhängen zwischen diesen Ordnungsrelationen. Insbesondere auf die Bezüge zur Lorenz–Dominanzordnung wird immer wieder hingewiesen. Diese werden unter verschiedenen Aspekten gruppiert und beleuchtet, was zur Folge hat, daß die einzelnen Abschnitte in Kapitel 9 sehr verflochten sind.

Schließlich ist noch auf ein Problem formaler Natur hinzuweisen: Im Allgemeinen lassen sich für jeden Indikator jeweils eine sinnvolle diskrete **und** stetige Darstellungsform finden. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit und der Übersichtlichkeit wird überwiegend nur auf die stetige Darstellungsform zurückgegriffen, eine Übertragung in die diskrete Schreibweise ist in der Regel möglich.

2. Grundlagen der Disparitätsmessung

2.1 Grundbegriffe und allgemeine einführende Überlegungen

Grundlage aller Überlegungen ist die Betrachtung eines nichtnegativen, extensiven Merkmales x im Bereich $[a, b]$ mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ für die $F(a) = 0$ und $F(b) = 1$ gilt.

Für **stetige Merkmale** wird die Häufigkeitsdichte mit $f(x)$ bezeichnet, das arithmetische

Mittel berechnet sich über $\mu = \int_a^b xf(x)dx$ und die Varianz über $\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx$.

Die erste Momentdichte ist dann $l(x) = \frac{xf(x)}{\mu}$, die erste Momentverteilung folglich

$$L(x) = \int_a^x l(u)du.$$

Für ein **diskretes Merkmal** ergibt sich entsprechend für eine Verteilung mit n Merkmalsträgern, beschrieben durch den Vektor der Beobachtungswerte $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

als Bezeichnung:

– $X = \sum_{i=1}^n x_i = n\mu$ ist die Merkmalssumme der Verteilung,

– $F_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sind kumulierte relative Häufigkeiten,

– $l_i = \frac{x_i}{n\mu}$ sind relative Merkmalssummen und

– $L_i = \sum_{k=1}^i l_k$, $l_k \leq l_{k+1}$ sind kumulierte relative Merkmalssummen.

Die Varianz schreibt sich in dem Fall als $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2$.

Der Laufindex i wird in der Regel dann verwendet, wenn eine Ordnung $x_i \leq x_{i+1}$, $i = 1..n-1$ vorliegt, der Index j entsprechend, wenn $x_j \geq x_{j+1}$, $j = 1..n-1$ gilt.

Die Entwicklung und Überprüfung eines Instrumentariums zur Disparitätsmessung setzt Werturteile (Kriterien) voraus, anhand derer die Maße (Kurzweg oder Kennziffer) hinsichtlich ihrer Eignung geprüft werden können. In der Literatur finden sich unterschiedliche Möglichkeiten, diese Werturteile als Beurteilungsmaßstäbe zu konkretisieren:

1. Wohlfahrtsfunktionen (Bewertungsfunktionen).

Es wird geprüft, ob Ungleichheitsmaße mit bestimmten Funktionen kompatibel sind, d.h. ob sie Situationen gemäß diesen vorher gegebenen Wohlfahrtsfunktionen ordnen. Diese Betrachtungsweise soll in dieser Arbeit nur am Rande gestreift werden.¹

2. Eigenschaften bzw. Forderungen, die an Disparitätsindikatoren gestellt werden.

Differenziert man die Zielsetzung "Disparitätsmessung" weiter, können gegebenenfalls nur bestimmte Forderungen bei einzelnen Fragestellungen eine Rolle spielen. In den Forderungen dokumentieren sich in der Regel Vorstellungen, wie ein Indikator beim Situationsvergleich zu reagieren hat.

3. Partielle Ordnungsrelationen:²

Beim Vergleich zweier Verteilungen anhand von Kurvenzügen wird festgelegt, wann eine Verteilung die andere hinsichtlich des vorgegebenen Kriteriums (z.B. Ungleichheit) dominiert. Man formuliert für die Variablen X und Y : "X dominiert Y schwach gemäß dem Kriterium i: $X \underset{i}{<} Y$." In diese Definition partieller

Ordnungsrelationen gehen damit implizit Wertungen ein, wann eine Situation einer anderen vorzuziehen ist. D.h. die Begründungen von Ordnungsrelationen führen oft genau auf den gleichen Situationsvergleich wie in 2.³ Ein Vergleich von Verteilungen anhand von partiellen Ordnungsrelationen wird insbesondere dadurch erschwert, daß diese Relationen in der Regel nicht alle Situationen ordnen können, d.h. sie sind im Gegensatz zu Kennziffern-Vergleichen (die lediglich ein bestimmtes Skalenniveau voraussetzen) unvollständig. Die Einhaltung einer Eigenschaft erfordert also in diesem Zusammenhang, daß erstens überhaupt eine Rangfolge gebildet werden kann und zweitens, daß diese Rangfolge dem Werturteil entspricht.

¹ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTROM, A. (1985a), S. 2.2.1.

² Vgl. FIELDS, G. S. / FEI, J. H. S. (1978): Unterscheidung in einen ordinalen und einen kardinalen Ansatz.

³ Vgl. z.B. ATKINSON, A. B. (1970).

Von partiellen Ordnungsrelationen wird folgendes gefordert:⁴

1. Reflexivität, d. h. es gilt $X \underset{i}{\leq} X$,
2. Transitivität, d. h. $X \underset{i}{\leq} Y$ und $Y \underset{i}{\leq} Z$ impliziert $X \underset{i}{\leq} Z$,
3. Antisymmetrie, d. h. $X \underset{i}{\leq} Y$ und $Y \underset{i}{\leq} X$ impliziert $X \simeq Y$,

wobei $X \simeq Y$ besagt, daß X und Y sich maximal über einen Skalierungsfaktor unterscheiden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden insbesondere Kriterien der Form 2 und 3 verwendet.

2.2 Von Disparitätsmaßen geforderte Eigenschaften

Die Entwicklung eines Instrumentariums zur Messung von Disparität setzt **Kriterien** (Werturteile) voraus, anhand derer **Maße** (Kennziffern oder Funktionen) hinsichtlich ihrer Eignung beurteilt werden können. Eine Möglichkeit der Formulierung solcher Kriterien besteht in der **Forderung von Eigenschaften**:

Eine Vielzahl von Autoren⁵ hat sich mit dieser Fragestellung beschäftigt. Im Zusammenhang mit der Disparitätsmessung hat sich dabei ein Forderungskatalog herauskristallisiert, der weder vollständig gefordert werden muß noch in sich zwangsläufig widerspruchsfrei ist. Ob mehrere Forderungen gleichzeitig von einem Maß als wünschenswerte Zielvorstellung erfüllt werden sollen, hängt letztlich auch von der konkreten Fragestellung und den Wertvorstellungen des Beurteilers ab.

Die meisten Eigenschaften beziehen sich auf einen Situationsvergleich, d.h. sie formulieren, ob die Veränderung einer Verteilung als eine Erhöhung oder Erniedrigung der Disparität gewertet werden soll. Dies ermöglicht es, den Forderungskatalog nicht nur auf Kennziffern, sondern auch auf das Verhalten von Kurvenzügen (als Ungleichheitsindikatoren) anzuwenden. Damit ist ein **ordinaler** Vergleich von geeigneten Kurvenzügen möglich, wobei die Eigenschaften eine Dominanzrelation bestimmter Verteilungen – dargestellt durch bestimmte Kurvenzüge – fordern.

⁴ Vgl. MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979), S. 13, KOCHAR, S. C. / WIENS, D. P. (1987), S. 826, OJA, H. (1985), S. 490.

⁵ Vgl. BRUCKMANN, G. (1969), HALL, M. / TIDEMAN, N. (1967), JÖHNK, M. D. (1970), PIESCH, W. (1980), WAGENHALS, G. (1981), SCHAICH, E. / WISNIEWSKI, M. (1990), SCHMID, F. (1991).

Man kann die Eigenschaften von Disparitätsmaßen hinsichtlich verschiedener Fragestellungen systematisieren:

- Wann soll der Indikator als Ausdruck für ein gleichbleibendes Disparitätsausmaß konstant bleiben ?
- Wie verhält er sich bei Variation eines/mehrerer Beobachtungswerte x_i bei konstanter/variabler Anzahl an Merkmalsträgern n bzw. bei Konstanz/Änderung der Merkmalssumme X .⁶

Folgender Katalog an Eigenschaften soll hier berücksichtigt werden:

1. NORMIERUNG (Referenzverteilung) und NICHTNEGATIVITÄT:

Der Normierungsaspekt greift einen Vergleich mit Referenzverteilungen auf.

"Die Disparität ist im Fall einer extremen Gleichverteilung am kleinsten und im Fall einer extremen Ungleichverteilung am größten."

Ein Disparitätsindex soll bei einer extremen Gleichverteilung oder Einpunktverteilung (extremen Ungleichverteilung) den Wert Null ($1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$) annehmen. Ein Kurvenzug sollte dementsprechend in diesen Fällen jeweils einen Grenzverlauf markieren.

2. TRANSFEREFFEKT (Pigou–Dalton–Transferprinzip, Verschiebungsprobe):

"Der Transfer eines Betrags (ohne Veränderung der Reihenfolge von Merkmals-einheiten) von einem größeren an einen kleineren Merkmalsträger soll zur Senkung der Disparität führen."

Bei einem Index sollte dies zu einer Abnahme seines Wertes führen. Streng schur-konvexe Indizes erfüllen dieses Postulat.⁷ Bei Kurvenzügen sollte sich dies in einer Dominanz der neuen Verteilung $\mathbf{y} : (y_1, y_2, \dots, y_{n_Y})$ gegenüber der Ausgangsverteilung

$\mathbf{x} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_X})$ hinsichtlich eines bestimmten Kriteriums äußern.⁸

Forderungen bezüglich des Ausmaßes dieser Änderung der Verteilung werden in sogenannten Transfersensitivitätsaxiomen konkretisiert.

⁶ Vgl. SCHAICH, E. / WISNIEWSKI, M. (1990), S. 460.

⁷ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 99 und 103.

⁸ Bei Kurvenzügen kann diese echte Abnahme bedeuten, daß sich der Verlauf der Kurve nur in einem Teilbereich ändert.

3. VERHALTEN BEI LINEARTRANSFORMATION:

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

"Die proportionale Änderung eines jeden Beobachtungswertes ($y_i = bx_i$, $b > 0$) soll als keine Änderung der Disparität gewertet werden."⁹

Damit sollte ein Index seinen Wert und ein Kurvenzug seinen Verlauf in diesem Fall nicht ändern (Konzept der relativen Ungleichheit, Mittelwertsunabhängigkeit).

"Die Erhöhung (Erniedrigung) jeden Merkmalswertes um einen konstanten Betrag ($y_i = x_i + a$, $a > 0$) soll als Disparitätsabnahme (–zunahme) gewertet werden."

Für einen Indexwert erwartet man entsprechend eine Abnahme (Zunahme) oder zumindest keine Zunahme (keine Abnahme) seines Wertes. Der Verlauf eines geeigneten Kurvenzuges soll diese Dominanzbeziehung bestätigen.¹⁰

Beim Vergleich zweier Situationen, die sich hinsichtlich der Anzahl der betrachteten Merkmalseinheiten unterscheiden (und damit das Aggregationsproblem aufgreifen), gibt es zwei wesentliche Forderungen:

4. POPULATIONSVERVIELFACHUNG:

"Bei der Aggregation von k identischen Verteilungen x zu y soll die Disparität konstant bleiben."

Ein Disparitätsindex soll seinen Wert nicht ändern, der Verlauf einer entsprechenden Kurve soll konstant bleiben.

5. NULLENERGÄNZUNG:

"Das Hinzufügen von Nullträgern (d.h. Vergleich von x mit y : $(0, 0, 0, \dots, x_1, \dots, x_n)$) soll als Zunahme der Disparität gewertet werden."

Damit soll der Indexwert zunehmen, ein Kurvenzug sich entsprechend verändern.

⁹ Diese Forderung ist nicht unumstritten. Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 105f.

¹⁰ Das Verhalten bei einer Lineartransformation kann auch vor dem Hintergrund eines Vergleichs von Verteilungen mit unterschiedlichem Mittelwert interpretiert werden. Der Versuch unterschiedliche Niveaus zweier Verteilungen auszuklammern, um nicht auch Effizienz– sondern nur Verteilungs–aspekten Beachtung zu schenken, erfordert eine Normierung der Verteilungen auf ein "einheitliches Niveau". Diese kann bei intervallskalierbaren Merkmalen durch Multiplikation mit einem konstantem Faktor, durch Addition eines fixen Betrages oder durch Mischung dieser Aspekte ("intermediäres Konzept", vgl. BOSSERT, W. / PFINGSTEN, A. (1990)) erreicht werden. Bei verhältnisskaliertem Merkmal ist jedoch nur eine Transformation $y = bx$ zulässig.

Darüber hinaus wird gefordert:

6. SYMMETRIE:

"Das Ausmaß an Ungleichheit ist unabhängig davon, welcher Merkmalsträger einen bestimmten Merkmalsbetrag aufweist, d.h. es gibt kein zusätzliches Ordnungskriterium neben der Höhe der Merkmalsausprägungen."

Dieses Kriterium ist bei der Größe nach geordneten Vektoren \mathbf{x} stets erfüllt.

7. STETIGKEIT:

"Kleine Änderungen der Verteilung sollen nicht zu sprunghaften Veränderungen des Indikators führen."

ZENGA¹¹ formuliert Forderungen speziell bezogen auf Kurvenzüge. Er spricht hierbei von Punktkonzentrationsmaßen $C(p)$:

Ähnlich dem Normierungsaxiom fordert er, daß geeignete Kurvenzüge Werte im Bereich zwischen 0 und 1 annehmen sollen, wobei im Fall einer extremen Gleichverteilung (extremen Ungleichverteilung) $C(p)$ gegen Null (Eins) tendieren soll. Daneben darf aber der Kurvenzug kein spezielles Steigungs- und Krümmungsverhalten aufweisen.¹² Anstelle konkreter Situationsvergleiche zieht er für die Formulierung weiterer Forderungen das Verhältnis der Werte der inversen Verteilungsfunktion zweier Verteilungen heran:

1. Ist beim Vergleich von zwei Verteilungen das Verhältnis der beiden inversen Verteilungsfunktionen $x(F)$ und $y(F)$ ¹³ konstant in jedem F , sollten die betrachteten Kurvenzüge $C(p)$ als Disparitätsindikatoren aufeinanderfallen.

2. Ist das Verhältnis $\frac{y(F)}{x(F)}$ zweier Verteilungen nichtfallend und für einige F streng steigend¹⁴, dann sollte $C_X(p) \leq C_Y(p)$ gelten (mit echter Größerrelation für einige p).

Bei Verschiebung einer Verteilung nach rechts ($y = a + x$, $a > 0$) gilt bspw. $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend.¹⁵

¹¹ Vgl. ZENGA, M. (1990), S. 108.

¹² Vgl. ZENGA, M. (1990), S. 108; "must not have forced behaviour".

¹³ Vgl. Kap. 3.1.

¹⁴ Vgl. "Starshaped"— Definition, Kap. 3.1.

¹⁵ Vgl. Kap. 9.4.2.

Gerade in neueren Beiträgen wird das für die Disparitätsmessung entwickelte Instrumentarium direkt oder als Ausgangspunkt für die Entwicklung von verallgemeinernden bzw. alternativen Indikatoren verwendet. Diese finden wiederum Anwendung bei weiteren Fragestellungen, wie z.B. der Messung der Asymmetrie oder Wölbung einer Verteilung, der Korrelation von Merkmalen oder der Analyse von Lebensdauerverteilungen.

Die Überprüfung, ob das (neue) Instrumentarium seiner (neuen) Zielsetzung gerecht wird, soll soweit hier möglich in den einzelnen Kapiteln vorgenommen werden.

3. Normierte inverse Verteilungsfunktion, Lorenzkurve und verallgemeinerte Lorenzkurve

In diesem Kapitel soll das "Basisinstrument" Lorenzkurve kurz vorgestellt werden. Da die der Lorenzkurve vorgelagerte "Steigungskurve" – die normierte inverse Verteilungsfunktion – auch für die Disparitätsmessung eine eigenständige Bedeutung erlangt hat, erscheint ein gesondertes Kapitel auch für diesen Kurvenzug gerechtfertigt. Ebenso soll in diesem Abschnitt eine erste Abwandlung der Lorenzkurve vorgestellt werden, die in der Literatur Bedeutung erlangt hat, wenn auch nicht auf dem Gebiet der Disparitätsmessung.

3.1 Die normierte inverse Verteilungsfunktion

Die normierte inverse Verteilungsfunktion $\frac{x(F)}{\mu_X}$ ergibt sich durch Invertierung der Verteilungsfunktion $F(x)$ und Normierung mit dem Faktor $\frac{1}{\mu}$:

Die inverse Verteilungsfunktion $x(F)$ ist definiert als Umkehrfunktion von $F(x)$:

$$(3.1) \quad x(F) = \inf\{x \mid F(x) \geq F\} \text{ für } 0 < F < 1.^1$$

Für $F = 1$ ist $x(1) = b$. Für die Stelle $F = 0$ gibt es zwei in der Literatur verwandte Definitionen: $x(0) = 0$ oder $x(0) = a$; hier soll mit letzterer gearbeitet werden, wenn nichts anderes angegeben wird.

Ist x ein diskretes Merkmal, stellt sich $x(F)$ als eine linksseitig stetige Treppenfunktion dar. Ist x ein stetiges Merkmal mit einer streng monoton steigenden Verteilungsfunktion, dann ist $x(F)$ ebenfalls eine streng monoton steigende Funktion.

Die Fläche unter der inversen Verteilungsfunktion entspricht dem arithmetischen Mittel der Verteilung μ .

Betrachtet man die normierte inverse Verteilungsfunktion $\frac{x(F)}{\mu_X}$, so kann diese folglich als Umkehrfunktion einer Verteilungsfunktion des Merkmals $\tilde{X} = \frac{X}{\mu_X}$ mit $F_{\tilde{X}}(x)$ interpretiert werden.

¹ Vgl. GASTWIRTH, J. L. (1971), S. 1037 und PIESCH, W. (1975), S. 16.

Die inversen Verteilungsfunktionen zweier Verteilungen (Merkmal x mit $F_X(x)$ und Merkmal y mit $F_Y(x)$) können in einer bestimmten Lage zueinander liegen:

Ist $x(F) > y(F)$ für alle F , gilt $\mu_X > \mu_Y$. Diese Dominanz-Relation ist bekannt als First order Dominanz.² Normierte inverse Verteilungsfunktionen weisen nie eine derartige Dominanzrelation auf, da die Fläche unter den Kurven auf Eins normiert ist, sich diese folglich mindestens einmal schneiden müssen.

Eine sehr wichtige Dominanzrelation zweier Verteilungen anhand ihrer (normierten) inversen Verteilungsfunktionen, wird jedoch über die sogenannte "Starshaped" - Beziehung eingeführt³:

Definition 3.1: "Eine Variable X ist starshaped in Bezug auf Y ($X \leq_* Y$), wenn $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend in $0 < F < 1$ ist mit $y'(x) \geq 0$."⁴

ZENGA definiert die Relation " $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend in $0 < F < 1$ " als Maßgröße für eine größere "relative global inequality" der Verteilung von Y gegenüber X , woraus sich seine Forderungen an ein Punktkonzentrationsmaß erklären.⁵

Als erste äquivalente Darstellung dazu läßt sich herleiten:

$$(3.2) \quad \eta_{x,F} = \frac{x'(F) \cdot F}{x(F)} \geq \frac{y'(F) \cdot F}{y(F)} = \eta_{y,F} \quad \text{für } 0 < F < 1.$$

Diese äquivalente Definition legt nahe zu prüfen, ob denn die Elastizität $\eta_{x,F}$ ein geeigneter Indikator für die Messung von Disparität sein könnte, beurteilt nach den in Kapitel 2 gestellten Anforderungen:

Im Fall einer extremen Gleichverteilung ist $x'(F) = 0$ für $0 \leq F \leq 1$ und damit entsprechend auch die Elastizität über den gesamten Bereich. Für andere Verteilungen sind die Werte nichtnegativ. Proportionale Änderungen und Populationsvervielfachung lassen $\eta_{x,F}$ konstant, bei einer Verschiebung der Verteilung nach rechts, erniedrigt sich die Elastizität über den gesamten Bereich von F . Nullenergänzung führt im Bereich

² Vgl. Kap. 9.2.1.

³ Vgl. ALZAIID, A. A. (1990), S. 213 und ARNOLD, B. C. (1987), S. 33.

⁴ Es gibt ein Vielzahl von Varianten der Starshaped-Definition: Vgl. z. B. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), KLEFSJO, B. (1984), MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1981), ARNOLD, B. C. (1987) und WILFLING, B. (1993).

⁵ Vgl. Kap. 2.

$a < x < b$ zu einer Erhöhung von $\eta_{x,F}$. Das wichtige Transferaxiom ist jedoch nicht erfüllt, da sich die inversen Verteilungsfunktionen mehr als einmal berühren.

Drückt man Y als Funktion von X aus $-y = g(x)$ mit $g(x) > 0$ für alle x und $g(x)$ nichtfallend in $[0, \infty)$ – entspricht $X \stackrel{\times}{\leq} Y$ der Aussage $g(x)/x$ nichtfallend in $(0, \infty)$.⁶

Weitere Dominanzrelationen, die auf der Basis der inversen Verteilungsfunktion definiert wurden, gibt es im Zusammenhang mit Streuungsüberlegungen.⁷

3.2 Die Lorenzkurve

3.2.1 Interpretationsmöglichkeiten der Lorenzkurve aus formaler Sicht

Die von M. O. LORENZ 1905⁸ eingeführte Lorenzkurve ist eine vielfältig verwandte Darstellungsform einer Verteilung, die insbesondere für die Disparitätsmessung große Bedeutung besitzt:⁹

In einem Koordinatensystem werden an Abszisse und Ordinate das unvollständige nullte und erste Moment $F(x)$ und $L(x)$ eines nichtnegativen, extensiven Merkmals gegeneinander abgetragen.¹⁰ In diesem Sinne ist die Lorenzkurve damit eine "Vergleichskurve", die den "Abstand" zwischen $F(x)$ und $L(x)$ auf diese Art und Weise darzustellen sucht. $F(x)$ und $L(x)$ fallen nur dann aufeinander, wenn eine extreme Gleichverteilung vorliegt.

Ein Lorenzkurvenwert $L(F)$ gibt den Anteil an, den die 100F% kleinsten Merkmals-träger zum arithmetischen Mittel μ (bzw. im diskreten Fall äquivalent zur Merkmals-summe) beitragen. Der Kurvenzug beginnt im Punkt (0,0) und endet im Punkt (1,1); er ist steigend und konvex. Werte der Lorenzkurve entsprechen Flächenstücken unter

⁶ Vgl. ARNOLD, B. C. (1987), S. 78. Es ist dann $g(x) = F_Y^{-1} F_X(x)$, wenn F_Y und F_X streng monoton steigend sind. Vgl. OJA, H. (1985).

⁷ Vgl. Kap. 9.5.

⁸ Vgl. LORENZ, M. O. (1905).

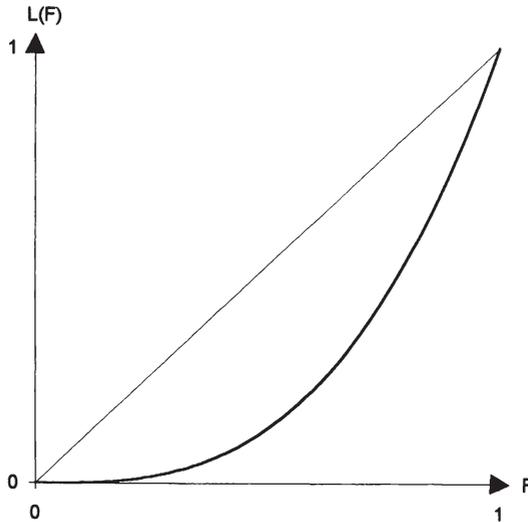
⁹ Vgl. PIESCH, W. (1971, 1975).

¹⁰ Vgl. PIESCH, W. (1971), S. 210 und BUTLER, R. J. / MCDONALD, J. B. (1989), S. 110f.

der normierten inversen Verteilungsfunktion:

$$(3.3) \quad L(F) = \int_0^F \frac{x(q)}{\mu} dq \quad \text{bzw.} \quad L_i(F_i) = \frac{\sum_{k=1}^i x_k \left(\frac{i}{n}\right)}{n\mu}, \quad x_k \leq x_{k+1}.$$

SCHAUBILD 1: Die Lorenzkurve



Im diskreten Fall stellt die Lorenzkurve einen stückweise linearen Polygonzug dar.

Bei einer stetigen Verteilung entspricht der Tangentenanstieg in F Werten der normierten inversen Verteilungsfunktion. Im Durchschnitt sind diese Anstiege 1, ihre Varianz entspricht $V^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$. Der Sekantenanstieg aus $(0,0)$ durch F entspricht $\frac{L(F)}{F} = \frac{M_u(F)}{\mu}$,

jener aus $(1,1)$ durch F entsprechend $\frac{1-L(F)}{1-F} = \frac{M_o(F)}{\mu}$, wobei $M_u(F)$ [bzw. $M_o(F)$] das arithmetische Mittel einer von oben [bzw. unten] an der Stelle F abgeschnittenen Verteilung darstellt.

Eine Herleitung der Lorenzkurve kann über das sogenannte Graduationsschema erfolgen: Eine Invertierung der Verteilungsfunktion führt zur inversen Verteilungsfunktion.

Die anschließende Normierung der inversen Verteilungsfunktion mit $\frac{1}{\mu}$ und die Integration der Flächenstücke unter dieser Funktion führen zur Lorenzkurve.¹¹

Da die normierte inverse Verteilungsfunktion Eigenschaften einer Dichte aufweist, kann dementsprechend die Lorenzkurve aus formaltheoretischer Sicht als Verteilungsfunktion des Merkmals F interpretiert werden. Für einige Überlegungsansätze ist diese Interpretation von Bedeutung.

Daneben kann die Lorenzkurve auch als Gegenüberstellung kumulierter Anteile zweier Merkmale y_i und x_i verstanden werden, wie ein allgemeine diskrete Darstellung in Form von Quoten zeigt:¹²

Definiert wird ein Merkmal in Form einer Beziehungszahl als Verhältnis zweier anderer Merkmale. Die Merkmalsausprägung $q_i = \frac{y_i}{x_i}$, $i = 1 \dots m$ (z.B. $\frac{\text{DM Einkommen}}{\text{Anzahl Personen}}$,

$\frac{\text{km}^2 \text{ Fläche}}{\text{Anzahl Einwohner}}$, $\frac{\text{Anzahl Ärzte}}{\text{Anzahl Einwohner}}$, $\frac{\text{DM Steuer}}{\text{DM Einkommen}}$) tritt mit der relativen

Häufigkeit $h_i = \frac{x_i}{\sum x_i}$ auf. Mittelwert der Verteilung ist $q = \sum_{i=1}^m h_i q_i = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{\sum_{i=1}^m x_i}$. Wie

eine Übertragung des Graduationsschemas zeigt, stellt die Lorenzkurve dann eine

Gegenüberstellung der kumulierten Anteile $\frac{\sum_{i=1}^k x_i}{\sum_{i=1}^m x_i}$ und $\frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^m y_i}$ dar, wobei im ersten

Schritt nach der Größe der Merkmalsausprägungen q_i kumuliert wurde.

Da Zähler und Nenner theoretisch vertauscht werden können, ergibt sich folglich ein zweiter Weg zur Lorenzkurve. In herkömmlicher stetiger Schreibweise ist dann der Ausgangspunkt die erste Momentverteilung in Abhängigkeit von $y = \frac{1}{x} : l(y) = l(x) \frac{dx}{dy}$,

¹¹ Vgl. PIESCH, W. (1975), Übersicht 27.

¹² Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 73f und S. 111f. Vgl. dazu auch Anwendungskapitel 8.3.6.

¹³ Vgl. COLE, J. E. (1981), S. 440.

kumuliert wird jedoch im Gegensatz zum ersten Graduationsschema im ersten Kumulationsschritt von oben, im zweiten von unten. Im Ergebnis gelangt man dann zu einer Darstellung $F_X(L_X)$.

3.2.2 Die Lorenzkurve als Disparitätsindikator

Es soll nun geprüft werden, inwiefern die Lorenzkurve die in Kapitel 2 gestellten Forderungen an einen Disparitätsindikator erfüllt. Mit "x" wird die Ausgangssituation, mit "y" die neue Situation gekennzeichnet.

Im Fall einer extremen Gleichverteilung gibt $L(F) = F$ einen oberen Grenzverlauf der Lorenzkurve wieder; nach unten wird der Kurvenverlauf jeder Lorenzkurve durch den Kurvenzug der Lorenzkurve bei extremer Ungleichverteilung abgegrenzt.

ZENGA¹⁴ definiert in diesem Zusammenhang für eine nichtnegative Variable X mit Dichte $f(x, \theta) - \theta$ ist Parameter – die Tendenz zu

1. "Nulldisparität", wenn gilt für $\theta \rightarrow \theta_1$: $\lim_{\theta \rightarrow \theta_1} L_{\theta}(F) = F$, die Tendenz zu
2. "Maximaler Disparität", wenn gilt für $\theta \rightarrow \theta_2$: $\lim_{\theta \rightarrow \theta_2} L_{\theta}(F) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq F < 1 \\ 1 & \text{für } F = 1 \end{cases}$.

Ein (ordnungserhaltender) Transfer von einem großen an einen kleinen Merkmalsträger verändert $L(x)$ und $F(x)$ und führt zu einer Majorisation der neuen Verteilung von Y gegenüber der alten. D.h. für jedes F ist $L_Y(F) \geq L_X(F)$ und für einige F $L_Y(F) > L_X(F)$.¹⁵

Bei proportionaler Änderung ($Y = bX$, $b > 0$) gilt: $L_Y(y_0) = L_X(x_0)$ und $F_Y(y_0) = F_X(x_0)$. Damit bleibt die Lorenzkurve konstant. Bei Addition von $a > 0$ ($Y = a + X$) Einheiten verschiebt sich $F(x)$, d.h. $F_Y(y_0) = F_X(x_0)$. Die normierten inversen Verteilungsfunktionen schneiden sich genau einmal im Punkt $(F_{\mu}, 1)$, wobei für

¹⁴ Vgl. ZENGA, M (1990), S. 95.

¹⁵ Vgl. ARNOLD, B. C. (1987), S. 7; Majorisation von Y gegenüber X: $\frac{\sum_{k=1}^i y_k}{n\mu} \geq \frac{\sum_{k=1}^i x_k}{n\mu}$, $i = 1, 2, \dots, n$

$F = F_\mu$ gilt $\frac{x(F_\mu)}{\mu_X} = 1 = \frac{y(F_\mu)}{\mu_Y}$. Im Bereich $[0, F_\mu]$ gilt $\frac{Y}{\mu_Y} = \frac{X+a}{\mu_X+a} > \frac{X}{\mu_X}$, danach kehrt sich die Größenbeziehung um. Da die Fläche unter beiden normierten inversen Verteilungsfunktionen gleich ist, folgert daraus, daß die neue Lorenzkurve $L_Y(F_Y)$ über der alten liegt.

Allgemein gilt folgender Zusammenhang zwischen neuer und alter Lorenzkurve bei einer Lineartransformation $Y = a+bX$, $b > 0$ ¹⁶: $L_Y(F) = \frac{aF + b\mu_X L_X}{a+b\mu_X}$.

Bei Durchführung der Proportionalitätsprobe bleiben $L_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ und $F_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ konstant, da $\frac{y(F)}{\mu_Y} = \frac{x(F)}{\mu_X}$. Damit ergeben sich identische Lorenzkurven.

Die Nullenergänzung führt zu $F_Y(x) > F_X(x)$, die erste Momentverteilung bleibt jedoch gleich. Damit ist $L_X(F) > L_Y(F)$ für $0 < F < 1$.

Vergleicht man zwei Verteilungen hinsichtlich ihrer Disparität anhand ihrer Lorenzkurven, kann man das Konzept der **Lorenz-Dominanzordnung** heranziehen:¹⁷

Definition 3.2: Die Verteilung von Merkmal X weist nicht mehr Ungleichheit auf als die Verteilung von Merkmal Y ($X \underset{L}{\leq} Y$), wenn $L_X(F) \geq L_Y(F)$

für alle $0 \leq F \leq 1$.

D.h. die Lorenzkurve von X liegt auf oder über der von Y.

Diese Ordnungsrelation ist partiell. Verteilungen mit sich schneidenden Lorenzkurven können gemäß diesem Kriterium nicht geordnet werden.

Ihre Bedeutung liegt u.a. darin begründet, daß, wie ATKINSON (1970) zeigt, für Verteilungen mit gleichem Mittelwert Bezüge zu sozialen Wohlfahrtsfunktionen bestimmter Bauweise hergestellt werden können.¹⁸

Das Konzept der Majorisation ist eng verwandt mit der Lorenz-Dominanzordnung, setzt jedoch bei einem Vergleich zweier Verteilungen die gleiche (endliche) Anzahl an Merkmalsträgern und die gleiche Merkmalssumme voraus.¹⁹

¹⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 68.

¹⁷ Vgl. z.B. ALZAID, A. A. (1990), S. 213 und ARNOLD, B. C. (1987), S. 33 und (1990), S. 253.

¹⁸ Vgl. ATKINSON, A. B. (1970). Vgl. auch Kap. 3.3 und Kap. 9.2.1.

¹⁹ Vgl. HARDY, G. H. / LITTLEWOOD, J. E. / POLYA, G. (1929), MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1981) sowie ARNOLD, B. C. (1987).

Ein erstes einfaches aus der Lorenzkurve ableitbares Disparitätsmaß ist der von RICCI 1916 bzw. SCHUTZ 1951 vorgeschlagene **Schutzkoeffizient S**.²⁰ Er ist definiert als "längste Lorenzkurvensehne":

$$(3.4) \quad S = |F - L(F)| \rightarrow \max \\ = F_{\mu} - L(F_{\mu}).$$

Die längste Sehne befindet sich an der Stelle F_{μ} , d.h. S trennt die unterdurchschnittlich großen Merkmalsträger von den überdurchschnittlich großen.

Eine flächenmäßige Darstellung²¹ ergibt sich demzufolge im Schaubild der Ableitungen von F und L(F), d.h. im Schaubild der normierten inversen Verteilungsfunktion. Dies führt auf eine Interpretation über die durchschnittlichen Abweichung von μ

$$(3.5) \quad \delta_{\mu} = \int_a^b |x - \mu| f(x) dx :$$

$$(3.6) \quad S = \int_0^{F_{\mu}} \left(-\frac{\mu - x(F)}{\mu} \right) dF = \int_{F_{\mu}}^1 \left(\frac{x(F) - \mu}{\mu} \right) dF. \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{x(F)}{\mu} - 1 \right| dF = \frac{\delta_{\mu}}{2\mu}.$$

Damit läßt sich sein Wert auch interpretieren als der Anteil an der Merkmalssumme, der umverteilt werden müßte, um von einer gegebenen Verteilung zu einer extremen Gleichverteilung zu gelangen.

3.2.3 Anwendungsbeispiele der Lorenzkurve

Das allgemeine Konstruktionsprinzip der Lorenzkurve führt zu einer Vielzahl von Anwendungsbeispielen in der Literatur, so u.a. bei Veröffentlichungen der amtlichen Statistik wie folgende Auflistung zeigt:

²⁰ Vgl. zur Einhaltung von Eigenschaften WAGENHALS, G. (1981), S. 123ff.

²¹ Eine weitere flächenmäßige Darstellung findet sich im Schaubild der Dichten $f(x)$ und $l(x) = \frac{xf(x)}{\mu}$:

$$S = \int_a^{\mu} (f(x) - l(x)) dx = \int_{\mu}^b (l(x) - f(x)) dx .$$

Für ökonomische Fragestellungen wird bspw. die Ungleichverteilung des Bruttolohns sowie der Lohnsteuer auf Steuerpflichtige²² dargestellt, die Verteilung des Wertpapiervermögens auf Haushalte²³, die Zahl der Beschäftigten und das Investitionsvolumen auf Betriebe²⁴ oder das Gesamtvermögen auf Steuerpflichtige²⁵. Für die Herausarbeitung regionaler Unterschiede werden Lorenzkurven der Verteilung des Bruttoinlandsprodukts²⁶, der Fläche²⁷, der Wohnbevölkerung²⁸, der Übernachtungen²⁹ oder der Ausländer auf Kreise herangezogen. Fragestellungen, wie nach der der Verteilung von Betten auf Akutkrankenhäuser³¹ kann das Instrument Lorenzkurve ebenso dienen wie der Beurteilung der Verteilung von Zuchtsauen auf Betriebe³² oder der Konzentration der Abfallmenge auf Deponien³³. Die zeitliche Entwicklung der Verteilung eines Merkmals spielt bei den Untersuchungen oft eine große Rolle und wird bspw. über einen Vergleich von Lorenzkurven für unterschiedliche Berichtszeitpunkte dargestellt.

Weitere Beiträge binden die Lorenzkurve auf unterschiedlichste Art und Weise ein:

1. SUPPES (1988) berechnet mit Hilfe der Lorenzkurve für zwei verschiedene gesellschaftliche Modelle (Bürokratie mit geordneten Aufstiegsmöglichkeiten versus Kapitalismus mit zufälligen Auf- und Abstiegsmöglichkeiten) den Wert des jeweiligen Gini-Koeffizienten für die Einkommensverteilung.

BASMANN/HAYES/SLOTTJE (1991) leiten aus der Lorenzkurve eine sogenannte "Mobility function" ab, die die Aufstiegsmöglichkeiten innerhalb einer Einkommensverteilung abbilden soll.

²² Vgl. BAUMANN, R. (1971), S. 156.

²³ Vgl. EULER, M. (1991), S. 414.

²⁴ Vgl. SINN, H. (1978), S. 423 und STEIGER, H. H. (1980), S. 149.

²⁵ Vgl. WAGNER, E. (1988), S. 306.

²⁶ Vgl. MÜNZENMAIER, W. (1985), S. 106, STEIGER, H. H. (1974), S. 65 sowie ULLRICH, A. (1983), S. 301.

²⁷ Vgl. MÜNZENMAIER, W. (1985), S. 106 und ULLRICH, A. (1983), S. 301.

²⁸ Vgl. ULLRICH, A. (1983), S. 301.

²⁹ Vgl. SCHITTENHELM, G. (1973), S. 352.

³⁰ Vgl. WAGNER, E. (1980), S. 124.

³¹ Vgl. PRISTL, K. (1988), S. 45.

³² Vgl. STADLER, R. (1982), S. 65.

³³ Vgl. EISELE, W. (1976), S. 299.

2. KAKWANI (1993) entwickelt mit Hilfe der Lorenzkurve einen Ansatz, mit dem er die Auswirkungen von Veränderungen des Durchschnittseinkommens bzw. der Einkommensdisparität auf das Ausmaß an Armut zu messen sucht.

3. SCHMID (1994) greift die Interpretation der Lorenzkurve als "Abstandsmesser" zwischen zwei Verteilungen auf, um die "interdistributionelle Einkommensungleichheit" zu messen.³⁴

Als Maßgrößen werden die "interdistributionellen Lorenzkurven" L_{F_X, F_Y} und L_{F_Y, F_X} definiert:³⁵

Definition 3.3: "Für stetige Verteilungsfunktionen F_X und F_Y mit stetigen

Quantilsfunktionen sei

$$L_{F_X, F_Y} : p \in (0,1) \rightarrow F_X(F_Y^{-1}(p)) \in [0,1] \text{ und}$$

$$L_{F_Y, F_X} : p \in (0,1) \rightarrow F_Y(F_X^{-1}(p)) \in [0,1].$$

D.h. für gleiche Quantilswerte werden Werte von F_X den entsprechenden Werten von F_Y gegenübergestellt.³⁶ L_{F_X, F_Y} ist im Einheitsquadrat spiegelbildlich zu L_{F_Y, F_X} .

Im Spezialfall $F_Y = L_X$ entspricht $L_{F_X, F_Y} = F_X(L_X)$ und L_{F_Y, F_X} entspricht $L_X(F_X)$.

– Sind F_X und F_Y identisch, gilt $L_{F_X, F_Y}(p) = L_{F_Y, F_X}(p) = p$.

– Aus $F_X(x) \leq F_Y(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt $L_{F_X, F_Y}(p) \leq p$ für $0 \leq p \leq 1$ und

$$F_X(x) \geq F_Y(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ folgt } L_{F_X, F_Y}(p) \geq p \text{ für } 0 \leq p \leq 1.$$

– "Überlappen" sich die Verteilungen nicht, gilt $L_{F_X, F_Y}(p) = 1$ oder $L_{F_X, F_Y}(p) = 0$ für $0 < p < 1$.

³⁴ In dem hier verwendeten Sinn liegt "Gleichheit" dann vor, wenn zwei Verteilungen identisch, aber nicht zwangsläufig einpunktverteilt sind.

³⁵ Vgl. BUTLER, R. J. / MCDONALD, J. B. (1987), S. 14 und SCHMID, F. (1994), S. 3.

³⁶ Vgl. BUTLER, R. J. / MCDONALD, J. B. (1987), S. 14f; neben diesen Funktionen werden auch Diagramme vorgeschlagen, bei denen für gleiches x L_X versus L_Y , L_X versus F_Y und F_X versus L_Y gegeneinander abgetragen werden.

Als Kennziffer schlägt SCHMID dann die Differenz $\int_0^1 |L_{F_X, F_Y}(p) - L_{F_Y, F_X}(p)| dp$ vor, die bei $F_X = F_Y$ den minimalen Wert 0, bei sich nicht überlappenden Verteilungen den maximalen Wert 1 annimmt, unabhängig davon, wie weit die Verteilungen auseinander liegen.³⁷

3.3 Die verallgemeinerte Lorenzkurve von SHORROCKS

SHORROCKS³⁸ stellt 1983 die verallgemeinerte Lorenzkurve ("generalized lorenz-curve") $GL(F)$ als Instrument zur Rangordnung von Verteilungen hinsichtlich ihrer Wohlfahrt vor, wobei annahmegemäß in der Gesellschaft eine Präferenz für

- mehr reales Einkommen ("efficiency preference") und
- mehr Gleichheit ("equity preference")

bestehen soll. Vergleicht man zwei Verteilungen lediglich hinsichtlich ihres "Gleichheitsgrades", kann eine Beurteilung anhand ihrer Lorenzkurven nur dann vorgenommen werden, wenn sich diese nicht schneiden.³⁹ Über die $GL(F)$ kommen beide Aspekte gleichzeitig zur Geltung:

$$(3.7) \quad GL_X(F) = \mu_X L_X(F) = \int_0^F x(u) du.$$

$GL_X(F)$ ist eine steigende, konvexe Funktion mit $GL_X(0) = 0$ und $GL_X(1) = \mu_X$. Die Fläche zwischen der Diagonalen mit der Steigung μ_X und der $GL_X(F)$ entspricht $\frac{\Delta_X}{4}$ mit

$$(3.8) \quad \Delta_X = \int_0^1 \int_0^1 |x(F) - x(q)| dF dq \text{ als mittlerer Differenz.}$$

Die Sekantenanstiege aus dem Punkt (0,0) bzw. dem Punkt (1,1) lassen sich hier direkt als $M_u(F)$ und $M_o(F)$ interpretieren.

³⁷ Vgl. auch Kap. 4.7.3.

³⁸ Vgl. SHORROCKS, A. F. (1983).

³⁹ Vgl. SHORROCKS, A. F. (1983), S. 3f.

Zwischen der GL und der Verteilungsfunktion besteht also eine eindeutige Beziehung, da eine Normierung mit $\frac{1}{\mu}$ entfällt und damit im Gegensatz zur Lorenzkurve eine Mittelwertsabhängigkeit gegeben ist.⁴⁰ Die Transfereigenschaft der Lorenzkurve überträgt sich, da μ im Fall eines Transfers konstant bleibt.

Daher ändert sich die GL im Gegensatz zur Lorenzkurve bei proportionalen Transformationen. Verschiebungen (d.h. $Y = a + X$) führen zwar zu einer geänderten GL, die Fläche zwischen (neuer) Diagonaler und neuer GL bleibt aber gleich, da $\Delta_X = \Delta_Y$.

Bei der Aggregation von k identischen Verteilungen (Populationsvervielfachung) ändert sich $x(F)$ nicht, damit auch $GL(F)$ nicht. Splittet man dagegen eine Verteilung in k identische Verteilungen auf (Proportionalitätsprobe), so weisen die Ausgangsverteilung und die k entstehenden Verteilungen zwar die gleichen Lorenzkurven, aber nicht mehr die gleiche GL auf: $GL_{\text{neu}} = \frac{1}{k} GL_{\text{gesamt}}$. Dies dokumentiert quasi den Niveauverlust.

Eine Nullenergänzung führt zu einer Verschiebung der GL nach unten.

Die Fläche unter $GL(F)$ wird von WAGENHALS⁴¹ als Effizienzmaß interpretiert, welches sowohl die Höhe der Merkmalssumme als auch deren Verteilung berücksichtigt. Auch für diese Kurvenzüge läßt sich eine Dominanzrelation definieren:

Definition 3.4: "X dominiert Y gemäß den verallgemeinerten Lorenzkurven $\left[\begin{matrix} X \leq Y \\ GL \end{matrix} \right]$, wenn $GL_X(F) \geq GL_Y(F)$ für alle $0 \leq F \leq 1$ gegeben ist."

SHORROCKS führt an, daß diese Dominanzrelation äquivalent einer Ordnung aller nichtfallender, schurkonkaver Wohlfahrtsfunktionen $SW_X \geq SW_Y$ ist⁴². Zu dieser Klasse von Funktionen gehören z.B. die utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen der Form $SW_X = \sum_{i=1}^n U(x_i)$ mit steigenden und konkaven Nutzenfunktionen $U(x_i)$.

Aus obiger Relation folgt zudem $\mu_X \geq \mu_Y$.

Wie in Kapitel 9.2 gezeigt wird, ist obige Definition identisch mit einer Second order Dominanzrelation⁴³, die in der Literatur breite Anwendung findet.

⁴⁰ Vgl. THISTLE, P. D. (1989a), S. 186.

⁴¹ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 84.

⁴² Vgl. SHORROCKS, A. F. (1983), S. 6.

⁴³ Vgl. Kap. 9.2 sowie THISTLE, P. D. (1989b), S. 3.

4. Der Gini-Koeffizient und einige seiner Anwendungsbereiche

Von GINI wurde 1914¹ die doppelte Konzentrationsfläche, d.h. die Fläche zwischen erster Winkelhalbierender und Lorenzkurve im Lorenzkurvenschaubild zur Messung der Disparität vorgeschlagen:

$$(4.1) \quad R = 2 \int_0^1 [F - L(F)] dF .$$

Die Differenzfunktion $\Phi(F) = F - L(F)$ ist nichtnegativ und nimmt ihr Maximum an der Stelle $F = F_{\mu}$ an.

Der Gini-Koeffizient R ist wohl das bekannteste Disparitätsmaß. Das auch deshalb, weil sich eine Vielzahl von alternativen Darstellungsformen – und damit Interpretationsmöglichkeiten – dieses Maßes ableiten lassen.

So gibt bspw. BLACKBURN² eine anschauliche Interpretation für die Veränderung des Wertes von R , wobei man sich die Veränderung einer Einkommensverteilung im Zeitablauf vorstellen könnte. Er zeigt, daß die Differenz zwischen neuem und altem Wert von R vor dem Hintergrund einer speziellen Umverteilungssituation gesehen werden kann:

$$(4.2) \quad R_{\text{neu}} - R_{\text{alt}} = \frac{k}{2\mu} .$$

Der Wert k gibt dabei die Höhe eines Transferbetrages an, den **alle** Individuen mit Merkmalswerten kleiner als der Median an **alle** Individuen mit Merkmalswerten oberhalb des Medians entrichten würden. R selbst kann damit als der Anteil an der Merkmalssumme interpretiert werden, der umverteilt werden müßte, um von einer Einpunktverteilung ($R = 0$) zu einer (fiktiven) symmetrischen Zweipunktverteilung mit Merkmalsausprägungen $\mu - k$ und $\mu + k$ zu gelangen.³ Die gegebene Verteilung weist also das gleiche Disparitätsausmaß auf wie diese Zweipunktverteilung.

¹ Vgl. GINI, C. (1912,1914,1939) und zur Datierung GIORGI, G. M. (1993), S. 83f.

Vgl. auch die umfassenden Ausführungen bei PIESCH, W. (1975), S. 28ff.

² Vgl. BLACKBURN, M. L. (1989).

³ Nur sinnvoll für $R \leq 0,5$. Dieselbe Interpretation erschließt sich, wenn man überlegt, daß im Fall einer symmetrischen Zweipunktverteilung die durchschnittliche absolute Abweichung von Z δ_Z mit δ_{μ} übereinstimmt und $R = S$ gilt; S läßt sich stets als Umverteilungsanteil interpretieren, vgl. Kap. 3.2.2.

Andererseits kann R auch über die Disparitätsmessung hinaus zur Messung anderer Sachverhalte herangezogen werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Der Gini-Koeffizient kann in der Form der GUMBEL-Darstellung⁴ als durchschnittliches Betroffenheitsausmaß von Arbeitslosigkeit interpretiert werden, wenn man von folgendem Modellansatz ausgeht⁵:

1. Betrachtet wird die zweidimensionale Verteilung $f(x,t)$: Dauer der Arbeitslosigkeit x , die zu einem bestimmten Zeitpunkt t begonnen hat. Dabei soll gelten $f(x|t) = f(x)$, d.h. die Verteilung der Arbeitslosigkeitsdauer ist unabhängig vom Beginnzeitpunkt. Außerdem wird angenommen, daß zu jedem Zeitpunkt t die gleiche Zahl an Beschäftigten ihre Arbeit verliert.

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 berechnet sich die Dichte der Arbeitslosen in Abhängigkeit von der Arbeitslosigkeitsdauer dann als

$$(4.3) \quad f_{t_0}(x) = \frac{(1-F(x))}{\mu} \quad \text{mit} \quad \mu = \int_0^{\infty} (1-F(x)) dx.$$

2. Das Betroffenheitsausmaß eines Arbeitslosen mit Dauer x sei proportional zu dem Anteil der Arbeitslosen, die zum Zeitpunkt t arbeitslos wurden, aber bis zum Zeitpunkt $t+x$ wieder Beschäftigung gefunden haben: $F(x)$.

Mißt man nun zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 die durchschnittliche Betroffenheit unter allen Arbeitslosen dieses Zeitpunktes, entspricht diese dem Gini-Koeffizienten:

$$(4.4) \quad \int_0^{\infty} F(x) f_{t_0}(x) dx = \int_0^{\infty} F(x) \frac{(1-F(x))}{\mu} dx = R.$$

Im folgenden werden in einem Übersichts-kapitel verschiedene Darstellungsformen und Grenzen von R vorgestellt. Daran schließt sich eine eingehendere Analyse von R unter zwei Aspekten an:

Wie verhält sich R zu Mittelwerten von Ordnungsstatistiken (Kap. 4.2.1)?

Was ergibt sich aus dem Vergleich von R mit dem quadrierten Variationskoeffizienten V^2 und dem Disparitätsmaß $\frac{V^2}{1+V^2}$ (Kap. 4.2.2) ?

⁴ Vgl. Kap. 4.1.

⁵ Vgl. RIESE, M. (1993), S. 442.

In der Literatur findet R über die Disparitätsmessung hinaus Anwendung in zahlreichen Gebieten, so z.B.

- als Baustein eines Konzentrationsmaßes (Kap. 4.3)
- bei der Konstruktion eines Asymmetrie- und eines Wölbungsindex (Kap. 4.4),
- im Rahmen der Armutsmessung (Kap. 4.5),
- zur Messung von Preisunterschieden zwischen zwei Ländern (Kap. 4.6).

Die bekannten Aggregationsformen von R (Kap. 4.7) bei der Sektorenaggregation führen zudem zu einer Einbindung von R

- in die Messung von Ungleichheit zwischen zwei Verteilungen (4.7.3) und
- in die Dominanzmessung (Kap. 4.7.4).

Der Gini-Koeffizient wird darüber hinaus im Rahmen dieser Arbeit noch in weiteren Anwendungszusammenhängen auftauchen, bspw. in den Kapiteln 6 und 8.

In der Literatur finden sich zudem weitere Anwendungsmöglichkeiten des Gini-Koeffizienten, bspw. zum Testen der Homogenität von Varianzen⁶, als "scale-free goodness of fit" Test für die Exponentialverteilung⁷ oder als Kriterium in der Clusteranalyse⁸.

Hinzuweisen ist an dieser Stelle auf die Monographie "Il Rapporto di Concentrazione di Gini" von G. M. GIORGI (1992), die in kurzer, übersichtlicher Form wesentliche Literatur zum Gini-Koeffizienten aufbereitet und in einem ausführlichen Literaturverzeichnis die Beiträge einzeln kommentiert.⁹

4.1 Verschiedene Darstellungsformen und daraus ableitbare Grenzen von R

In einer einführenden Übersicht werden zunächst bekannte Darstellungsformen des Gini-Koeffizienten vorgestellt. Diskrete (in Einzelwerten) und analoge stetige Formen werden dabei einander gegenübergestellt.¹⁰ Dabei läßt sich der in den Formeln immer wiederkehrende Faktor 2 bzw. dessen Kehrwert $\frac{1}{2}$ bspw. interpretieren als

⁶ Vgl. GIRONE, G. (1974) und CICCHITELLI, G. (1979).

⁷ Vgl. GAIL, M. H. / GASTWIRTH, J. L. (1978).

⁸ Vgl. DE SIMONI, S. (1974).

⁹ Vgl. auch GIORGI, G. M. (1990, 1993) und MOOTHATHU, T. S. K. (1991).

¹⁰ Vgl. PIESCH, W. (1975), für Darstellungsformen bei gruppierter und klassierter Verteilung.

3a	$\sum_i^n \frac{2i - n - 1}{n} l_i, l_i < l_{i+1}$	$\int_0^1 [2F - 1] \frac{x(F)}{\mu} dF$
3b	$\sum_j^n \frac{n - 2j + 1}{n} l_j, l_j \geq l_{j+1}$	$\int_0^1 [1 - 2(1-F)] \frac{x(F)}{\mu} dF$
3c	$\sum_i^n (\frac{i-1}{n} - \frac{n-i}{n}) l_i, l_i < l_{i+1}$	$\int_0^1 [F - (1 - F)] \frac{x(F)}{\mu} dF$
3d	$\sum_j^n (\frac{n-j}{n} - \frac{j-1}{n}) l_j, l_j \geq l_{j+1}$	$\int_0^1 [1 - (1-F) - (1-F)] \frac{x(F)}{\mu} dF$
4	$\sum_i^n \frac{n-i}{n} - \frac{i-1}{n} l_i - l_Z ,$ Median $Z, l_i \leq l_{i+1}$	$\int_0^1 1 - 2F \frac{x(F) - x(0,5)}{\mu} dF$
5a	$\frac{2}{n} \sum_i^n (\frac{i}{n} - \sum_{k=1}^i \frac{x_k}{n\mu}), x_k \leq x_{k+1}$	$2 \int_0^1 (F - L(F)) dF = 2 \int_a^b (F(x) - L(x)) f(x) dx$
5b	$2 \sum_i^n (\frac{i}{n} - \sum_{k=1}^i l_k) l_i + \sum_i^n \frac{2}{i} - \frac{1}{n}$	$2 \int_0^1 (F(L) - L) dL = 2 \int_a^b (F(x) - L(x)) l(x) dx$
5c	$2 \sum_i^n \frac{i}{n} (l_i - \frac{1}{n}), l_i < l_{i+1}$	$2 \int_a^b F(x) (l(x) - f(x)) dx$
5d	$2 \sum_i^n ((l_i - \frac{1}{n}) \cdot \sum_{k=1}^i l_k) l_i - \sum_i^n \frac{2}{i} + \frac{1}{n}$	$2 \int_a^b L(x) (l(x) - f(x)) dx$
5e	$\text{cov}(\frac{x_i}{\mu}, \frac{2i}{n}), x_i \leq x_{i+1}$	$\text{cov}(\frac{x}{\mu}, 2F(x))$
5f	$\text{cov}(\frac{x_i}{\mu}, -2\frac{n-i+1}{n}), x_i \leq x_{i+1}$	$\text{cov}(\frac{x}{\mu}, -2(1-F(x)))$
5g	$\text{cov}(\frac{x_i}{\mu}, 2L_i) - \sum_i^n \frac{2}{i} + \frac{1}{n}$	$\text{cov}(\frac{x}{\mu}, 2L(x))$

<p>6a $\frac{2}{n^2} \sum_i^n \frac{i}{\sum_{k=1}^i \mu^{-x_k}}, x_k \leq x_{k+1}$</p> <p>6b $\frac{2}{n^2} \sum_i^n \frac{i}{\sum_{k=i}^n \mu^{x_k - \mu}}, x_k \leq x_{k+1}$</p> <p>6c $\frac{2}{n} \sum_i^n \frac{i}{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\mu} \right), x_i \leq x_{i+1}$</p>	$2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu - x(q)}{\mu} dq dF$ $2 \int_0^1 \int_F^1 \frac{x(q) - \mu}{\mu} dq dF$ $2 \int_0^1 F \left(\frac{x(F) - \mu}{\mu} \right) dF$
<p>7a $\frac{2}{n} \sum_i^n \frac{i}{n} \left[1 - \frac{\sum_{k=1}^i x_k}{\mu \cdot i} \right], x_k \leq x_{k+1}$</p> <p>7b $\frac{2}{n} \sum_i^n \frac{n+1-i}{n} \left[\frac{\sum_{k=1}^i x_k}{(n+1-i)\mu} - 1 \right]$</p> <p>7c $\frac{1}{n} \sum_i^n \left[i \left(1 - \frac{\sum_{k=1}^i x_k}{\mu \cdot i} \right) + \frac{n+1-i}{n} \left(\frac{\sum_{k=1}^i x_k}{(n+1-i)\mu} - 1 \right) \right]$</p>	$\int_0^1 2F \left(\frac{\mu - M_u(F)}{\mu} \right) dF = \int_0^1 2F \frac{F - L(F)}{F} dF$ $\int_0^1 2(1-F) \left(\frac{M_o(F) - \mu}{\mu} \right) dF = \int_0^1 2(1-F) \frac{F - L(F)}{1-F} dF$ $\int_0^1 \left[F \left(\frac{\mu - M_u(F)}{\mu} \right) + (1-F) \left(\frac{M_o(F) - \mu}{\mu} \right) \right] dF$
<p>8a $\frac{n_i}{\sum_i^n} \frac{(n-i)}{2\mu} (x_{i+1} - x_i), x_i \leq x_{i+1}$</p> <p>8b $\frac{n}{\sum_i^n} \frac{n_i - i^2}{2\mu} (x_{i+1} - x_i), x_i \leq x_{i+1}$</p> <p>8c $\frac{n}{\sum_i^n} \frac{n(n-i) - (i-1)^2}{2\mu} (x_{i+1} - x_i)$</p>	$\frac{1}{\mu} \int_a^b F(x)(1-F(x)) dx$ $\frac{1}{\mu} \int_a^b [1-F(x)]^2 - (1-F(x)) dx$ $\frac{1}{\mu} \int_a^b [1-F(x) - (1-F(x))^2] dx$

<p>9a $\frac{1}{n\mu} \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{n} (x_{k+1} - x_k),$ $x_k \leq x_{k+1}$</p> <p>9b $\frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{n-k}{n} (x_{k+1} - x_k)$ $x_k \leq x_{k+1}$</p>	$\int_a^b \int_a^x \frac{F(y)}{\mu} dy f(x) dx$ $\int_a^b \int_a^b \frac{1 - F(y)}{\mu} dy f(x) dx$
<p>10 $\frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n \frac{n-2i+1}{n} (x_{n+1-i} - x_i),$ $x_i \leq x_{i+1}, n \text{ gerade}$</p>	$\frac{1}{\mu} \int_0^{1/2} (1-2F)[x(1-F)-x(F)] dF$

Struktur 1 zeigt R als durchschnittlichen relativen Abstand der ersten Momentverteilung einer gegebenen Verteilung zur Einpunktverteilung (EPV). Es ist $L_{EPV}(x) = 0$ für $x < \mu$ und $L_{EPV}(x) = 1$ für $x \geq \mu$, damit $L_{EPV}(F) = F$.¹¹

Grundstruktur 2 weist R als relativierte mittlere Differenz, d.h. als speziellen Variationskoeffizienten aus. Die mittlere Differenz Δ selbst läßt sich wiederum interpretieren als Durchschnittswert aller mittleren absoluten Abweichungen zu den einzelnen x_i :

$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ mit $\delta_{x_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_j - x_i|$. Damit kann $2R$ als Summe der mittleren absoluten Abweichungen zu den einzelnen relativen Merkmalssummen aufgefaßt werden: $2R = \sum_{i=1}^n \delta_i$ mit $\delta_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |l_j - l_i|$.

Die von NYGARD/SANDSTRÖM¹² entwickelte Form 2e zeigt, daß R auch als gewogene mittlere Differenz der relativen Merkmalssumme interpretiert werden kann. Form 2e führt zu Form 2f, wenn man die Beträge durch einfache Klammern ersetzt, da die Differenzen $(l_i - l_j)$ und $(i - j)$ stets das gleiche Vorzeichen aufweisen.

¹¹ Dieser Abstandsgedanke kommt auch in der Darstellung von R als Schrittzahlindex zur Geltung, vgl. MÜNZNER, H. (1963) und PIESCH, W. (1975), S. 41f.

¹² Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1988), S.28f.

Form 2f läßt sich auf eine allgemeine Darstellungsweise der Kovarianz von X und Y für Einzelwerte zurückführen:

$$(4.7) \quad \text{cov}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)(y_i - y_j).$$

In **Darstellung 3** wird R als $R = \sum_{i=1}^n g_i l_i$ mit $\sum_{i=1}^n g_i = 0$ dargestellt. Die Aufspaltung von g_i in zwei Ausdrücke bei 3c bzw. 3d wird von BERREBI/SILBER¹³ im Rahmen der Messung von relativer Deprivation eingeführt und interpretiert.

Die von GINI¹⁴ für Δ vorgestellte **Struktur 4** zeigt, daß R sich auch als gewogene mittlere Abweichung vom Zentralwert (mit $\sum_{i=1}^n g_i = 0$) darstellen läßt.

Ausgangspunkt der **Formen 5a** und **5b** ist die zweifache Konzentrationsfläche im Lorenzkurven-Diagramm. Drückt man dies in Abhängigkeit von x aus, ergibt sich R als mit $f(x)$ oder mit $l(x)$ gewogene zweifache Fläche zwischen nullter und erster Momentverteilung; d.h. zwei verschiedenen Gewichtungen führen zum Gini-Koeffizienten. Im diskreten Fall führt die Verwendung der Gewichte l_i zu einem Ausdruck, der den Herfindahl-Index $H = \sum l_i^2$ als Bestandteil enthält. Umgekehrt läßt sich R aber auch in Form 5c und 5d als mit steigenden "Gewichten" $2F(x)$ bzw. $2L(x)$ gewogene Differenz $l(x) - f(x)$ auffassen, wobei

$$\int_a^b 2F(x) dx = 2(b - \mu) \geq \int_a^b 2L(x) dx = 2\left(b - \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu}\right) \geq 0 \text{ gilt.}$$

Aus 5c und 5d lassen sich schnell die Kovarianzdarstellungen von R herleiten.

Struktur 6 zeigt R als gewogenes arithmetisches Mittel der relativierten Abweichungen von μ . Im diskreten Fall ergibt sich für die Summe der Gewichte nur ungefähr

$$\text{eins: } \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2} = \frac{n+1}{n}.$$

¹³ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1985), S. 807.

¹⁴ Vgl. GINI, C. (1912) und BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 333f.

Interpretation 7 zeigt R in Verbindung mit unteren bzw. oberen Mittelwerten. In 7a ist R z. B. ein mit $2F$ gewogenes Mittel der relativierten Differenz von $M_u(F)$ zu ihrem Maximum μ .

Die **Formen 8** geben die verschiedenen Darstellungsformen des GUMBEL-Ansatzes¹⁵ wieder, der im Zusammenhang mit Mittelwerten von Ordnungsstatistiken (vgl. Kap. 4.2.1) weiter zu interpretieren ist.

Struktur 9 zeigt, daß sich eine Form erzeugen läßt, deren Ausgangspunkt eine Kumulation der Verteilungsfunktion selbst ist, wobei von unten oder von oben kumuliert werden kann. In 9a ist R dann z.B. ein mit μ relativiertes gewogenes arithmetisches Mittel der so erzeugten Funktionswerte $F^{(2)}(x) = \int_a^x F(y)dy$.¹⁶

In **Darstellung 10** wird R schließlich als gewogene Summe von "Spannweiten" ("quasi ranges") interpretiert.

BERREBI/SILBER¹⁷ stellen eine Darstellungsform von R in Matrizenschreibweise vor, die insbesondere für Aggregationsüberlegungen¹⁸ und die Herleitung von Schätzwerten bzw. Grenzwerten von R bei klassiertem Datenmaterial¹⁹ von Bedeutung ist: Ausgangspunkt sind die diskreten Schreibweisen von R für Einzelwerte 3c bzw. 3d. Führt man die Matrizen G , G^* und die Vektoren e , l_1 und l_2 ein, mit

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0-1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad G^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(nxn) (nxn)

¹⁵ Vgl. GUMBEL, E. J. (1929), S. 284ff für Δ und GAIL, M. H. / GASTWIRTH, J. L. (1978), S. 351 für die diskrete Form.

¹⁶ Vgl. Definition kumulierte Verteilungsfunktion in Kap. 9.2. Vgl. auch Kap. 6.2 und 6.3.

¹⁷ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987c) und SILBER, J. (1989a, 1990).

¹⁸ Vgl. SILBER, J. (1989a).

¹⁹ Vgl. SILBER, J. (1990).

und

$$e = \begin{bmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i_1 \leq i_{i+1}) \quad \mathbf{l}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i_j \geq i_{j+1})$$

bzw.

läßt sich R darstellen als

$$(4.8) \quad R = e' G \mathbf{l}_i^{20} = e' G^* \mathbf{l}_i.$$

Entscheidend bei Matrix G bzw. G^* ist die jeweilige Spaltensumme, die Reihenfolge der Matrixelemente -1, 0, 1 ist jedoch für diese Einzelwertdarstellung beliebig.²¹ Im Fall einer Einpunktverteilung ist $e = \mathbf{l}_i = \mathbf{l}_j$, damit ist aber wegen $\mathbf{x}' G \mathbf{x} = \mathbf{x}' G^* \mathbf{x} = 0$ auch $R = 0$.

BHATTACHARJEE²² interpretiert²³ R vor dem Hintergrund von zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Betrachtet werden zwei Zufallsvariablen X und Y, wobei X die Dichtefunktion $f(x)$, Y die Dichtefunktion $l(x)$ aufweist. Dann ist R, wie sich leicht zeigen läßt, nichts anderes als die Differenz zweier Wahrscheinlichkeiten P:

$$(4.9) \quad R = P(Y > X) - P(Y \leq X)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} l(y) dy f(x) dx - \int_0^{\infty} \int_0^x l(y) dy f(x) dx$$

$$= \int_0^1 (1 - L_X(F)) dF - \int_0^1 L_X(F) dF.$$

²⁰ Vgl. SILBER, J. (1989a), S. 108.

²¹ Es läßt sich ebenfalls eine Darstellung für gruppierte Werte entwickeln, die auf der Trapezform von R aufbaut. Für diese ist jedoch die Reihenfolge der Matrixelemente eindeutig vorgegeben. Vgl. PIE SCH, W. (1975), S. 43 zur Trapezform.

²² Vgl. BHATTACHARJEE, M. C. (1988), S. 200.

²³ Eine weitere wichtige Interpretation von R als Erwartungswert eines Spiels stammt von PYATT, G (1976), vgl. dazu auch Kap. 6.4.

Aus einigen Darstellungsformen lassen sich direkt bereits bekannte **Grenzen** für R ermitteln:

– Neben 5b kann auch aus 2b wegen $0 \leq |l_i - l_j| \leq 1$ die Gini–Herfindahl–Ungleichung²⁴ gefolgert werden:

$$(4.10) \quad R \geq \frac{1}{2n} \frac{\sum_{i,j} (l_i - l_j)^2}{\sum_{i,j} 1} = \frac{V^2}{n} = H - \frac{1}{n}.$$

– Da $0 \leq F(x) \leq 1$ und $l(x) \geq f(x)$ für $x \geq \mu$ gilt, läßt sich folgende Beziehung zwischen R und dem Schutz–Koeffizienten $S = \frac{\delta}{2\mu}$ aus 5c herleiten²⁵:

$$(4.11) \quad R \leq 2 \int_{\mu}^b 1 \cdot (l(x) - f(x)) dx = 2S.$$

– Aus der Kovarianzdarstellung 5e folgt unter Verwendung der Cauchy–Schwarz’schen Ungleichung die bekannte Glasser’sche Ungleichung²⁶:

$$(4.12) \quad R = \text{cov}\left(2F, \frac{x(F)}{\mu_X}\right) \leq \left(\text{Var}2F \cdot \text{Var}\frac{x(F)}{\mu_X}\right)^{0,5} = V\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Mit der Herleitung von Abschätzungen und Grenzen des Gini–Koeffizienten bei klassierten Daten setzen sich u.a. PIESCH (1985), RIGO (1985,1987), GIORGI /PALLINI (1987a), MAURER (1988) und BOMSDORF (1982,1989) auseinander.

4.2 Der Gini–Koeffizient als Disparitätsmaß

Herkömmlicherweise wird der Gini–Koeffizient zunächst nur mit der Disparitätsmessung in Verbindung gebracht. Ausführliche Betrachtungen zu seinen Eigenschaften sind bereits vielfach angestellt worden.²⁷ Infolgedessen soll R lediglich unter zwei speziellen Fragestellungen weiter untersucht werden. Zum einen erscheint es interessant, zu analysieren, welche Interpretation R vor dem Hintergrund von Mittelwerten von Ordnungsstatistiken erfährt und welchen Zugang man auf diese Weise zu dem Index

²⁴ Vgl. PIESCH, W. (1992), S. 21ff und PIESCH, W. (1994), S. 390.

²⁵ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 206.

²⁶ Vgl. GLASSER, G. J. (1961), S. 177.

²⁷ Vgl. insbesondere PIESCH, W. (1975).

bekommt. Zum anderen ist es reizvoll in verschiedenen Darstellungsformen R gegenüber Disparitätsmaßen abzugrenzen, die auf dem Variationskoeffizienten aufbauen.

Als Disparitätsindikator weist R folgende Eigenschaften auf:²⁸

Im Fall einer Einpunktverteilung besitzt R den Wert Null, bei einer extremen Ungleichverteilung nimmt R seinen maximalen Wert an: Im diskreten Fall gilt dann $R = 1 - \frac{1}{n}$, im stetigen ($n \rightarrow \infty$) ist $R = 1$. Der Index erfüllt die Transfereigenschaft, bei proportionaler Änderung aller Merkmalswerte ändert sich der Wert von R nicht. Er reduziert seinen Wert jedoch, wenn jeder Merkmalsträger einen positiven Betrag a erhält. Bei Durchführung der Proportionalitätsprobe bleibt R konstant, im Fall einer Nullenergänzung erhöht sich der Wert des Koeffizienten.²⁹

4.2.1 Der Gini-Koeffizient vor dem Hintergrund von Mittelwerten von Ordnungsstatistiken

Bestimmte Flächenstücke im Lorenzkurven-Schaubild, insbesondere die Konzentrationsfläche und damit der Gini-Koeffizient, können mit Mittelwerten von Ordnungsstatistiken in Verbindung gebracht werden. In einem einführenden Teil sollen zunächst für diese Zusammenhänge wesentliche Grundbegriffe der Ordnungsstatistik erläutert werden. Anschließend werden Darstellungsformen des Gini-Koeffizienten vorgestellt, die auf Mittelwerten von Ordnungsstatistiken aufbauen.

4.2.1.1 Mittelwerte von Ordnungsstatistiken: Grundlegende Begriffe

Ausgangspunkt ist eine Reihe von ν unabhängigen Variablen $X_1, \dots, X_r, \dots, X_\nu$, wovon jede die Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzt. Betrachtet man die geordnete Reihe $X_{1:\nu} \leq X_{2:\nu} \leq \dots \leq X_{r:\nu} \leq \dots \leq X_{\nu:\nu}$, kann man jeder dieser geordneten Variablen eine Verteilungsfunktion

²⁸ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 126ff.

²⁹ Vgl. Kap. 4.7.1.

funktion $F_r^O(x)$ zuordnen³⁰. Zum Beispiel ist für die Maximum-Variable $X_{\nu:\nu}$ die Verteilungsfunktion gegeben durch $F_\nu^O(x) = F(x)^\nu$, da alle Variablen $X_{r:\nu}$ einen Wert annehmen müssen, der kleiner als x sein muß. Für die Minimum-Variable $X_{1:\nu}$ gilt entsprechend $F_1^O(x) = 1 - [1-F(x)]^\nu$, da alle Variablen bis auf eine Ausnahme einen Wert größer als x annehmen müssen.

Allgemein gilt für $X_{r:\nu}$ mit $r = 1 \dots \nu$

$$(4.13) \quad F_r^O(x) = \sum_{i=r}^{\nu} \binom{\nu}{i} F^i(x) [1 - F(x)]^{\nu-i},$$

$$(4.14) \quad f_r^O(x) = \nu \binom{\nu-1}{r-1} f(x) \cdot F(x)^{r-1} [1-F(x)]^{\nu-r}.$$

Für die hier betrachteten Zusammenhänge interessieren insbesondere die Mittelwerte dieser Ordnungsstatistiken.

Im stetigen Fall ist der Mittelwert von $X_{r:\nu}$ unter der Voraussetzung, daß $EX = \mu_X$ existiert, gegeben durch

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \mu_{r:\nu} &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{\nu-r} dF(x)^{31} \\ &= \nu \int_0^1 x(F) F^{r-1} (1-F)^{\nu-r} dF. \end{aligned}$$

Betrachtet man eine Funktion $g(x)$ für die $E[g(x)]$ existiert, dann existiert auch $E[g(X_{r:\nu})]$. Im Spezialfall $g(x) = x^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) erhält man die Ursprungsmomente der r 'ten Ordnungsstatistik $\mu_{r:\nu}^{(k)} = E[X_{r:\nu}^k]$.

³⁰ Vgl. DAVID, H. A. (1981), S. 8f.

³¹ Vgl. DAVID, H. A. (1981), S. 33f.

Für die Mittelwerte von identisch verteilten Ordnungsstatistiken gelten folgende grundlegende Beziehungen³²:

$$(4.16) \quad \sum_{r=1}^{\nu} \mu_{r:\nu}^{(k)} = \nu \cdot \mu^{(k)} \quad \text{für } k \geq 1^{33}$$

$$(4.17) \quad (\nu-r) \mu_{r:\nu}^{(k)} + r \mu_{r+1:\nu}^{(k)} = \nu \mu_{r:\nu-1}^{(k)} \quad \text{für } 1 \leq r \leq \nu-1, k \geq 1^{34}$$

$$(4.18) \quad \mu_{r:\nu}^{(k)} = \sum_{j=r}^{\nu} (-1)^{j-r} \binom{\nu}{r-1} \binom{\nu}{j} \mu_{j:j}^{(k)} \quad \text{für } 1 \leq r \leq \nu-1^{35}$$

Für einen Vergleich mit dem Gini-Koeffizienten sind vor allem $\mu_{1:\nu}$ und $\mu_{\nu:\nu}$ von Bedeutung.

$\mu_{1:\nu}$ ($\mu_{\nu:\nu}$) ist das arithmetische Mittel der Minimum-Variablen $X_{1:\nu}$ (der Maximum-Variablen $X_{\nu:\nu}$). $\mu_{1:\nu}$ soll im folgenden als Minimum-Mittelwert, $\mu_{\nu:\nu}$ als Maximum-Mittelwert bezeichnet werden. $\mu_{1:\nu}$ ($\mu_{\nu:\nu}$) kann im diskreten Fall als Mittelwert der Minima (Maxima) aller möglichen ν -Tupel einer Grundgesamtheit bzw. der Gesamtheit der Beobachtungswerte gedeutet werden. Vor einem wohlfahrts-theoretischen Hintergrund kann $\mu_{1:\nu}$ auch als sogenanntes Gleichheitsäquivalent ("equally distributed equivalent"³⁶) interpretiert werden.³⁷

Diese Mittelwerte können auch mit Hilfe von Werten der (normierten) inversen Verteilungsfunktion oder der Lorenzkurve dargestellt werden. Daneben sind sie

³² Vgl. DAVID, H. A. (1981), S. 30.

³³ Vgl. MALIK, H. J. / BALAKRISHNAN, N. / AHMED, S. E. (1988), S. 2631.

³⁴ Vgl. MALIK, H. J. / BALAKRISHNAN, N. / AHMED, S. E. (1988), S. 2631.

³⁵ Vgl. MALIK, H. J. / BALAKRISHNAN, N. / AHMED, S. E. (1988), S. 2633.

³⁶ DONALDSON, D. / WEYMARK, J. A. (1983), S. 354.

³⁷ Vgl. ATKINSON, A. B. (1970), BLACKORBY, C. / DONALDSON, D. (1978), WAGENHALS, G. (1981), DONALDSON, D. / WEYMARK, J. A. (1980 und 1983), BOSSERT, W. (1990).

interpretierbar als ein gewogenes Mittel von $M_u(F)$ bzw. $M_o(F)$, wobei eine relativ komplizierte Gewichtung erfolgt.

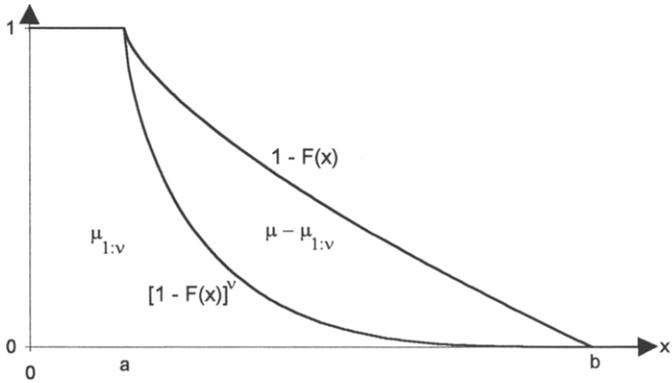
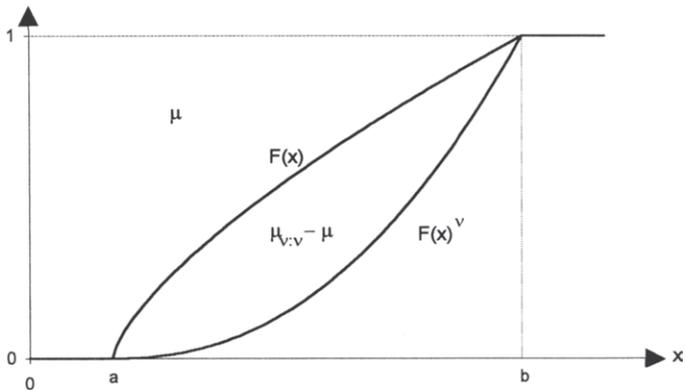
$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad \mu_{1:\nu} &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} x(1-F(x))^{\nu-1} f(x) dx \\
 &= \nu \mu \int_0^1 \frac{x(F)}{\mu} (1-F)^{\nu-1} dF \\
 &= \nu(\nu-1)\mu \int_0^1 L(F) (1-F)^{\nu-2} dF \\
 &= \int_0^1 M_u(F) \frac{F \cdot (1-F)^{\nu-2}}{1} dF^{38} \\
 &\quad \int_0^1 F \cdot (1-F)^{\nu-2} dF \\
 &= \nu \mu \int_0^1 L(F^*) dF^* \text{ mit } F^* = (1-F)^{\nu-1}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (4.20) \quad \mu_{\nu:\nu} &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)^{\nu-1} f(x) dx \\
 &= \nu \mu \int_0^1 \frac{x(F)}{\mu} F^{\nu-1} dF \\
 &= \nu(\nu-1)\mu \int_0^1 (1-L(F)) F^{\nu-2} dF \\
 &= \int_0^1 M_o(F) \frac{F^{\nu-2}(1-F)}{1} dF^{39} \\
 &\quad \int_0^1 F^{\nu-2}(1-F) dF \\
 &= \nu \mu \int_0^1 (1-L(F^{**})) dF^{**} \text{ mit } F^{**} = F^{\nu-1}.
 \end{aligned}$$

³⁸ Vgl. DE SIMONI, S. (1967) und PIESCH, W. (1975) für $\nu = 2$.

³⁹ Vgl. DE SIMONI, S. (1967) und PIESCH, W. (1975) für $\nu = 2$.

SCHAUBILD 2: Darstellung von $\mu_{1:\nu}$ SCHAUBILD 3: Darstellung von $\mu_{\nu:\nu}$ 

$\mu_{1:\nu}$ und $\mu_{\nu:\nu}$ lassen sich für $x \geq 0$ als Flächen unter $(1-F(x))^\nu$ bzw. über $F(x)^\nu$ interpretieren. Es ist

$$(4.21) \quad \mu_{1:\nu} = \nu \int_0^{\infty} x (1-F(x))^{\nu-1} dF(x) = \int_0^{\infty} (1-F(x))^\nu dx = \int_0^b (1-F(x))^\nu dx$$

und

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \mu_{\nu:\nu} &= \nu \int_0^{\infty} x F(x)^{\nu-1} dF(x) = b - \int_0^b F(x)^\nu dx \\ &= \int_0^b (1-F(x))^\nu dx = \int_0^{\infty} (1-F(x))^\nu dx \end{aligned}$$

Da $(1-F(x))^\nu \leq (1-F(x))^{\nu-1}$ für alle $x \geq 0$ bzw. $F(x)^\nu \leq F(x)^{\nu-1}$ für alle $x \geq 0$ gilt, ist

$$(4.23) \quad \mu_{1:\nu} \leq \mu_{1:\nu-1} \quad \text{bzw.} \quad \mu_{\nu:\nu} \geq \mu_{\nu-1:\nu-1} \quad \text{für } \nu = 2, 3, \dots$$

Je größer ν , desto stärker werden bei Minimum-Mittelwerten kleine und bei Maximum-Mittelwerten große Werte gewichtet. In der Literatur findet man eine Reihe von Ober- und Untergrenzen für diese Mittelwerte.⁴⁰ Bspw. leiten sich aus der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung die Beziehungen

$$(4.24) \quad \mu_{\nu:\nu} \leq \frac{\nu-1}{(2\nu-1)^{0,5}} \sigma + \mu \quad 41$$

bzw.

$$(4.25) \quad \mu_{1:\nu} \geq \mu - \frac{\nu-1}{(2\nu-1)^{0,5}} \sigma \quad 42$$

her.

⁴⁰ Vgl. DAVID, H. A. (1981), S. 56ff.

⁴¹ Vgl. ARNOLD, B. C. (1988), S. 2137.

⁴² Vgl. DAVID, H. A. (1981), S. 59.

4.2.1.2. Interpretation des Gini-Koeffizienten vor dem Hintergrund von Mittelwerten von Ordnungsstatistiken

Für den Gini-Koeffizienten sind Minimum- und Maximum-Mittelwerte von Bedeutung, die auf einem **paarweisen Vergleich** von Merkmalswerten beruhen⁴³, wie das auch schon in der mittleren Differenz zum Ausdruck kommt. Es ist:

$$(4.26) \quad 1 - \frac{\mu_{1:2}}{\mu} = 1 - 2 \int_0^1 \frac{x(F)}{\mu} (1-F) dF = 1 - 2 + 2 \left[\frac{1+R}{2} \right] = R,$$

$$(4.27) \quad \frac{\mu_{2:2}}{\mu} - 1 = 2 \int_0^1 \frac{x(F)}{\mu} \cdot F dF - 1 = 2 \left[\frac{1+R}{2} \right] - 1 = R.$$

R läßt sich also als relativierte Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel einer Verteilung und dem Mittelwert aller Minima (bzw. aller Maxima) bei paarweisem Vergleich ausdrücken.

Da wegen (4.17) $\mu_{1:2} + \mu_{2:2} = 2\mu$ ist, gilt zudem

$$(4.28) \quad R = \frac{\mu_{2:2} - \mu_{1:2}}{\mu_{2:2} + \mu_{1:2}} = \frac{\mu_{2:2} - \mu_{1:2}}{2\mu},$$

wobei die Differenz $\mu_{2:2} - \mu_{1:2}$ der mittleren Differenz Δ entspricht.

Man stellt fest, daß $\mu_{1:2}$ mit dem Mittelwert der unteren Mittelwertfunktion

$$M_u(F) = \mu \frac{L(F)}{F} \text{ in Bezug auf } F \quad M_2 = \int_0^1 M_u(F) \frac{F}{\int_0^1 F dF} dF \text{ identisch ist. Analog ist}$$

$\mu_{2:2}$ interpretierbar als Mittelwert der oberen Mittelwertfunktion $M_o(F) = \mu \frac{(1-L)}{1-F}$ in Bezug auf $(1-F)$.⁴⁴

⁴³ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1988), S. 22.

⁴⁴ Vgl. DE SIMONI, S. (1967), S. 21 und PIESCH, W. (1975), S. 49f.

Eine weitere Darstellung von R ergibt sich aus Relation (4.17):

$$\text{Es ist für } \nu = 3, r = 1 : 2\mu_{1:3} + \mu_{2:3} = 3\mu_{1:2}$$

$$\text{und für } \nu = 3, r = 2 : \mu_{2:3} + 2\mu_{3:3} = 3\mu_{2:2}$$

Folglich gilt

$$(4.29) \quad \Delta = \mu_{2:2} - \mu_{1:2} = \frac{2}{3} (\mu_{3:3} - \mu_{1:3}),$$

damit

$$(4.30) \quad R = \frac{\mu_{3:3} - \mu_{1:3}}{3\mu} \quad .45$$

Die Formen (4.21) und (4.22) der Mittelwerte führen sofort zur GUMBEL-Darstellung des Gini-Koeffizienten:

$$(4.31) \quad R = \frac{1}{\mu} \int_0^a F(x) (1-F(x)) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^b (F(x) - F(x)^2) dx = \frac{\mu_{2:2} - \mu}{\mu}$$

$$\text{mit } \mu = \int_0^b (1 - F(x)) dx.$$

⁴⁵ Vgl. LIENERT, G. A. (1981), S. 677 und HEILMANN, W.-R., (1980), S. 53f.

Dieser Zusammenhang läßt sich auch aus der diskreten Darstellung der Spannweite S

$$S(x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{2} \{ |x_i - x_j| + |x_j - x_k| + |x_k - x_i| \} \text{ herleiten:}$$

$$\begin{aligned} n^3 \mu_{3:3} - n^3 \mu_{1:3} &= \sum_i \sum_j \sum_k (\max(x_i, x_j, x_k) - \min(x_i, x_j, x_k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k (|x_i - x_j| + |x_j - x_k| + |x_k - x_i|) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot n^3 \Delta \end{aligned}$$

Analog läßt sich R damit auch interpretieren als

$$(4.32) \quad R = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [(1-F(x)) - (1-F(x))^2] dx = \frac{\mu^{-} - \mu_{1:2}}{\mu}.$$

$$(4.33) \quad R = \frac{1}{2\mu} \int_0^{\infty} [1 - F(x)^2 - (1 - F(x))^2] dx = \frac{\mu_{2:2}^{-} - \mu_{1:2}}{2\mu}$$

$$(4.34) \quad R = \frac{1}{3\mu} \int_0^{\infty} [1 - F(x)^3 - (1 - F(x))^3] dx = \frac{\mu_{3:3}^{-} - \mu_{1:3}}{3\mu}$$

Eine weitere Form des Gini-Koeffizienten haben BERREBI/SILBER⁴⁶ für den diskreten Fall entwickelt. Sie zeigen, daß sich die mittlere Differenz auch wie folgt darstellen läßt:

$$(4.35) \quad \Delta = \frac{1}{2} [\mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K] \Leftrightarrow R = \frac{\Delta}{2\mu} = \frac{\mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K}{4\mu}$$

mit

$$(4.36) \quad \mu_{2:2}^G = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{|n-2j+1|}{n^2/4} x_j \quad , x_j \geq x_{j+1}$$

$$(4.37) \quad \mu_{1:2}^K = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{|2i-n-1|}{n^2/4} x_i \quad , x_i \leq x_{i+1}$$

$\mu_{2:2}^G$ entspricht dabei dem Mittelwert der Maxima bei paarweisem Vergleich der 50 % größten Beobachtungswerte, $\mu_{1:2}^K$ entspricht dem Mittelwert der Minima bei paarweisem Vergleich der 50 % kleinsten Beobachtungswerte. Übertragen auf den stetigen Fall ergibt sich:

⁴⁶ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 334.

$$(4.38) \quad \mu_{2:2}^G = 2 \int_0^1 \tilde{F} \tilde{x}(\tilde{F}) d\tilde{F} = 2 \int_{0,5}^1 (2F-1) x(F) 2dF$$

$$\text{mit } \tilde{x}(\tilde{F}) = x(F) \text{ für } F \in [0,5, 1] \text{ und } \tilde{F} = \frac{F-0,5}{1-0,5} = 2F-1, \tilde{F} \in [0, 1], \frac{d\tilde{F}}{dF} = \frac{1}{2}$$

$$(4.39) \quad \mu_{1:2}^K = 2 \int_0^1 (1-\tilde{F}) \tilde{x}(\tilde{F}) d\tilde{F} = 4 \int_0^{0,5} (1-2F) x(F) dF$$

$$\text{mit } \tilde{x}(\tilde{F}) = x(F) \text{ für } F \in [0, 0,5] \text{ und } \tilde{F} = \frac{F}{1} = 2F, \tilde{F} \in [0, 1], \frac{d\tilde{F}}{dF} = 2,$$

und damit

$$(4.40) \quad \mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K = 4 \left[\int_0^1 (2F-1) x(F) dF \right] = 2\Delta = 4\mu R.$$

Ein weiterer Bezug zum Gini-Koeffizienten läßt sich auch über den Minimum-Mittelwert der 50% großen Merkmalsträger $\mu_{1:2}^G$ und den Maximum-Mittelwert der 50% kleinen Merkmalsträger $\mu_{2:2}^K$ herleiten. Es ist:

$$(4.41) \quad \mu_{1:2}^G = 2 \int_0^1 (1-\tilde{F}) \tilde{x}(\tilde{F}) d\tilde{F} = 2 \int_{0,5}^1 (2-2F) x(F) 2dF$$

und

$$(4.42) \quad \mu_{2:2}^K = 2 \int_0^1 \tilde{F} \tilde{x}(\tilde{F}) d\tilde{F} = 2 \int_0^{0,5} 2F x(F) 2dF.$$

Damit gilt für die Differenz:

$$(4.43) \quad \mu_{1:2}^G - \mu_{2:2}^K = 4 \int_{0,5}^1 2 x(F) dF - 4 \int_0^{0,5} 2F x(F) dF$$

$$(4.44) \quad \Leftrightarrow -\frac{\mu_{1:2}^G - \mu_{2:2}^K}{4\mu} + \frac{\mu - M_u(\frac{1}{2})}{\mu} = R.47$$

⁴⁷ Herleitung im Anhang.

Da sich andererseits die durchschnittliche absolute Abweichung vom Zentralwert

$$\delta_Z = \int_0^1 |x(F) - x(0,5)| dF \text{ schreiben läßt als}$$

$$(4.45) \quad \delta_Z = M_0\left(\frac{1}{2}\right) - \mu = \mu - M_u\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} - L\left(\frac{1}{2}\right)\right] 2\mu = \mu - 2\mu L\left(\frac{1}{2}\right), \quad 48$$

läßt sich R über diese Beziehung ausdrücken als

$$(4.46) \quad R = \frac{\delta_Z}{\mu} - \frac{\mu_{1:2}^G - \mu_{2:2}^K}{4\mu}.$$

Da $\mu_{1:2}^G - \mu_{2:2}^K \geq 0$, folgt hieraus $R \leq \frac{\delta_Z}{\mu} \Leftrightarrow \Delta < 2\delta_Z$, ein von BENEDETTI bereits hergeleitetes Ergebnis.⁴⁹

Wegen

$$(4.47) \quad \begin{aligned} \mu_{2:2} &= 0,25 \mu_{2:2}^G + 0,25 \mu_{2:2}^K + 0,5 M_0(0,5) \\ \text{und } \mu_{1:2} &= 0,25 \mu_{1:2}^G + 0,25 \mu_{1:2}^K + 0,5 M_u(0,5) \end{aligned}$$

ergibt sich schnell folgende am Lorenzkurven-Schaubild gut zu interpretierende Darstellung für den Gini-Koeffizienten:

$$(4.48) \quad R = \frac{M_0(0,5)}{\mu} R^G + \frac{M_u(0,5)}{\mu} R^K + \frac{\delta_Z}{2\mu}, \quad 50$$

Man sieht sofort, daß $R \geq \frac{\delta_Z}{2\mu}$ gelten muß, ein weiteres Ergebnis von BENEDETTI.⁵¹

Zudem gilt $R \geq R^G$, da $\frac{M_0(0,5)}{\mu} = 2(1 - L(0,5)) \geq 1$ ist.

⁴⁸ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 44ff zu Mittelwertfunktionen und S. 59 Form (121).

⁴⁹ Vgl. BENEDETTI, C. (1961) und PIESCH, W. (1975), S. 206.

⁵⁰ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 61ff: $\frac{\delta_Z}{2\mu}$ ist die Lorenzkurvensehne an der Stelle $F_Z = 0,5$.

⁵¹ Vgl. BENEDETTI, C. (1961).

Zwischen den Mittelwerten $M_o(\frac{1}{2})$, $M_u(\frac{1}{2})$, $\mu_{1:2}^G$, $\mu_{1:2}^K$, $\mu_{2:2}^G$ und $\mu_{2:2}^K$ besteht folgende Größenrelation:

$$(4.49) \quad \mu_{2:2}^G \geq M_o(\frac{1}{2}) = \delta_Z + \mu \geq \mu_{1:2}^G \geq \mu \geq \mu_{2:2}^K \geq M_u(\frac{1}{2}) = \mu - \delta_Z \geq \mu_{1:2}^K. \quad 52$$

In Maximum-Mittelwerten werden im Vergleich zum arithmetischen Mittel größere Werte überproportional gewichtet. In Minimum-Mittelwerte gehen kleinere Werte stärker gewichtet ein.

Aus Beziehung (4.49) kann ebenso auf obige Ungleichung geschlossen werden wie z.B. auch auf folgende:

$$(4.50) \quad R^G = \frac{M_o(0,5) - \mu_{1:2}^G}{M_o(0,5)} = \frac{\delta_Z + \mu - \mu_{1:2}^G}{\delta_Z + \mu} \leq \frac{\delta_Z}{\delta_Z + \mu}$$

$$(4.51) \quad R^K = \frac{\mu_{2:2}^K - M_u(0,5)}{M_u(0,5)} = \frac{\mu_{2:2}^K - \mu + \delta_Z}{\mu - \delta_Z} \leq \frac{\delta_Z}{\mu - \delta_Z}$$

Aus (4.24) folgt für $\nu = 2$ die bekannte Glasser'sche Ungleichung, für $\nu = 3$ die (schwächere) Beziehung $R \leq \frac{4 \sqrt{V}}{3 \cdot \sqrt{5}}$.

Zum Abschluß dieses Kapitels werden die hier vorgestellten Darstellungsformen des Gini-Koeffizienten in einer Übersicht zusammengefaßt.

⁵² Es gilt allgemein: $\mu_{2:2}^o(F) \geq M_o(F) \geq \mu_{1:2}^o(F) \geq \mu_{2:2}^u(F) \geq M_u(F) \geq \mu_{1:2}^u(F)$.

Der Index o (bzw u) bezeichnet dabei eine an der Stelle F von unten (bzw. oben) abgeschnittene Verteilung, vgl. dazu auch Kap. 7.

ÜBERSICHT 2: Darstellungsformen des Gini-Koeffizienten über Mittelwerte von Ordnungsstatistiken

$$R = \frac{\mu - \mu_{1:2}}{\mu} = \frac{\mu_{2:2} - \mu}{\mu} = \frac{\mu_{2:2} - \mu_{1:2}}{2\mu}$$

$$R = \frac{\mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K}{4\mu} = \frac{\delta_Z}{\mu} - \frac{\mu_{1:2}^G - \mu_{2:2}^K}{4\mu}$$

$$R = \frac{\mu_{3:3} - \mu_{1:3}}{3\mu}$$

4.2.2 Der Gini-Koeffizient im Vergleich mit V^2 und $\frac{V^2}{1 + V^2}$

Eine interessante Aufgabe stellt der Vergleich von $R = \frac{\Delta}{2\mu}$ mit dem quadrierten Variationskoeffizienten $V^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ und dem von BONFERRONI eingeführten Disparitätsmaß $\frac{V^2}{1 + V^2}$ dar. Durch die Gegenüberstellung bestimmter Formen von R und $\frac{V^2}{1 + V^2}$ können dabei allgemeine Konstruktionsprinzipien von Disparitätsmaßen sichtbar gemacht werden.

V^2 erfüllt bis auf den Normierungsaspekt wie der Gini-Koeffizient die in Kapitel 2 genannten Eigenschaften.⁵³ Im Fall einer extremen Ungleichverteilung nimmt V^2 den Wert $n-1$ an. Auf den Wertebereich $[0, \frac{n-1}{n}]$ normierte Maße stellen $\frac{V^2}{n}$ und $\frac{V^2}{1 + V^2}$ dar, wobei $\frac{V^2}{n}$ als "Mischmaß"⁵⁴ zwischen Konzentrations- und Disparitätsmaß nicht

⁵³ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 115ff.

⁵⁴ WAGENHALS, G. (1981), S. 118.

weiter betrachtet werden soll. Für $\frac{V^2}{1 + V^2}$ bleiben alle in Kapitel 2 genannten Eigenschaften erhalten.⁵⁵

Zwischen V^2 und R bestehen folgende **Größenbeziehungen**:

1. Die Gini–Herfindahl–Ungleichung führt zur allgemeingültigen Beziehung

$$(4.10) \quad nR \geq V^2. \text{ }^{56}$$

2. RIGO⁵⁷ leitet über Grenzen für Mittelwerte von Ordnungsstatistiken eine Untergrenze für R her:

$$(4.52) \quad R \geq \frac{(1 - \frac{a}{\mu}) \cdot V^2}{(1 - \frac{a}{\mu})^2 + V^2}, \text{ wenn } \mu \geq \frac{a+b}{2} \text{ bzw. } R \geq \frac{(\frac{b}{\mu} - 1) \cdot V^2}{(\frac{b}{\mu} - 1)^2 + V^2}, \text{ wenn } \mu \leq \frac{a+b}{2}.$$

Ist $a = 0$ und $\mu \geq \frac{b}{2}$, bzw. $b = 2\mu$, dann reduziert sich die Ungleichung auf $R \geq \frac{V^2}{1 + V^2}$.

3. Aus " $\frac{F(x)}{x}$ nichtfallend in $x \geq 0$ " folgt

$$(4.53) \quad R \geq V^2. \text{ }^{58}$$

In einer Übersicht sollen nun strukturgleiche bzw. –ähnliche Darstellungsformen von R , V^2 und $\frac{V^2}{1 + V^2}$ einander gegenübergestellt werden.

⁵⁵ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 119f.

⁵⁶ Vgl. PIESCH, W. (1992), S. 24.

⁵⁷ Vgl. RIGO, P. (1987), S. 537.

⁵⁸ Vgl. PATIL, G. P. / RAO, C. R. (1978), S. 184 sowie auch Fußnote 16 in Kap 8.1

ÜBERSICHT 3: Darstellungsformen von R und V^2 bzw. $\frac{V^2}{1+V^2} = \frac{\sigma^2}{E(X^2)}$ im Vergleich		
$R = \frac{\Delta}{2\mu}$	$V^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$	$\frac{V^2}{1+V^2} = \frac{\sigma^2}{E(X^2)}$
1 $\int_0^1 (2F-1) \frac{x(F)}{\mu} dF$	1 $\int_0^1 \left[\frac{x(F)-\mu}{\mu} \right] \frac{x(F)}{\mu} dF$	1 $\int_0^1 \left[\frac{x(F)-\mu}{E(X^2)} \right] x(F) dF$
2 $\text{cov}\left[\frac{X}{\mu}, 2F(x)\right] = \text{cov}\left[\frac{X}{\mu}, 2L(x)\right]$	$\text{cov}\left[\frac{X}{\mu}, \frac{X}{\mu}\right]$	$\text{cov}\left[\frac{X}{\mu}, \frac{\mu X}{E(X^2)}\right]$
3 $\frac{1}{\mu} \int_a^b [F(x)-F(x)^2] dx$ $2 \int_a^b [F(x)-L(x)] f(x) dx$ $\frac{1}{\mu} \int_a^b [1-F(x)] F(x) dx$	$\frac{1}{\mu} \int_a^b [F(x) - L(x)] dx$ $\frac{1}{\mu} \int_a^b [F(x)-L(x)] \cdot 1 dx$ $\frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1-F(x)][2x-\mu] dx$	$\frac{\mu}{E(X^2)} \int_a^b [F(x)-L(x)] dx$ $\frac{\mu}{E(X^2)} \int_a^b [F(x)-L(x)] dx$ $\frac{1}{E(X^2)} \int_0^{\infty} [1-F(x)][2x-\mu] dx$
4 $\frac{\mu_2 \cdot 2^{-\mu}}{\mu}$	$\frac{\mu_1 - \mu}{\mu}$	$\frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1}^{59}$

⁵⁹ μ_1 ist arithmetisches Mittel der ersten Momentverteilung: $\mu_1 = \int_a^b x l(x) dx$.

$5 \int_0^1 \int_0^1 \left \frac{x(F)}{\mu} - \frac{x(Q)}{\mu} \right dqdF$ $\int_0^1 \int_0^F \left[\frac{x(F)}{\mu} - \frac{x(Q)}{\mu} \right] dqdF$	$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x(F)}{\mu} - \frac{x(Q)}{\mu} \right]^2 dqdF$ $\int_0^1 \int_0^F \left[\frac{x(F)}{\mu} - \frac{x(Q)}{\mu} \right]^2 dqdF$	$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x(F) - x(Q)}{\sqrt{E(X^2)}} \right]^2 dqdF$ $\int_0^1 \int_0^F \left[\frac{x(F) - x(Q)}{\sqrt{E(X^2)}} \right]^2 dqdF$
$6 \int_a^b \frac{1}{\mu} F^{(2)}(x) f(x) dx$	$\frac{2}{\mu} \int_a^b F^{(3)}(x) f(x) dx$	$2 \int_a^b \frac{F^{(3)}(x)}{E(X^2)} f(x) dx^{60}$

Die **Darstellungsformen 1 und 2** zeigen deutlich, daß bei V^2 eine Selbstgewichtung, bei R dagegen eine Gewichtung der Lorenzkurvenanstiege mit den entsprechenden relativierten Rängen bzw. kumulierten relativen Merkmalssummen vorgenommen wird. V^2 läßt sich in diesem Zusammenhang als Varianz der Lorenzkurvenanstiege interpretieren.

Auch in **Darstellung 3** zeigt sich der Unterschied der beiden Indizes in der Gewichtung. Bei V^2 [bzw. $\frac{V^2}{1+V^2}$] wird die Fläche zwischen $F(x)$ und $L(x)$ nur um den Faktor $\frac{1}{\mu}$ [bzw. $\frac{\mu}{E(X^2)}$] korrigiert, für R wird diese Fläche jedoch mit $2f(x)$ bzw. $2l(x)$ gewogen. In der GUMBEL-Darstellung wird für R die kumulierte relative Merkmalssumme $L(x)$ durch $F(x)^2$ ersetzt.

Diese Unterscheidung dokumentiert auch **Interpretation 4**, die die Indizes in Form von relativierten Mittelwertdifferenzen vorstellt: Statt wie bei R auf den Mittelwert aller Maxima $\mu_{2:2}$ zurückzugreifen, geht in die Berechnung von V^2 der Mittelwert der ersten

⁶⁰ Definition von $F^{(\nu)}(x)$ in Kap. 9.2.

Momentverteilung μ_1 ein. $\frac{V^2}{1+V^2}$ hat im Vergleich zu V^2 als Bezugsgröße $\mu_1 > \mu$. Analog dazu könnte man auch an Stelle von R ein Maß $\frac{R}{1+R} = \frac{\mu_2 \cdot 2^{-\mu}}{\mu_2 \cdot 2}$ betrachten. Im Lorenzkurven-Schaubild entspräche dies dem Verhältnis der Konzentrationsfläche K bezogen auf die Fläche oberhalb der Lorenzkurve $K/K+0.5$. Da $\frac{d}{dR} \frac{R}{R+1} = \frac{1}{(1+R)^2} > 0$ würden sich R und $\frac{R}{1+R}$ gleichgerichtet verändern, jedoch wäre $\frac{R}{1+R}$ bis auf den Fall einer Einpunktverteilung kleiner als R , im Fall der extremen Ungleichverteilung nähme es den Wert $\frac{n-1}{2n-1} \approx \frac{1}{2}$ an. Zwischen R und $\frac{V^2}{1+V^2}$ besteht allgemein kein einheitliches Größenverhältnis. Aus Darstellung 4 kann jedoch schnell folgende Bedingung hergeleitet werden: Es gilt $R \geq \frac{V^2}{1+V^2}$, wenn $\frac{\mu}{\mu_1} \geq \frac{\mu_1 \cdot 2}{\mu}$ erfüllt ist.

Variante 5 stellt R und V^2 jeweils als einen Mittelwert von Distanzen zwischen sämtlichen Beobachtungspaaren vor. Dabei wird bei R die Distanz als Differenz $\frac{x(F) - x(q)}{\mu}$ absolut genommen, in V^2 geht diese Differenz quadriert ein. Dies hat zur Folge, daß bei V^2 große Differenzen (>1) überproportional, kleine Differenzen (<1) unterproportional gewichtet werden.⁶¹

In **Form 6** findet man die beiden Indizes als das gewogene Mittel von Werten der kumulierten Verteilungsfunktion $F^{(\nu)}(x)$ wieder, wobei V^2 auf Kumulationsstufe 3, R nur auf Kumulationsstufe 2 aufbaut.

4.3 Der Gini-Koeffizient als Baustein eines Konzentrationsmaßes

Im Rahmen der absoluten Konzentrationsmessung wird die Verteilung von Marktanteilen auf Unternehmen eines Marktes untersucht, um aus der Marktstruktur Rückschlüsse auf die Wettbewerbssituation zu ziehen. Die Konzentrationsmessung baut auf der Disparitätsmessung auf, so daß sich aus formaler Sicht eine Vielzahl von Verbindungen zwischen beiden Konzepten herstellen läßt.

⁶¹ Vgl. auch BUSCEMI, S. (1986).

JÖHNK⁶² führt 1970 das Konzept der gleichmäßig normierten Disparitäts- und Konzentrationsmaße ein. Die Erfüllung bestimmter Eigenschaften bei Disparitätsmaßen D^{63} und Konzentrationsmaßen K^{64} führt zu folgender grundlegender Beziehung zwischen D , K und der Anzahl an Merkmalsträgern n :

$$(4.54) \quad 1 = n \cdot (1 - D) \cdot K \quad 65$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1/n}{(1-D)}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{K - \frac{1}{n}}{K}.$$

Das zu R korrespondierende Konzentrationsmaß ist der Rosenbluth-Index

$$(4.55) \quad RB = \frac{1}{n(1-R)} = \frac{1}{\sum_i (2n-2i+1)l_i}, \quad l_i \leq l_{i+1}. \quad 66$$

$$= \frac{\mu}{n\mu_{1:2}}$$

Das Rosenbluth-Maß entspricht also dem Kehrwert der zweifachen Fläche oberhalb der Konzentrationskurve. An dieser Kurve werden die kumulierten Merkmalssummenanteile der k größten Merkmalsträger (Konzentrationsraten CR_k) abgetragen und linear miteinander verbunden. Der Wert des Rosenbluth-Indexes hängt, so interpretiert, von der Anzahl der Merkmalsträger (n -Effekt) und dem Ausmaß an Disparität (gemessen mit R , Disparitätseffekt) ab. Je geringer c. p. die Anzahl an Merkmalsträgern bzw. je größer c. p. die Disparität, desto höher ist das Konzentrationsausmaß. Über oben genannten Zusammenhang lassen sich weiterführende Aussagen über die Größenbeziehung zwischen D und K ableiten oder Aggregationseffekte erklären.⁶⁷

⁶² Vgl. JÖHNK, M. D. (1970).

⁶³ Vgl. Kap. 2.

⁶⁴ Vgl. PIESCH, W. (1980), S. 7ff und (1994), S. 387.

⁶⁵ Vgl. JÖHNK, M. D. (1970), S. 15 und PIESCH, W. (1980), S. 16ff und (1994), S. 388.

⁶⁶ Vgl. ROSENBLUTH, G. (1961) und PIESCH, W. (1975), S. 141ff.

⁶⁷ Vgl. PIESCH, W. (1994).

4.4 Der Gini-Koeffizient als Baustein eines Asymmetrie- und eines Wölbungsmaßes

BERREBI/SILBER (1987a)⁶⁸ schlagen mittlere Differenzen als Baustein für einen Index vor, der die **Asymmetrie** – interpretiert als Abweichung einer Verteilung von der Symmetrie um den Zentralwert – messen soll. Damit ergeben sich sofort auch Bezüge zum Gini-Koeffizienten. Als Alternative zum Pearson'schen Schiefe-Maß wird definiert:

$$(4.56) \quad A^R = \frac{\Delta_G - \Delta_K}{2\Delta} \quad 69$$

$$(4.57) \quad = \frac{\mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^G - \left[\mu_{2:2}^K - \mu_{1:2}^K \right]}{2 (\mu_{2:2} - \mu_{1:2})} \quad 70$$

$$(4.58) \quad = \frac{M_o\left(\frac{1}{2}\right) R_G - M_u\left(\frac{1}{2}\right) R_K}{2\mu R}$$

Dieser Index nimmt Werte im Intervall $[-1, 1]$ an. Er tendiert gegen $+1$ bei der extremen Ungleichverteilung und gegen -1 , wenn ein Merkmalsträger die Merkmalsausprägung 0 , der Rest eine gleichen Merkmalswert $\frac{n}{n-1} \cdot \mu$ aufweist.⁷¹

Je größer c.p. die Disparität im oberen Bereich der Verteilung bzw. je kleiner c.p. im unteren Bereich, desto schiefer wird die Verteilung beurteilt. Eine Lineartransformation aller Merkmalswerte $Y = a + bX$, $a \geq 0$, $b > 0$ läßt A^R unverändert.

A^R kann als gewogenes Mittel von $\frac{R_G}{R}$ bzw. $-\frac{R_K}{R}$ verstanden werden, wobei als Gewichte $\frac{M_o\left(\frac{1}{2}\right)}{2\mu} = (1-L\left(\frac{1}{2}\right))$ und $\frac{M_u\left(\frac{1}{2}\right)}{2\mu} = L\left(\frac{1}{2}\right)$ gesetzt werden.

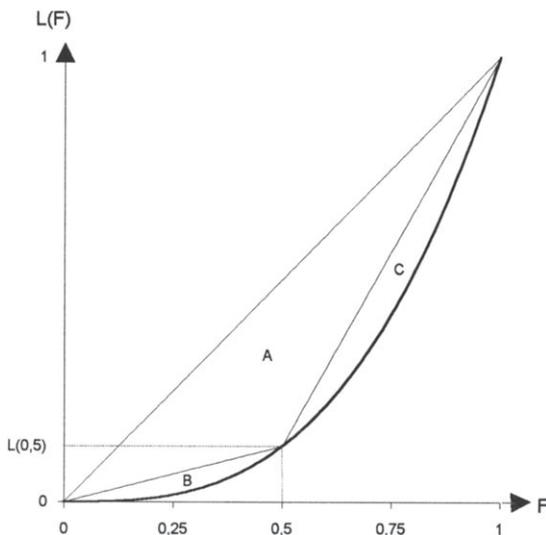
Eine graphische Veranschaulichung ist am Lorenzkurvenschaubild möglich, wie folgende Abbildung zeigt.

⁶⁸ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 331ff.

⁶⁹ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 336.

⁷⁰ Vgl. Kap. 4.2.1.2.

⁷¹ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 336.

SCHAUBILD 4: Darstellung von A^R und K_G im Lorenzkurvenschaubild

Der Gini-Koeffizient R entspricht zweimal der Summe der Flächenstücke $[A+B+C]$;

R_K ist darstellbar durch $\frac{B}{L(\frac{1}{2}) \cdot 0,5 \cdot 0,5}$ und R_G durch $\frac{C}{[1-L(\frac{1}{2})] \cdot 0,5 \cdot 0,5}$

Damit ergibt sich für A^R

$$A^R = \frac{2\mu (1-L(\frac{1}{2})) \frac{C}{[1-L(\frac{1}{2})] 0,5 \cdot 0,5} - 2\mu L(\frac{1}{2}) \cdot \frac{B}{L(\frac{1}{2}) \cdot 0,5 \cdot 0,5}}{2\mu 2[A+B+C]} = \frac{2[C-B]}{A+B+C}$$

Im Fall einer um den Zentralwert Z symmetrischen Verteilung,

(d.h. $Z - x_i = x_{(n+i-1)} - Z$ mit $x_i < x_{i+1}$), ist $\Delta_G = \Delta_K$ und damit $A^R = 0$.⁷²

⁷² Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 336.

Es ist dann $\Delta_G = \Delta_K \Leftrightarrow 2 \left[\mu_{2:2}^G - M_o(0,5) \right] = 2 \left[M_u(0,5) - \mu_{1:2}^K \right] \Leftrightarrow \frac{\mu_{2:2}^G + \mu_{1:2}^K}{2} = \mu$.

Der Gini-Koeffizient einer solchen Verteilung kann nicht größer als $\frac{1}{2}$ werden⁷³:

$$(4.59) \quad R = \frac{\frac{1}{2} \mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K}{\mu_{2:2}^G + \mu_{1:2}^K} \leq \frac{1}{2}.^{74}$$

Es läßt sich zeigen, daß R nur im Falle $A^R > 0$ einen Wert größer $\frac{1}{2}$ annehmen kann:⁷⁵

$$(4.60) \quad R = \frac{\mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K}{4\mu} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K > 2\mu = M_o(0,5) + M_u(0,5)$$

$$\Leftrightarrow \mu_{2:2}^G - M_o(0,5) > M_u(0,5) - \mu_{1:2}^K$$

$$\Leftrightarrow \Delta_G > \Delta_K.$$

Als Alternative zur Kurtosis⁷⁶ als **Maß für die Wölbung** einer Verteilung haben BERREBI/SILBER⁷⁷ einen Index vorgeschlagen, der wiederum auf mittleren Differenzen (und damit auf R) aufbaut:

$$(4.61) \quad K_G = \frac{\Delta_G + \Delta_K}{2\Delta} \quad ^{78}$$

⁷³ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 337.

⁷⁴ Vgl. Form (4.35).

⁷⁵ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 337f, Beweisführung andersartig.

⁷⁶ Vgl. KENDALL, M. G. / STUART, A. (1969), S. 85.

⁷⁷ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1989).

⁷⁸ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1989), S. 233.

$$(4.62) \quad K_G = 1 - \frac{(\mu_{1:2}^G - \mu_{2:2}^K)}{\mu_{2:2}^G - \mu_{1:2}^K}$$

$$(4.63) \quad K_G = \frac{M_o(\frac{1}{2}) R_G + M_u(\frac{1}{2}) R_K}{2\mu R} = g \cdot \frac{R_G}{R} + (1-g) \frac{R_K}{R} \quad \text{mit } g = 1 - L(\frac{1}{2}).$$

Da der Ausdruck $0,5[gR_G + (1-g)R_K]$ nichts anderes ist als der interne Gini-Koeffizient R_{int}^{79} einer Zwei-Klassen-Verteilung mit jeweils der Hälfte der Merkmalsträger in einer Klasse, läßt sich K_G auch interpretieren als

$$(4.64) \quad K_G = \frac{2R_{\text{int}}}{R}.$$

Im Vergleich zu A^R werden die mittleren Differenzen also addiert, d.h. K_G ergibt sich im Lorenzkurvenschabild als $K_G = \frac{2}{A+B+C} [B+C]$.

Im Fall einer Zweipunktverteilung mit $0 \leq \xi_1 < Z$ und $Z < \xi_2$ sind $\Delta_G = \Delta_K = 0$, damit gilt $K_G = 0$. Die von BERREBI/SILBER angegebene Grenzverteilung mit den Merkmalsausprägungen $\{0, Z-\epsilon, Z+\epsilon, 2Z\}$ und den relativen Häufigkeiten

$\left\{ \frac{n-2}{2n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{n-2}{2n} \right\}$ entspricht für $n \rightarrow \infty$ einer speziellen Zweipunktverteilung, die zu $K_G = \frac{4}{2+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ führt.⁸⁰ Wegen $\mu_{1:2}^G > \mu_{2:2}^K$ ergibt sich $K_G < 1$.

Die Verteilung $\{0, Z-\epsilon, Z+\epsilon, 2Z\}$ mit den relativen Häufigkeiten $\left\{ \frac{1}{n}, \frac{n-2}{2n}, \frac{n-2}{2n}, \frac{1}{n} \right\}$ ist für $\epsilon \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ näherungsweise eine Einpunktverteilung mit der Merkmalsausprägung Z , die Differenz zwischen $\mu_{1:2}^G$ und $\mu_{2:2}^K$ wird minimal. Für diese Verteilung ergibt sich für

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad K_G = \frac{2}{1 + \frac{n}{n-2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Eine extreme Ungleichverteilung führt ebenfalls zu einem Wert für K_G nahe Eins. Da $\Delta_G = 4\mu \frac{n-2}{n}$, $\Delta_K = 0$ und $\Delta = 2\mu \frac{n-1}{n}$, ergibt sich für $K_G = \frac{n-2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

⁷⁹ Vgl. Kap. 4.7.

Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 212, für zwei sich überschneidende gleichgroße Sektoren.

⁸⁰ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1989), S. 234.

K_G ist gegenüber Lineartransformationen mit $Y = a + bX$, $a \geq 0$, $b > 0$ invariant.⁸¹ Es gilt

$$\text{dann } \Delta_Y = b \Delta_X, \text{ damit } K_Y = \frac{b \cdot \Delta_{K_X} + b \cdot \Delta_{G_X}}{2b \cdot \Delta_X} = \frac{\Delta_{K_X} + \Delta_{G_X}}{2\Delta_X} = K_X.$$

4.5 Der Gini-Koeffizient als Baustein von Armuts- und Überflußmaßen

Seit Mitte der siebziger Jahre hat sich eine Vielzahl von Autoren⁸² mit der Armutsmessung beschäftigt. Dabei wurde insbesondere der Konstruktion von komplexen Armutsmaßen viel Aufmerksamkeit gewidmet. Bei einigen Ansätzen kann eine Darstellungsform gewählt werden, die den Gini-Koeffizienten als Baustein zeigt.

Ausgangspunkt der Konstruktion dieser Armutsmaße ist die Vorgabe einer Armutslinie z , die die Bevölkerung gemäß ihrer Einkommen⁸³ in q Arme und $n-q$ Nicht-Arme teilt. Als sinnvolle Indikatoren für das Ausmaß an Armut lassen sich Maßgrößen für die Anzahl und für die Intensität (bezogen auf den Einzelnen oder die Gesamtheit der Betroffenen) entwickeln. Einen ersten Ansatz zur Messung der Armutintensität liefern die Einkommenslücken $g_i = z - x_i$, die bei komplexen Maßen noch eine zusätzliche Bewertung erfahren.

Folgende Indizes lassen sich mit dem Gini-Koeffizienten in Zusammenhang bringen, mit

$$- g_i = \begin{cases} g_i & \text{für } y_i < z \\ 0 & \text{für } y_i \geq z \end{cases}, \text{ Einkommenslücken der sogenannten}$$

zensierten Verteilung $x_{cd}: (x_1, x_2, \dots, x_q, z, z \dots z)$,

$$- \mu_p = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q y_i, \text{ Durchschnittseinkommen der Armen,}$$

$$- \mu^* = \frac{q}{n} \mu_p + \frac{n-q}{n} z, \text{ Durchschnittseinkommen der zensierten Verteilung und}$$

$$- \Gamma_p(X, \nu) = \frac{\mu - \mu_{1:\nu}^p}{\mu}, \text{ erweiterter Gini-Koeffizient bezogen auf die Einkommen der Armen.}^8$$

⁸¹ Weitere Eigenschaften in BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1987a), S. 234.

⁸² So z.B. SEN, A. K. (1976), ANAND, S. (1977), THON, D. (1979), KAKWANI, N. C. (1980b), SEN, P. K. (1986). Vgl. dazu auch die Monographie von SCHEURLE, U. (1991).

⁸³ Allgemeiner formuliert: ihres "Potentials an Bedürfnisbefriedigung" oder ihres "Potentials an Mittel zur Bedürfnisbefriedigung", SCHEURLE, U. (1991), S. 39.

⁸⁴ Vgl. Kap. 7.

ÜBERSICHT 4: Darstellung von Armutsmaßen in Abhängigkeit von R		
Definition	Darstellung in Abh. von R	Quelle
$PS = 2 \sum_{i=1}^q \frac{(q+1-i)}{nz(q+1)} g_i$	$PS = \frac{q}{n} [1 - \frac{\mu}{z} P(1 - \frac{q}{q+1} R_p)]$	SEN(1976)
$PS^* = 2 \sum_{i=1}^q \frac{(q+0,5-i)}{nzq} g_i$	$PS^* = \frac{q}{n} [1 - \frac{\mu}{z} P(1 - R_p)]$	korrigiertes SEN-Maß
$TH = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)}{n(n+1)z} g_i^*$	$TH = 1 - \frac{\mu}{z} (1 - R^* \frac{n}{n+1})$	THON(1979)
$A = \sum_{i=1}^q \frac{(q+1-i)}{n\mu(q+1)} g_i$	$A = \frac{q}{n} [1 - \frac{\mu}{\mu} P(1 - \frac{q}{q+1} R_p)]$	ANAND(1977)
$K(\alpha) = \sum_{i=1}^q \frac{q(q+1-i)^\nu}{nz \sum_i^\nu} g_i$	$K(\alpha) = \frac{q}{n} [1 - \frac{\mu}{z} P(1 - \Gamma_p(X, \nu) \frac{q}{q+1})]$	KAKWANI (1980b)

Diese Darstellungsformen zeigen, daß c.p. das Intensitätsausmaß der Armut als umso größer gewertet wird, je größer die Ungleichverteilung innerhalb der Armenbevölkerung ist.

Vor einem wohlfahrtstheoretischen Hintergrund läßt sich dieser Zusammenhang über ein in die Armutsmaße und den Gini-Koeffizienten eingehendes einheitliches Gewichtungsbzw. Bewertungsschema erklären, das als Gini-social-welfare-function bezeichnet wird.⁸⁵ In der Regel werden dabei Einkommenseinheiten, Einkommenslücken, Nutzen in Abhängigkeit von Einkommen oder Einkommensäquivalente von Wohlfahrts- oder Nutzengrößen als Meßeinheit herangezogen. Wählt man zur Ermittlung des Gleichheitsäquivalentes⁸⁶ die Gini-social-welfare-function

$$(4.65) \quad GSW = \sum_{i=1}^n (2n+1-2i)x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(x_i, x_j),$$

erhält man als Gleichheitsäquivalent $\mu_{1,2}$. In abgewandelter Form findet sich dieses Äqui-

⁸⁵ Vgl. BLACKORBY, C. / DONALDSON, D. (1978), S. 69 und SCHEURLE, U. (1991), S. 135.

⁸⁶ Vgl. Kap. 4.2.1.1.

valent in allen vorgestellten Maßen wieder. In PS^* z.B. geht dieses Äquivalent bezogen auf die q Armen ($\mu_{1:2}^P$) ein. Dann ergibt sich PS^* als

$$(4.66) \quad PS^* = \frac{q}{n} \left[\frac{z - \mu_{1:2}^P}{z} \right].$$

Damit läßt sich PS^* als eine spezielle Form eines Armutsintensitätsmaßes identifizieren, nämlich als "bezüglich aller Einheiten normierte Gesamtwohlfahrtsäquivalenzeinkommenslücke"⁸⁷. Ähnliche Deutungen ergeben sich für die übrigen angeführten Maße. Ausführliche Erläuterungen zu dieser grundlegenden Interpretation von Armutsmaßen, über die letztlich eine Einbindung von Disparitätsmaßen in die Armutsmessung erklärt werden kann, finden sich bei SCHEURLE.⁸⁸

Spiegelbildlich zur Armutsmessung können sogenannte **Überfluß-Maße** ("affluence measures") entwickelt werden, die das Ausmaß an Überfluß des reichsten Teils der Bevölkerung zu messen suchen. Die Bevölkerung wird dementsprechend in einen reichen und einen nicht-reichen Teil getrennt und die "Intensität des Reichtums" gemessen. Das führt zu Maßen, die sich als auf diesen Sachverhalt analog übertragene Armutsmaße darstellen.⁸⁹

4.6 Der Gini-Koeffizient bei der Messung von Preisvektoren-Distanzen

Ein weiterer Vorschlag zur Anwendung des Gini-Koeffizienten kommt von SILBER⁹⁰. Er setzt die Maßzahl zur Messung der Distanz zwischen den relativen Preisvektoren zweier Länder A und B ein. Den relativen Preisindex der Güter i und j ($i, j = 1 \dots n$) in Land A definiert er als

$$(4.67) \quad y_{ij}^A = \frac{|P_i^A - P_j^A|}{\sum_{k=1}^n \bar{w}_k P_k^A} \quad 91,$$

mit \bar{w}_k als durchschnittlichem Ausgabenanteil des Gutes k in den zwei Ländern A und B und P_k^A als Preis des Gutes k in Land A. D.h. der relative Preisindex zwischen den Gütern i

⁸⁷ SCHEURLE, U. (1991), S. 134.

⁸⁸ Vgl. SCHEURLE, U. (1991), S. 138ff.

⁸⁹ Vgl. SEN, P. K. (1988), S. 65ff.

⁹⁰ Vgl. SILBER, J. (1989b).

⁹¹ Vgl. SILBER, J. (1989b), S. 232.

und j mißt den mit dem Durchschnittspreis des fiktiven Warenkorb der Länder $P_A = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \bar{w}_k} P_k^A$ relativierten Abstand zwischen dem Preis von Gut i und dem Preis von Gut j . Damit ist y_{ij}^A eine dimensionslose Größe. Entsprechendes gilt für Land B.

Zur Messung der "relativen Preisdistanz" zweier Länder A und B schlägt SILBER nun folgende abstrakte Maßzahl vor:

$$(4.68) \quad d_G(P^A, P^B) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \bar{w}_i \bar{w}_j} |y_{ij}^A - y_{ij}^B|,$$

d.h. eine gewichtete Distanz der relativierten Preisdistanzen mit $\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \bar{w}_i \bar{w}_j \neq 1$. Die Summe der Gewichte ergibt $\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \bar{w}_i \bar{w}_j = 0,5 - 0,5 \sum_{i=1}^n \bar{w}_i^2$, wobei $\sum_{i=1}^n \bar{w}_i^2$ als Herfindahl-Index der durchschnittlichen Ausgabenanteile interpretiert werden kann.

Obige Maßzahl läßt sich wegen $|x - y| = x + y - 2\min(x, y)$ zerlegen in

$$(4.69) \quad d_G(P^A, P^B) = R^A + R^B - 2 \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \bar{w}_i \bar{w}_j} \min(y_{ij}^A, y_{ij}^B).^{92}$$

R^A und R^B als die jeweiligen Länder-Gini-Koeffizienten messen die Disparität der relativen Preise der verschiedenen Güter, gewogen mit den **durchschnittlichen** Ausgabenanteilen. Struktureffekte werden also herausgerechnet, da für beide Länder eine einheitliche Ausgabenstruktur unterstellt wird. Den gemischten Ausdruck interpretiert SILBER als eine Art "Kovarianz" zwischen den Preisen in den Ländern A und B, vom mathematischen Aufbau ist diese Bezeichnung jedoch nicht nachvollziehbar.

Eine andere Zerlegung für $d_G(P^A, P^B)$ ergibt sich dementsprechend aus $|x + y| = 2\max(x, y) - x - y$:

$$(4.70) \quad d_G(P^A, P^B) = 2 \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \bar{w}_i \bar{w}_j} \max(y_{ij}^A, y_{ij}^B) - R^A - R^B.$$

⁹² Vgl. SILBER, J. (1989b), S. 233.

Das symmetrisch aufgebaute Maß $d_G(P^A, P^B)$ ist Null, wenn $y_{ij}^A = y_{ij}^B$ für alle i, j , d.h. wenn der relativierte Abstand der Preise aller Paare von Gütern in beiden Ländern gleich ist. Wären in einem Land alle Preise identisch, reduzierte sich das Preisvektoren-Distanzmaß auf den Gini-Koeffizienten der Preise des anderen Landes.

4.7 Die Sektorenaggregations-Darstellung des Gini-Koeffizienten und spezielle Anwendungsmöglichkeiten

Ausgangspunkt der Betrachtung sind n Merkmalsträger eines bestimmten Merkmals, die in k Teilgruppen (Sektoren) mit n_i Merkmalsträgern ($\sum n_i = n$, $\frac{n_i}{n} = h_i$) aufgeteilt sind. Die Verteilung eines Sektors ist im Teilintervall $[a_i, b_i]$ definiert, die zugehörige Verteilungsfunktion durch $F_i(x)$ und der Mittelwert durch μ_i gegeben.

Es gilt allgemein

$$(4.71) \quad F(x) = \sum_{i=1}^k h_i F_i(x) \text{ in den Grenzen } [a, b] \text{ mit } h_i = \frac{n_i}{n},$$

$$a = \min_i a_i, \quad b = \max_i b_i.$$

Wesentliche Zerlegungsformen des Gini-Koeffizienten sind in der Literatur von BHATTACHARYA/MAHALANOBIS (1967), RAO (1969), MEHRAN (1975), PIESCH (1975) entwickelt worden.⁹³

Zerlegung A⁹⁴:

$$(4.72) \quad R = \sum_i l_i R_i + \sum_{i < j} \frac{h_i h_j}{\mu} \int_a^b [F_i(x) - F_j(x)]^2 dx \geq R_{i, \min},$$

⁹³ Vgl. die übersichtliche Zusammenfassung bei NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 326.

⁹⁴ Vgl. PIESCH, W. (1967), S. 271 und (1975), S. 208.

Zerlegung B⁹⁵:

$$(4.73) \quad R = \sum_i h_i l_i R_i + \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{\mu} \int_a^b F_i(x)[1 - F_j(x)] dx,$$

Zerlegung C⁹⁶:

$$(4.74) \quad R = \sum_i h_i R_i + \sum_{i < j} [h_i l_j (R_{ij}^r - R_i) + h_j l_i (R_{ji}^r - R_j)].$$

Im Spezialfall sich nichtüberschneidender Sektoren, bspw. bei einer klassierten Verteilung, ergibt sich für den Gini-Koeffizienten nach Zerlegung B eine Aufteilung in einen externen und einen internen Bestandteil:

$$(4.75) \quad R = \sum_i h_i l_i R_i + \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{2\mu} |\mu_i - \mu_j| \quad 97$$

$$(4.76) \quad = R_{\text{int}} + R_{\text{ext}}.$$

Der externe Gini-Koeffizient mißt dabei die Disparität zwischen den einzelnen Klassen; jede Klasse wird durch den Wert μ_i repräsentiert.

Zwei neuere Zerlegungsansätze sollen hier kurz vorgestellt werden:

YITZHAKI/LERMAN⁹⁸ führen eine Variante zu Zerlegung A ein, die R neben der gewogenen Summe der sektorenspezifischen Gini-Indizes und einem Ausdruck für die Zwischen-Sektoren-Ungleichheit in eine gewogene Summe von "Stratification"-Indizes teilt. Mit dem Stratification-Index soll das Ausmaß des Überlappens eines Sektors mit den anderen Sektoren "with respect to any hierarchical measure"⁹⁹ gemessen werden, und zwar durch einen Vergleich der Rangfolge innerhalb eines Sektors mit der über alle Beobachtungswerte. Die Rangordnung erfolgt dabei nach der Größe der Beobachtungswerte. Als Stratification-Index für den Sektor i definieren sie ein Kovarianzverhältnis:

$$(4.77) \quad Q_i = \frac{\text{Cov}_i [(F_i - F_{ni}), x_i]}{\text{Cov}_i (F_i, x_i)}. \quad 100$$

⁹⁵ Vgl. BORTKIEWICZ, L. von (1931), S. 87, BHATTACHARYA, N. / MAHALANOBIS, B. (1967), S.150 für Δ , PIESCH, W. (1975), S. 211f sowie MEHRAN, F. (1975), S. 147.

⁹⁶ Vgl. RAO, V. M. (1969), S. 419f und NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 321f. Die Bezeichnungen finden sich in Kap. 4.7.3.

⁹⁷ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 213.

⁹⁸ Vgl. YITZHAKI, S. / LERMAN, R. I. (1991).

⁹⁹ YITZHAKI, S. / LERMAN, R. I. (1991), S. 316.

¹⁰⁰ Vgl. YITZHAKI, S. / LERMAN, R. I. (1991), S. 317.

Dabei ist $F_{ni} = \frac{\text{Rang}(x_{ij})}{n-n_i}$ mit $\text{Rang}(x_{ij})$ der relativierte Rang, den Beobachtungswert x_{ij} von Sektor i erhalten würde, wenn er in einer Bevölkerung ohne die übrigen Mitglieder der Gruppe i geordnet würde. F_i ist dagegen der relative Rang in Gruppe i .

Q_i nimmt Werte zwischen -1 und 1 an:

Der Wert 1 wird erreicht, wenn ein Sektor einen bestimmten Bereich in der übergreifenden Rangordnungsskala aller besetzt. Q_i ist -1 , wenn sich Gruppe i aus zwei Untergruppen zusammensetzt, deren Mitglieder jeweils identisch sind und die in der Rangordnung der Gesamtverteilung an den beiden extremen Enden Platz nehmen.¹⁰¹ Der Wert Null wird dann angenommen, wenn $F_i - F_{ni}$ und x_i nicht korreliert sind, d.h. wenn z. B. $F_i = F_{ni}$ gilt.

Die Zerlegung der Gini-Koeffizienten führt dann zu

$$(4.78) \quad R = \sum_i l_i R_i + \frac{2 \text{Cov}(\mu_i, \bar{F}_i)}{\mu} - \sum_i l_i R_i Q_i (1-h_i),^{102}$$

wobei $\bar{F}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\text{Rang}(x_{ij})}{n_i}$ als durchschnittlicher Rang in Gruppe i definiert ist und dabei

jedes Gruppenmitglied mit seiner Rangziffer aus der Gesamtheit in den Durchschnitt eingeht. Der erste Summand ist ein Durchschnitt der Ungleichverteilung in den einzelnen Gruppen, der zweite spiegelt die Disparität zwischen den Sektoren wider. Der dritte Summand, dessen Vorzeichen abhängig ist von den Q_i , reflektiert dann nach YITZHAKI-/LERMAN den Umfang des Überlappens der Sektoren.¹⁰³

Ein weitere interessanter Ansatz stammt von LAMBERT/ARONSON¹⁰⁴, dessen Ausgangspunkt Zerlegung B ist. Der nichtnegative zweite Summand aus (4.73) wird in zwei weitere nichtnegative Teile zerlegt, wovon der eine eine Maßgröße für die Disparität

¹⁰¹ Vgl. YITZHAKI, S. / LERMAN, R. I. (1991), S. 318.

¹⁰² Vgl. YITZHAKI, S. / LERMAN, R. I. (1991), S. 322.

¹⁰³ Vgl. YITZHAKI, S. / LERMAN, R. I. (1991), S. 322.

¹⁰⁴ Vgl. LAMBERT, P. J. / ARONSON, J. R. (1993).

zwischen den Sektoren ist und der andere das Ausmaß des Überlappens der Sektoren widerspiegeln soll.

$$(4.79) \quad R = \sum_i h_i h_i R_i + \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{2\mu} |\mu_i - \mu_j| + Z_1$$

$$\text{mit } Z_1 = \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{2\mu} \left[\int_a^b 2F_i(x)[1 - F_j(x)] dx - |\mu_i - \mu_j| \right].$$

Z_1 ist genau dann Null, wenn sich die Sektoren nicht überlappen¹⁰⁵. In dem Fall reduziert sich (4.79) auf (4.75).

Eine anschauliche Darstellungsform für diese Zerlegung findet sich im Lorenzkurven-Schaubild, in dem zusätzlich zur Lorenzkurve der gesamten Verteilung $L(F)$ die Lorenzkurve einer Verteilung der Sektormittelwerte $L_B(F)$ abgebildet wird.

Daneben wird ein dritter Kurvenzug $C(F)$ eingeführt, der kumulierte relative Merkmalssummen abträgt nach Ordnung der Sektoren entsprechend ihrem Mittelwert und Ordnung innerhalb der Sektoren gemäß den individuellen Merkmalswerten.¹⁰⁶

Es gilt $L_B(F) \geq C(F) \geq L(F)$.

Die einzelnen Summanden in (4.79) sind dann proportional zu bestimmten Flächenstücken in dem Schaubild dieser drei Kurvenzüge:¹⁰⁷

$$(4.80) \quad \sum_i h_i h_i R_i = 2 \int_0^1 [L_B(F) - C(F)] dF,$$

$$(4.81) \quad \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{2\mu} |\mu_i - \mu_j| = 2 \int_0^1 [F - L_B(F)] dF,$$

$$(4.82) \quad Z_1 = 2 \int_0^1 [C(F) - L(F)] dF.$$

¹⁰⁵ Vgl. LAMBERT, P. J. / ARONSON, J. R. (1993), S. 1221.

¹⁰⁶ Vgl. LAMBERT, P. J. / ARONSON, J. R. (1993), S. 1222f

¹⁰⁷ Vgl. LAMBERT, P. J. / ARONSON, J. R. (1993), S. 1223.

4.7.1 Prüfung von Eigenschaften des Disparitätsmaßes R

Über Zerlegung B läßt sich darüber hinaus auch das Verhalten des Gini-Koeffizienten bei Nullenergänzung und bei der Proportionalitätsprobe prüfen:

Die Nullenergänzung kann als Aggregation zweier Sektoren interpretiert werden, Sektor A mit n Merkmalsträgern und Verteilung $F_A(x)$ in Bereich $[a, b]$ mit Mittelwert μ_A , Sektor 2 mit $(c-1)n > 0$ Merkmalsträgern, die alle den Wert $x = 0$ aufweisen, R_B sei in diesem Fall als Null definiert.

Es ist dann $h_A = \frac{1}{c}$, $l_A = 1$, $h_B = \frac{c-1}{c}$, $l_B = 0$ und $\mu = \frac{\mu_A}{c}$,

also

$$\begin{aligned}
 (4.83) \quad R &= \frac{1}{c} \cdot 1 R_A + 0 + \frac{\frac{1}{c} \cdot \frac{c-1}{c}}{\mu_A/c} \int_a^b F_A(1-1) dx + \frac{\frac{1}{c} \cdot \frac{c-1}{c}}{\mu_A/c} \int_a^b (1-F_A(x)) dx. \\
 &= \frac{R_A}{c} + \frac{\frac{c-1}{c}}{\mu_A} \cdot \mu_A \\
 &= \frac{1}{c} \cdot R_A + \frac{c-1}{c} \cdot 1 > R_A.
 \end{aligned}$$

Für die Proportionalitätsprobe, verstanden als Aggregation von k identischen Verteilungen $F_i(x)$ und damit $\mu_i = \mu$, gilt folglich:

$$\begin{aligned}
 (4.84) \quad R &= R_1 \left[\sum_i h_i h_i + \sum_{i \neq j} \sum_j h_i h_j \int_a^b \frac{F_i(1-F_i)}{\mu_i} dx \right] \\
 &= R_1 \left[\sum_i h_i h_i + \sum_{i \neq j} \sum_j h_i h_j \right] = R_1.
 \end{aligned}$$

4.7.2 Die Rekursionsform von R

Auf der Basis von Zerlegung B läßt sich auch eine Rekursionsform für den Gini-Koeffizienten entwickeln. Das Hinzukommen eines Merkmalsträgers kann als Aggregation von zwei Sektoren verstanden werden, wobei die Verteilung von Sektor A mit n

Merkmalsträgern $F_A(x)$ in $[a, b]$ erklärt ist und Sektor B aus einem Merkmalsträger mit Merkmalsausprägung $x \geq 0$ besteht.

Es ist dann nach Zerlegung B¹⁰⁸:

$$(4.85) \quad R_{(n+1)} = \frac{n\mu}{n\mu+x} \frac{n}{n+1} R_{(n)} + \frac{1}{n+1} \frac{n\mu}{n\mu+x} \left[1 - \frac{x}{\mu} + \frac{2n}{n\mu} \int_a^x F_A(x) dx \right].$$

Führt man den zweiten Summanden in die diskrete Schreibweise über, gilt:

$$(4.86) \quad R_{(n+1)} = \frac{n\mu}{n\mu+x} \frac{n}{n+1} R_{(n)} + \frac{n\mu - nx + 2kx - 2 \sum_{i=1}^k x_i}{(n\mu+x)(n+1)}, \quad x_i \leq x_{i+1}.$$

Dabei wird angenommen, daß der zusätzliche Merkmalsträger sich in eine der Größe nach geordneten Reihe zwischen den x_k 'ten und x_{k+1} 'ten Merkmalsträgern einfügt.

Der Ausdruck $\int_a^x F_A(x) dx = xF_A(x) - \mu L_A(x)$ entspricht dann $x \frac{k}{n} - \frac{i \sum_{i=1}^k x_i}{n}$.

Die diskrete Darstellung macht sichtbar, daß sich der zweite Ausdruck in (4.82) interpretieren läßt als $\frac{\delta_X}{(n\mu+x)^{109}}$ mit $\delta_X = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} |x_i - x|$ als durchschnittlicher Abweichung vom hinzugekommenen Wert x .

D.h. $R_{(n+1)}$ ergibt sich als gewogenes Mittel von $\frac{n\mu}{(n\mu+x)} R_{(n)}$ und $\frac{\delta_X(n+1)}{(n\mu+x)}$.

$$(4.87) \quad R_{(n+1)} = \frac{n}{n+1} \frac{n\mu}{(n\mu+x)} R_{(n)} + \frac{1}{n+1} \frac{\delta_X(n+1)}{(n\mu+x)} \\ = \frac{n}{n+1} \frac{n}{(n\mu+x)} \frac{\Delta(n)}{2} + \frac{1}{n+1} \frac{\delta_X(n+1)}{(n\mu+x)}.$$

¹⁰⁸ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 220.

¹⁰⁹ Vgl. Herleitung im Anhang.

Der Gini-Koeffizient bleibt dabei konstant, wenn gilt:

$$(4.88) \quad R = \frac{n}{(n+1)} \frac{n\mu}{(n\mu+x)} R + \frac{\delta_X}{n\mu+x}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\delta_X}{R} - \frac{n}{n+1}\mu.$$

Größer wird R z.B. dann, wenn gilt

$$(4.89) \quad \frac{\delta_X(n+1)}{n\mu+x} > \frac{n\mu R}{n\mu+x} \Leftrightarrow (n+1)\delta_X > 0,5n\Delta(n).$$

4.7.3 Die Verwendung von R im Rahmen der Ungleichheitsmessung zwischen zwei Verteilungen

Eine Interpretation von Zerlegung B findet sich in der Literatur im Zusammenhang mit der Entwicklung von ökonomischen Distanzmaßen "to reflect the degree of affluence or well-being of one population relative to another".¹¹⁰ Die Umsetzung eines solchen Konzepts in einen Forderungskatalog an Eigenschaften, die ein solches Maß aufweisen soll, erfolgt in der Literatur jedoch nicht einheitlich.¹¹¹ EBERT und SHORROCKS¹¹² fordern, daß Distanzmaße nichtnegativ, symmetrisch gebaut und transitiv sein sollen. Sie sollen den Wert Null dann annehmen, wenn beide Verteilungen übereinstimmen. DAGUM¹¹³ unterscheidet dagegen, ob man das Ausmaß an Verschiedenheit ("degree of dissimilarity") oder das Ausmaß des relativen Überflusses einer Verteilung gegenüber einer anderen ("relative affluence") zu messen sucht. Ersteres sei ein symmetrischer, letzterer ein asymmetrischer Ansatz.¹¹⁴

¹¹⁰ CHAKRAVARTY, S. R. (1990), S. 114. Vgl. auch SHORROCKS, A. F. (1982), S. 1337 und DAGUM, C. (1987), S. 6. In der Literatur findet sich keine einheitliche Abgrenzung des Begriffs "Distanzmessung".

¹¹¹ Vgl. SHORROCKS, A. F. (1982), S. 1337, EBERT, U. (1984), S. 268, CHAKRAVARTY, S. R. (1990), S. 117 und S. 121ff sowie SCHMID, F. (1994), S. 6ff.

¹¹² Vgl. SHORROCKS, A. F. (1982) und EBERT, U. (1984).

¹¹³ Vgl. DAGUM, C. (1987).

¹¹⁴ Vgl. DAGUM, C. (1987), S. 9.

Einige Ansätze¹¹⁵ greifen auf Zerlegungskomponenten von Δ bzw. R zurück. Der zweite Ausdruck in Zerlegung B läßt sich umschreiben in:

$$(4.90) \quad \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{2\mu} 2 \int_0^{\infty} F_i(1-F_j) dx = \sum_{i < j} \frac{h_i h_j}{\mu} \int_0^{\infty} [F_i(1-F_j) + F_j(1-F_i)] dx \\ = \sum_{i < j} \frac{h_i h_j}{\mu} \Delta_{ij},$$

wobei $\Delta_{ij} = E(|X_i - X_j|) = \int_0^1 \int_0^1 |y - x| f_j(y) dy f_i(x) dx$ eine Art mittlere Differenz

zwischen i und j darstellt.¹¹⁶

Als denkbare Maß für die Ungleichverteilung zwischen zwei Verteilungen kann dann der Gini-Koeffizient zwischen den Verteilungen i und j herangezogen werden. Er ist definiert als $R_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\mu_i + \mu_j}$, normiert auf das Intervall $[0,1]$ und symmetrisch, d.h. es gilt $R_{ij} = R_{ji}$.¹¹⁷ Im Fall identischer Verteilungen entspricht er dem Gini-Koeffizienten¹¹⁸, nimmt also nur den Wert Null an, wenn diese Verteilungen identische Einpunktverteilungen sind.

Δ_{ij} kann weiter aufgegliedert werden: Beim Vergleich zweier Verteilungen i und j mit $\mu_i > \mu_j$ wird

$$(4.91) \quad \mu_i R_{ji}^r = \int_0^{\infty} F_i(y)(1-F_j(y)) dy = \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_i(x) dx f_j(y) dy^{119}$$

von DAGUM¹²⁰ als Bruttoüberfluß¹²¹ bezeichnet.

¹¹⁵ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 412ff und DAGUM, C. (1980a), S. 1792ff.

¹¹⁶ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 316. Herleitung im Anhang.

¹¹⁷ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 316f.

¹¹⁸ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 316f.

¹¹⁹ Herleitung siehe Anhang.

¹²⁰ Vgl. DAGUM, C. (1980a, 1987).

¹²¹ Vgl. DAGUM, C. (1987), S. 6: "gross economic affluence".

$$(4.92) \quad \mu_j R_{ij}^r = \int_0^{\infty} F_j(y)(1-F_i(y))dy = \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x)f_j(x)dx f_i(y)dy = \mu_i R_{ji}^r - [\mu_i - \mu_j]^{12}$$

gibt dann die um die durchschnittliche Differenz der Merkmalswerte bereinigte ökonomische Distanz wieder. Beide Maßgrößen sind nicht dimensionslos. Sie nehmen nur dann den Wert Null an, wenn die Verteilungen i und j identische Einpunktverteilungen sind.¹²³

DAGUM¹²⁴ schlägt folgenden normierten Index als "relativiertes ökonomisches Überflußmaß" vor:

$$(4.93) \quad D = 1 - \frac{\mu_j R_{ij}^r}{\mu_i R_{ji}^r} = \frac{2(\mu_j - \mu_i)}{\Delta_{ij} + \mu_i - \mu_j}$$

D ist monoton fallend in Δ_{ij} . Sind die Mittelwerte der betrachteten Verteilungen identisch, so ist $D = 0$. Überlappen sich die Verteilungen nicht, dann ist $D = 1$.

4.7.4 Die Verwendung von R im Rahmen der Dominanzmessung

Die Dominanzmessung hat zur Zielsetzung einen Markt bezüglich oligopolistischer Strukturen zu untersuchen. Mit Hilfe von Dominanzmaßen sollen oligopolistische Kerne abgegrenzt werden. Neben geometrischen Dominanzmaßen und dem Konzept der Linda-Indizes betrachtet man solche Kenngrößen, die sich aus Konzentrationsmaßen ableiten

lassen.¹²⁵ Dazu gehört das Rosenbluth-Dominanzmaß, für dessen Herleitung Zerlegung B des Gini-Koeffizienten im Zwei-Klassen-Fall herangezogen wird.

¹²² Vgl. DAGUM, C. (1987), S. 6: "equal average economic affluence".

¹²³ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 318. Sie bezeichnen die mit μ_i bzw. μ_j relativen Größen R_{ij}^r und R_{ji}^r , da diese nicht symmetrisch sind, als "one-direction-Gini-across"-Maße.

¹²⁴ Vgl. DAGUM, C. (1987), S. 7.

¹²⁵ Vgl. PIESCH, W. (1983) und die ausführliche Monographie von MAURER, A. (1990).

Der Rosenbluth-Index RB^{126} läßt sich als gleichmäßig normiertes Konzentrationsmaß in Abhängigkeit von R darstellen; entsprechendes gilt auch für den externen Teil:

$$(4.94) \quad RB = \frac{1}{n(1-R)} = \frac{1}{n(1-R_{\text{ext}}+R_{\text{int}})} \quad \text{und} \quad RB_{\text{ext}} = \frac{1}{n(1-R_{\text{ext}})}$$

Zur Abgrenzung der Oligopolgruppe wird diejenige Zwei-Klassen-Verteilung gesucht, die bei gegebener Ausgangsverteilung den externen Rosenbluth-Index maximiert. Dies ist gleichbedeutend mit der Maximierung des externen Gini-Koeffizienten und führt zu der Stelle, an der die Lorenz- bzw. Konzentrationskurvenschneise am längsten ist. Der maximale externe Gini-Koeffizient entspricht in diesem Fall dem Schutz-Koeffizienten. Die Merkmalsträger werden folglich in solche aufgeteilt, die mehr bzw. weniger als den durchschnittlichen Marktanteil aufweisen.

Das Rosenbluth-Dominanzmaß D_k^R ergibt sich dann aus RB unter Vernachlässigung des internen Gini-Koeffizienten.

$$(4.95) \quad D_k^R = \frac{1}{n(1-S)}$$

und mit $S = CR_k - \frac{k}{n}$ (CR_k ist die Konzentrationsrate der k größten Merkmalsträger)

$$(4.96) \quad D_k^R = \frac{1}{n[1-(CR_k - \frac{k}{n})]}^{127}$$

¹²⁶ Vgl. ROSENBLUTH, B. (1961), S.393 und PIESCH, W. (1975), S. 141ff. Vgl. Kap. 4.3.

¹²⁷ Vgl. PIESCH, W. (1983), S. 506ff und MAURER, A. (1990), S. 64.

5. Ein alternativer Ansatz zur Lorenzkurve und zum Gini-Koeffizienten: Der Vorschlag von ZENGA zur Disparitätsmessung

Neben der Lorenzkurve als zentralem Instrument zur Darstellung der Ungleichverteilung einer Variablen ist in den letzten Jahren ein alternativer Vorschlag diskutiert worden: die von ZENGA¹ vorgeschlagene "concentration curve $Z(p)$ "², deren Funktionswerte als Punktkonzentrationsmaße (lokale Konzentration)³ interpretiert werden können.⁴

ZENGA baut seine Überlegungen auf der inversen Verteilungsfunktion $x(p)$ auf; daneben betrachtet er die Umkehrfunktion der ersten Momentverteilung ("inverse erste Momentverteilung"):

$$(5.1) \quad x^*(L) = L^{-1}(x) = \inf \{x: L(x) \geq L\} \text{ für } 0 < L < 1.$$

Deren erste Ableitung ist

$$(5.2) \quad \frac{dx^*(L)}{dL} = \frac{\mu}{x^*(L) f(x^*(L))} \geq 0.$$

Die Fläche unter $x^*(L)$ entspricht dem Mittelwert der ersten Momentverteilung. Sie läßt sich daher mit Varianz und Mittelwert von X in Verbindung bringen:

$$(5.3) \quad \mu_1 = \int_0^1 x^*(L) dL = \int_a^b x l(x) dx = \int_a^b \frac{x^2 f(x) dx}{\mu} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu} = \mu(1+V^2)$$

Es gilt wegen $F(x) \geq L(x)$ für $p = F = L$ $x(p) \leq x^*(p)$ mit $x(0) = x^*(0)$ und $x(1) = x^*(1)$.

¹ Vgl. ZENGA, M. (1984a).

² ZENGA, M. (1990), S. 99.

³ Vgl. Kap. 2.

⁴ Vgl. ZENGA, M. (1990), S. 94f.

Eine Lorenzkurve der ersten Momentverteilung läßt sich analog $L(F)$ ableiten:

$$(5.4) \quad L_2(L_1) = L^*(p) = \frac{\mu}{\mu^2 + \sigma^2} \int_0^p x^*(u) du.$$

Sie gibt den Anteil an der Gesamtvariabilität $\mu(1+V^2)$ an in Abhängigkeit vom Anteil p an der Merkmalssumme der kleinsten Merkmalsträger. Die gewöhnliche Lorenzkurve mißt die Ungleichverteilung der Ausgangsverteilung $f_X(x)$, diese die Ungleichverteilung von $L_X(x)$.

Drückt man L_2 in Abhängigkeit von der nullten Momentverteilung F aus, ergibt sich das Mitglied $L_2(F)$ der Klasse von Lorenzkurven höherer Momente⁵ $L_k(F)$.

Für $p = F(x) = L(x)$ werden nun die Werte der inversen Verteilungsfunktion und der inversen ersten Momentverteilung zueinander ins Verhältnis gesetzt. Im Vergleich zur Lorenzkurve werden also nicht bei gleichem x die Werte der nullten und der ersten Momentverteilung einander gegenüber gestellt, sondern für gleiches p die entsprechenden Quantile abgelesen, diese aber nicht selbst, sondern das Verhältnis dieser Quantile gegenüber p abgetragen.

Das von ZENGA vorgeschlagene Diagramm hat also die Koordinaten p und

$$Z(p) = 1 - \frac{x(p)}{x^*(p)}.^6$$

$Z(p)$ weist folgende **Eigenschaften** auf:

1. Die Funktion $Z(p)$ hat im Gegensatz zur Lorenzkurve kein eindeutiges Steigungs- und Krümmungsverhalten, was von ZENGA als Vorteil herausgestellt wird:⁷

$$(5.5) \quad \frac{dZ(p)}{dp} = \frac{\mu x(p) f(x(p)) - x^*(p)^2 f(x^*(p))}{(x^*(p))^3 f(x^*(p)) f(x(p))} \gtrless 0.^8$$

⁵ Vgl. Kap. 8.3.1.

⁶ Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 303 und auch NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 141ff.

⁷ Vgl. ZENGA, M. (1990), S. 108.

⁸ Vgl. DANCELLI, L. (1990), S. 112.

$Z(p)$ ist steigend, wenn

$$(5.6) \quad \mu x(p) f(x(p)) > x^*(p)^2 f(x^*(p))$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(p)}{p} f(x(p)) < \frac{dx^*(p)}{dp} \frac{p}{x^*(p)},$$

d.h. wenn die Punkt Elastizität der Funktion $x(p)$ kleiner ist als die der Funktion $x^*(p)$.

2. $Z(p)$ ist normiert auf das Intervall $[0,1]$, da $x^*(p) \geq x(p)$, $x^*(p) \geq 0$ und $x(p) \geq 0$ ist.

3. Strebt die Verteilung von X gegen die Einpunktverteilung, dann geht das Verhältnis $\frac{x(p)}{x^*(p)}$ gegen eins, damit $Z(p)$ gegen null.

Bei einer Ungleichverteilung ist $\frac{x(p)}{x^*(p)}$ gleich null für $p < 1$ und $\frac{x(p)}{x^*(p)}$ gleich eins für $p = 1$.⁹

4. Bei konstantem Verhältnis der Funktionswerte der inversen Verteilungsfunktionen zweier Variabler, d. h. bei $\frac{y(F)}{x(F)} = b \Leftrightarrow y(F) = bx(F)$ für alle F , gilt $Z_X(p) = Z_Y(p)$ für alle p .¹⁰

5. Bei nichtfallendem Verhältnis $\frac{y(F)}{x(F)}$ für $0 < F < 1$ folgt für stetige Variable $Z_X(p) \geq Z_Y(p)$ für $0 < p < 1$.¹¹

Diese Eigenschaften entsprechen den von ZENGA aufgestellten Forderungen 1 bis 5 an ein Punktkonzentrationsmaß.¹²

⁹ Vgl. ZENGA, M. (1990), S. 99.

¹⁰ Vgl. ZENGA, M. (1984b), S. 637f.

¹¹ Vgl. Herleitung in ZENGA, M. (1990), S. 106.

¹² Vgl. Kapitel 2 und 9.4.2 sowie ZENGA, M. (1990), S. 108.

Als summarisches Maß, welches die Disparität der gesamten Verteilung in einer **Kennziffer** abzubilden sucht, schlägt ZENGA

$$(5.7) \quad \xi = \int_0^1 \left[1 - \frac{x(p)}{x^*(p)} \right] dp$$

vor, d.h. die Fläche unter $Z(p)$.

Im Vergleich zu $V^2 = \frac{\int_0^1 (x^*(p) - x(p)) dp}{\int_0^1 x^*(p) dp}$ wird also bei ξ über den gesamten Aus-
druck $\frac{x^*(p) - x(p)}{x^*(p)}$ integriert.

ξ läßt sich für $p = F(x)$ umschreiben in

$$(5.8) \quad \xi = 1 - \int_0^{\infty} \frac{x}{L^{-1}(F(x))} f(x) dx \stackrel{!}{=} \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{x}{L^{-1}(F(x))} \right] f(x) dx,$$

d.h. ξ kann als gewogenes arithmetisches Mittel $E(g(x))$ mit

$$(5.9) \quad g(x) = \left[1 - \frac{x}{L^{-1}(F(x))} \right] \text{ interpretiert werden.}$$

Drückt man ξ in Abhängigkeit von $p = L(x)$ aus, ergibt sich

$$(5.10) \quad \xi = 1 - \int_0^{\infty} \frac{F^{-1}(L(x))}{x} l(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x - F^{-1}(L(x))}{x} l(x) dx \quad {}^{14}$$

$$(5.11) \quad \xi = 1 - \int_0^{\infty} \frac{F^{-1}(L(x))}{\mu} f(x) dx = 1 - \frac{E_X [F^{-1}(L(x))] }{\mu}$$

¹³ Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 305.

¹⁴ Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 306.

$$(5.12) \quad \xi = \int_0^{\infty} \left[\frac{\mu - F^{-1} L(x)}{\mu} \right] f(x) dx = E_X[h(x)]$$

$$\text{mit } h(x) = \frac{\mu - F^{-1} L(x)}{\mu},$$

d.h. jedes x geht mit der relativierten Merkmalbetragslücke $\frac{\mu - F^{-1} L(x)}{\mu}$ in den Mittelwert ein, wobei für $x > x^+$ mit $L(x^+) = F(\mu)$ diese Lücke negativ wird.

Der Index ξ weist folgende **Eigenschaften** auf:

1. Das Maß ist auf das Intervall $[0,1]$ normiert.

Im Fall einer Einpunktverteilung ist $\xi = 0$, da $x(p) = x^*(p)$; bei extremer Ungleichverteilung geht der Ausdruck $\int_0^1 \frac{x(p)}{x^*(p)} dp \rightarrow 0$, damit ξ gegen 1.

2. ξ erfüllt die Transferprobe, wenn Schurkonvexität¹⁵ vorliegt, d.h. wenn $(x_i - x_j) \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right] > 0$ für alle x_i, x_j erfüllt ist.¹⁶

Schreibt man ξ in diskreter Form als $\xi = 1 - \frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i}{x^*(x_i)}$ mit $\frac{\partial x^*(x_i)}{\partial x_i} \geq 0$,

ergibt sich folglich die Forderung

$$(5.13) \quad \frac{1}{n} (x_i - x_j) \left[\frac{\frac{x^*(x_i)}{x^*(x_i)^2} - \frac{\partial x^*(x_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{x^*(x_i)^2}}{\frac{x^*(x_j)}{x^*(x_j)^2} - \frac{\partial x^*(x_j)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{x^*(x_j)^2}} \right] \stackrel{!}{>} 0,$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \frac{(x_i - x_j)}{x^*(x_i)x^*(x_j)} \left[x^*(x_i) \left[1 - \frac{\partial x^*(x_j)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{x^*(x_j)} \right] - x^*(x_j) \left[1 - \frac{\partial x^*(x_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{x^*(x_i)} \right] \right] \stackrel{!}{>} 0$$

¹⁵ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 99.

¹⁶ Vgl. WAGENHALS, G. (1981), S. 103.

Diese eindeutige Größenordnung ist nicht gegeben. Damit sinkt die Disparität nicht zwingend, wenn ein großer Merkmalsträger einen Merkmalsbetrag zu einem kleinen transferiert. Nimmt jedoch der Wert der Elastizität $\frac{\partial x^*(x)}{\partial x} \cdot \frac{x}{x^*(x)}$ mit steigendem x zu, liegt Schurkonvexität vor.

3. ξ ist skalenniveau-unabhängig, da schon $\frac{x(p)}{x^*(p)}$ und damit $Z(p)$ bei Transformationen der Form $y = bx$ ($b > 0$) konstant bleiben.¹⁷

Bei einer Verschiebung der Ausgangsverteilung um $a > 0$ Einheiten ändern sich $F(x)$ und $L(x)$. Mit $y_0 = a + x_0$ gilt $F_X(x_0) = F_Y(y_0)$ und $L_X(x_0) < L_Y(y_0)$ ¹⁸. Daraus folgt $\frac{x(p)}{y(p)} < \frac{x^*(p)}{y^*(p)}$. Damit ist $Z_X(p) \geq Z_Y(p)$ und $\xi_X \geq \xi_Y$.

4. Proportionalitätsprobe:

Aggregiert man k identische Verteilungen, bleiben sowohl $F(x)$ als auch $L(x)$ konstant. Damit ändern sich weder $Z(p)$ noch ξ .

5. Bei einer Nullenergänzung liegt die neue inverse Verteilungsfunktion unter der alten, $x^*(p)$ bleibt aber konstant. Folglich verläuft die neue Kurve $Z(p)$ oberhalb der alten und demnach gilt $\xi_{\text{neu}} > \xi_{\text{alt}}$.

Empirische Anwendungen und Vergleiche von $L(p)$ und $Z(p)$ finden sich bei SALVATERRA¹⁹, der für einzelne Regionen Italiens Lorenz-Kurve und Zenga-Kurve als Ausdrücke für Ungleichheit gegenübergestellt.

¹⁷ Vgl. ZENGA, M. (1984b), S. 637f.

¹⁸ $F(x)$ verschiebt sich; $L_Y(y_0) \geq L_X(x_0) \Leftrightarrow M_{u_X}(x_0) \leq \mu_X$ ist stets erfüllt.

¹⁹ Vgl. SALVATERRA, T. (1990), S. 194ff.

ZENGA²⁰ selbst beurteilt das unterschiedliche Verhalten von Gini-Index und Zenga-Index ξ anhand verschiedener theoretischer Verteilungen:

A. Für die Rechteckverteilung gilt:

$$(5.14) \quad \xi = 3R^2 \text{ für } 0 \leq R \leq \frac{1}{3}, \text{ d.h. } \frac{d\xi}{dR} = 6R \geq 0.$$

B. Für die Paretoverteilung ergibt sich:

$$(5.15) \quad \xi = \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4R^2}} \text{ für } 0 \leq R \leq 1, \text{ d.h. } \frac{d\xi}{dR} = \frac{8R^{-3}}{\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4R^2}\right]^2} \geq 0.$$

C. Für die Relation zwischen ξ und R bei der Lognormalverteilung gilt:

$$(5.16) \quad \xi = 1 - e^{-2 \left[\Phi^{-1} \left(\frac{1+R}{2} \right) \right]^2}$$

$$\frac{d\xi}{dR} = -e^{-2 \left[\Phi^{-1} \left(\frac{1+R}{2} \right) \right]^2} \cdot \left[-4 \Phi^{-1} \left(\frac{1+R}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] \geq 0$$

mit $\Phi(\cdot)$ als Wert der Standardnormalverteilung.

Somit verändern sich bei diesen drei Verteilungstypen R und ξ gleichgerichtet.

²⁰ Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 306ff.

²¹ Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 321.

²² Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 321.

²³ Vgl. ZENGA, M. (1984a), S. 321.

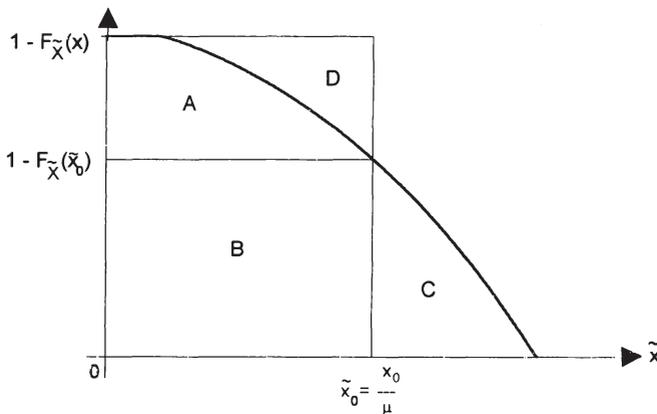
6. Aus der normierten inversen Verteilungsfunktion abgeleitete Kurvenzüge

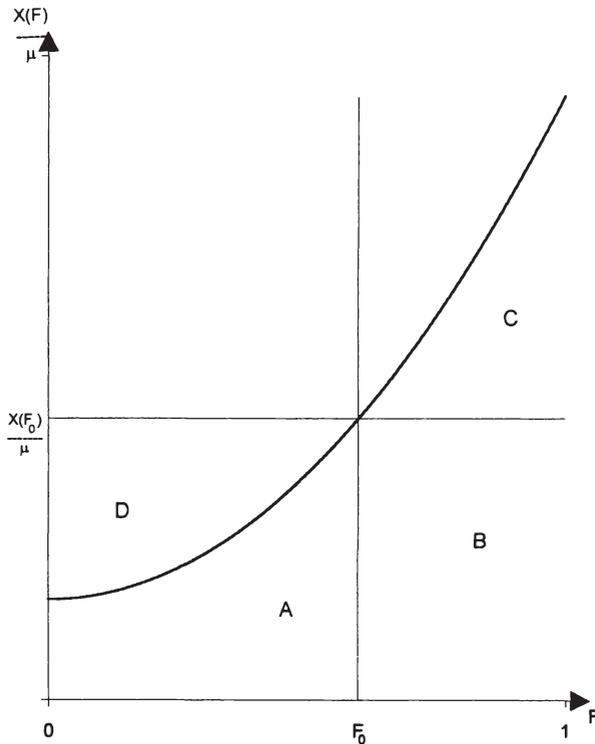
Nicht nur im Lorenzkurven-Diagramm, sondern auch im Schaubild der normierten inversen Verteilungsfunktion lassen sich Flächenstücke inhaltlich interpretieren. Ein Beispiel hierfür sind die Lorenzkurvenwerte selbst. Andere Flächenstücke können deshalb gegebenenfalls mit Lorenzkurvenwerten in Zusammenhang gebracht und mit deren Hilfe interpretiert werden.

Dieses Kapitel befaßt sich mit drei aus der normierten inversen Verteilungsfunktion herleitbaren Kurven. An die Beschreibung der formalen Eigenschaften dieser Kurvenzüge und deren Beziehung zur Lorenzkurve bzw. zu R in den Kapiteln 6.1 bis 6.3 schließt sich in Kapitel 6.4 die Vorstellung einiger Anwendungsbereiche an. Dabei wird überwiegend auf die stetige Darstellungsform zurückgegriffen.

Die im Schaubild der normierten inversen Verteilungsfunktion abgebildeten Flächenstücke finden sich ebenso in einem Diagramm mit der von oben kumulierten Verteilungsfunktion $1 - F_{\tilde{X}}(\frac{x}{\mu}) = 1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ wieder, so daß auch zu dieser Funktion Bezüge hergestellt werden können. Werte der Lorenzkurve entsprechen den Flächenstücken A für verschiedene Stellen F :

SCHAUBILDER 5 und 6: Äquivalente Flächen im Schaubild von $\frac{x(F)}{\mu}$ und $1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x})$





6.1 Die "Adaptierte Lorenzkurve"

Die sogenannte "Adaptierte Lorenzkurve"¹ findet vor allem vor dem Hintergrund der Zuverlässigkeitstheorie ihre Anwendung, deren Schwerpunkt in der Analyse von Lebensdauerverteilungen² liegt. Sie ergibt sich aus den Schaubildern 5 und 6, indem an jeder Stelle F das Flächenstück $A+B$ als Wert von $W(F)$ abgetragen wird:

$$(6.1) \quad W(F) = L(F) + \frac{x(F)}{\mu}(1-F) \geq L(F).$$

Jeder Funktionswert $W(F)$ gibt dabei den Anteil an der Merkmalssumme an, den die 100 F % kleinsten Merkmalsträger auf sich vereinigen zuzüglich des Anteils an der Merkmalssumme, den die 100 $(1-F)$ % größten Merkmalsträger zur Merkmalssumme

¹ Vgl. RIESE, M. (1987), S. 247f und MOOTHATHU, T. S. (1991), S. 317.

² Vgl. dazu Kap. 9.6.

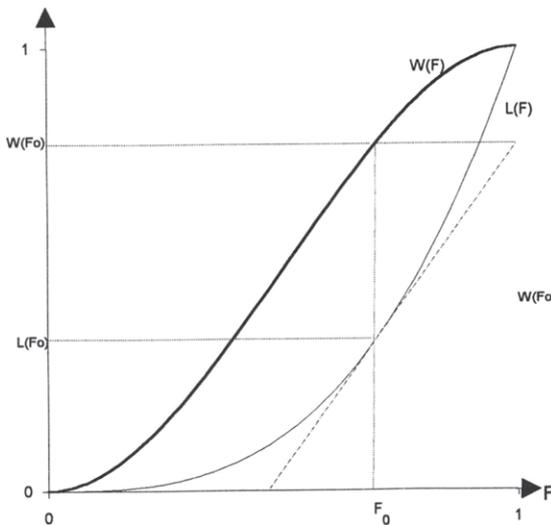
bis zur Stelle $x(F)$ beitragen. Somit gehen die $100F$ % kleinsten Merkmalsträger mit ihrer Merkmalsausprägung, die $100(1-F)$ % größten Merkmalsträger nur mit dem zensierten Wert $x(F)$ in die Verteilung ein.³

Man sieht leicht, daß $W(F)$ als gewogenes Mittel des relativierten unteren Mittelwerts (Sekantenanstieg der Lorenzkurve in F) und $\frac{x(F)}{\mu}$ (Tangentenanstieg der Lorenzkurve in F) dargestellt werden kann.

$$(6.2) \quad W(F) = F \frac{M_u(F)}{\mu} + (1-F) \frac{x(F)}{\mu}.$$

$W(F)$ läßt sich daher auch direkt aus dem Lorenzkurvenschaubild ableiten:

SCHAUBILD 7: Ableitung von $W(F)$ aus dem Lorenzkurvenschaubild



³ Vgl. RIESE, M. (1987), S. 249.

$W(F)$ ist eine nichtfallende Funktion im Bereich $0 \leq W(F) \leq 1$, die ihr Maximum an der Stelle $F = 1$ erreicht. Es gilt:

$$(6.3) \quad W(0) = \frac{x(0)}{\mu}; \quad W(1) = 1; \quad \frac{dW(F)}{dF} = \frac{(1-F) \cdot dx(F)}{\mu \cdot dF} \geq 0.$$

Im Fall einer Einpunktverteilung ist $W(F)=1$ für $0 \leq F \leq 1$, bei einer extremen Ungleichverteilung gilt für $0 \leq F < 1$ $W(F) = 0$ und $W(1) = 1$. Eine proportionale Änderung aller Merkmalswerte und eine Vervielfachung der Population lassen $\frac{x(F)}{\mu_X}$ und $L_X(F)$ konstant, damit auch $W(F)$. Eine eindeutige Größenbeziehung bei der Durchführung eines Transfers, bei der Addition eines bestimmten Betrages zu jedem Merkmalswert oder bei Durchführung einer Nullenergänzung läßt sich nicht herleiten, da die normierten inversen Verteilungsfunktionen sich ändern und sich folglich schneiden. Damit werden wesentliche Forderungen an ein Disparitätsmaß von dem Instrument $W(F)$ nicht erfüllt.

Im Zusammenhang mit Lebensdauerverteilungen hat die Exponentialverteilung die Funktion einer Referenzverteilung. In diesem Fall gilt für $x(F) = -\ln(1-F)$ und für $L(F)=F+(1-F)\ln(1-F)$, so daß sich $W(F)=F$ ergibt.

Die Steigung kann auch formuliert werden als

$$(6.4) \quad \frac{dW(F)}{dF} = \frac{1}{\mu \cdot r(F)} \quad \text{mit } r(F) = \frac{dx(F)}{(1-F)dF} \text{ als Hazardrate}^4.$$

Die Differenz $v(F) = M_0(F) - x(F)$ führt auf ein Vielfaches des Sekantenanstieges der Funktion $W(F)$ aus (1,1): $v(F) = \mu \cdot \frac{1-W(F)}{1-F}$.⁵

An der Stelle F_μ entspricht $1 - W(F_\mu)$ dem Schutzkoeffizienten:

$$(6.5) \quad W(F_\mu) = L(F_\mu) + (1-F_\mu) = 1 - S.$$

⁴ Vgl. CHANDRA, M. / SINGPURWALLA, N. D. (1981), S. 115.

⁵ Vgl. KLEFSJÖ, B. (1983), S. 911.

Allgemein besteht folgender Zusammenhang zur durchschnittlichen absoluten Abweichung von $x(F)$

$$(6.6) \quad \delta_{x(F)} = \int_0^1 |x(q) - x(F)| dq \\ = (2F-1)x(F) + \mu(1-2L(F)) \\ = \mu[1 - L(F) - \frac{x(F)}{\mu}(1-F)] + \mu[\frac{x(F)}{\mu}F - L(F)]^6$$

$$(6.7) \quad W(F) = \frac{1}{2\mu} [\mu + x(F) - \delta_{x(F)}].$$

Die Fläche über dieser "Adaptierten Lorenzkurve" entspricht dem Gini-Koeffizienten:

$$(6.8) \quad \int_0^1 (1-W(F))dF = \int_0^1 (1-L(F) - \frac{x(F)}{\mu}(1-F))dF \\ = \frac{1+R}{2} - \frac{1-R}{2} = R^7.$$

Ist $W(0)=0$, kann $W(F)$ als Verteilungsfunktion einer Verteilung mit Merkmalsausprägung F und Dichte $\frac{dW(F)}{dF}$ interpretiert werden. R wäre dann der Mittelwert dieser Verteilung.

Die "Adaptierte Lorenzkurve" in Abhängigkeit von x ist eine steigende, konkave Funktion:

$$(6.9) \quad W(x) = L(x) + \frac{x}{\mu}(1 - F(x)) \quad \text{mit } W(a) = 0 \text{ und } W(b) = 1, \\ = \int_0^x \frac{1 - F(y)}{\mu} dy \\ \frac{dW(x)}{dx} = \frac{1-F}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{dW^2(x)}{dx^2} = -\frac{f(x)}{\mu}.$$

⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 58.

⁷ Vgl. CHANDRA, M. / SINGPURWALLA, N. D. (1981), S. 115.

In diesem Zusammenhang kann R als gewogenes Mittel der über $(1 - W(x))$ transformierten Variablen interpretiert werden:

$$(6.10) \quad R = \int_a^b (1 - W(x))f(x)dx .$$

Aus der Definition einer Ordnungsrelation der Form

Definition 6.1: Die Variable X dominiert die Variable Y gemäß $W(F) (X \leq Y)$, wenn

$$W_X(F) \leq W_Y(F) \text{ für alle } 0 \leq F \leq 1,^8$$

kann sofort gefolgert werden $L_X(F) \leq L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ und damit $R_X \geq R_Y$:

Überlegung: Die Größenbeziehung $W_X(F) \leq W_Y(F)$ bedeutet, daß die entsprechenden Flächenstücke $A+B$ bei X in jedem Punkt F kleiner sind als die der Verteilung von Y . Dies gilt auch in den Schnittpunkten der normierten inversen Verteilungsfunktionen. Dort gilt aber $\frac{x(F)}{\mu_X}(1 - F) = \frac{y(F)}{\mu_Y}(1 - F)$, d.h. aus $W_X(F) \leq W_Y(F)$ folgt für diese Stellen $L_X(F) \leq L_Y(F)$. Wenn aber bei den Schnittpunkten der normierten inversen Verteilungsfunktion eine derartige Größenbeziehung zwischen den Lorenzkurvenwerten vorliegt, dann muß diese auch für den gesamten Bereich von F gelten, da die Fläche unter den normierten inversen Verteilungsfunktionen gleich ist.

6.2 Die Gegenkurve zur "Adaptierten Lorenzkurve"

Betrachtet man nicht $W(F)$ sondern $1 - W(F)$, – in den Schaubildern 5 bzw. 6 entspricht dies den Flächenstücken C –, gelangt man zu einer Kurve, die von KAKWANI 1984 als "deprivation curve" vorgestellt wird:⁹

$$(6.11) \quad D(F) = 1 - L(F) - \frac{x(F)}{\mu}(1 - F) \leq 1 - L(F) .$$

⁸ Diese Ordnungsrelation spielt im Zusammenhang mit Lebensdauerverteilungen eine wichtige Rolle.

⁹ Vgl. KAKWANI, N. C. (1984), S. 385ff. Vgl. dazu auch Kap. 6.4.

$D(F)$ gibt den Anteil an der Merkmalssumme an, den die $(1-F)100\%$ großen Merkmalsträger gegenüber dem Grenzwert $x(F)$ überschüssig haben:

$$(6.12) \quad D(F) = \int_F^1 \frac{x(q) - x(F)}{\mu} dq.$$

$D(F)$ ist eine monoton fallende Funktion:

$$(6.13) \quad D(0) = 1 - \frac{x(0)}{\mu} \leq 1; \quad D(1) = 0; \quad \frac{dD(F)}{dF} = -\frac{1}{\mu h(F)} \leq 0.$$

Da $D(F) = 1 - W(F)$, erfüllt auch $D(F)$ die gestellten Forderungen an ein Disparitätsmaß nur sehr unvollständig.¹⁰

Für ein in $[0, b]$ rechteckverteiltes Merkmal ist $D(F) = 1 - F^2$. Ist das Merkmal exponentialverteilt, gilt $D(F) = 1 - F$.

$D(F)$ läßt sich wiederum mit Sekanten- und Tangentenanstiegen der Lorenzkurve in Verbindung bringen:

$$(6.14) \quad D(F) = (1 - F) \left[\frac{1 - L(F)}{1 - F} - \frac{x(F)}{\mu} \right] = (1 - F) \left[\frac{M_0(F)}{\mu} - \frac{x(F)}{\mu} \right].$$

An der Stelle F_μ entspricht der Wert der Funktion dem Schutz-Koeffizienten:

$$(6.15) \quad D(F_\mu) = 1 - L(F_\mu) - (1 - F_\mu) = F_\mu - L(F_\mu) = S.$$

Allgemein gilt folgender Zusammenhang zu $\delta_{x(F)}$:

$$(6.16) \quad D(F) = \frac{\delta_{x(F)}}{2\mu} + \frac{\mu - x(F)}{2\mu} \text{!1.}$$

Die Fläche unter $D(F)$ entspricht dem Gini-Koeffizienten:

$$(6.17) \quad \int_0^1 D(F) dF = \int_0^1 \left[1 - L(F) - \frac{x(F)}{\mu} (1 - F) \right] dF = \frac{1+R}{2} - \frac{1-R}{2} = R.$$

Analog $M_u(F)$ bei der normierten inversen Verteilungsfunktion, kann man die Fläche unter $D(F)$ bis zur Stelle F auf den Anteil der Merkmalsträger F beziehen. Es ergibt

¹⁰ Vgl. Kap. 2 und Kap. 6.1.

¹¹ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 58.

sich ein Koeffizient, den KAKWANI als verallgemeinerten Gini-Koeffizienten $\kappa(F)$ vorschlägt.¹² Er läßt sich in Beziehung zum Gini-Koeffizienten der an der Stelle F von

oben abgeschnittenen Verteilung $R(F_{\eta}) = 1 - \frac{2}{L(F_{\eta})F_{\eta}} \int_0^{F_{\eta}} L(q) dq$ bringen :

$$(6.18) \quad \kappa(F) = \frac{1}{F_{\eta}} \int_0^{F_{\eta}} D(F) dF$$

$$= \frac{F_{\eta} - L(F_{\eta})}{F_{\eta}} + L(F_{\eta}) \cdot R(F_{\eta}).^{13}$$

Auch hier lassen sich wieder die Kriterien an ein Disparitätsmaß ansetzen:

$\kappa(F)$ ist nichtsteigend in F , da $D(F)$ nichtsteigend in F ist. Für $F = 1$ ist $\kappa(1) = R$. Bei einer Einpunktverteilung ist $\kappa(F) = 0$, im Fall der extremen Ungleichverteilung ist $\kappa(F) = 1$. Bei Durchführung der Proportionalitätsprobe bzw. bei proportionalen Änderungen bleibt die normierte inverse Verteilungsfunktion konstant, damit auch $D(F)$ und $\kappa(F)$. Eine Verschiebung der Verteilung nach rechts führt zu einer Abnahme von $\kappa(F)$.¹⁴

In Abhängigkeit von x läßt sich $D(x)$ auch schreiben als

$$(6.19) \quad D(x) = 1 - L(x) - \frac{x}{\mu}(1 - F(x)) = \int_x^b \frac{1 - F(y)}{\mu} dy = \int_x^b \frac{(y - x)}{\mu} f(y) dy.$$

Insbesondere die letzten Darstellungsformen lassen sich vor dem Hintergrund des Relative-Deprivation-Ansatzes erklären, was eine Formulierung für den diskreten Fall noch deutlicher zum Ausdruck bringt:

$$(6.20) \quad D(x_i) = \frac{\sum_{j=i}^n x_j - x_i}{n\mu}.$$

¹² Vgl. KAKWANI, N..C. (1984), S. 387.

¹³ Vgl. KAKWANI, N. C. (1984), S. 387, für die Herleitung siehe Anhang.

¹⁴ Vgl. KAKWANI, N..C. (1984), S. 387f, Aussagen zum Transferaxiom.

$D(x_i)$ kann als "Überschußmerkmalssumme" an der Stelle x_i interpretiert werden, ausgedrückt als Anteil an der Gesamtmerkmalssumme. Würde jeder Merkmalsträger zunächst höchstens einen Merkmalsbetrag von maximal x_i zugewiesen bekommen, stünde ein Anteil von $D(x_i)$ zur Disposition. R ist demnach der durchschnittliche "Überschuß-

$$\text{merkmalssummenanteil": } R = \int_a^b D(x)f(x)dx.$$

Eine einfache Dominanz für $D(F)$ läßt sich wie folgt definieren:

Definition 6.2: Die Variable X mit $F_X(x)$ dominiert die Variable Y mit $F_Y(x)$ gemäß $D(F)$ ($X \underset{D}{\geq} Y$), wenn $D_X(F) \leq D_Y(F)$ für alle $0 \leq F \leq 1$.

Diese Relation ist äquivalent $W_X(F) \geq W_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$, damit folgt wieder $L_X(F) \geq L_Y(F)$ und $R_X \leq R_Y$.

6.3 Die "Lückenkurve"

Ein dritter Kurvenzug läßt sich erzeugen, wenn man Flächenstück D in Abbildung 5 bzw. 6 in Abhängigkeit von F in einem Koordinatensystem abträgt:

$$(6.21) \quad A(F) = \frac{x(F)}{\mu}F - L(F).$$

Jeder Funktionswert gibt den Teil an der Merkmalssumme wieder, der den $100F\%$ kleinsten Merkmalsträgern zur Verfügung gestellt werden müßte, damit diese auf das Niveau des größten Merkmalsträgers dieser Gruppe kämen:

$$(6.22) \quad A(F) = \int_0^F \left(\frac{x(F)}{\mu} - \frac{x(q)}{\mu} \right) dq = F \int_0^F \left(\frac{x(F)}{\mu F} - \frac{x(q)}{\mu} \right) dq.$$

Dies entspricht z.B. im Rahmen der Armutsmessung dem Ausmaß des "Normalized Deficit" in Abhängigkeit von einer wandernden Armutslinie $z = x(F)$.¹⁵

Zu den vorhergenannten Kurvenzügen besteht folgende Beziehung:

$$(6.23) \quad A(F) = \frac{x(F)}{\mu} - W(F) = \frac{x(F) - \mu}{\mu} + D(F).$$

Jede Lorenzkurvensehne kann verstanden werden als gewogenes Mittel der Funktionswerte von $A(F)$ und $D(F)$:

$$(6.24) \quad F - L(F) = F D(F) + (1 - F) A(F).^{16}$$

$A(F)$ selbst ist eine nichtfallende Funktion mit Maximalwert $\frac{x(1) - \mu}{\mu}$ an der Stelle $F = 1$.

$$(6.25) \quad A(0) = 0; A(1) = \frac{x(1)}{\mu} - 1; \frac{dA(F)}{dF} = \frac{dx(F)F}{dF \mu} \geq 0.$$

Im Fall einer Einpunktverteilung ist $A(F) = 0$ für $0 \leq F \leq 1$. Bei extremer Ungleichverteilung gilt für $0 \leq F < 1$ $A(F) = 0$ und $A(1) = x(1) - 1$. Bei einer proportionalen Änderung aller Merkmalswerte oder bei Durchführung der Proportionalitätsprobe bleibt $\frac{x(F)}{\mu_X}$ und damit $A(F)$ konstant. Bei Durchführung eines

Transfers, der Addition eines absoluten Betrages zu jedem Merkmalswert oder bei Nullenergänzung ändert sich die normierte inverse Verteilungsfunktion. Deshalb läßt sich keine eindeutige Größenbeziehung zwischen der alten und der neuen Lückenkurve aufstellen.

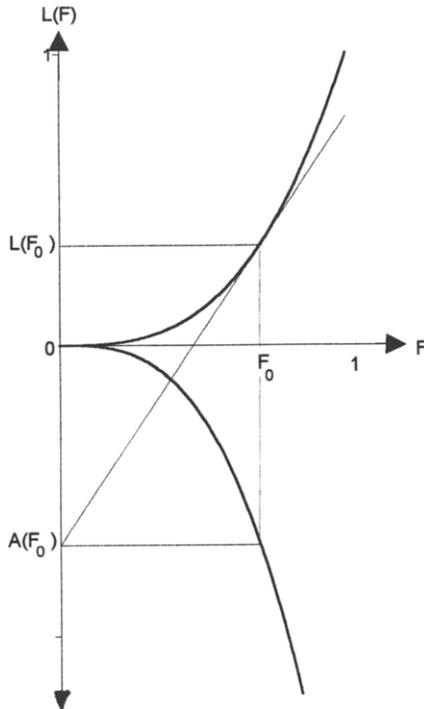
$A(F)$ kann wiederum aus dem Lorenzkurvenschabild abgeleitet werden, wie SCHAUBILD 8 zeigt.

Analog $D(F)$ läßt sich der Sekantenanstieg aus $(0,0)$ als relativierte Differenz zwischen $x(F)$ und $M_u(F)$ interpretieren:

$$(6.26) \quad \frac{A(F)}{F} = \frac{x(F) - M_u(F)}{\mu}.$$

¹⁵ Vgl. ATKINSON, A. B. (1987) zur Definition. Vgl. Kap. 4.5 zur Armutsmessung.

¹⁶ Vgl. PIESCH, W. / WIRTH, S. (1995).

SCHAUBILD 8: Ableitung von $A(F)$ aus dem Lorenzkurvenschaubild

Wegen (6.23) und $\delta_{x(F)} = \mu \cdot [A(F) + D(F)]$ ¹⁷ läßt sich $A(F)$ auch schreiben als

$$(6.27) \quad A(F) = \frac{\delta_{x(F)}}{2\mu} + \frac{x(F) - \mu}{2\mu},$$

d.h. die relativierte durchschnittliche Abweichung wird um den halben relativierten Abstand von $x(F)$ zu μ korrigiert. Man sieht sofort, daß an der Stelle $x = \mu$ $A(F) = S$ gilt.

¹⁷ Vgl. Form (6.6).

Die Fläche unter $A(F)$ entspricht wieder dem Gini-Koeffizienten:

$$(6.28) \quad \int_0^1 A(F) dF = \int_0^1 \frac{x(F)}{\mu} F dF - \int_0^1 L(F) dF = \frac{1}{2} \frac{R}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{R}{\mu} = R.$$

In Analogie zu $\kappa(F)$ kann der durchschnittliche Lückenwert der 100F% kleinsten Merkmalsträger ermittelt werden:

$$(6.29) \quad \frac{1}{F} \int_{\eta_0}^{F \eta} A(F) dF = L(F \eta) R(F \eta).$$

Er reduziert sich auf den mit $L(F \eta)$ gewogenen Gini-Koeffizienten der 100F η %-kleinsten Merkmalsträger.

Drückt man die Lückenkurve in Abhängigkeit von x aus, ergibt sich:

$$(6.30) \quad A(x) = \frac{x}{\mu} \cdot F(x) - L(x) \\ = \int_0^x \frac{F(y)}{\mu} dy = \int_0^x \left[\frac{x-y}{\mu} \right] f(y) dy.$$

$A(x)$ ist eine monoton steigende konvexe Kurve

$$(6.31) \quad \frac{d A(x)}{dx} = \frac{F(x)}{\mu} \geq 0, \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{f(x)}{\mu} \geq 0.$$

Vor diesem Hintergrund läßt sich R auch schreiben als:

$$(6.32) \quad R = \int_a^b A(x) f(x) dx.$$

R läßt sich also im obigen Sinne als durchschnittliches "Normalized deficit" interpretieren, wenn $A(x)$ als "Normalized Deficit" in Abhängigkeit von der wandernden Armutslinie $z = x$ interpretiert wird.

Auch für $A(F)$ läßt sich eine Dominanzordnung definieren:

Definition 6.3: Eine Variable X mit $F_X(x)$ dominiert eine Variable Y mit $F_Y(x)$ gemäß $A(F)$ ($X \underset{A}{\geq} Y$), wenn $A_X(F) \geq A_Y(F)$ für alle $0 \leq F \leq 1$.

Daraus folgt (analog der Beweisführung für $W(F)$) $L_X(F) \leq L_Y(F)$ für alle $0 \leq F \leq 1$ und $R_X \geq R_Y$.

6.4 Interpretationsmöglichkeiten dieser Kurven vor verschiedenen Anwendungshintergründen

Diese drei Kurvenzüge finden ihre Anwendung in sehr unterschiedlichen Bereichen. Als Einstiegsbeispiel soll dabei der Zusammenhang zwischen der Interpretation des Gini—Koeffizienten als Erwartungswert eines Spiels nach PYATT¹⁸ und den oben eingeführten Kurvenzügen aufgearbeitet werden:

PYATT betrachtet in seinem diskreten Ansatz einen Spieler i mit Einkommen x_i , der aus einer Urne mit den Einkommen aller Individuen das Einkommen eines anderen Individuums x_j zufällig zieht. Ist dieses größer als seines, erhält er die Differenz $x_j - x_i$ ausgezahlt, andernfalls bekommt er nichts. Die Auszahlungsvorschrift läßt sich also abbilden durch $\text{Max}(0, x_j - x_i)$. Bestimmt man nun den Erwartungswert dieses Spiels bezogen auf den Spieler i , gelangt man letztlich zu $\mu D(x_i)$:

$$(6.33) \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Max}(0, x_j - x_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n (x_j - x_i) = \mu D(x_i), \quad x_j \leq x_{j+1}.$$

Der Durchschnitt dieser Erwartungswerte entspricht dann μR .

Variiert man den Auszahlungsmodus entsprechend, so erhält man die anderen Kurvenzüge in Abhängigkeit von x und zwar in nicht relativierter Form. Bestimmt man anschließend den durchschnittlichen Erwartungswert aller Spieler, so führt das auf Ausdrücke, die mit R zusammenhängen.

¹⁸ Vgl. PYATT, G. (1976).

Auszahlungsvorschrift	Erwartungswert von Spieler i	durchschnittl. Erwartungswert
$\text{Max}(0, x_i - x_j)$	$\mu A(x_i)$	μR
$\mu - \text{Max}(0, x_j - x_i)$ $= \text{Min}(\mu, \mu - x_j + x_i)$	$\mu W(x_i)$	$\mu(1-R)$
$\left\{ \begin{array}{ll} x_j & \text{für } x_i \geq x_j \\ 0 & \text{für } x_i < x_j \end{array} \right.$	$\mu L(x_i)$	$\mu\left(\frac{1-R}{2}\right)$

Weitere Anwendungsmöglichkeiten im Rahmen

– der Zuverlässigkeitstheorie (Analyse von Lebensdauerverteilungen)

und eng verwandt

– von Lebensstafelbetrachtungen, wo die Variable X "Lebensalter" betrachtet wird,

– dem soziologischen Ansatz der Messung der relativen Deprivation, die über in

Einkommenseinheiten gemessenen entgangenen Nutzen operationalisiert wird, sowie

– eines Ansatzes aus der Wohlfahrtstheorie

werden im folgenden kurz vorgestellt. Dabei werden einführend die Zielsetzungen dieser Methoden erläutert, um anschließend in einer Übersicht das bereits bekannte Instrumentarium vor dem Hintergrund der speziellen Anwendung neu zu benennen.

Im Rahmen der **Zuverlässigkeitstheorie** werden Lebensdauerverteilungen¹⁹ analysiert. Ausgangspunkt ist eine nicht-negative Variable X "Verweilzeit/Lebensdauer" mit Verteilungsfunktion $F(x)$, die in diesem Zusammenhang "Ausfall- oder Lebensdauerverteilung" genannt wird. $1-F(x)$ heißt Zuverlässigkeits- oder Überlebensfunktion von X. Wichtige Kenngrößen einer Verteilung sind die sogenannte Hazardrate $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ und die mittlere restliche Lebensdauer $v(x) = E(X-x|X > x) = M_0(x) - x$. Eine wesentliche Charakterisierung von Verteilungen erfolgt über die Einführung von

¹⁹ Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F (1975).

(Schiefe)ordnungen. Dabei werden zwei grundsätzliche Ansätze unterschieden: Der Vergleich einer gegebenen Verteilung x

- mit einer beliebigen anderen Verteilung bzw.
- mit der Exponentialverteilung, die in diesem Zusammenhang die Funktion einer Referenzverteilung einnimmt.

Eine besondere Rolle für diese Analyse spielt die "normierte Total-time-on-test"-Funktion²⁰, die mit $W(F)$ übereinstimmt. Über Eigenschaften dieser Funktion lassen sich eine Reihe von Ordnungsrelationen bzw. Klassifizierungen von Verteilungen erläutern. Beispielsweise entspricht die Dominanzrelation $W_X(F) \geq W_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ der Aussage Variable X ist mehr "New better than used in expectation" als Y . Ausführliche Überlegungen zu den für Lebensdaueranalysen gebräuchlichen Dominanzrelationen und deren Bezügen zur Lorenzkurve werden in Kapitel 9.6 angestellt.

Da $W(x) = \int_0^x \frac{(1-F(y))}{\mu} dy$ als der bis zum Zeitpunkt x verbrauchte Anteil an der

Gesamtverweilzeit interpretiert werden kann, kann 1-R als gewogener Durchschnitt dieser Anteile gedeutet werden:

$$(6.34) \quad 1-R = \int_0^b \int_0^x \frac{(1-F(y))}{\mu} dy f(x) dx.$$

Die im Rahmen von bevölkerungsstatistischen Untersuchungen betrachteten **Sterbetafeln** werden z.B. zur Ermittlung der Lebenserwartung (bei der Geburt oder für ein bestimmtes Alter) oder auch zur Analyse von Todesursachen herangezogen. Sie sind in der Regel nach Geschlecht und Altersjahrgang gegliedert, die daraus abgeleiteten Aussagen beziehen sich also auf die Zeiteinheit "Jahre". Einige Autoren haben versucht, das für das Gebiet der Ungleichheitsmessung entwickelte Instrumentarium auf Sterblichkeitsüberlegungen zu übertragen:

- 1-R wird von HANADA (1983) als Maß für die "Equality of length of life" vorgeschlagen.

²⁰ Vgl. z.B. KLEFSJÖ, B. (1983), S. 907.

– SILBER (1983) schlägt in Analogie zu den Einkommensgleichheitsäquivalenzen²¹ vor "äquivalente Lebenslängen" als Indikatoren zur Messung des Entwicklungsstandes eines Landes zu entwickeln.

Da $\int_0^x \frac{F(x)}{\mu} dx = \int_0^x \frac{(x-y)}{\mu} f(y) dy$ als relativierter Verlust an Lebenszeit bis zum Alter

x interpretiert werden kann, ist R nichts anderes als ein gewogenes Mittel dieses relativierten Verlustes.

Mit der **Messung der relativen Deprivation** wird versucht, den Schaden (entgangenen Nutzen) von Individuen zu quantifizieren, den sie erleiden, weil ihr Einkommen (oder eine andere ökonomische Variable) niedriger ist als das anderer Individuen. Dieser Kerngedanke geht auf RUNCIMAN²² zurück, der davon ausgeht, daß das Ausmaß an Deprivation eines Individuums, ein Einkommen in Höhe von x nicht zu erreichen, umso größer ist, je höher der Anteil der Leute ist, die dieses Einkommensniveau erreichen bzw. überschreiten. Dieser Gedanke wird von YITZHAKI in folgende Definition des Ausmaßes an Deprivation eines Individuums i mit Einkommen x umgesetzt:

$$(6.35) \quad D_i(x) = \int_x^b (1-F(y)) dy.^{23}$$

Eine alternative Interpretation dieses Erklärungsansatzes greifen HEY/LAMBERT²⁴ auf, da gilt:

$$(6.36) \quad D_i(x) = \int_x^b (y-x) f(y) dy = \int_0^b d(x,y) f(y) dy.^{25}$$

²¹ Vgl. Kap. 4.2.1.1.

²² Vgl. RUNCIMAN, G. W. (1966).

²³ Vgl. YITZHAKI, S. (1979), S. 322 und (1980,1982a).

²⁴ Vgl. HEY, J. D. / LAMBERT, P. J. (1980), S. 567f.

²⁵ Vgl. KAKWANI, N. (1984), S. 385.

Hier kann $D_i(x)$ als durchschnittliche Deprivation eines Individuums i mit Einkommen x verstanden werden, wobei $d(x,y)$ das Ausmaß an Deprivation angibt, welches i erleidet, wenn es sich mit einem Individuum mit Einkommen y vergleicht. Je nach Spezifizierung von $d(x,y)$ gelangt man zu verschiedenen in der Literatur vorgeschlagenen Ansätzen.

Als einfache mögliche Quantifizierung ergibt sich oben dann $d(x,y) = \begin{cases} y-x & \text{für } y > x \\ 0 & \text{für } y \leq x \end{cases}$. Dieser Ansatz führt zu $D_i(x) = \mu D(x)$, wobei μ als maximale durchschnittliche Deprivation eines Individuums mit einem Einkommen von Null zu interpretieren ist.²⁶ Da $D(x)$ fallend und konvex ist, nimmt die individuelle Deprivation mit zunehmenden Einkommen überproportional ab.

Neben dem Ausmaß an Deprivation eines Individuums kann auch das Satisfaktionsniveau eines Individuums $S_i(x)$ quantifiziert werden.

YITZHAKI²⁷ schlägt dafür folgende Funktion vor:

$$(6.37) \quad S_i(x) = \int_0^x (1-F(y))dy = \mu \cdot W(x).$$

μ stellt das durchschnittliche Ausmaß an Satisfaktion eines Individuums mit dem maximalen Einkommen $x = b$ dar. $D_i(x)$ und $S_i(x)$ ergänzen sich bei diesem Ansatz zu μ .

Eine alternative Definition von HEY/LAMBERT²⁸ stimmt mit $\mu A(x)$ überein:

$$(6.38) \quad S_i^*(x) = \int_0^x F(y)dy = \int_0^b s(x,y) f(y)dy = \mu A(x)$$

mit $s(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < y \\ x-y & \text{für } x \geq y \end{cases}$.

²⁶ Vgl. KAKWANI, N. (1984), S. 387.

²⁷ Vgl. YITZHAKI, S. (1979), S. 322.

²⁸ Vgl. HEY, J. D. / LAMBERT, P. J. (1980), S. 572.

Somit gelangt man je nach Wahl der Bewertungsfunktion zu einer der drei Kurven in Abhängigkeit von x , wenn noch durch die Bezugsgröße μ geteilt wird.

μR bzw. $\mu(1-R)$ ergibt sich demnach als gewogenes Mittel der individuellen Deprivation- bzw. Satisfaktionswerte und kann damit als Ausdruck des Ausmaßes der gesellschaftlichen Deprivation bzw. Satisfaktion interpretiert werden.

$$(6.39) \quad \mu R = \int_0^b D_i(x) f(x) dx = \int_0^b S_i^*(x) f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \mu(1-R) = \int_0^b S_i(x) f(x) dx.$$

Verallgemeinerte Formen für eine individuelle Deprivationsfunktion werden von BERREBI/SILBER²⁹ und CHAKRAVARTY³⁰ vorgeschlagen.

DAGUM³¹ führen drei grundlegende Prinzipien aus der Wohlfahrtstheorie³² zu der Herleitung von Gini-"loss-", "disutility-" und "utility"-Funktionen, die mit $A(x)$ und $W(x)$ in Verbindung gebracht werden können. Grundgedanke seines Ansatzes ist, das Einkommen x eines Individuums in einen Nutzteil U ("utility" als individueller Beitrag zur sozialen Wohlfahrt) und Verlustteil S ("loss" als individueller Beitrag zum gesellschaftlichen Verlust) aufzusplitten. Diese sind jeweils Funktionen in Abhängigkeit von x und $F(x)$:

$$(6.40) \quad x = S(x, F(x)) + U(x, F(x)).^{33}$$

Teilt man die Verlustfunktion durch das Durchschnittseinkommen μ , gelangt man zu der Schadensfunktion $V(x, F(x))$ ("disutility-function").³⁴

²⁹ Vgl. BERREBI, Z. M. / SILBER, J. (1985).

³⁰ Vgl. CHAKRAVARTY, S. R. (1990).

³¹ Vgl. DAGUM, C. (1990 und 1993).

³² Präferenz für mehr Einkommen, Aversion gegenüber Ungleichheit und interpersonelle Vergleiche von Nutzen und "disutility"; Vgl. DAGUM, C. (1993), S. 6.

³³ Vgl. DAGUM, C. (1993), S. 8.

³⁴ Vgl. DAGUM, C. (1993), S. 9.

Die durchschnittliche soziale Wohlfahrt ("average social welfare") bzw. der durchschnittliche soziale Verlust ("average social diswelfare") ergeben sich als arithmetisches Mittel der Einzelnutzen bzw. -verluste. Diese ergänzen sich folglich zu μ :

$$(6.41) \quad \mu = E(S(x, F(x))) + E(U(x, F(x)))^{35}.$$

Als Ungleichheitsmaß kann dann die durchschnittliche Schadensfunktion

$$(6.42) \quad E(V(x, F(x))) = \frac{E(S(x, F(x)))}{\mu} = \frac{\mu - E(U(x, F(x)))}{\mu}$$

angesehen werden.³⁶

Für das Ungleichheitsmaß Gini-Koeffizient entspricht in diesem Zusammenhang $V(x, F(x))$ der Funktion $A(x)$ und $U(x, F(x))$ entspricht $\mu W(x)$ ³⁷.

Die folgende zusammenfassende Übersicht benennt das vorgestellte Instrumentarium entsprechend den jeweiligen Sachverhalten.

ÜBERSICHT 5: Interpretation der in Kapitel 6 vorgestellten Kurvenzüge vor verschiedenen Anwendungshintergründen (MMT = Merkmalsträger)

³⁵ Vgl. DAGUM, C. (1993), S. 9.

³⁶ Vgl. DAGUM, C. (1993), S. 9.

³⁷ Vgl. DAGUM, C. (1993), S. 12f.

	ZEITVARIABLE		EINKOMMENSEINHEITEN	
	Lebensdauerverteilungen	Sterbetafelbetrachtungen	Konzept der "relativen Deprivation"	individuelles Einkommen
Merkmal x_i	Verweilzeit	Lebensalter	Deprivation als entgangener Nutzen	individuelles Einkommen
μ	durchschnittliche Verweilzeit	Lebenserwartung im Alter 0	maximale durchschnittliche Deprivation eines Individuums bei $d(x,y) = \begin{cases} y-x & \text{für } y > x \\ 0 & \text{für } x < x \end{cases}$	Durchschnittseinkommen
Merkmalssumme X	Gesamtverweilzeit	insgesamt durchlebte Jahre		Gesamteinkommen
$M_u(F)$ bzw. $M_u(x)$	durchschnittliche Verweilzeit der 100 F % kleinsten Elemente	durchschnittliches Sterbealter der Personen, die vor Erreichen des x-ten Lebensjahres gestorben sind	durchschnittliches Ausmaß an Deprivation von Individuen mit Einkommen x durch ein Individuum mit Einkommen y > x, wobei $d(x,y) = \begin{cases} y & \text{für } y > x \\ 0 & \text{für } y < x \end{cases}$	Durchschnittseinkommen der 100 F % kleinsten Merkmalsträger
$M_o(F)$ bzw. $M_o(x)$	durchschnittliche Verweilzeit der 100 (1-F)% größten Elemente	durchschnittliches Sterbealter derer, die das Alter x erreicht bzw. überschritten haben	durchschnittliche individuelle Satisfaction gegenüber Individuen, die weniger als X verdienen mit $S(x,y) = \begin{cases} y & \text{für } x > y \\ 0 & \text{für } x < y \end{cases}$	Durchschnittseinkommen
$v(F) = M_o(F) - x(F)$ bzw. $M_o(x) - x$	mittlere, restliche Verweildauer	Lebenserwartung im Alter x		durchschnittliches Überflusseinkommen
$r(F)$ bzw. $r(x)$	Hazardrate, Ausfallrate	"Force of mortality" "Sterbeintensität"		

	Lebensdauerverteilungen	Sterbetafelbetrachtungen	Konzept der "relativen Deprivation"	individuelles Einkommen
$L(F)$ bzw. $L(x)$	Anteil der Verweilzeit der 100 F % kürzesten Elemente an der Gesamtverweilzeit	Anteil der von den bis zum Jahre x Gestorbenen durchlebten Jahre an der Gesamtlebenszeit	durchschnittliches Ausmaß an Satisfaction eines Individuums mit Einkommen x, wobei $s'(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y > x \\ \frac{y}{\mu} & \text{für } y \leq x \end{cases}$	Anteil am Gesamteinkommen der 100 F % kleinsten Merkmals-träger
$W(F) = \frac{x(F)}{\mu}(1-F) + L(F)$ bzw. $W(x) = \int_0^x \frac{1-F(y)}{\mu} dy$	Anteil der bis zum Zeitpunkt x verbrauchten Zeit an der Gesamtverweilzeit	Anteil der bis zum Zeitpunkt x durchlebten Zeit an der Gesamtlebenszeit	durchschnittliches Ausmaß an Satisfaction eines Individuums mit Einkommen x, wobei $S(x) = \int_0^x \frac{(1-F(y))}{\mu} dy$	Anteil am Gesamteinkommen der 100 F % kleinsten MMT sowie der größten MMT bis zur Stelle x
$D(F) = 1-L(F) + \frac{x(F)}{\mu}(1-F)$ bzw. $D(x) = \int_x^b \frac{1-F(y)}{\mu} dy$	Anteil der ab dem Zeitpunkt x noch zu verbrauchenden Zeit an der Gesamtverweilzeit	Anteil der zum Zeitpunkt x noch verbleibenden Lebenszeit an der Gesamtlebenszeit	durchschnittliches Ausmaß an Deprivation eines Individuums mit Einkommen x, wobei $d(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x}{\mu} & \text{für } y \geq x \\ 0 & \text{für } y < x \end{cases}$	"Überflusseinkommen" als Anteil am Gesamteinkommen
$A(F) = \frac{x(F)}{\mu}F + L(F)$ bzw. $A(x) = \int_0^x \frac{F(y)}{\mu} dy$	bis zum Zeitpunkt x bereits entgangene Verweilzeit, ausgedrückt als Anteil an der Gesamtverweilzeit	Gesamtverlust an Lebensjahren zum Zeitpunkt x, ausgedrückt als Anteil an den insgesamt zu durchlebenden Jahren	durchschnittliches Ausmaß an Satisfaction eines Individuums mit Einkommen x, wobei $s(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \geq x \\ \frac{x-y}{\mu} & \text{für } y < x \end{cases}$	"Fehleinkommen" bis zur Stelle x als Anteil am Gesamteinkommen

7. Kumulierte Lorenzkurven, daraus abgeleitete Disparitätsmaße und deren Verallgemeinerung

Von der normierten inversen Verteilungsfunktion gelangt man zur Lorenzkurve, indem man Flächenstücke **unter** dieser Funktion sukzessive aufsummiert. Setzt man diesen Vorgang an der Lorenzkurve und den so konstruierten Kurven fort, erzeugt man Kurvenzüge, die im folgenden "kumulierte Lorenzkurve ν -ten Grades" genannt werden. Dabei kann die Kumulation von unten oder von oben erfolgen. Die Funktionen sind deshalb von Interesse, weil sie enge Bezüge zu Minimum- bzw. Maximum-Mittelwerten von Ordnungsstatistiken aufweisen, die wiederum Bausteine von Disparitätsmaßen eines bestimmten Typus sind. Daneben vermittelt dieser Ansatz, der grundlegende Strukturen erkennen läßt, einen besseren Kenntnisstand von Zusammenhängen zwischen $\frac{x(F)}{\mu}$ und $L(F)$. Die Verwendung eines allgemeinen Ansatzes verdeutlicht darüber hinaus, welche Wertungen auch der Verwendung der gebräuchlichen Maße, wie z. B. des Gini-Koeffizienten, inneliegen.

7.1 Von unten kumulierte Lorenzkurven

Die von unten kumulierte Lorenzkurve ist wie folgt definiert:

$$(7.1) \quad L^{(\nu)}(F) = \int_0^F L^{(\nu-1)}(q) dq \quad \text{für } 0 \leq F \leq 1 \text{ und } \nu = 2, 3, \dots$$

mit $L^{(1)}(F) = L(F), L^{(0)}(F) = \frac{x(F)}{\mu}$.

$L^{(\nu)}(F)$ ist für $\nu \geq 1$ eine steigende, konvexe Funktion mit $L^{(\nu)}(0) = 0$.

Die Funktionswerte selbst sind für $\nu \geq 2$ inhaltlich schlecht zu interpretieren. Sie lassen sich aber sowohl in Abhängigkeit von gewogenen Werten der normierten inversen Verteilungsfunktion als auch von gewogenen Werten der Lorenzkurve darstellen. Diese Darstellungsformen erhält man über eine unterschiedliche Anzahl hintereinander ausgeführter partieller Integrationen der Ausgangsdefinition.

Es gilt für $\nu \geq 2$

$$(7.2) \quad L^{(\nu)}(F) = \frac{1}{(\nu-2)!} \int_0^F (F-q)^{\nu-2} L(q) dq,$$

für $\nu \geq 1$

$$(7.3) \quad L^{(\nu)}(F) = \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^F (F-q)^{\nu-1} \frac{x(q)}{\mu} dq,$$

bzw.

$$(7.4) \quad L^{(\nu)}(F) = \frac{1}{\nu!} F^\nu \frac{x(0)}{\mu} + \int_{x(0)}^{x(F)} \frac{1}{\mu \cdot \nu!} [F-q]^\nu \frac{dy(q)}{dq} dq$$

Da die kumulierten Lorenzkurven ($\nu \geq 2$) sich selbst aus der Lorenzkurve ableiten lassen, übertragen sich die meisten der für einen **Disparitätsindikator** geforderten Eigenschaften²: Die Funktionswerte sind nichtnegativ. Einpunkt- und extreme Ungleichverteilung markieren einen oberen bzw. unteren Grenzverlauf, der jedoch von der jeweiligen Kumulationsstufe abhängt. Proportionale Veränderungen lassen $L^{(\nu)}(F)$ konstant, die Addition eines positiven Merkmalbetrags zu jedem Beobachtungswert führt zu einer kumulierten Lorenzkurve, die oberhalb der alten liegt. Transfereigenschaft sowie Verhalten bei Proportionalitätsprobe und Nullenergänzung bleiben erhalten.³

Aus der Definition der kumulierten Lorenzkurven folgt $L^{(\nu-1)}(F) \geq L^{(\nu)}(F)$ für $\nu \geq 2$ und $0 \leq F \leq 1$, wie folgende Überlegung zeigt:

Man betrachtet die Differenzfunktion $DF(F) = L^{(\nu-1)}(F)F - L^{(\nu)}(F)$, die wegen $F \leq 1$ stets kleiner gleich $L^{(\nu-1)}(F) - L^{(\nu)}(F)$ ist, und zeigt, daß $DF(F)$ Werte größer gleich Null annimmt für $0 \leq F \leq 1$.

¹ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M. (1989), S. 316 und ARNOLD, B. C. (1987), S. 82.

² Vgl. Kap. 2 und Kap. 3.2.

³ Eine Normierung auf $L_n^{(\nu)}(1) = 1$ führt zu $L_n^{(\nu)}(F) = \frac{\nu! \cdot \mu}{\mu_{1:\nu}} L^{(\nu)}(F)$. Es ist dann

$$L_n^{(\nu)}(F) = \frac{\nu \mu_{1:\nu-1}}{\mu_{1:\nu}} \int_0^F L^{(\nu-1)}(u) du.$$

Der Normierungsfaktor ist abhängig von der Kumulations-

stufe. Die Zusammenhänge zu Lorenzkurven vorgelagerter Kumulationsstufen sind also recht komplex. Einfache Beziehungen zu bereits bekannten Ergebnissen lassen sich daher nicht ableiten.

Es ist $DF(0) = L^{(\nu-1)}(0)0 - L^{(\nu)}(0) = 0$ und

$$DF(1) = L^{(\nu-1)}(1)1 - L^{(\nu)}(1) = \frac{1}{\nu! \mu^\nu} [\nu \mu_{1:\nu-1} - \mu_{1:\nu}] \geq 0.^4$$

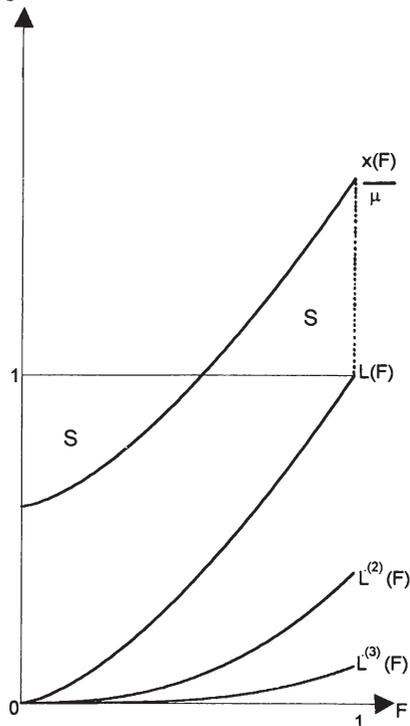
Die Ableitung nach F ergibt $\frac{dDF(F)}{dF} = L^{(\nu-2)}(F) \cdot F - L^{(\nu-1)}(F) \geq 0$.

Damit verläuft $DF(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ im nichtnegativen Bereich, folglich auch $L^{(\nu-1)}(F) - L^{(\nu)}(F)$.

Für den Fall $\nu = 1$ gelten die gleichen Überlegungen; die Ableitung $\frac{dL^{(\nu-1)}(F)}{dF} = \frac{dx(F)}{\mu dF}$ ist nichtnegativ.

So ergibt sich als Schaubild:

SCHAUBILD 9: Darstellung der von unten kumulierten Lorenzkurven



⁴ Vgl. Form (7.7).

Die Fläche zwischen $\frac{x(F)}{\mu}$ und $L(F)$ ergänzt sich zu $\frac{1+R}{2}$, da die schraffierten Flächen oberhalb von $\frac{x(F)}{\mu}$ bis F_μ bzw. unterhalb von $\frac{x(F)}{\mu}$ ab F_μ jeweils dem Wert des Schutzkoeffizienten entsprechen, sich also ausgleichen. Allgemein gilt für die Fläche zwischen zwei angrenzenden kumulierten Lorenzkurven:

$$(7.5) \quad \int_0^1 L^{(\nu-2)}(F)dF - \int_0^1 L^{(\nu-1)}(F)dF = \int_0^1 F L^{(\nu-2)}dF \quad \text{für } \nu \geq 2$$

und wegen $L^{(\nu)}(1) = \int_0^1 L^{(\nu-1)}(F)dF$

$$(7.6) \quad \int_0^1 L^{(\nu-2)}(F)dF - \int_0^1 L^{(\nu-1)}(F)dF = L^{(\nu-1)}(1) - L^{(\nu)}(1).$$

D. h. diese flächenmäßige Darstellung findet (aufgrund der einfachen mathematischen Beziehungen) ihre Entsprechung in einer Streckendarstellung auf der nächsthöheren Kumulationsstufe.

Für einen **Vergleich zweier Verteilungen** läßt sich in Analogie zur Lorenz-Dominanzordnung eine Ordnungsrelation über die kumulierten Lorenzkurven definieren, die zum Disparitätsvergleich herangezogen werden kann:

Definition 7.1: Die Variable X mit der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ dominiert die Variable Y mit der Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ gemäß der kumulierten Lorenzkurve ν -ten Grades ($X \underset{L^{(\nu)}}{\geq} Y$), wenn $L_X^{(\nu)}(F) \leq L_Y^{(\nu)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ und $\nu \geq 1$.

Gilt $L_X^{(\nu)}(F) \leq L_Y^{(\nu)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$, dann folgt $L_X^{(\nu+1)}(F) \leq L_Y^{(\nu+1)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$.

Für $\nu = 1$ gelangt man zur Lorenz-Dominanzordnung, $\nu = 2$ entspricht einer Ordnungsrelation, die ALZAID als "more lower Lorenz area"-Dominanz bezeichnet.⁵ Auf diese Ordnungsrelationen wird in Kapitel 9.4.3 weiter eingegangen.

⁵ Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 214.

Für die Herleitung von **Disparitätsindikatoren in Form einer Kennziffer** ist insbesondere der Wert $L^{(\nu)}(1)$, d.h. die Fläche unter $L^{(\nu-1)}(F)$ von Interesse:

Darstellungsformen (7.2), (7.3) und (7.4) für $F = 1$ führen wegen der aus Kap. 4.2.1.1 bekannten Schreibweisen der Minimum-Mittelwerte $\mu_{1:\nu}$ direkt zu folgender grundlegenden Beziehung:

$$(7.7) \quad L^{(\nu)}(1) = \frac{1}{\nu!} \frac{\mu_{1:\nu}}{\mu} \Leftrightarrow \mu_{1:\nu} = \nu! \mu L^{(\nu)}(1).$$

In Analogie zu

$$(7.8) \quad L^{(2)}(1) = \int_0^1 L(F) dF = \frac{1-R}{2} = \frac{\mu_{1:2}}{2\mu}$$

läßt sich dann allgemein das Disparitätsmaß $\Gamma(X, \nu)$ herleiten:

$$(7.9) \quad L^{(\nu)}(1) = \int_0^1 L^{(\nu-1)}(F) dF = \frac{1-\Gamma(X, \nu)}{\nu!} = \frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \mu},$$

was zu

$$(7.10) \quad \Gamma(X, \nu) = 1 - \frac{\mu_{1:\nu}}{\mu}, \quad \nu = 2, 3, \dots \text{ führt.}$$

Diese Klasse von Disparitätsmaßen ist in der Literatur unter der Bezeichnung "extended Gini-Index" bekannt⁶, wobei $\nu = 3$ dem sogenannten MEHRAN-Maß⁷ $M = \frac{\mu - \mu_{1:3}}{\mu}$ entspricht.

Über (7.2), (7.3) und (7.4) für die Stelle $F = 1$ lassen sich danach alternative Darstellungsformen von $\Gamma(X, \nu)$ erzeugen:

⁶ Vgl. z.B. KAKWANI, N. (1980b), S. 444, YITZHAKI, S. (1983), S. 620 und YITZHAKI, S. (1991), S. 236.

⁷ Vgl. MEHRAN, F. (1976), S. 808 und NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1988), S. 30.

Aus (7.2) ergibt sich:

$$(7.11) \quad \Gamma(X, \nu) = 1 - \nu(\nu-1) \int_0^1 (1-F)^{\nu-2} L(F) dF,^8$$

und damit wegen

$$(7.12) \quad \int_0^1 F \cdot \nu(\nu-1) (1-F)^{\nu-2} dF = \int_0^1 \nu(1-F)^{\nu-1} dF = 1$$

die Darstellung von $\Gamma(X, \nu)$ als gewogene Konzentrationsfläche:

$$(7.13) \quad \Gamma(X, \nu) = \int_0^1 \nu(\nu-1) (1-F)^{\nu-2} [F-L(F)] dF.$$

(7.3) führt zu einer Darstellung von $\Gamma(X, \nu)$ mittels gewogener Werte der normierten inversen Verteilungsfunktion:

$$(7.14) \quad \Gamma(X, \nu) = \int_0^1 [1 - \nu(1-F)^{\nu-1}] \frac{x(F)}{\mu} dF.$$

oder wegen (7.12) zu

$$(7.15) \quad \Gamma(X, \nu) = \int_0^1 \left[1 - \frac{(1-F)^{\nu-1}}{\int_0^1 (1-F)^{\nu-1} dF} \right] \frac{x(F)}{\mu} dF.$$

Die Funktion $J(F) = 1 - \nu(1-F)^{\nu-1}$ ist streng steigend und konkav für $0 \leq F < 1$:

$$(7.16) \quad \frac{dJ(F)}{dF} = \nu(\nu-1) (1-F)^{\nu-2} > 0 \text{ für } 0 \leq F < 1, \nu \geq 2,$$

$$\frac{d^2J(F)}{dF^2} = -\nu(\nu-1)(\nu-2)(1-F)^{\nu-3} \leq 0 \text{ für } 0 \leq F < 1, \nu \geq 2.$$

Zudem gilt $\int_0^1 [1 - \nu(1-F)^{\nu-1}] dF = 0$.

⁸ Vgl. YITZHAKI, S. (1983), S. 620.

$\Gamma(X, \nu)$ läßt sich, wie (7.15) zeigt, auch als Kovarianz interpretieren:

$$(7.17) \quad \Gamma(X, \nu) = \text{cov} \left[\frac{X}{\mu}, -\nu(1-F)^{\nu-1} \right] = \int_0^1 \left[\frac{x(F)}{\mu_X} - 1 \right] [1 - \nu(1-F)^{\nu-1}] dF.$$

Schließlich führt (7.4) zu einer Interpretation, die als erweiterte GUMBEL-Darstellung aufgefaßt werden kann.⁹

$$(7.18) \quad \Gamma(X, \nu) = \int_0^b \left[\frac{1-F(x) - [1-F(x)]^\nu}{\mu} \right] dx^{10} = \int_0^b \frac{[1-F(x)] - (1-F(x))^\nu}{b \int_0^b [1-F(x)] dx} dx$$

$$= \int_0^{\tilde{b}} [1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x}) - (1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x}))^\nu] d\tilde{x} \text{ mit } \tilde{X} = \frac{X}{\mu}.$$

d.h. $\Gamma(X, \nu)$ kann demnach als Fläche zwischen $1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ und $(1 - F_{\tilde{X}}(\tilde{x}))^\nu$ gedeutet werden.¹¹ Da für $\nu \leq k$ $[1-F(x)]^\nu \geq [1-F(x)]^k$ für alle $x \geq 0$ gilt, folgt $\Gamma(X, \nu) \leq \Gamma(X, k)$.¹²

Aus (4.25) läßt sich zudem folgende **Ungleichung** herleiten:

$$(7.19) \quad \Gamma(X, \nu) \leq V \cdot \frac{\nu-1}{\sqrt{(2\nu-1)}}.$$

⁹ Vgl. Kap. 4.1 und 4.2.1.

¹⁰ Vgl. auch HANADA, K. (1983), S. 96: Vorschlag eines Gleichheitsindizes.

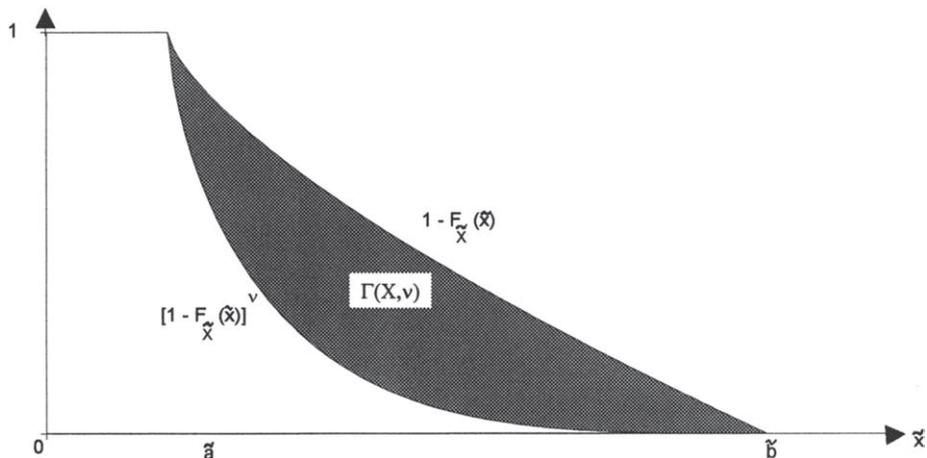
¹¹ Die mittlere Differenz zwischen kumulierten Lorenzkurvenwerten führt nicht, wie eventuell zu erwarten, zu einem Vielfachen von $\Gamma(X, \nu)$, sondern lediglich auf eine Differenz zweier höherer Γ -Indizes. Es ist:

$$\int_0^1 \int_0^1 |L^{(\nu-1)}(F) - L^{(\nu-1)}(q)| dq dF = 2 \int_0^1 L^{(\nu-1)}(F) F dF - 2 \int_0^1 L^{(\nu)}(F) dF$$

$$= 2L^{(\nu)}(1) - 4L^{(\nu+1)}(1) = \frac{2}{\nu!} [1 - \Gamma(X, \nu)] - \frac{4}{(\nu+1)!} [1 - \Gamma(X, \nu+1)].$$

Da $\Gamma(X, 1) = 0$ gilt, reduziert sich der Ausdruck für $\nu = 1$ auf $\frac{\Delta}{\mu} = 2R$.

¹² Vgl. dazu Kap. 4.2.1.

SCHAUBILD 10: Darstellung von $\Gamma(X, \nu)$ 

Betrachtet man **abgeschnittene Verteilungen** \tilde{F} im Bereich $0 \leq F_\xi \leq F_\eta \leq 1$, so lassen sich Minimum-Mittelwerte höheren Grades $\mu_{1:\nu}(F_\xi, F_\eta)$ ausdrücken als

$$(7.20) \quad \mu_{1:\nu}(F_\xi, F_\eta) = \nu \int_0^1 (1-\tilde{F})^{\nu-1} \tilde{x}(\tilde{F}) d\tilde{F} \text{ mit } \tilde{F} = \frac{F-F_\xi}{F_\eta-F_\xi}, \nu = 2, 3, \dots$$

Da gilt $\tilde{x}(\tilde{F}) = x(F)$, können daraus folgende Schreibweisen für $\nu = 2, 3, \dots$ abgeleitet werden:

$$(7.21) \quad \mu_{1:\nu}(F_\xi, F_\eta) = \frac{\nu}{[F_\eta - F_\xi]^\nu} \int_{F_\xi}^{F_\eta} [F_\eta - F]^{\nu-1} x(F) dF$$

$$(7.22) \quad = \frac{\nu(\nu-1)\mu}{[F_\eta - F_\xi]^\nu} \int_{F_\xi}^{F_\eta} [F_\eta - F]^{\nu-2} [L(F) - L(F_\xi)] dF.^{13}$$

¹³ Vgl. Herleitung im Anhang.

Für die von oben und unten abgeschnittene Verteilung läßt sich $\Gamma(X, \nu)$ dann wegen (7.21) in Abhängigkeit von Werten der Lorenzkurve ausdrücken:

$$(7.23) \quad \Gamma(X, \nu) (F_{\eta}, F_{\xi}) = \frac{\mu_{1:1}(F_{\xi}, F_{\eta}) - \mu_{1:\nu} (F_{\xi}, F_{\eta})}{\mu_{1:1}(F_{\xi}, F_{\eta})}$$

$$= 1 - \frac{\nu(\nu-1)}{\left[\frac{F_{\eta}-F_{\xi}}{F_{\eta}} \right]^{\nu-1}} \int_{\frac{F_{\eta}-F_{\xi}}{F_{\eta}}}^{\frac{F_{\eta}}{F_{\xi}}} \left[\frac{F_{\eta}-F}{F_{\eta}} \right]^{\nu-2} \left[\frac{L(F)-L(F_{\xi})}{L(F_{\eta})-L(F_{\xi})} \right] dF,$$

wobei $\mu_{1:1}(F_{\xi}, F_{\eta}) = \mu - \frac{L(F_{\eta}) - L(F_{\xi})}{\frac{F_{\eta}}{F_{\xi}} - \frac{F_{\xi}}{F_{\eta}}}$ das arithmetische Mittel der abgeschnittenen Verteilung ist.

Für $\nu = 2$ entspricht dies der Gini-Darstellung für abgeschnittene Verteilungen¹⁴, für $\nu = 3$ erhält man eine Darstellung für das MEHRAN-Maß:

$$(7.24) \quad M(F_{\xi}, F_{\eta}) = 1 - \frac{6}{\left[\frac{F_{\eta}-F_{\xi}}{F_{\eta}} \right]^2 \left[\frac{L(F_{\eta})-L(F_{\xi})}{F_{\xi}} \right]} \int_{\frac{F_{\eta}-F_{\xi}}{F_{\eta}}}^{\frac{F_{\eta}}{F_{\xi}}} [F_{\eta}-F][L(F) - L(F_{\xi})] dF.$$

Eine **Erweiterung des Schutz-Koeffizienten** "als längste Lorenzkurvensehne" kann auf unterschiedliche Art und Weise vorgenommen werden, je nachdem welches die jeweils betrachtete Grenzverteilung ist. Folgende Varianten bieten sich an:

1. Man betrachtet $L^{(\nu)}(F)$ gegenüber der kumulierten Lorenzkurve einer Einpunktverteilung $L_{EPV}^{(\nu)}(F) = F^{(\nu)}(F) = \int_0^F \frac{1}{(\nu-1)!} q^{\nu-1} dq = \frac{1}{\nu!} F^{\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$

mit $F^{(0)}(F) = 1$.

¹⁴ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 81ff, andere Bezeichnungen.

Als längste Lorenzkurvensehne wird dann definiert

$$(7.25) \quad S^{(\nu)} = |F^{(\nu)}(F) - L^{(\nu)}(F)| \rightarrow \max.$$

Als jeweils längste Lorenzkurvensehne ergibt sich dann für

$$\nu = 1 : \quad S^{(1)} = S,$$

$$\begin{aligned} \nu = 2 : \quad S^{(2)} &= |F^{(2)}(F) - L^{(2)}(F)| \rightarrow \max \\ &= F^{(2)}(1) - L^{(2)}(1) = \frac{1}{2} - \frac{1 - R}{2} = \frac{R}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = 3 : \quad S^{(3)} &= |F^{(3)}(F) - L^{(3)}(F)| \rightarrow \max \\ &= F^{(3)}(1) - L^{(3)}(1) = \frac{1}{6} - \frac{1 - M}{6} = \frac{M}{6}, \end{aligned}$$

$$\nu \geq 4 : \quad S^{(\nu)} = F^{(\nu)}(1) - L^{(\nu)}(1) = \frac{\Gamma(X, \nu)}{\nu!}.$$

D. h. dieser Ansatz liefert eine streckenmäßige Darstellung von $\frac{R}{2}$ bzw. $\frac{M}{6}$ und zwar in einer Interpretation als längste Lorenzkurvensehne.

2. Analog dem Schutz-Koeffizienten S läßt sich aber auch an den kumulierten Lorenzkurven der maximale Abstand zwischen (stets variierender) Diagonaler $\frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu} \cdot F$ und $L^{(\nu)}(F)$ bestimmen und interpretieren:¹⁵

$$(7.26) \quad S^*(\nu) = \left| \frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu} \cdot F - L^{(\nu)}(F) \right| \rightarrow \max.$$

Dieser Ansatz führt zu einer Stelle F , an der gilt $\frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu} = L^{(\nu-1)}(F)$; diese wird im folgenden mit $F^{\frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu}}$ bezeichnet.

¹⁵ Es gilt $L^{(\nu)}(1) = \frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu}$

Wie der Schutz-Koeffizient selber, so kann diese Erweiterung interpretiert werden als relativierte durchschnittliche Abweichung. Es ist:

$$(7.27) \quad S^{*(\nu)} = \left[\frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu} \cdot F - L^{(\nu)}(F) \right] \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 |L^{(\nu-1)}(F) - \frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu}| dF = \frac{1}{2} \int_a^b |L^{(\nu-1)}(x) - \frac{\mu_{1:\nu}}{\nu! \cdot \mu}| f(x) dx. \quad 16$$

Der letzte Ausdruck gibt die halbe durchschnittliche absolute Abweichung der $L^{(\nu-1)}(x)$ -Werte von ihrem arithmetischen Mittel wieder.

Im Fall $\nu = 1$ gelangt man zu der bekannten Darstellungsform des Schutz-Koeffizienten. Für $\nu = 2$ ergibt sich als maximale Lorenzkurve

$$(7.28) \quad S^{*(2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 |L(F) - \frac{1-R}{2}| dF = \frac{1}{2} \int_a^b |L(x) - \frac{1-R}{2}| f(x) dx.$$

D. h. $\frac{1-R}{2}$ wird in diesem Zusammenhang als arithmetisches Mittel der transformierten Werte $L(x)$ interpretiert.

7.2 Von oben kumulierte Lorenzkurven

Analog der "kumulierten Lorenzkurve ν -ten Grades" läßt sich eine andere Klasse von "höheren" Lorenzkurven erzeugen, die im Gegensatz zur "Kumulation von unten" an der Lorenzkurve mit einer "Kumulation von oben" ansetzt. Statt F wird $1-F = \bar{F}$, statt L wird $1-L = \bar{L}$ betrachtet; die Lorenzkurve wird also um 180° gedreht.

$$(7.29) \quad \bar{L}^{((\nu))}(\bar{F}) = \int_0^{\bar{F}} \bar{L}^{((\nu-1))}(\bar{q}) d\bar{q} \text{ für alle } 0 \leq \bar{F} = 1-F \leq 1, \nu = 2, 3, \dots$$

$$\text{und } \bar{L}^{((1))}(\bar{F}) = \int_0^{\bar{F}} \frac{\bar{x}(\bar{q})}{\mu} d\bar{q} = 1 - L(\bar{F}) = \bar{L}(\bar{F})$$

Für $\nu \geq 2$ ist $\bar{L}^{((\nu))}(\bar{F})$ eine steigende, konvexe Funktion.

¹⁶ $L^{(\nu)}(x) = L^{(\nu)}(F(x))$ ist die kumulierte Lorenzkurve in Abhängigkeit von x .

Folgende zu (7.2), (7.3) bzw. (7.4) analoge Schreibweisen ergeben sich:

$$(7.30) \quad \bar{L}^{((\nu))}(\bar{F}) = \frac{1}{(\nu-2)!} \int_0^{\bar{F}} (\bar{F}-\bar{q})^{\nu-2} \bar{L}(\bar{q}) d\bar{q}$$

$$\text{bzw.} \quad \bar{L}^{((\nu))}(F) = \frac{1}{(\nu-2)!} \int_F^1 (q-F)^{\nu-2} (1-L(q)) dq \text{ mit } \bar{L}(\bar{q}) = 1-L(q),$$

$$(7.31) \quad \bar{L}^{((\nu))}(\bar{F}) = \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^{\bar{F}} (\bar{F}-\bar{q})^{\nu-1} \frac{\bar{x}(\bar{q})}{\mu} d\bar{q}$$

$$\text{bzw.} \quad \bar{L}^{((\nu))}(F) = \frac{1}{(\nu-1)!} \int_F^1 (q-F)^{\nu-1} \frac{x(q)}{\mu} dq \text{ mit } \bar{x}(\bar{q}) = x(q),$$

$$(7.32) \quad \bar{L}^{((\nu))}(\bar{F}) = \frac{1}{\nu!} \left[\bar{F} \frac{x(\bar{q}=0)}{\mu} + \int_{\frac{x(1)}{x(F)}}^{\frac{\bar{x}(\bar{q}=\bar{F})}{\bar{x}(\bar{q}=0)}} [\bar{F}-\bar{q}]^{\nu} \frac{d\bar{x}(\bar{q})}{\mu} \right]$$

$$\text{bzw.} \quad \bar{L}^{((\nu))}(F) = \frac{1}{\nu!} \left[(1-F) \frac{x(1)}{\mu} - \int_{x(F)}^1 [q-F]^{\nu} \frac{dx(q)}{\mu} \right].$$

Auch hier läßt sich wieder eine Dominanzrelation definieren:

Definition 7.2: "Die Variable X mit Verteilungsfunktion F_X dominiert die Variable Y mit der Verteilungsfunktion F_Y gemäß der von oben kumulierten Lorenzkurve ν -ten Grades ($X \succeq Y$), wenn $\bar{L}_X^{((\nu))}(F) \geq \bar{L}_Y^{((\nu))}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$."

Der Fall $\nu=1$ entspricht der Lorenz-Dominanzordnung, für $\nu = 2$ gelangt man zu einer von ALZAID als "more upper Lorenz area"¹⁷-Dominanz bezeichneten Ordnung.

¹⁷ ALZAID, A. A. (1990), S. 214.

An dieser Klasse von Kurven lassen sich Maximum–Mittelwerte von Ordnungsstatistiken deuten, die wiederum Bausteine für eine von PIESCH^{18,19} vorgeschlagene Klasse von Disparitätsmaßen sind.

Analog $\Gamma(X, \nu)$ läßt sich $\Gamma'(X, \nu)$ definieren als ein Disparitätsmaß, in das Maximum–Mittelwerte eingehen:

$$(7.33) \quad \Gamma'(X, \nu) = \frac{\mu_{\nu: \nu} - \mu}{\mu}.$$

$\Gamma'(X, \nu)$ ist im Gegensatz zu $\Gamma(X, \nu)$ ein nicht normiertes Maß.

Da $\mu_{\nu: \nu} \leq \nu \mu^{20}$, läßt sich die auf das Intervall $[0, 1]$ normierte Klasse von Maßen

$$(7.34) \quad \Gamma'_n(X, \nu) = \frac{1}{(\nu-1)} \frac{\mu_{\nu: \nu} - \mu}{\mu}$$

eingeführen.

Der Spezialfall $\nu = 3$ in der normierten Version führt zu dem aus der Literatur bekannten PIESCH–Maß²¹:

$$(7.35) \quad P = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_3: 3 - \mu}{\mu} \right].$$

Aus (7.30), (7.31) und (7.32) lassen sich aufgrund der Beziehung

$$(7.36) \quad \bar{L}((\nu))(\bar{F}=1) = \frac{\mu_{\nu: \nu}}{\mu \cdot \nu!} = \frac{1 + \Gamma'(X, \nu)}{\nu!}$$

wiederum alternative Darstellungsformen von $\Gamma'(X, \nu)$ gewinnen.

¹⁸ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 131ff.

¹⁹ Vgl. DONALDSON, D. / WEYMARK, J. A. (1980), S. 76ff; diskreter Ansatz.

²⁰ Vgl. Kapitel 4.2.1.1. Es gilt $\sum_1^{\nu} \mu_{r: \nu} = \nu \mu$.

²¹ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 134, NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1985b), S. 401 und NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1988), S. 30.

Aus (7.30) ergibt sich

$$(7.37) \quad \Gamma'(X, \nu) = \nu(\nu-1) \int_0^1 (1-\bar{F})^{\nu-2} \bar{L}(\bar{F}) d\bar{F} - 1 \\ = \nu(\nu-1) \int_0^1 F^{\nu-2} (1-L(F)) dF - 1,$$

was wegen $-\nu(\nu-1) \int_0^1 F^{\nu-2} (1-F) dF = -1$ übergeht in

$$\Gamma'(X, \nu) = \nu(\nu-1) \int_0^1 F^{\nu-2} (F-L(F)) dF.$$

Aus (7.31) folgt

$$(7.38) \quad \Gamma'(X, \nu) = \nu \int_0^1 (1-\bar{F})^{\nu-1} \frac{\bar{x}(\bar{F})}{\mu} d\bar{F} - 1 = \nu \int_0^1 F^{\nu-1} \frac{x(F)}{\mu} dF - 1.$$

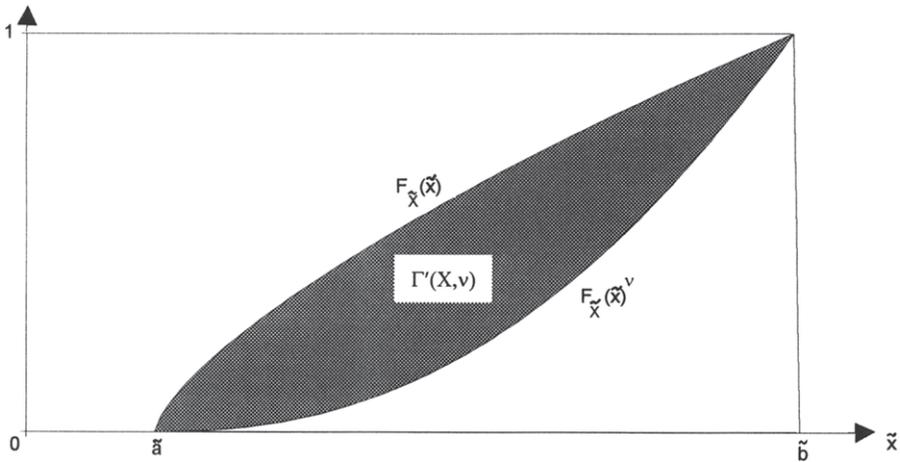
Da $\nu \int_0^1 F^{\nu-1} dF = 1$, ergibt sich

$$(7.39) \quad \Gamma'(X, \nu) = \nu \int_0^1 F^{\nu-1} \left[\frac{x(F)}{\mu} - 1 \right] dF = \text{cov} \left[\frac{X}{\mu}, \nu F^{\nu-1} \right].$$

Die Funktion $J(F) = \nu F^{\nu-1} - 1$ ist stetig, streng steigend und konvex für $0 < F \leq 1$, $\nu \geq 2$.

Mit Hilfe von (7.32) kann schließlic eine alternative Erweiterung des GUMBEL—Ansatzes formuliert werden (mit $b = x(1)$):

$$(7.40) \quad \Gamma'(X, \nu) = \frac{1}{\mu} \int_0^b [(1-F(x))^\nu - (1-F(x))] dx \\ = \frac{1}{\mu} \int_0^b [F(x) - F(x)^\nu] dx \\ = \int_0^{\tilde{b}} [F_{\tilde{X}}(\tilde{x}) - F_{\tilde{X}}(\tilde{x})^\nu] d\tilde{x}$$

SCHAUBILD 11: Darstellung von $\Gamma'(X, \nu)$ 

Als Erweiterung der Glasser'schen Ungleichung ergibt sich aus (4.24) eine **Obergrenze** für $\Gamma'(X, \nu)$:

$$(7.41) \quad \Gamma'(X, \nu) \leq V \cdot \frac{\nu-1}{\sqrt{2\nu-1}}.$$

Für eine **abgeschnittene Verteilung** $\tilde{F} = \frac{F - F_\xi}{F_\eta - F_\xi}$ im Bereich $0 \leq F_\xi \leq F_\eta \leq 1$ läßt sich der Maximum-Mittelwert $\mu_{\nu: \nu}(F_\xi, F_\eta)$ für $\nu = 2, 3, \dots$ ermitteln als

$$(7.42) \quad \begin{aligned} \mu_{\nu: \nu}(F_\xi, F_\eta) &= \frac{\nu}{[F_\eta - F_\xi]^\nu} \int_{F_\xi}^{F_\eta} [F - F_\xi]^{\nu-1} x(F) dF \\ &= \frac{\nu(\nu-1)\mu}{[F_\eta - F_\xi]^\nu} \int_{F_\xi}^{F_\eta} [F - F_\xi]^{\nu-2} [L(F_\eta) - L(F)] dF. \end{aligned} \quad ^{22}$$

²² Vgl. Herleitung im Anhang.

Damit berechnet sich der Wert von $\Gamma'(X, \nu)$ für die abgeschnittene Verteilung als

$$(7.43) \quad \Gamma'(X, \nu)_{(F_\xi, F_\eta)} = \frac{\mu_{\nu: \nu}(F_\xi, F_\eta) - \mu_{1:1}(F_\xi, F_\eta)}{\mu_{1:1}[F_\xi, F_\eta]}$$

$$= \frac{\nu(\nu-1)}{[F_\eta - F_\xi]^{\nu-1}} \int_{F_\xi}^{F_\eta} [F - F_\xi]^{\nu-2} \left[\frac{L(F_\eta) - L(F)}{L(F_\eta) - L(F_\xi)} \right] dF - 1.$$

Für $\nu = 2$ gelangt man zu einer (alternativen) Darstellung von R bei einer abgeschnittenen Verteilung. $\nu = 3$ führt zur Darstellung von $2P(F_\xi, F_\eta)$:

$$(7.44) \quad P(F_\xi, F_\eta) = \frac{3}{[F_\eta - F_\xi]^2 [L(F_\eta) - L(F_\xi)]} \int_{F_\xi}^{F_\eta} [F - F_\xi][L(F_\eta) - L(F)] dF - \frac{1}{2}.$$

In Analogie zu $S^{(\nu)}$ bzw. $S^{*(\nu)}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ läßt sich ableiten als **längste Lorenzkurvensehne**:

1. Im Vergleich zu einer Einpunktverteilung:

$$(7.45) \quad S^{(\nu)} = | \bar{L}^{((\nu))}(\bar{F}) - \bar{F}^{((\nu))}(\bar{F}) | \rightarrow \max_{\bar{F}}$$

$$\text{mit } \bar{F}^{((\nu))}(\bar{F}) = \int_0^{\bar{F}} \frac{1}{(\nu-1)!} \bar{q} d\bar{q} = \frac{1}{\nu!} \bar{F}^\nu \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Dieser Ansatz führt zu den Spezialfällen S für $\nu = 1$, $\frac{R}{2}$ für $\nu = 2$ und $\frac{P}{3} = \frac{\Gamma'(X, \nu)}{6}$ für $\nu = 3$.

2. Im Vergleich zur Diagonalen $\frac{\mu_{\nu: \nu}}{\mu \cdot \nu!} \cdot \bar{F}^\nu$:

$$(7.46) \quad S^{*(\nu)} = | \frac{\mu_{\nu: \nu}}{\mu \cdot \nu!} \cdot \bar{F} - \bar{L}^{((\nu))}(\bar{F}) | \rightarrow \max_{\bar{F}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{F}} | \bar{L}^{((\nu-1))}(\bar{F}) - \frac{\mu_{\nu: \nu}}{\mu \cdot \nu!} \bar{F}^\nu | d\bar{F}.$$

Für $\nu = 1$ ergibt sich wiederum S, für $\nu = 2$ stellt $\frac{\mu_{2:2}}{\mu \cdot 2!}$ das arithmetische Mittel der Transformierten $\bar{L}^{((\nu-1))}(\bar{F}(x))$ dar.

Die Summe von $\Gamma(X, \nu)$ und $\Gamma'(X, \nu)$ führt zu der relativierten Differenz zwischen Maximum- und Minimum-Mittelwert $\frac{\mu_{\nu:\nu} - \mu_{1:\nu}}{\mu}$.

Zwischen P, M und R besteht die Beziehung $2P + M = 3R$ ²³, die sich über die Mittelwertsdefinition der Indizes sehr schnell nachweisen läßt:

Wegen Relation (4.17) für $\nu = 3, r = 2$ und $\nu = 3, r = 1$ gilt bei Differenzbildung der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (7.47) \quad & 2\mu_{3:3} - 2\mu_{1:3} = 3[\mu_{2:2} - \mu_{1:2}] \\
 & \Leftrightarrow 2[2P \cdot \mu + \mu] - 2\mu(1-M) = 3 \cdot 2\mu \cdot R \\
 & \Leftrightarrow 2P + 1 - 1 + M = 3R. \\
 & \Leftrightarrow R = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}M.
 \end{aligned}$$

R ist also ein gewogenes Mittel von P und M.

NYGARD/SANDSTRÖM haben für R, P und M Punktschätzer sowie Schätzer für deren Varianzen entwickelt und gezeigt, daß diese Punktschätzer asymptotisch normalverteilt sind.²⁴ GIORGI/PALLINI stellen ebenfalls Punktschätzer für R, P und M vor, die asymptotisch normalverteilt sind. Auf der Basis eines Monte-Carlo-Experimentes prüfen sie die Schnelligkeit der Anpassung an die Normalverteilung dieser drei Schätzer.²⁵

²³ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1988), S. 26.

²⁴ Vgl. NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1985a, 1985b).

²⁵ Vgl. GIORGI, G. M. / PALLINI, A. (1987b, 1990).

ÜBERSICHT 6: Zusammenfassende Übersicht der in Kapitel 7 bisher vorgestellten Maße		
kumulierte Lorenz- kurve	$L^{(\nu)}(F)$	$\bar{L}^{((\nu))}(\bar{F})$
abgeleiteter Index	$\Gamma(X, \nu) = \frac{\mu_{1:1} - \mu_{1:\nu}}{\mu_{1:1}}$ $= \text{cov}\left[\frac{X}{\mu}, -\nu(1-F_X)^{\nu-1}\right]$	$\Gamma'(X, \nu) = \frac{\mu_{\nu:\nu} - \mu_{1:1}}{\mu_{1:1}}$ $= \text{cov}\left(\frac{X}{\mu}, \nu F_X^{\nu-1}\right)$ $\Gamma'_n(X, \nu) = \frac{\mu_{\nu:\nu} - \mu_{1:1}}{(\nu-1)\mu_{1:1}}$
$\nu = 2$	$R = \frac{\mu_{1:1} - \mu_{1:2}}{\mu_{1:1}}$	$R = \frac{\mu_{2:2} - \mu_{1:1}}{\mu_{1:1}}$
$\nu = 3$	$M = \frac{\mu_{1:1} - \mu_{1:3}}{\mu_{1:1}}$	$\Gamma'_n(X, 3) = P = \frac{\mu_{3:3} - \mu_{1:1}}{2 \cdot \mu_{1:1}}$

7.3 Der allgemeine Disparitätsindex I von PIESCH und MEHRAN

$\Gamma(X, \nu)$ und $\Gamma'(X, \nu)$ bzw. $\Gamma'_n(X, \nu)$ bilden jeweils eine Unterklasse einer von PIESCH²⁶ und MEHRAN²⁷ vorgeschlagenen allgemeinen Form eines Disparitätsindex

$$(7.48) \quad I = \int_0^1 J(F) \frac{x(F)}{\mu_X} dF \quad \text{mit} \quad J(F) = V(F) - \int_0^1 1 \cdot V(F) dF \quad \text{steigend in } F.$$

²⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 130ff.

²⁷ Vgl. MEHRAN, F. (1976), S. 805ff.

I läßt sich auch als Kovarianz und als gewogene Konzentrationsfläche darstellen:

$$(7.49) \quad I = \int_0^1 V(F) \left(\frac{x(F)}{\mu_X} - 1 \right) dF = \text{cov} \left(\frac{x(F)}{\mu_X}, V(F) \right) = \text{cov} \left(\frac{x(F)}{\mu_X}, J(F) \right)$$

$$(7.50) \quad I = \int_0^1 \frac{dV}{dF} [F - L(F)] dF$$

Über (6.23) läßt sich zudem ein Zusammenhang zu den in den Kapiteln 6.2 und 6.3 vorgestellten Kurvenzügen herstellen:

$$(7.51) \quad I = \int_0^1 V(F) A(F) dF - \int_0^1 V(F) D(F) dF$$

Diese Maße erfüllen das Transferprinzip, wenn $J(F)$ strikt steigend ist. Sie sind im Fall einer Einpunktverteilung null, sonst positiv. Proportionale Änderungen mit $b > 0$ lassen I konstant, da sich weder $J(F)$ noch $\frac{x(F)}{\mu_X}$ ändern. Eine Verschiebung der Verteilung um $a > 0$ Einheiten ($Y = a + X$) führt zu einer Abnahme des Indexwertes. Dies läßt sich bspw. unter Anwendung des Satzes von HERZEL²⁸ nachweisen, wenn die normierten inversen Verteilungsfunktionen als Gewichtsfunktionen interpretiert werden, da $L_X(F) \leq L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ gilt. Allgemein führt eine Lineartransformation $Y = a + bX$ mit $a \geq 0$, $b > 0$ zu dem Zusammenhang

$$I_Y = \int_0^1 J(F_X) \frac{a + b x(F_X)}{a + b \mu_X} dF_X = \frac{b \mu_X I_X}{a + b \mu_X} \quad . \quad \text{Die Durchführung der}$$

Proportionalitätsprobe läßt den Indexwert unverändert, da nur eine Abhängigkeit von der normierten inversen Verteilungsfunktion besteht. Bei Nullenergänzung ergibt sich ein Ansteigen des Indexwertes, was sich wiederum über den Satz von HERZEL nachweisen läßt.

Es stellt sich die Frage, ob auch für I eine flächenmäßige Darstellungsform gefunden werden kann. Dazu soll eine allgemeine Darstellungsart der Kovarianz $\text{cov}(Y, g(Y))$

²⁸ Vgl. HERZEL, A. (1971), S. 31ff.

vorgestellt werden²⁹, wobei $Y \geq 0$ und $g(Y) \geq 0$ oder $g(Y) \leq 0$ über den gesamten Bereich $[a, b]$ angenommen wird:³⁰

$$\begin{aligned}
 (7.52) \quad \text{cov}(g(Y), Y) &= \int_a^b yg(y)f_Y(y)dy - \mu_Y\mu_g \quad \text{mit } \mu_g = \int_a^b g(u)f_Y(u)du \\
 &= b\mu_g - \int_a^b \int_a^{by} \mu_g \frac{g(x)f_Y(x)}{\mu_g} dx dy - \mu_Y\mu_g \\
 &= \mu_g \int_a^b [F_Y(y) - F_g(y)] dy \quad \text{mit } F_g(y) = \int_a^y \frac{g(x)f_Y(x)}{\mu_g} dx.
 \end{aligned}$$

$F_g(x)$ mit $g(x) \geq 0$ ist in der Literatur als "weighted distribution" bekannt und spielt in Kapitel 8 noch eine zentrale Rolle. Die Funktionen $f_Y(y)$ und $f_g(y) = \frac{g(y)f_Y(y)}{\mu_g}$ weisen für $g'(y) \geq 0$ bzw. $g'(y) \leq 0$ für alle y genau einen Schnittpunkt für $\mu_g = g(y)$ auf. Damit schneiden sich $F_g(y)$ und $F_Y(y)$ im Bereich (a, b) nicht. Ist bspw. $\mu_g > 0$ und $g'(y) \geq 0$ für alle y , folgt $f_Y(y) > f_g(y) \Leftrightarrow \mu_g > g(y)$. Da die Fläche unter beiden Funktionen auf Eins normiert ist, kann gefolgert werden $F_Y(y) > F_g(y)$ für $a < y < b$.

Entsprechend gilt für

$$\begin{aligned}
 \mu_g > 0 \text{ und } g'(y) \leq 0: f_Y(y) > f_g(y) &\Leftrightarrow \mu_g > g(y) \Rightarrow F_Y(y) < F_g(y) \text{ für } a < y < b, \\
 \mu_g < 0 \text{ und } g'(y) \geq 0: f_Y(y) > f_g(y) &\Leftrightarrow \mu_g < g(y) \Rightarrow F_Y(y) < F_g(y) \text{ für } a < y < b, \\
 \mu_g < 0 \text{ und } g'(y) \leq 0: f_Y(y) > f_g(y) &\Leftrightarrow \mu_g < g(y) \Rightarrow F_Y(y) > F_g(y) \text{ für } a < y < b.
 \end{aligned}$$

Eine Übertragung auf I mit $V'(F) > 0$ für alle F führt zu zwei Ansätzen:

1. Man setzt $Y = V$ und $g(Y) = x(V)$:

F ist interpretierbar als Verteilungsfunktion $F(F)$ einer in $[0, 1]$ rechteckverteilten Variablen F . Folglich ist die Dichte $f(F) = 1$. Die Transformierte $V(F)$ ist damit rechteck-

²⁹ Vgl. YITZHAKI, S. (1990), S. 167.

³⁰ Vgl. auch YITZHAKI, S. (1990).

verteilt in $[V(0), V(1)]$ und hat die Verteilungsfunktion $F(V) = \int_{V(0)}^V f(V)dV$, wobei der allgemeine Zusammenhang der Dichten $f(F) = f(V) \left| \frac{dV}{dF} \right|$ gilt. Dies führt zu $\mu_g = \mu_X$.

Damit ist

$$(7.53) \quad \text{cov}\left(\frac{x(V)}{\mu_X}, V\right) = \int_{V(0)}^{V(1)} [F(V) - F_g(V)]dV \quad \text{mit} \quad F_g(V) = \int_{(0)}^{V(F)} \frac{x(V_o)f(V_o)}{\mu_X} dV_o.$$

Wegen $\mu_g > 0$ und $g'(V) = x'(V) \geq 0$ kann schließlich $F(V) \geq F_g(V)$ für alle V gefolgert werden kann.

Wählt man bspw. $V(F) = 2F$ ergibt sich folgende Ausdrucksform für R in einem Schaubild mit V an der Abszisse:

$$(7.54) \quad R = \int_0^2 [0,5V - 0,5 \int_0^V \frac{x(V_o)}{\mu_X} dV_o] dV.$$

2. Man setzt $Y = X$ und $g(Y) = g(X)$.

Umgekehrt ergeben sich dann Flächendarstellungen proportional zu I in einem Schaubild mit der Variablen X an der Abszisse, d.h. letztlich analoge Darstellungsformen zur GUMBEL-Form von R .

Folgende Spezialfälle sind bereits bekannt:

$$1. \quad g(x) = F_X(x) \quad \Rightarrow \quad F_g(x) = \int_a^x \frac{F_X(u)}{0,5} f_X(u) du = F_X(x)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{cov}(X, \frac{g(X)}{\mu_g}) = \mu_X R_X,$$

$$2. \quad g(x) = F_X(x)^{\nu-1} \quad \Rightarrow \quad F_g(x) = \int_a^x \frac{F_X(u)^{\nu-1}}{1/\nu} f_X(u) du = F_X(x)^\nu$$

$$\Rightarrow \quad \text{cov}(X, \frac{g(X)}{\mu_g}) = \mu_X \Gamma'(X, \nu),$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad g(x) &= - [1-F_X(x)]^{\nu-1} \Rightarrow F_g(x) = \int_a^x \frac{-[1-F_X(u)]^{\nu-1}}{-1/\nu} f_X(u) du = [1-F_X(x)]^{\nu-1} \\
 &\Rightarrow \operatorname{cov}(X, \frac{g(X)}{\mu_g}) = \mu_X \Gamma(X, \nu), \\
 4. \quad g(x) &= x \Rightarrow F_g(x) = \int_a^x \frac{u f_X(u)}{\mu_X} du = L_X(x) \Rightarrow \operatorname{cov}(X, \frac{g(X)}{\mu_g}) = \frac{\sigma_X^2}{\mu_X}.
 \end{aligned}$$

Wählt man $\tilde{X} = \frac{X}{\mu}$ statt X , erhält man direkt Darstellungformen der Indizes.

Für eine Auseinandersetzung mit alternativen Erweiterungsvorschlägen von R , bspw. von BERREBI/SILBER (1981), CHAKRAVARTY (1988,1990) oder BUTLER/MCDONALD (1989) wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen.

8. Die Korrelations–Lorenzkurven und einige Anwendungsmöglichkeiten

Als eine Abwandlung der Lorenzkurven kann man die Korrelations–Lorenzkurven ("concentration curves"¹) verstehen. KAKWANI (1977/1980a) bespricht sehr ausführlich diese Kurvenzüge, deren Grundprinzip schon lange vorher, u.a. von BLITZ/ - BRITAIN (1964) vorgestellt wurde. Dieses Instrumentarium bietet eine Darstellungsmöglichkeit des Zusammenhangs zweier korrelierender Merkmale X und Y, wobei von einer funktionalen Beziehung zwischen $X \in [a, b]$ und $Y = g(X) \geq 0$ ausgegangen wird. Dabei werden kumulierte Größen betrachtet. Der Verteilung von X, dargestellt über $F_X(x)$ wird die Verteilung von Y über $F_g(x) = \int_a^x \frac{g(u)f_X(u)}{\mu_g} du$ gegenübergestellt. $F_g(x)$

entspricht dabei quasi der ersten Momentverteilung des Merkmals Y, welche jedoch nach der Größe von X kumuliert wurde.

Da sich dieses Konstruktionsprinzip allgemein auf die Beschreibung des Zusammenhangs zweier Merkmale bezieht, ist es naheliegend, daß es in der Regel **nicht die Disparität** eines Merkmals darstellen kann. Spezialfälle lassen sich jedoch ausnehmen.

In Abschnitt 8.1 werden zunächst Grundbegriffe, wesentliche Eigenschaften und Theoreme dieser Kurven sowie ableitbare Indizes eingeführt. Kapitel 8.2 befaßt sich dann explizit mit dem auch in der Literatur sehr ausführlich behandelten Thema der Variablenaggregation. Anschließend werden in 8.3 einige sehr unterschiedliche Anwendungsbereiche dieses Instrumentariums vorgestellt. Auf diesem Gebiet hat insbesondere YITZHAKI gearbeitet, der eine große Bandbreite von Anwendungsmöglichkeiten dieser Instrumente aufzeigt.

8.1 Grundbegriffe und zwei wesentliche Theoreme

Ausgangspunkt ist ein nichtnegatives Merkmal X im Intervall $[a, b]$ mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ sowie ein Merkmal Y, welches aus X über eine Transformationsfunktion $Y = g(X)$ hervorgeht. $g(x)$ ist eine stetige Funktion mit $g(x) \geq 0$ für $x \geq 0$,

¹ KAKWANI, N. C. (1980a), S. 157.

deren erste Ableitung existiert.² Mit $\mu_g = \int_a^b g(x) f(x) dx$ wird der Mittelwert von Y bezeichnet.

Man definiert

$$(8.1) \quad F_g(x) = \frac{1}{\mu_g} \int_a^x g(u) f(u) du \quad \text{mit } F_g(a) = 0 \text{ und } F_g(b) = 1.$$

Für die Ableitung gilt:

$$(8.2) \quad \frac{dF_g(x)}{dx} = \frac{g(x) \cdot f(x)}{\mu_g} = f_g(x) \geq 0.$$

In der Literatur³ ist die Verteilung $f_g(x)$ bzw. $F_g(x)$ auch als "weighted distribution" bekannt und ist Basis einer Vielzahl von Anwendungen. Mit $g(x) = x$ ist $F_g(x) = L(x)$. Die Beziehung zwischen $F_1[g(x)]$ und $F_X(x)$ wird als **Korrelations-Lorenzkurve** ("concentration curve") der Funktion $g(x)$ bezeichnet.⁴

$$(8.3) \quad F_g(F_X) = \int_0^{F_X} \frac{g(x(F))}{\mu_g} dF \quad \text{mit } F_g(0) = 0 \quad \text{und} \quad F_g(1) = 1.$$

Zur Herleitung wird das normale Graduationsschema um einen Schritt erweitert: Nach der Inversion wird $x(F_X)$ in $g(x(F_X))$ transformiert, einen Kurvenzug, der nicht zwingend steigend ist. Das Merkmal $Y = g(X)$ wird nach der Höhe der Merkmalsausprägungen von X und nicht von $g(X)$ kumuliert. Der Funktionswert $F_g(F_X)$ gibt den Anteil an der Merkmalssumme von Merkmal $Y = g(X)$ an, den die $F_X \cdot 100\%$ kleinsten Merkmalsträger des Merkmals X auf sich vereinigen.

² Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 157.

³ Vgl. PATIL, G. P. / RAO, C. R. (1977 und 1978) sowie PATIL, G. P. / RAO, C. R. / ZELEN, M. (1988).

⁴ Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 157.

Wegen (8.3) ist dann

$$(8.4) \quad \frac{dF_g[F_X(x)]}{dF_X(x)} = \frac{dF_g(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dF_X} = \frac{g(x)}{\mu_g} \geq 0.5$$

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung hängt davon ab, ob $g(x)$ steigend oder fallend ist:

$$(8.5) \quad \frac{d^2F_g[F_X(x)]}{dF_X(x)^2} = \frac{d\left[\frac{dF_g(F_X)}{dF_X}\right]}{dx} \cdot \frac{dx}{dF_X} = \frac{g'(x)}{\mu_g} \cdot \frac{1}{f(x)}.$$

Da $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ auch das Vorzeichen der Elastizität $\eta_{g,x} = g'(x) \frac{x}{g(x)}$ bestimmt, läßt sich die Aussage treffen, daß $F_g(F_X)$ genau dann konvex [konkav] ist, wenn $\eta_{g,x} \geq 0$ [$\eta_{g,x} \leq 0$] für alle $x \geq 0$ ist.

Im Gegensatz zur Lorenzkurve ist $F_g[F_X]$ also nicht zwingend konvex, da die Kumulation des Merkmals $Y = g(X)$ nach der Größenordnung des Merkmals X vorgenommen wird. Dieses Prinzip – eine Variable wird gemäß der Größenordnung einer anderen kumuliert bzw. weiterverarbeitet –, ist sehr allgemein und eröffnet daher eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten.⁶

Als geeignetes **Flächenmaß** für die Korrelationsmessung definiert KAKWANI

$$(8.6) \quad C_g = 1 - 2 \int_0^1 F_g(x) f(x) dx,^7$$

$$(8.7) \quad = 1 - 2 \int_0^1 F_g(F_X) dF_X = 2 \int_0^1 [F_X - F_g(F_X)] dF_X.$$

⁵ Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 158.

⁶ In Analogie zu $GL(F)$ von SHORROCKS (Vgl. Kap. 3.3) kann auch hier wiederum eine absolute bzw. nicht normierte Version von $F_g(F_X)$ betrachtet werden. Vgl. YITZHAKI, S. / OLKIN, I. (1991), S. 386f.

⁷ Vgl. KAKWANI, N. C. (1977), S. 721 und (1980a), S. 175.

C_g läßt sich als Kovarianz zwischen $\frac{g(X)}{\mu_g}$ und $2F_X(x)$ interpretieren.⁸ Die Partielle Integration führt zu:

$$\begin{aligned}
 (8.8) \quad C_g &= 1 - 2 \left[[F_g(x)F_X(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{g(x)}{\mu_g} F_X(x) f_X(x) dx \right] \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{g(x)}{\mu_g} 2F_X(x) f_X(x) dx - 1 \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\frac{g(x)}{\mu_g} - 1 \right] [2F_X(x) - 1] f_X(x) dx \\
 &= \text{Cov} \left[\frac{g(X)}{\mu_g}, 2F_X(x) \right].
 \end{aligned}$$

C_g ist ein Korrelationsmaß, welches den Wert Null annimmt, wenn $g(x)$ und $F_X(x)$ nicht korreliert sind, d.h. sich die Flächenstücke unterhalb und oberhalb der Diagonale $F_g = F_X$ ausgleichen. Bei einer proportionalen Änderung von $g(x)$, $g^*(x) = bg(x)$, $b > 0$ bleibt C_g konstant.

Der Gini-Koeffizient R_Y mit $Y = g(X)$ ist formulierbar als:

$$(8.9) \quad R_Y = \text{Cov} \left[\frac{g(X)}{\mu_g}, 2F_Y(g(X)) \right],$$

so daß gilt:

$$(8.10) \quad C_g = \frac{\text{Cov}(g(x), F_X(x))}{\text{Cov}(g(x), F_Y(g(x)))} R_Y$$

⁸ Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 173.

Wegen $\text{Var } F_X(x) = \text{Var } F_Y(g(x)) = \int_0^{\infty} F(x)^2 f(x) dx - \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{12}$ läßt sich schreiben

$$(8.11) \quad C_g = \frac{\text{Cov}(g(x), F_X(x)) / [\text{Var } g(x) \cdot \text{Var } F_X(x)]^{0,5}}{\text{Cov}(g(x), F_Y(g(x))) / [\text{Var } g(x) \cdot \text{Var } F_Y(g(x))]^{0,5}} \cdot R_Y,$$

$$\Leftrightarrow C_g = \frac{\rho(g(x), F_X(x))}{\rho(g(x), F_Y(g(x)))} R_Y,$$

wobei ρ der Korrelationskoeffizient nach Pearson–Bravais ist.

Im Extremfall $g'(x) > 0$ für $x \geq 0$ gilt $\rho(g(x), F_X(x)) = \rho(g(x), F_Y(g(x)))$,

was bedeutet, bei X und $g(X)$ ordnen sich die Merkmalsträger in gleicher Reihenfolge, so daß $C_g = R_Y$ ist.

Für $g'(x) < 0$ für $x \geq 0$ ist $\rho(g(x), F_X(x)) = -\rho(g(x), F_Y(g(x)))$, d.h. x und $g(x)$ ordnen sich die Merkmalsträger in umgekehrter Reihenfolge. C_g nimmt in dem Fall den Wert $-R_Y$ an. Folglich variiert C_g im Bereich $-R_Y \leq C_g \leq R_Y$.⁹

Ein Ansatz für die Aggregation von k Sektoren mit $g(x) = g_i(x) = g_j(x)$ und $a \leq a_i \leq b_i \leq b$ läßt sich aus der Kovarianzstruktur schnell herleiten

$$(8.12) \quad C_g = \sum_i h_i l_i C_{g_i} + \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{\mu_g} \int_a^b g(x) [2F_i(x) - 1] f_j(x) dx.^{10}$$

Beide Summanden können ein positives oder negatives Vorzeichen haben. Mit $g(X) = X$ gelangt man zu Zerlegung B des Gini–Koeffizienten.¹¹

⁹ Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 175 und PIESCH, W. (1975), S. 76.

¹⁰ Vgl. Herleitung im Anhang.

¹¹ Vgl. Kap. 4.7.

Eine Verallgemeinerung von C_g schlägt YITZHAKI¹² in Analogie zu $\Gamma(X, \nu)$ vor:

$$(8.13) \quad \Gamma(Y, X, \nu) = \text{cov}\left(\frac{g(X)}{\mu_g}, -\nu(1 - F_X(x))^{\nu-1}\right) = \frac{\mu_g - E[g(X_{1:\nu})]}{\mu_g}$$

$$\text{mit } E[g(X_{1:\nu})] = \nu \int_0^1 g(x(F_X)) (1 - F_X)^{\nu-1} dF_X. \quad {}^{13}$$

Entsprechend läßt sich analog $\Gamma'(X, \nu)$ auch eine andere Verallgemeinerung von C_g entwickeln:

$$(8.14) \quad \Gamma'(Y, X, \nu) = \text{cov}\left(\frac{g(X)}{\mu_g}, \nu F_X(x)^{\nu-1}\right) = \frac{E(g(X_{\nu:\nu})) - \mu_g}{\mu_g}$$

$$\text{mit } E(g(X_{\nu:\nu})) = \nu \int_0^1 g(x(F_X)) F_X^{\nu-1} dF_X. \quad {}^{14}$$

Die **relative Korrelations-Lorenzkurve** (oder "relative concentration curve")¹⁵ von $Y = g(X)$ mit Bezug zu $Z = g^*(X)$ ist definiert als Gegenüberstellung von $F_g(x)$ und $F_g^*(x)$ für gegebenes x oder äquivalent $F_g(F_X)$ versus $F_g^*(F_X)$ für gleiches F_X . $F_g[F_g^*]$, wobei an $g^*(x)$ die gleichen Ansprüche gestellt werden wie an $g(x)$.

Die Steigung von $F_g[F_g^*]$ ist positiv.

$$(8.15) \quad \frac{dF_g[F_g^*(x)]}{dF_g^*(x)} = \frac{dF_g[F_X(x)]}{dF_X(x)} \cdot \frac{dF_X(x)}{dF_g^*(F_X(x))} = \frac{\mu_g^*}{\mu_g} \cdot \frac{g(x)}{g^*(x)} > 0.$$

¹² Vgl. YITZHAKI, S. (1991), S. 236.

¹³ Vgl. Kapitel 4.2.1.1.

¹⁴ Vgl. Kapitel 4.2.1.1.

¹⁵ Vgl. HAINSWORTH, G. B. (1964) und PFÄHLER, W. (1985).

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung hängt von der Differenz der Elastizitäten $\eta_{g,x} = g'(x) \frac{x}{g(x)}$ und $\eta_{g^*,x} = g^*(x) \frac{x}{g^*(x)}$ ab:

$$\begin{aligned}
 (8.16) \quad \frac{dF_g^2 [F_g^*(x)]}{dF_g^*(x)^2} &= \frac{d \left[\frac{dF_g [F_g^*(x)]}{dF_g^*(x)} \right]}{dx} \cdot \frac{dx}{dF_g^*(x)} \\
 &= \frac{d \left[\frac{\mu_g^* \cdot g(x)}{\mu_g \cdot g^*(x)} \right]}{dx} \cdot \frac{\mu_g^*}{g^*(x) f(x)} \\
 &= \frac{\mu_g^{*2}}{\mu_g f(x) g^*(x)} \left[\frac{g'(x) g^*(x) - g^*(x) g'(x)}{g^*(x)^2} \right] \\
 (8.17) \quad \Leftrightarrow \frac{dF_g^2 [F_g^*(x)]}{dF_g^*(x)^2} &= \frac{\mu_g^{*2}}{\mu_g} \cdot \frac{g(x)}{g^*(x)^2} \frac{1}{x f(x)} \left[\eta_{g,x} - \eta_{g^*,x} \right]^{16}.
 \end{aligned}$$

Die relative Korrelations–Lorenzkurve ist also genau dann konvex, wenn die Elastizität $\eta_{g,x}$ in jedem Punkt x größer ist als $\eta_{g^*,x}$.

$\eta_{g,x} \geq \eta_{g^*,x}$ für $x \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\frac{g(x)}{g^*(x)}$ nichtfallend für $x \geq 0$.¹⁷

Betrachtet man den Spezialfall $g'(x) > 0$ und $g^*(x) = x$, entspricht das einer Star-shaped–Beziehung:

Aus $g'(x) > 0$ folgt $g(x(F)) = y(F)$;

also ist

$$\begin{aligned}
 \eta_{g,x} \geq \eta_{x,x} = 1 \text{ für alle } x \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} \text{ nichtfallend für } x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{y(F)}{x(F)} \text{ nichtfallend für } 0 < F < 1. \text{ }^{18}
 \end{aligned}$$

¹⁶ Vgl. KAKWANI, N. C. (1977), S. 720 und (1980a), S. 161.

¹⁷ Es gilt dann allgemein $\int_a^b \frac{x g(x) f(x)}{\mu_g} dx \geq \int_a^b \frac{x g^*(x) f(x)}{\mu_{g^*}} dx$,
vgl. PATIL, G. P. / RAO, C. R. (1978), S. 184.

Ist also beispielsweise " $\frac{x}{F(x)}$ nichtfallend in $x \geq 0$ ", folgt daraus $R \leq V^2$.

¹⁸ Vgl. Kap. 3.1.

Die Lorenzkurve selbst ergibt sich, wenn $g(X) = X$ und $g^*(X) = 1$ gesetzt werden. Dann ist $\mu_g = \mu$, $\mu_{g^*} = 1$, $\eta_{g^*,x} = 0$ und $\eta_{g,x} = 1$; Die erste Ableitung geht über in

$$\frac{x}{\mu}, \text{ die zweite entspricht } \frac{dF_g^2[F_g^*]}{dF_{g^*}^2} = \frac{1}{\mu} \frac{x}{f(x)} [1 - 0] = \frac{1}{\mu f(x)}.$$

Es gilt $F_g(x) = F_{g^*}(x)$, wenn $g(x) = bg^*(x)$, $b > 0$.

Ist die relative Korrelations-Lorenzkurve $F_g^*(F_g)$ konvex, dann gilt $F_g(x) \geq F_{g^*}(x)$ für alle x und damit $F_g(F_X) \geq F_{g^*}(F_X)$ für alle F_X , d.h. die Korrelations-Lorenzkurven ordnen sich. Diese Aussage ist Inhalt des 1. Theorems von KAKWANI¹⁹.

THEOREM 1: "Die Korrelations-Lorenzkurve der Funktion $g(x)$ $F_g(F_X)$ liegt über (unter) der der Funktion $g^*(x)$ $F_{g^*}(F_X)$, wenn $\eta_{g,x}$ kleiner (größer) ist als $\eta_{g^*,x}$ für alle $x \geq 0$.²⁰

Die erweiterte Formulierung in Theorem 8.1 von KAKWANI (1980), die eine Umkehrung des Theorems beinhaltet, ist nur unter der Einschränkung zulässig, daß man eine Menge von Funktionen betrachtet, für die über den **gesamten Bereich** von x entweder $\eta_{g,x} \geq \eta_{g^*,x}$ oder $\eta_{g,x} \leq \eta_{g^*,x}$ gilt.

Untersucht man dagegen Verteilungen, für die eine einheitliche Relation zwischen $\eta_{g^*,x}$ und $\eta_{g,x}$ über den gesamten Bereich von x **nicht** vorliegt, läßt sich Theorem 1 nicht umkehren, wie ein Gegenbeispiel zeigt:

Betrachtet wird $g(x) = (x - 0,8)^2 + 0,1$ und $g^*(x) = 1$. x sei rechtssteil dreieckverteilt in $[0,1]$. Es ist $\eta_{g,x} > 0 = \eta_{g^*,x}$ für $x > 0,8$ und $\eta_{g,x} < 0 = \eta_{g^*,x}$ für $x < 0,8$. Die

Korrelations-Lorenzkurve verläuft jedoch für **alle** $F_X \in (0,1)$ oberhalb der Diagonalen:

$$(8.18) \quad F_g(F_X) = \frac{75}{13} \left[\frac{F_X^2}{2} - \frac{32}{30} F_X^{1,5} + \frac{74}{100} F_X \right] > F_X;$$

¹⁹ Vgl. KAKWANI, N. C. (1977), S. 720.

²⁰ Vgl. auch IYENGAR, N. S. (1960), S. 884f.

d.h. allein aus der Lage der Korrelations–Lorenzkurven zueinander kann noch nicht auf die Größe der Elastizitäten geschlossen werden, was eine wesentliche Einschränkung der Anwendungsbedeutung der Korrelationskurven darstellt. Ist jedoch $F_g(F_X)$ durchgehend konvex bzw. durchgehend konkav, muß eine eindeutige Größenbeziehung zwischen $\eta_{g,x}$ und $\eta_{g,x}^*$ vorliegen, d.h. in diesem Fall ist ein Rückschluß möglich.

Zwischen $F_g[F_X]$ und $L_Y(F_Y)$ besteht folgende Beziehung:

THEOREM 2²¹: "Wenn die Funktion $y = g(x)$ eine strikt positive Ableitung $g'(x)$ für alle $x \geq 0$ besitzt, stimmen $F_g(F_X)$ und $L_Y(F_Y)$ überein".

Wegen $f_Y(y) = |h'(y)| f_X[h(y)]$ mit $x = h(y)$ als Umkehrfunktion von $y = g(x)$ gilt für $y = g(x)$:

$$(8.19) \quad F_X(x_0) = \int_0^{x_0} f_X(u) du = \int_0^{y_0} f_X(h(y)) dy = F_Y(y_0)$$

und

$$(8.20) \quad F_g(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{g(x) f_X(x)}{\mu_g} dx = \int_0^{y_0} \frac{y f_Y(y)}{\mu_Y} dy = L_Y(y_0).$$

Eine strikt negative Ableitung führt zu einer entgegengesetzten Ordnung der Merkmalswerte, $F_g[F_X]$ entspricht dann $1 - L_Y(1 - F_Y)$ ²²:

$$(8.21) \quad F_X(x_0) = \int_0^{x_0} f_X(x) dx = \int_{y_0}^{\infty} f_Y(y) dy = 1 - F_Y(y_0)$$

$$(8.22) \quad F_g(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{g(x) f_X(x)}{\mu_g} dx = \int_{y_0}^{\infty} \frac{y \cdot f_Y(y)}{\mu_Y} dy = 1 - L_Y(y_0).$$

²¹ Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 162.

²² Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 76.

In einer Übersicht sollen abschließend noch einmal einige Spezialfälle zusammengefaßt werden.

ÜBERSICHT 7: Lage der (Korrelations-)Lorenzkurven für verschiedene Transformationsfunktionen $g(x)$ und $g^*(x)$		
$g'(x) > 0, g^{*'}(x) > 0$ $\eta_{g,x} > \eta_{g^*,x} > 0$	$F_g(F_{g^*}) = L_g(L_{g^*})$ konvex	$L_g(F) < L_{g^*}(F)$
$g'(x) > 0, g^{*'}(x) > 0$ $0 < \eta_{g,x} < \eta_{g^*,x}$	$F_g(F_{g^*}) = L_g(L_{g^*})$ konkav	$L_g(F) > L_{g^*}(F)$
$g'(x) > 0, g^{*'}(x) < 0$ $\eta_{g,x} > 0 > \eta_{g^*,x}$	$F_g(F_{g^*}) = L_g(1-L_{g^*})$ konkav	$L_g(F) > 1-L_{g^*}(1-F)$
$g'(x) < 0, g^{*'}(x) < 0$ $0 > \eta_{g,x} > \eta_{g^*,x}$	$F_g(F_{g^*}) = 1-L_g(1-L_{g^*})$ konvex	$1-L_g(1-F) < 1-L_{g^*}(1-F)$
$g'(x) < 0, g^{*'}(x) < 0$ $0 > \eta_{g^*,x} > \eta_{g,x}$	$F_g(F_{g^*}) = 1-L_g(1-L_{g^*})$ konkav	$1-L_g(1-F) > 1-L_{g^*}(1-F)$
$g'(x) < 0, g^{*'}(x) > 0$ $\eta_{g,x} < 0 < \eta_{g^*,x}$	$F_g(F_{g^*}) = 1-L_g(L_{g^*})$ konkav	$1-L_g(1-F) > L_{g^*}(F)$

8.2 Variablenaggregation und Interpretationsmöglichkeiten einzelner Komponenten

Für die Variablenaggregation ist schließlich das dritte Theorem von KAKWANI²³ von Bedeutung. Angewendet werden diese Überlegungen in der Literatur z. B. bei der Zerlegung von Haushaltseinkommen in verschiedenen Einkommensarten²⁴ oder von Konsumausgaben für verschiedene Konsumzwecke²⁵.

THEOREM 3: "Wenn $Y = g(X) = \sum_{i=1}^k g_i(X)$ mit $\mu_g = \sum_{i=1}^k \mu_{g_i}$,
dann gilt $\mu_g F_g(x) = \sum_{i=1}^k \mu_{g_i} F_{g_i}(x)$ ".

Überlegung: Es ist

$$(8.23) \quad \mu_g F_g(x) = \int_a^x g(u) f_X(u) du = \int_a^x \sum_{i=1}^k g_i(u) f_X(u) du$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_a^x g_i(u) f(u) du = \sum_{i=1}^k \mu_{g_i} F_{g_i}(x)$$

Der Funktionswert $F_g(F_X)$ ist damit ein gewogenes Mittel der Funktionswerte $F_{g_i}(F_X)$:

$$(8.24) \quad F_g(F_X) = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} F_{g_i}(F_X).$$

Betrachtet man $g(X) = X$ geht $F_g(x)$ in $L_X(x)$ über. Da $L_{g_i}(F) \leq F_{g_i}(F)$ folgt

$$(8.25) \quad L_X(F) = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot F_{g_i}(F) \geq \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot L_{g_i}(F) \geq \min_i L_{g_i}(F).$$

²³ Vgl. KAKWANI, N. (1980a), S. 163.

²⁴ Vgl. STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1986 und 1988) sowie PODDER, N. (1993)

²⁵ Vgl. YITZHAKI, S. / THIRSK, W. (1990).

²⁶ Vgl. RIETVELD, P. (1990), S. 189 und SATCHELL, S. E. (1987), S. 323ff.

D.h. die Lorenzkurve des Aggregats liegt an jeder Stelle F nicht unterhalb des kleinsten Lorenzkurvenwertes, den eine der Summenvariablen aufzuweisen hat.²⁷

Aus (8.24) läßt sich eine **Zerlegung für den Index C_g** ableiten:²⁸

$$\begin{aligned} \mu_g \int_a^b F_{g_i}(x) f(x) dx &= \sum_{i=1}^k \mu_{g_i} \int_a^b F_{g_i}(x) f(x) dx \\ \Leftrightarrow \mu_g \left[\frac{1-C_g}{2} \right] &= \sum_{i=1}^k \mu_{g_i} \left[\frac{1-C_{g_i}}{2} \right] \\ (8.26) \quad \Leftrightarrow C_g &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_g} C_{g_i}; \end{aligned}$$

d.h. C_g ist ein gewogenes Mittel der C_{g_i} .

Ist $g(X) = X$ und $Y_i = g_i(X)$, also $X = \sum_{i=1}^k g_i(X)$, gilt damit folgende

Variablen-Zerlegung für den Gini-Koeffizienten R_X :

$$\begin{aligned} (8.27) \quad R_X &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot C_{g_i} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot \text{Cov} \left[\frac{g_i(X)}{\mu_{g_i}}, 2F_X \right]^{29} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \frac{\text{Cov}(Y_i, 2F_X)}{\text{Cov}(Y_i, 2F_{Y_i})} R_{g_i} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} R(Y_i, X, 2) R_{g_i}. \end{aligned}$$

²⁷ Vgl. ausführlich dazu Kap. 9.3.3.

²⁸ Vgl. KAKWANI, N. (1980a), S. 175.

²⁹ Vgl. PYATT, G. / CHEN, C.-N. / FEI, J. (1980), S.457 und NYGARD, F. / SANDSTRÖM, A. (1981), S. 167f.

Dabei kann das Verhältnis $\frac{C_{g_i}}{R_{g_i}}$ als Korrelationskoeffizient³⁰ interpretiert werden.

R_X ergibt sich also als gewogenes Mittel der Gini-Koeffizienten R_{g_i} zuzüglich einem nichtpositiven Ausdruck:

$$(8.28) \quad R_X = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} R_{g_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} (C_{g_i} - R_{g_i}) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} R_{g_i} \quad 31.$$

Ist $g_i'(x) > 0$ für alle $i = 1 \dots k$, gilt $C_{g_i} = R_{g_i}$. In diesem Fall liegt der Wert von R_X zwischen dem des kleinsten und dem des größten Gini-Koeffizienten der Summenglieder R_{g_i} :

$$(8.29) \quad \min_i R_{g_i} \leq R_X \leq \max_i R_{g_i}. \quad 32$$

Im allgemeinen Fall gilt

$$(8.30) \quad \min_i R_{g_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} (C_{g_i} - R_{g_i}) \leq R_X \leq \max_i R_{g_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} (C_{g_i} - R_{g_i}) \leq \max_i R_{g_i},$$

gegebenenfalls ist R_X also sogar kleiner als $\min_i R_{g_i}$.³³

Für die **erweiterten Indizes** $\Gamma(X, \nu)$ und $\Gamma'(X, \nu)$ ³⁴ lassen sich, wie (8.31) und (8.32) zeigen, **analoge Zerlegungen** ableiten [mit $Y_i = g_i(X)$, $X = \sum_{i=1}^k g_i(X)$].

³⁰ Vgl. SCHECHTMAN, E. / YITZHAKI, S. (1987), S. 210: "Measure of association".

³¹ Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 179.

³² Vgl. KAKWANI, N. C. (1980a), S. 176.

³³ Vgl. "umgekehrte" Aussage für die Sektorenaggregation. Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 209.

³⁴ Vgl. Kapitel 7.

$$\begin{aligned}
 (8.31) \quad \Gamma(X, \nu) &= \text{Cov}\left[\frac{X}{\mu_X}, -\nu(1-F_X)^{\nu-1}\right] \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \frac{\text{Cov}[Y_i, -\nu(1-F_X)^{\nu-1}]}{\text{Cov}[Y_i, -\nu(1-F_{Y_i})^{\nu-1}]} \cdot \frac{\text{Cov}[Y_i, -\nu(1-F_{Y_i})^{\nu-1}]}{\mu_{g_i}} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot R(Y_i, X, \nu) \cdot \Gamma(Y_i, \nu)^{35}
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 (8.32) \quad \Gamma'(X, \nu) &= \text{Cov}\left[\frac{X}{\mu_X}, \nu F_X^{\nu-1}\right] \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot \frac{\text{cov}[Y_i, \nu F_X^{\nu-1}]}{\text{cov}[Y_i, \nu F_{Y_i}^{\nu-1}]} \cdot \frac{\text{cov}(Y_i, \nu F_{Y_i}^{\nu-1})}{\mu_{g_i}} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot R'(Y_i, X, \nu) \cdot \Gamma'(Y_i, \nu).
 \end{aligned}$$

$R(Y_i, X, \nu)^{36}$ bzw. $R'(Y_i, X, \nu)$ können als **erweiterte Korrelationskoeffizienten** interpretiert werden, da hier ein nicht normiertes Korrelationsmaß ins Verhältnis zu einem Streuungsmaß gesetzt wird.³⁷

Diese Korrelationskoeffizienten haben eine Reihe von Eigenschaften³⁸, die mit solchen des Pearson'schen Korrelations- oder des Spearman'schen Rangkorrelationskoeffizienten

³⁵ Vgl. YITZHAKI, S. (1991), S. 236 und LERMAN, R. I. / YITZHAKI, S. (1984), S. 367.

³⁶ Vgl. SCHECHTMAN, E. / YITZHAKI, S. (1987), S. 210, LERMAN, R. I. / YITZHAKI, S. (1985) S. 152 sowie YITZHAKI, S. (1991), S. 236.

³⁷ Vgl. YITZHAKI, S. (1991), S. 236. Er bezeichnet $\text{cov}(Y_i, -(1-F_{Y_i})^{\nu-1})$ als "extended Gini variability index" und $\text{cov}(Y_i, -(1-F_X)^{\nu-1})$ als "extended Gini covariance".

³⁸ Vgl. für $R(X, Y, 1)$ SCHECHTMAN, E. / YITZHAKI, S. (1987).

enten übereinstimmen. Beim Pearson'schen Korrelationskoeffizienten werden zwei metrische Merkmale betrachtet, beim Spearman'schen Rangkorrelationskoeffizienten gehen die Merkmale über Ränge ein, d.h. werden "ordinalskaliert verarbeitet". Hier ist eine "Komponente" metrisch, die andere geht über Verteilungsfunktionswerte ein.³⁹ Im Fall einer bivariaten Normalverteilung von X und Y_i stimmen $R(Y_i, X, 1)$ und der Pearson'sche Korrelationskoeffizient überein.⁴⁰

$R(Y_i, X, \nu)$ bzw. $R(Y_i, X, \nu)$ nimmt Werte im Intervall von -1 bis 1 an. Sind Y_i und F_X nicht korreliert, ist der Koeffizient Null. Ist $g_i(x)$ monoton steigend [fallend], wird der Grenzwert $+1$ [-1] erreicht, da $F_{Y_i}(y_i) = F_X(x)$ [$1 - F_{Y_i}(y_i) = F_X(x)$] ist⁴¹.

Lineartransformationen von Y_i der Form $Y_i^* = a + b Y_i > 0$ mit $b > 0$ lassen die Korrelationskoeffizienten unverändert.⁴²

$R(Y_i, X, 2)$ läßt sich in eine von RAVEH⁴³ vorgeschlagene Familie von "Monotoniemaßen" "for measuring monotone association"⁴⁴ einordnen, der auch z. B. Kendall's τ oder der Spearman'sche Rangkorrelationskoeffizient angehören. MULIERE/PETRONE schlagen den Spezialfall $R(Y_i, X, 2)$ mit $g_i(x) = E(Y_i | X = x)$ als Maßstab für die Messung monotoner Abhängigkeit vor.⁴⁵

$R(Y, X, 2)$ wird von RAVEH zudem als Maßzahl für das Ausmaß an Konvexität (bzw. Konkavität) einer geordneten Reihe (bspw. einer Zeitreihe) vorgeschlagen.⁴⁶ Betrachtet

³⁹ Vgl. YITZHAKI, S. / OLKIN, I. (1991), S. 382f.

⁴⁰ Vgl. YITZHAKI, S. / OLKIN, I. (1991), S. 383.

⁴¹ Weitere Erläuterungen zu Eigenschaften finden sich bei SCHECHTMAN, E. / YITZHAKI, S. (1987).

⁴² Vgl. STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1988), S. 321.

⁴³ Vgl. RAVEH, A. (1989b).

⁴⁴ RAVEH, A. (1989b), S. 1415.

⁴⁵ Vgl. MULIERE, P. / PETRONE, S. (1992). Sie entwickeln daneben sogenannte "monotone dependence functions", deren Bausteine Lorenzkurven- und Korrelations-Lorenzkurvenwerte sind.

⁴⁶ Vgl. RAVEH, A. (1989b), S. 1415ff.

man erste Differenzen von Zeitreihenwerten $d_t = y_t - y_{t-1}$, bezeichnet er die Zeitreihe genau dann als konvex, wenn diese Differenz monoton steigend ist. In dem Fall ist auch $R(d,t,2) = \frac{\text{cov}(d,F(t))}{\text{cov}(d,F(d))}$ positiv, da d mit t tendenziell zunimmt.⁴⁷

$R(Y_i, X, 1)$ kann daneben als Verhältnis zweier durch die Kleinst-Quadrate-Methode ermittelter Schätzer für die Steigungskoeffizienten b_{Y_i} und $b_{Y_i}^*$ interpretiert werden, die aus folgenden linearen Ansätzen $Y_i(F_X) = a_{Y_i} + b_{Y_i} F_X + u_{Y_i}$ und $Y_i(F_{Y_i}) = a_{Y_i}^* + b_{Y_i}^* F_{Y_i} + u_{Y_i}^*$ hervorgehen:

Es ergibt sich dann

$$(8.33) \quad \frac{b_{Y_i}}{b_{Y_i}^*} = \frac{\text{cov}(y_i, F_X) / \text{Var} F_X}{\text{cov}(y_i, F_{Y_i}) / \text{Var} F_{Y_i}} = R(Y_i, X, 2).$$

Über die Zerlegung des Gini-Koeffizienten bei der Variablenaggregation kann man die Frage beantworten, inwieweit sich R_X ändert, wenn sich **eine Komponente Y_i** proportional ändert. Bspw. könnte man verschiedene Einkommensarten betrachten, wobei eine Art um eY_i erhöht wird: $Y_i^* = (1 + e) Y_i$, $e > 0$.

Da R_{g_i} und $R(Y_i, X, 1)$ bei proportionaler Änderung konstant bleiben, wirkt sich die proportionale Transformation über ein geändertes Mittelwertverhältnis aus. Es ist dann

$$(8.34) \quad R_{X_{\text{neu}}} - R_{X_{\text{alt}}} = e \cdot \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} (C_{g_i} - R_X).$$

$$= e \cdot \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} (R(Y_i, X, 1) \cdot R_{g_i} - R_X).^{48}$$

⁴⁷ Vgl. RAVEH, A. (1989b), S. 1418ff.

⁴⁸ Vgl. die ausführliche Herleitung bei STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1986), S. 737ff.

Der Wert R_X verringert sich auf jeden Fall dann, wenn $R(Y_i, X, 1)$ negativ ist. Eine notwendige Bedingung für ein Absinken von R_X bei positivem $R(Y_i, X, 1)$ ist $R_{g_i} < R_X$.⁴⁹

Eine alternative "Zerlegung" von $\Gamma(X, \nu)$ bzw. $\Gamma'(X, \nu)$ führt zu Komponenten, die YITZHAKI als erweiterte Gini-Regressionskoeffizienten β bzw. erweiterte Gini-Elastizitäten η bezeichnet und interpretiert [mit $X \geq \Sigma Y_i$].⁵⁰

Es ist

$$\begin{aligned}
 (8.35) \quad \Gamma(X, \nu) &= \sum_{i=1}^k \frac{\text{cov}(Y_i, -\nu(1-F_X)^{\nu-1})}{\text{cov}(X, -\nu(1-F_X)^{\nu-1})} \Gamma(X, \nu) \\
 &= \sum_{i=1}^k \beta(Y_i, X, \nu) \cdot \Gamma(X, \nu) \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot \eta(Y_i, X, \nu) \cdot \Gamma(X, \nu).
 \end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned}
 (8.36) \quad \Gamma'(X, \nu) &= \sum_{i=1}^k \frac{\text{cov}(Y_i, \nu F_X^{\nu-1})}{\text{cov}(X, \nu F_X^{\nu-1})} \Gamma'(X, \nu) \\
 &= \sum_{i=1}^k \beta'(Y_i, X, \nu) \cdot \Gamma'(X, \nu) \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\mu_{g_i}}{\mu_X} \cdot \eta'(Y_i, X, \nu) \cdot \Gamma'(X, \nu).
 \end{aligned}$$

Der Spezialfall $\nu = 2$ ergibt die bekannten Komponenten $\beta(Y_i, X, 2) = \beta'(Y_i, X, 2) = \frac{C_{g_i} \mu_{g_i}}{R_X \mu_X}$ und $\eta(Y_i, X, 2) = \eta'(Y_i, X, 2) = \frac{C_{g_i}}{R_X}$.

⁴⁹ Vgl. STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1986), S. 726 und LERMAN, R. I. / YITZHAKI, S. (1985), S. 152 sowie STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1988) für einen erweiterten Ansatz.

⁵⁰ Vgl. YITZHAKI, S. (1991), S. 236.

Der Ausdruck $\beta(Y_i, X, 2)$ kann dabei als Wert für ein gewogenes Mittel der marginalen Bedeutung jeder einzelnen Komponente Y_i an der Gesamtsumme $X = \sum Y_i$ interpretiert werden.⁵¹

In diskreter Schreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (8.37) \quad b_i &= \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n (y_i(x_j) - y_i(x_k))}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n (x_j - x_k)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{x_j - x_k}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n (x_j - x_k)} \cdot \frac{y_i(x_j) - y_i(x_k)}{x_j - x_k}, x_j \geq x_k \quad .^{52} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n v_{ijk} \cdot m_{ijk}
 \end{aligned}$$

Wie der letzte Ausdruck zeigt, kann b_i als robuster Schätzer des Steigungskoeffizienten⁵³ einer Geraden Y_i auf X interpretiert werden⁵⁴, der sich als gewogener Durchschnitt aller Steigungen zwischen den einzelnen Beobachtungswerten m_{ijk} ergibt.

b_i ist ein konsistenter Schätzwert für $\frac{\text{cov}(Y_i, F_X)}{\text{cov}(X, F_X)}$ der Grundgesamtheit; seine Verteilung strebt für großes n gegen die Normalverteilung.⁵⁵

⁵¹ Vgl. YITZHAKI, S. / THIRSK, W. (1990), S. 9. und STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1986), S. 739.

⁵² Vgl. STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1986), S. 739.

⁵³ Vgl. OLKIN, I. / YITZHAKI, S. (1992), S. 186.

⁵⁴ Vgl. OLKIN, I. / YITZHAKI, S. (1992), S. 186f mit Herleitung.

⁵⁵ Vgl. YITZHAKI, S. / OLKIN, I. (1991).

In Verbindung mit Kleinst-Quadrate-Schätzern eines linearen Ansatzes kann b_i zudem als das Verhältnis von zwei Steigungskoeffizienten aufgefaßt werden:

$$(8.38) \quad b_i = \frac{\text{Cov}(Y_i, F_X)}{\text{Cov}(X, F_X)} = \frac{\text{Cov}(Y_i, F_X) / \text{Var } F_X}{\text{Cov}(X, F_X) / \text{Var } F_X} = \frac{b_{Y_i}}{b_X},$$

wobei b_{Y_i} bzw. b_X Schätzer für die Steigung zweier Regressionsgeraden angeben, die nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Ansätzen $Y_i(F_X) = g(X(F_X)) = a_{Y_i} + b_{Y_i} F_X + u_{Y_i}$ bzw. $X(F_X) = a_X + b_X F_X + u_X$ ermittelt werden.⁵⁶

Der Ausdruck $\eta(Y_i, X, 2) = \beta(Y_i, X, 2) \frac{\mu_X}{\mu_{Y_i}}$ wird in der Literatur⁵⁷ als gewogene durch-

schnittliche Gini-Elastizität bezeichnet:

Ähnlich wie bei einer Elastizität wird β als gewogenes Mittel der marginalen Bedeutung von Y_i für X in Beziehung gesetzt zur durchschnittlichen Bedeutung von Y_i für

$X : \frac{\mu_{Y_i}}{\mu_X}$ ⁵⁸, so daß $\eta(Y_i, X, 2)$ als "weighted average ... elasticity"⁵⁹ interpretiert werden kann.

Ein zusammenfassender Überblick über die Komponenten der Zerlegung soll dieses Kapitel abschließen.

⁵⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 104.

⁵⁷ Vgl. YITZHAKI, S. / THIRSK, W. (1990) und YITZHAKI, S. (1991).

⁵⁸ Vgl. STARK, O. / TAYLOR, J. E. / YITZHAKI, S. (1986), S. 726 und 739.

⁵⁹ Vgl. YITZHAKI, S. / THIRSK, W. (1990), S. 9 und YITZHAKI, S. (1991), S. 236.

ÜBERSICHT 8: Zusammenfassender Überblick über Komponenten der Zerlegung von $\Gamma(X, \nu)$ und $\Gamma'(Y, \nu)$

Bezeichnung	analog $\Gamma(X, \nu)$ ⁶⁰	analog $\Gamma'(Y, \nu)$
"erweiterte Gini-Kovarianz"	$\Gamma(Y, X, \nu) = \text{cov}\left(\frac{Y}{\mu_Y}, -\nu(1-F_X)^{\nu-1}\right)$	$\Gamma'(Y, X, \nu) = \text{cov}\left(\frac{Y}{\mu_Y}, \nu F_X^{\nu-1}\right)$
erweiterter Gini-Korrelationskoeffizient	$R(Y, X, \nu) = \frac{\Gamma(Y, X, \nu)}{\Gamma(Y, \nu)}$	$R'(Y, X, \nu) = \frac{\Gamma'(Y, X, \nu)}{\Gamma'(Y, \nu)}$
erweiterter Gini-Regressionskoeffizient	$\beta(Y, X, \nu) = \frac{\Gamma(Y, X, \nu)\mu_Y}{\Gamma(X, \nu) \cdot \mu_X}$	$\beta'(Y, X, \nu) = \frac{\Gamma'(Y, X, \nu)\mu_Y}{\Gamma'(X, \nu) \cdot \mu_X}$
erweiterte Gini-Elastizität	$\eta(Y, X, \nu) = \frac{\Gamma(Y, X, \nu)}{\Gamma(X, \nu)}$	$\eta'(Y, X, \nu) = \frac{\Gamma'(Y, X, \nu)}{\Gamma'(X, \nu)}$

8.3 Ausgewählte Anwendungsbereiche der Korrelations-Lorenzkurven

Das allgemeine Konstruktionsprinzip der (relativen) Korrelations-Lorenzkurven eröffnet eine Vielzahl sehr verschiedener Anwendungsmöglichkeiten, sowohl für eher formaltheoretische Fragestellungen als auch in Bezug auf ganz bestimmte Sachthemen.

Die Beispiele in den Kapiteln 8.3.1 bis 8.3.3 betreffen daher eher den statistisch-methodischen Bereich, wogegen die Kapitel 8.3.4 bis 8.3.6 einen ersten Eindruck geben sollen, wie das vorgestellte Instrumentarium vor einem bestimmten sachlichen Hintergrund eingesetzt und interpretiert werden kann. Für weitere Anwendungsbeispiele sei auf die Literatur verwiesen, verbunden mit dem Hinweis, daß das Fachgebiet der "weighted distributions" diesen Anwendungsbereich noch ausdehnt.⁶¹

⁶⁰ Vgl. Bezeichnungen und Definitionen dieser Spalte mit YITZHAKI, S. (1991), S. 236.

⁶¹ Vgl. z. B. IYENGAR, N. S. (1960), KAKWANI, N. C. (1978, 1980a), YITZHAKI, S. (1990), MULIERE, P. / PETRONE, S. (1992), KIRMANI, S. N. U. A. / AHSANNULAH, M. (1987), PATIL, G. P. / RAO, C. R. (1977).

Folgende Transformationsfunktionen werden in den einzelnen Beispielen herangezogen:

ÜBERSICHT 9: Überblick über die in den Anwendungsbeispielen des Kapitels 8.3 verwendeten Transformationsfunktionen	
Kapitel 8.3.1	$g(X) = X^k$
Kapitel 8.3.2	$g(X) = (X - \mu)^2$
Kapitel 8.3.3	$g(X) = I(Y X)$
Kapitel 8.3.4	$g(X) = E(Y X)$
Kapitel 8.3.5	$g(X) = t(x)$
Kapitel 8.3.6	$g(X) = 1 - X$

8.3.1 Lorenzkurven höherer Momente und deren Anwendungsmöglichkeiten

Eine erste Möglichkeit der Anwendung ergibt sich, wenn man von Momentkurven höherer Ordnung⁶² ausgeht, die über die Transformationsfunktion $g(X) = X^k$, $k \geq 0$, k ganzzahlig, $0 \leq a \leq x \leq b$, erzeugt werden können:

$$(8.39) \quad L_k(x) = \int_a^x \frac{u^k f(u) du}{m_k'} = \int_a^x l_k(u) du \text{ mit}$$

$$(8.40) \quad m_k' = \int_a^b x^k f(x) dx \text{ als Ursprungsmoment.}$$

Die Fläche oberhalb $L_k(x)$ entspricht dem Mittelwert der k 'ten Momentverteilung:

$$(8.41) \quad \int_a^b x l_k(x) dx = \int_a^b x \frac{x^k f(x) dx}{m_k'} = m_{k+1}' / m_k'.$$

⁶² Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 109ff.

Es ist $L_{k+1}(x) \leq L_k(x)$ für alle x und $k \geq 1$ ⁶³, wie folgende Überlegung zeigt:

Da sich die Abweichungen der Merkmalswerte zu ihrem Mittelwert ausgleichen müssen, d.h. gelten muß

$$(8.42) \quad \int_0^w \left[x - \frac{m'_{k+1}}{m'_k} \right] l_k(x) dx = 0,$$

folgt für eine Zwischenstelle $a < y < b$:

$$(8.43) \quad \int_a^y \left[x - \frac{m'_{k+1}}{m'_k} \right] l_k(x) dx < 0 \quad \text{für } a < y < b$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y x l_k(x) dx < \int_0^y \frac{m'_{k+1}}{m'_k} l_k(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y \frac{x^{k+1} f(x)}{m'_k} dx < \int_0^y \frac{m'_{k+1}}{m'_k} l_k(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y l_{k+1} dx < \int_0^y l_k(x) dx$$

$$\Leftrightarrow L_{k+1}(y) < L_k(y).$$

Unter Anwendung des normalen Graduationsschemas auf die Verteilung $l_k(x)$ erhält man höhere Lorenzkurven der Form

$$(8.44) \quad L_{k+1}(L_k) = \int_0^{L_k} \frac{x_k^{**}(u)}{m'_{k+1}/m'_k} du^{64},$$

⁶³ Vgl. BUTLER, J./ MCDONALD, J.B. (1989), S. 111 – für einige Verteilungen gilt, daß höhere Momentverteilungen den gleichen Verteilungstyp aufweisen wie die zugrundeliegende Verteilung.

⁶⁴ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 110.

wobei $x_k^{**}(u)$ die Umkehrfunktion von $L_k(x)$ darstellt. $L_{k+1}(L_k)$ kann als Spezialfall einer relativen Korrelationskurve $F_g(F_g^*)$ interpretiert werden mit $g(X) = X^{k+1}$ und $g^*(X) = X^k$.

Beispiel:

x sei rechteckverteilt in $[0, b]$.

Dann ergibt sich für

$$L_k(y) = \int_0^y \frac{x^k \frac{1}{b}}{b^k/(k+1)} dx = \int_0^x \frac{(k+1)x^k}{b^{k+1}} dx = \left[\frac{x}{b} \right]^{k+1},$$

also

$$x_k^{**}(L_k) = (b^{k+1} L_k)^{\frac{1}{k+1}} = b L_k^{\frac{1}{k+1}}.$$

Die Fläche unter $x_k^{**}(L_k)$ entspricht $\frac{m_{k+1}}{m'_k} = \frac{(k+1)b^{k+1}}{(k+2)b^k} = \frac{(k+1)}{(k+2)} b$.

Damit ist die normierte inverse höhere Momentfunktion $\frac{x_k^{**}(L_k)}{m'_{k+1}/m'_k} = \frac{k+2}{k+1} L_k^{\frac{1}{k+1}}$,

also $L_{k+1}(L_k) = L_k^{\frac{k+2}{k+1}}$.

Betrachtet man $L_k(x)$ in Abhängigkeit von F , gelangt man zu

$$(8.45) \quad L_k(F) = \frac{\int_0^F x(F)^k dF}{\int_0^1 x(F)^k dF} = \frac{1}{m'_k} \int_0^F x(F)^k dF,^{65}$$

einem Spezialfall der Korrelationskurve mit $g^*(x) = x^k$.

⁶⁵ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 109.

Da $g'(x) = k x^{k-1} > 0$ für $k \geq 1$, ist $L_k(F)$ steigend und konvex.

$$(8.46) \quad \frac{dL_k(F)}{dF} = \frac{x(F)^k}{m'_k} = \frac{(m'_1)^k}{m'_k} \left[\frac{dL}{dF} \right]^k$$

und

$$\frac{d^2 L_k(F)}{dF^2} = \frac{dx(F)}{dF} \frac{kx(F)^{k-1}}{m'_k} > 0.^{66}$$

Unter Anwendung von Theorem 1 von KAKWANI mit $g^*(X) = X^k$ und $g(X) = X^{k+1}$ bzw. aus der Tatsache einer steigenden konvexen Funktion $L_{k+1}(L_k)$ kann die Dominanzbeziehung

$$(8.47) \quad L_{k+1}(F) < L_k(F)^{67}.$$

hergeleitet werden.

Für $k = 1$ erhält man die Lorenzkurve, für $k = 2$ ergibt sich eine Kurve, die die Fragestellung beantwortet, "welcher Anteil der "Gesamtvariabilität" (gemessen durch m_k) auf einen gewissen Anteil kleiner (oder großer) Merkmalsträger entfällt"⁶⁸:

$$(8.48) \quad L_2(F) = \int_0^F \frac{x(F)^2}{\mu^2 + \sigma^2} dF = \frac{1}{1+V^2} \int_0^F \left[\frac{x(F)}{\mu} \right]^2 dF = \frac{1}{1+V^2} \int_0^F \left[\frac{dL}{dF} \right] dF.$$

Ursprungsmomente \bar{m}_k einer an den Stellen ξ und η ($\xi < \eta$) von unten und oben **abgeschnittenen Verteilung** mit $F_\xi = F(\xi)$ und $F_\eta = F(\eta)$ lassen sich über "Sekanten—Steigungen" erklären:

⁶⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 109.

⁶⁷ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 109.

⁶⁸ PIESCH, W. (1975), S. 109.

Die neuen Lorenzkurvenwerte ergeben sich über analoge Überlegungen wie bei der Lorenzkurve⁶⁹ wegen $\tilde{F} = \frac{F - F_\xi}{F_\eta - F_\xi}$ dann als

$$(8.49) \quad \tilde{L}_k(F) = \frac{\int_{F_\xi}^F x(q)^k dq}{F_\eta} = \frac{L_k(F) - L_k(F_\xi)}{L_k(F_\eta) - L_k(F_\xi)} \text{ bzw. } \frac{\int_{F_\xi}^F x(q)^k dq}{F_\xi}$$

$$(8.50) \quad \tilde{L}_k(\tilde{F}) = \frac{L_k[\tilde{F} \cdot (F_\eta - F_\xi) + F_\xi] - L_k(F_\xi)}{L(F_\eta) - L(F_\xi)}$$

Die entsprechenden Momente \tilde{m}_k' berechnen sich über

$$(8.51) \quad \tilde{m}_k' = \int_{F_\xi}^F \frac{x(F)^k dF}{F_\eta - F_\xi} = m_k' \cdot \frac{L_k(F_\eta) - L_k(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi}$$

Für $k = 1$ ergibt sich dann das arithmetische Mittel einer von oben und unten abgeschnittenen Verteilung.

$$(8.52) \quad \tilde{\mu} = \tilde{m}_1' = \mu_{1:1}(F_\xi, F_\eta) = \mu \frac{L(F_\eta) - L(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi}$$

Mit $k = 2$ erhält man

$$(8.53) \quad \tilde{m}_2 = \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\mu}^2 = (\sigma^2 + \mu^2) \frac{L_2(F_\eta) - L_2(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi},$$

⁶⁹ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 77ff.

also für die Varianz der abgeschnittenen Verteilung

$$(8.54) \quad \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \frac{L_2(F_\eta) - L_2(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi} + \mu^2 \frac{L(F_\eta) - L(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi} - \tilde{\mu}^2$$

$$= \sigma^2 \frac{L_2(F_\eta) - L_2(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi} + \mu^2 \left[\frac{L(F_\eta) - L(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi} - \left[\frac{L(F_\eta) - L(F_\xi)}{F_\eta - F_\xi} \right]^2 \right].$$

Ein höherer Gini-Koeffizient läßt sich auf der Basis dieser höheren Moment-Lorenzkurven leicht herleiten:

$$(8.55) \quad R_k = 1 - 2 \int_0^1 L_k(F) dF = 2 \int_0^1 [F - L_k(F)] dF.$$

Ist $k = 1$, gelangt man zum normalen Gini-Koeffizienten. Im Fall einer extremen Gleichverteilung ist $L_k(F) = F$, also $R_k = 0$. Bei einer extremen Ungleichverteilung ist R_k näherungsweise 1.⁷⁰

Im Vergleich zum Gini-Koeffizienten gehen die Merkmalsträger nicht mit der Merkmalsausprägung selbst, sondern mit der k -ten Potenz ihrer Merkmalsausprägung in das Disparitätsmaß ein. D.h. große Merkmalswerte werden für $k > 1$ relativ stärker gewichtet als kleine. R_k läßt sich in vielfältiger Weise darstellen. Es gilt z.B.:

$$(8.56) \quad R_k = \text{Cov} \left[\frac{X^k}{m'_k}, 2F_X \right] = \text{Cov} \left[\frac{X^k}{m'_k}, -2(1-F_X) \right]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x(F)^k - x(q)^k|}{2m'_k} dF dq^{71} = \int_0^1 \frac{x(F)^k}{m'_k} [2F - 1] dF.$$

⁷⁰ Im diskreten Fall mit $R_k = \frac{\sum (2i - n - 1) x_i^k}{n^2 m'_k}$ ist $R_k = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n\mu)^k}{(n\mu)^k} = \frac{n-1}{n}$, da

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum x_i^k = \frac{(n\mu)^k}{n}.$$

⁷¹ Vgl. MICHAL, J. M. (1978), S. 222, diskrete Darstellungsform.

R_k läßt sich auch über Ursprungsmomente von Ordnungsstatistiken $\mu_{r:\nu}^{(k)}$ 72 definieren:

$$(8.57) \quad R_k = \frac{\mu_{2:2}^{(k)} - \mu_{1:2}^{(k)}}{2\mu_{1:1}^{(k)}} = \frac{\mu_{2:2}^{(k)} - \mu_{1:2}^{(k)}}{\mu_{2:2}^{(k)} + \mu_{1:2}^{(k)}} = \frac{\mu_{2:2}^{(k)} - \mu_{1:1}^{(k)}}{\mu_{1:1}^{(k)}} = \frac{\mu_{1:1}^{(k)} - \mu_{1:2}^{(k)}}{\mu_{1:1}^{(k)}}.$$

Erweitert man die Überlegungen auf einen nichtganzzahligen k im Bereich $0 < k < 1$, findet sich vor dem Hintergrund wohlfahrtstheoretischer Überlegungen eine Anwendung dieses Ansatzes. FERRERI⁷³ verwendet ihn in diskreter Schreibweise auf der Basis einer auf Einkommenswerten aufbauenden individuellen Nutzenfunktion.

$$(8.58) \quad U(x) = b x_i^k \quad b > 0, \quad 0 < r < 1, \quad U(x_i) \geq 0$$

mit $U'(x_i) = k \cdot b x_i^{k-1} > 0$,

$U''(x_i) = k(k-1) b x_i^{k-2} < 0$.

Eine Relativierung des individuellen Ausmaßes an Nutzen führt zu:

$$(8.59) \quad g_{ki} = \frac{U(x_i)}{\sum_{h=1}^n U(x_h)} = \frac{x_i^k}{\sum_{h=1}^n x_h^k}; \quad \sum_i g_{ki} = 1 \quad ; \quad g_{ki} \leq g_{ki+1}.$$

g_{ki} kann als "degree of concentration of the collective economic welfare of income"⁷⁴ aufgefaßt werden, wobei die kollektive Wohlfahrt sich als Summe der Einzelnutzen ergibt.

Statt Einkommenswerte direkt zur Beurteilung dieser Verteilungssituation heranzuziehen, wird auf individuelle Nutzen, die mit einer Verhältnisskala meßbar sind⁷⁵, zurückgegriffen.

⁷² Vgl. auch Kap. 4.2.1.1.

⁷³ Vgl. FERRERI, C. (1978).

⁷⁴ GIORGI, G. M. (1984a), S. 149.

⁷⁵ Vgl. GIORGI, G. M. (1984a), S. 148.

Die Elastizitäten $\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{g_{ki}}$ und $\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{g_{ki}}$ hängen direkt von k und g_{ki} ab:

$$(8.60) \quad \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{g_{ki}} = \left[\frac{k x_i^{k-1} \sum x_h^k - k x_i^{k-1} x_i^k}{(\sum x_h^k)^2} \right] \cdot \frac{x_i \sum x_h^k}{x_i^k} = k(1-g_{ki})$$

bzw.

$$(8.61) \quad \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{g_{ki}} = \left[\frac{0 - k x_j^{k-1} x_i^k}{(\sum x_h^k)^2} \right] \frac{x_j}{x_i^k} \sum x_h^k = -k g_{kj}$$

Jedes g_{ki} ist steigend, wenn x_i steigt, aber mit fallender Elastizität bei steigendem g_{ki} .⁷⁶ g_{ki} ist fallend mit steigendem x_j , wobei sich die Elastizität sich proportional zu g_{ki} verringert.

Kumuliert man die g_{ki} der Größe nach und stellt diese in einem Diagramm $\frac{i}{n}$ gegenüber, dann gelangt man zu einer diskreten Darstellung einer Moment-Lorenzkurve mit $k < 1$. Die stetige Form erzeugt man, indem $g(X) = X^k$ mit $0 < k < 1$ als Transformation angewandt wird. An dieser Moment-Lorenzkurve kann man dann ablesen, wieviel Prozent des Gesamtnutzens auf die $\frac{i}{n} \cdot 100\%$ Merkmalsträger mit geringstem Einkommen (bzw. gleichbedeutend hier mit geringster Nutzenhöhe) entfallen.

8.3.2 Die Varianz-Korrelations-Lorenzkurve

Ein Lorenzkurvenwert läßt sich interpretieren als Beitrag der 100 F % kleinsten Merkmalsträger zur Merkmalssumme bzw. zum arithmetischen Mittel. Mit Hilfe von Korrelations-Lorenzkurven läßt sich versuchen, eine ähnliche Kurve herzuleiten, die den Beitrag der 100 F % kleinsten Merkmalsträger bei gegebenem μ zur Varianz bzw. zum quadrierten Variationskoeffizienten abträgt.

⁷⁶ Vgl. FERRERI, C. (1978), S. 41.

Betrachtet wird dafür die Transformationsfunktion $g(X) = (X-\mu)^2$.

Es ist :

$$(8.62) \quad \mu_g = \sigma^2, \quad g'(x) = 2(x-\mu) \begin{cases} < 0 \text{ für } x < \mu \\ > 0 \text{ für } x > \mu \end{cases} \text{ und } g''(x) = 2 > 0.$$

Die Korrelations-Lorenzkurve verläuft also bis zur Stelle F_μ steigend konkav, anschließend steigend konvex:

$$(8.63) \quad F_g(F_X) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{F_X} (x(F) - \mu)^2 dF \text{ mit}$$

$$(8.64) \quad \frac{dF_g [F_X(x)]}{dF_X^2(x)} = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \geq 0,$$

$$(8.65) \quad \frac{dF_g^2 [F_X(x)]}{dF_X^2(x)} = \frac{2(x-\mu)}{\sigma^2 \cdot f(x)} \begin{cases} < 0 \text{ für } x < \mu \\ > 0 \text{ für } x > \mu \end{cases}.$$

Man sieht, daß besonders kleine und besonders große Merkmalsträger überproportional zur Varianz beitragen.

Zerlegt man die quadratische Gleichung, ergibt sich $F_g(F_X)$ als gewogene Summe der höheren Lorenzkurven $L_k(F)$:⁷⁷

$$(8.66) \quad F_g(F_X) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^F [x(F)^2 - 2\mu \cdot x(F) + \mu^2] dF$$

$$= \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\sigma^2} L_2(F) - \frac{2\mu^2}{\sigma^2} L(F) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} F.$$

⁷⁷ Vgl. Kap. 8.3.1 und PIESCH, W. (1975), S. 110.

Beispiel:

Ist X rechteckverteilt in $[0, b]$, damit $\sigma^2 = \frac{b^2}{12}$,

ergibt sich für $F(x) = \frac{x}{b}$, $F_1[g(x)] = \frac{12}{b^2} \int_a^x (y - \frac{b}{2})^2 f(y) dy$,

$$\text{also } F_g[F_X] = \frac{12}{b^2} \int_0^{F_X} (x(F) - \frac{b}{2})^2 dF = 4F^3 - 6F^2 + 3F.$$

Im folgenden sollen einige diskrete Verteilungen betrachtet werden. Da die Varianz, ähnlich μ bei der Lorenzkurve, als Bezugsgröße im Nenner steht, ergibt sich jedoch das Zusatzproblem einer Bezugsgröße von 0 im Fall einer Einpunktverteilung. Der Zählerausdruck ist in einem solchen Fall ebenfalls 0.

Im Fall einer symmetrischen Zweipunktverteilung im Intervall $[a, b]$ mit Spannweite $w = b - a$ ist der Beitrag jedes der n Merkmalsträger zur Varianz konstant: $\frac{w^2}{4n}$, d.h. $F_g(F_X) = F_X$. Eine Einpunktverteilung könnte dann als Spezialfall mit $w \rightarrow 0$ aufgefaßt werden.

Betrachtet man eine um μ symmetrische Dreipunktverteilung in $[a, b]$, stellt sich die Korrelationskurve als stückweise lineare Funktion (drei Bereiche) dar, die im mittleren Bereich parallel zur F_X -Achse verläuft.

Liegt eine extreme Ungleichverteilung vor mit $\sigma_X^2 = (n-1) \mu_X^2$, dann ist der Beitrag der kleinsten $(n-1)$ Merkmalsträger zur Varianz zusammen $F_g(\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}$, der Anteil des größten alleine zum Varianzwert ist folglich $\frac{n-1}{n}$.

In Analogie zur Varianz-Korrelations-Lorenzkurve lassen sich weitere Kurven z. B. für durchschnittliche Abweichungen oder auch den Gini-Koeffizienten selbst entwickeln.

Für R bietet sich dabei die Darstellung $R = \int_a^b 2[F(x) - L(x)]f(x)dx$ an. Man gelangt zu einer Korrelations-Lorenzkurve, die für $F \leq F_\mu$ steigend konvex, für $F \geq F_\mu$ steigend konkav ist.

8.3.3 Die Bayes–Korrelations–Lorenzkurve

Wählt man als Transformationsfunktion die Likelihood–Funktion $g(X) = l(Y|X)$, kann die Korrelations–Lorenzkurve als Gegenüberstellung von apriori– und aposteriori–Verteilung interpretiert werden:

Es ist

$$(8.67) \quad f(x|y) = \frac{f(x) \cdot l(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot l(y|x) dx}$$

die aposteriori–Dichtefunktion, damit ist dann die Korrelations–Lorenzkurve

$$(8.68) \quad F_g(F_X) = \int_0^{F_X} \mu_g^{-1}(y|x(F)) dF \quad \text{mit} \quad \mu_g = \int_{-\infty}^{\infty} l(y|x)f(x) dx = f(y);$$

Der Wert der Dichtefunktion $f(y)$ kann auch als arithmetisches Mittel der Likelihood–Funktion aufgefaßt werden; im diskreten Fall steht er für die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses Y .

$F_g(F_X)$ zeigt dann anschaulich anhand kumulierter Anteilssätze die Veränderung der aposteriori–Verteilung gegenüber der apriori–Verteilung durch die Zusatzinformation Y . Liegt bspw. $F_g(F_X)$ stets unter der Diagonalen, hat die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X "kleine Werte" annimmt, abgenommen: $F_g(x) < F_X(x)$.

8.3.4 Anwendung im Rahmen der Portfolio–Analyse

Im Rahmen der Portfolio–Analyse befaßt man sich u.a. mit der Fragestellung, wie ein Portfeuille von Anlageformen optimal gestaltet werden sollte. Dabei wird von einem risikoaversen Investor ausgegangen, der die erwarteten Renditen gegenüber dem Risiko abwägen muß. Es wird stets zugrundegelegt, daß mit höherem nichtdiversifizierbarem Risiko eines Portfeuillees auch der erwartete Gewinn ansteigt.

SHALIT/YITZHAKI⁷⁸ schlagen eine Anwendung der mittleren Differenz anstelle der Varianz als geeignetes Risikomaß in der Portfolio–Theorie vor. In ihrem Artikel

⁷⁸ Vgl. SHALIT, H. / YITZHAKI, S. (1984).

übertragen sie die Ergebnisse des normalen "Capital-asset-pricing-model" (CAPM)⁷⁹ auf einen Ansatz, der auf eben dieser mittleren Differenz bzw. dem Korrelationsmaß C_g aufbaut. In einer weiteren Fragestellung vergleichen sie verschiedene Anlageformen eines Portfolios hinsichtlich ihres relativen Risikoausmaßes innerhalb eines Portfeuillees anhand von Korrelations-Lorenzkurven.

Ausgangspunkt der ersten Fragestellung ist die Zusammensetzung eines Portfeuillees mit risikobehafteten Anlageformen i mit Rendite G_i und einer sicheren Anlage mit Zinssatz i_f . Auf der Basis bestimmter Annahmen über die Beschaffenheit des Kapitalmarktes⁸⁰ wird im Rahmen des abgewandelten CAPM für das Marktgleichgewicht eine lineare Beziehung zwischen der erwarteten Rendite eines Wertpapiers $E(G_i)$ und der Kovarianz $\text{cov}(G_i, F_m(G_m))$ hergeleitet, mit der das systematische Risiko eines Wertpapiers innerhalb eines Portfeuillees gemessen werden soll (Wertpapiermarktlinie).⁸¹ Man gelangt zu folgendem Ergebnis:

Damit die risikoscheuen Investoren unsichere Anlageformen erwerben, müssen diese eine höhere erwartete Rendite aufweisen als die sichere Anlage, die Differenz stellt die Risikoprämie dar. Im Marktgleichgewicht ist die Risikoprämie eines Wertpapiers pro Risikoeinheit $\frac{E(G_i) - i_f}{\text{cov}(G_i, F_m(G_m))}$ identisch mit der des Marktportfeuillees aller risikobehafteten Wertpapiere $\frac{E(G_m) - i_f}{\text{cov}(G_m, F_m(G_m))}$; sie entspricht dem "Marktpreis des Risikos"⁸².

⁷⁹ Vgl. RUDOLPH, B. (1979) und BERNDT, E. R. (1991), Kap. 2.

⁸⁰ U. a. vollkommener Kapitalmarkt, Existenz einer risikolosen Anlage- und Verschuldungsmöglichkeit, Einperiodenmodell, Investor unterhält voll diversifiziertes Portfeuille.

⁸¹ Bezeichnungen:

Rendite: G ;

Einzelnes Wertpapier: Index i ;

Mischung risikobehafteter Wertpapiere: Index m ;

sichere Anlage und Mischung der risikobehafteten Wertpapiere (Portfeuille): Index p .

⁸² Vgl. SHALIT, H. / YITZHAKI, S. (1984), S. 1459f.

Daraus folgt sofort die Gleichung für die **Wertpapierlinie**:

$$(8.69) \quad E(G_i) = i_f + (E(G_m) - i_f) \cdot \frac{\text{cov}(G_i, F_m(G_m))}{\text{cov}(G_m, F_m(G_m))}$$

$$(8.70) \quad \Leftrightarrow \quad E(G_i) = i_f + \frac{E(G_m) - i_f}{\text{cov}(G_m, F_m(G_m))} \cdot \frac{\text{cov}(G_i, F_m(G_m))}{\text{cov}(G_i, F_i(G_i))} \cdot \text{cov}(G_i, F_i(G_i)).^{83}$$

Im Gleichgewicht ergibt sich also die erwartete Rendite des Wertpapiers i aus dem Zinssatz der sicheren Anlage zuzüglich einer Risikoprämie. Diese Risikoprämie splittet sich in den "Marktpreis des Risikos" multipliziert mit dem systematischen Risiko des Wertpapiers. Der Ausdruck $\frac{\text{cov}(G_i, F_m(G_m))}{\text{cov}(G_m, F_m(G_m))}$ kann wiederum als Regressionskoeffizient interpretiert⁸⁴ und, wie (8.70) zeigt, aufgesplittet werden in einen Korrelationskoeffizienten multipliziert mit dem Verhältnis zweier Kovarianzen.

Bezüglich der zweiten Fragestellung, d.h. der Charakterisierung von Anlageformen hinsichtlich des relativen Risikos in einem Portfeuille, schlagen SHALIT/YITZHAKI⁸⁵ die Verwendung von Korrelations-Lorenzkurven vor. Betrachtet werden verschiedene Anlageformen i mit jeweils gleicher erwarteter Rendite. Die Korrelationskurve für i , hervorgehend aus der Transformationsgleichung $g_i(G_p) = E(G_i | G_p)$ mit G_p als Rendite des Portfolios, ist dann definiert als

$$(8.71) \quad F_{g_i}(F_p) = \frac{1}{E(g_i(G_p))} \int_0^{F_p} g_i(G_p(q)) dq$$

mit $F_p(G_p)$ als Verteilungsfunktion von G_p .

Eine Einteilung in aggressive und defensive Anlageformen innerhalb des Portfolios kann man über die Elastizitäten $\eta_{g_i, G_p} = \frac{d g_i \cdot G_p}{d G_p \cdot g_i}$ vornehmen. Ist η_{g_i, G_p} größer

⁸³ Vgl. RUDOLPH, B. (1979), S. 1046 für normales CAPM.

Vgl. SHALIT, H. / YITZHAKI, S. (1984), S. 1460.

⁸⁴ Vgl. dazu Kap. 8.2.

⁸⁵ Vgl. SHALIT, H. / YITZHAKI, S. (1984), S. 1463ff.

(kleiner) als 1 für alle G_p , d.h. die Korrelations–Lorenzkurve $F_{g_i}(F_p)$ liegt unter (über) der Lorenzkurve des Portefeuilles $L_p(F_p)$, reagieren die Renditen der Anlageformen relativ stark (schwach) auf Veränderungen im Portefeuille. Liegen sich nicht schneidende Korrelations–Lorenzkurven vor, kann die Anordnung von Anlageformen nach ihrem Risikomaß $\text{cov}(G_i, F(G_p))$ erfolgen. Ist $\text{cov}(G_i, F(G_p)) > (<) \text{cov}(G_p, F(G_p))$, wird i als aggressive (defensive) Anlageform eingestuft.⁸⁶

8.3.5 Anwendung vor finanzwissenschaftlichem Hintergrund : Verteilungswirkungen von Einkommensteuertarifen

Als zentrales Anwendungsgebiet des vorgestellten Instrumentariums findet sich in der Literatur die Analyse der Verteilungswirkungen von Einkommensteuertarifen, die eine Vielzahl von Autoren beschäftigt.^{87,88}

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine Verteilung der Bruttoeinkommen $x \geq 0$, auf die ein Steuertarif mit Steuerbetrag $t(x)$ ($0 \leq t(x) \leq x$) angewandt wird, so daß sich als Nettoeinkommensverteilung $y(x) = x - t(x) \geq 0$ errechnet. Der Grenzsteuersatz $t'(x)$ soll zwischen 0 und 1 liegen. Der Durchschnittssteuersatz eines Steuerzahlers mit Einkommen x ist gegeben durch $\bar{t}(x) = \frac{t(x)}{x}$. Das durchschnittliche Steueraufkommen pro

Steuerzahler berechnet sich als $\mu_t = \int_a^b t(x)f(x)dx$, die gesamtwirtschaftliche Steuer-

quote ergibt sich als Verhältnis von Gesamtsteueraufkommen T zu Gesamtbruttoeinkommen X , wobei gilt $\frac{T}{X} = \frac{\mu_t}{\mu_X}$. Demgegenüber ist die Nettoeinkommensquote definiert

als Verhältnis des Gesamtnettoeinkommens Y zu X : $\frac{Y}{X} = \frac{\mu_Y}{\mu_X}$.⁸⁹

⁸⁶ Vgl. SHALIT, H. / YITZHAKI, S. (1984), S. 1465.

⁸⁷ Vgl. KAKWANI, N.C. (1977,1980a), PFAHLER, W. (1983, 1987), LAMBERT, P. J. / PFAHLER, W. (1987,1988) und LAMBERT, P. J. (1989).

⁸⁸ Vgl. YITZHAKI, S. / THIRSK, W. (1990). Sie verwenden das Instrumentarium der Korrelations–Lorenzkurven für die Analyse von Ausgabensteuern.

⁸⁹ Vgl. MÄRTZ, T. (1988), S. 532.

Kenngrößen zur Beurteilung von Steuertarifen stellen

- die Steuerbetragselastizität $\eta_{t,x} = \frac{t'(x)x}{t(x)} = \frac{t'(x)}{\bar{t}(x)} = \frac{dt(x)}{t(x)} \cdot \frac{dx}{x}$ und
- die Nettoeinkommenselastizität $\eta_{y,x} = \frac{y'(x)x}{y(x)} = \frac{x(1-t'(x))}{x-t(x)} = \frac{dy}{y} \cdot \frac{dx}{x}$ dar.

$\eta_{t,x}$ gibt an, um wieviel Prozent sich der Steuerbetrag ändert, wenn sich das Bruttoeinkommen um 1% ändert. Entsprechendes gilt für $\eta_{y,x}$ und die Beziehung von Netto- und Bruttoeinkommen.

Ein Steuertarif wird als proportional (progressiv oder regressiv) eingestuft, wenn der Steuerbetrag in gleichem Maße (schneller oder langsamer) wächst wie das Bruttoeinkommen, d.h. es gelten folgende Zusammenhänge⁹⁰:

Proportionaler Tarif	$t(x) = cx$	$c = \bar{t}(x) = t'(x)$	$\eta_{t,x} = 1 \forall x,$
Progressiver Tarif	z.B. $t(x) = cx^2$	$\bar{t}(x)$ steigend in x	$\eta_{t,x} > 1 \forall x,$
Regressiver Tarif	z.B. $t(x) = d+cx, d > 0, c > 0$	$\bar{t}(x)$ fallend in x	$\eta_{t,x} < 1 \forall x.$

Wegen $0 < t'(x) < 1$ und folglich $0 < y'(x) = 1 - t'(x) < 1$ gilt bei Anwendung von Theorem 2 und 3 von KAKWANI die Beziehung:

$$(8.72) \quad L_X(F) = \frac{\mu_Y}{\mu_X} L_Y(F) + \frac{\mu_t}{\mu_X} L_t(F),^{91}$$

wobei $L_X(F)$, $L_Y(F)$ und $L_t(F)$ die Lorenzkurven der einzelnen Merkmale sind. $L_X(F)$ läßt sich folglich als mit Steuer- bzw. Nettoeinkommensquote gewogenes Mittel von $L_Y(F)$ und $L_t(F)$ darstellen und liegt damit zwischen diesen beiden Lorenzkurven.⁹²

⁹⁰ Vgl. LAMBERT, P. J. (1989), S. 138, MÄRTZ, T. (1987), S. 15 sowie MUSGRAVE, R.A. / THIN, T. (1948). Letztere ziehen $\eta_{T,x}$ zur Beurteilung eines Steuertarifs in jedem Punkt x heran, d.h. sie sehen Progressivität als die lokale Eigenschaft eines Tarifs an einer Stelle x an.

⁹¹ Vgl. ausführliche Herleitung bei PIESCH, W. (1975), S. 66f.

⁹² Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 67.

Über die Lage der einzelnen Lorenzkurven kann man folgendes sagen:⁹³

Bei proportionalem Steuertarif gilt $L_X(F) = L_Y(F) = L_t(F)$, da die Relationen zwischen den einzelnen Einkommen unverändert bleiben. Vergleicht man eine progressive (regressive) Steuer mit der Proportionalsteuer bei gleicher Ausgangsverteilung, gelten wegen Theorem 1 von KAKWANI und (8.72) folgende Aussagen:

1. $\eta_{t,x}^{\text{prog}} > \eta_{t,x}^{\text{prop}} = 1$ für alle $x \Rightarrow L_t^{\text{prog}}(F) < L_t^{\text{prop}}(F) = L_X(F) < L_Y(F)$
2. $\eta_{t,x}^{\text{reg}} < \eta_{t,x}^{\text{prop}} = 1$ für alle $x \Rightarrow L_t^{\text{reg}}(F) > L_t^{\text{prop}}(F) = L_X(F) > L_Y(F)$.

Bei progressiver Besteuerung weist also die Nettoeinkommensverteilung eine niedrigere, bei regressiver Besteuerung eine höhere Disparität als die Bruttoeinkommensverteilung auf.

Betrachtet man bspw. einen **linearen Ansatz** mit

$$(8.73) \quad x = y(x) + t(x), \quad y(x) = cx + d > 0, \quad t(x) = (1 - c)x - d > 0, \\ y'(x) = c \geq 0, \quad t'(x) = (1 - c) \geq 0,$$

gelten damit folgende Aussagen:

Fall 1	$0 < c < 1, d > 0$	$\eta_{t,x} > \eta_{x,x} = 1 > \eta_{y,x}$	$L_t(F) < L_X(F) < L_Y(F)$
Fall 2	$0 \leq c, d < 0$	$\eta_{y,x} > \eta_{x,x} = 1 > \eta_{t,x}$	$L_Y(F) < L_X(F) < L_t(F)$

Im Fall 1 wird gleichzeitig ein Pro-Kopf-Subventionsbetrag von d und eine proportionale Steuer auf das Einkommen betrachtet, was zu einem progressiven Tarif führt. Fall 2 erfaßt für $0 < c < 1$ eine proportionale Einkommensteuer kombiniert mit einem Kopfsteuerbetrag d , der Steuertarif ist regressiv. Man sieht, daß die Lorenzkurve der Bruttoeinkommen zwischen der der Nettoeinkommen und der der Steuerbeträge liegt.⁹⁴

⁹³ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 67ff und MÄRTZ, T. (1988), S. 533.

⁹⁴ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 72.

Vergleicht man allgemein zwei Tarife $t_1(x)$ und $t_2(x)$ mit gleicher Ausgangsverteilung für x , gilt folgender Zusammenhang zwischen den Lorenzkurven der Nettoeinkommensverteilung und der Steuerbetragsverteilung⁹⁵:

Die Beziehung (8.72) läßt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
 (8.74) \quad & \mu_X L_X(F) = \mu_t L_t(F) + (\mu_X - \mu_t) L_Y(F) \\
 \Leftrightarrow & \mu_X L_X(F) - \mu_t L_X(F) = \mu_t L_t(F) - \mu_t L_X(F) + (\mu_X - \mu_t) L_Y(F) \\
 \Leftrightarrow & (\mu_X - \mu_t)(L_X(F) - L_Y(F)) = -\mu_t(L_X(F) - L_t(F)) \\
 \Leftrightarrow & L_X(F) - L_Y(F) = \frac{-\mu_t}{\mu_X - \mu_t} (L_X(F) - L_t(F)) .^{96}
 \end{aligned}$$

Dabei läßt sich die Differenz $L_X(F) - L_t(F)$ als der Anteil der Steuerlast interpretieren, der von den 100F% kleinsten Einkommensbeziehern zu den 100(1-F)% größten Einkommensbeziehern verlagert wird. Bei einer progressiven Steuer ist er positiv, bei einer regressiven Steuer negativ.⁹⁷

Bildet man nun die Differenz der Gleichungen, bezogen auf zwei verschiedene Steuertarife 1 und 2, führt dies zu ⁹⁸

$$\begin{aligned}
 (8.75) \quad & (L_X(F) - L_Y^1(F)) - (L_X(F) - L_Y^2(F)) \\
 & = \frac{-\mu_t^1}{\mu_X - \mu_t^1} (L_X(F) - L_t^1(F)) + \frac{\mu_t^2}{\mu_X - \mu_t^2} (L_X(F) - L_t^2(F)) \\
 \Leftrightarrow & L_Y^2(F) - L_Y^1(F) \\
 & = \frac{\mu_t^1}{\mu_X - \mu_t^1} (L_t^1(F) - L_t^2(F)) + \left(\frac{\mu_t^2}{\mu_X - \mu_t^2} - \frac{\mu_t^1}{\mu_X - \mu_t^1} \right) (L_X(F) - L_t^2(F)) .
 \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist es also möglich, daß $L_Y^1(F)$ und $L_Y^2(F)$ sich schneiden, obwohl $L_t^1(F)$ und $L_t^2(F)$ sich nicht schneiden.⁹⁹

⁹⁵ Es wird weiterhin angenommen $x > 0$, $y(x) > 0$, $x = y(x) + t(x)$, $0 < t'(x) < 1$.

⁹⁶ Vgl. LAMBERT, P. J. / PFÄHLER, W. (1987), S. 636.

⁹⁷ Vgl. LAMBERT, P. J. (1989), S. 172.

⁹⁸ Vgl. LAMBERT, P. J. / PFÄHLER, W. (1987), S. 636 und KAKWANI, N. (1977), S. 723.

⁹⁹ Vgl. SYKES, D. / SMITH, W. J. / FORMBY, J. P. (1987).

Bei aufkommensgleicher Steuer gilt jedoch $\mu_t^1 = \mu_t^2$, also

$$(8.76) \quad L_Y^2(F) - L_Y^1(F) = \frac{\mu_t}{\mu_X - \mu_t} (L_t^1(F) - L_t^2(F)), \text{ damit}$$

$$(8.77) \quad L_t^1(F) \succcurlyeq L_t^2(F) \Leftrightarrow L_Y^2(F) \succcurlyeq L_Y^1(F).$$

In einem solchen Fall schneiden sich die Steuerlorenzkurven und die Nettoeinkommenslorenzkurven jeweils an den gleichen Stellen F , vorausgesetzt sie schneiden sich überhaupt. Wegen Theorem 1 folgt zudem aus $\eta_{t_1, x} \geq \eta_{t_2, x}$ für alle x $L_t^1(F) \leq L_t^2(F)$ für alle F .

Die Analyse von Distributionseffekten bei nicht-proportionalen und damit im Sinne der Lorenzkurve nicht verteilungsneutralen Steuertarifen hat zu einer Vielzahl von Vorschlägen für Indizes geführt, die

- das Ausmaß an Abweichung vom verteilungsneutralen Besteuerungszustand gemessen über die Steuerverteilung (Progressionsmaße) und
- das Ausmaß an redistributiven Effekten, d.h. die Wirkung des Tarifs auf die Nettoeinkommensverteilung

zu quantifizieren suchen. Auf der Basis von Lorenzkurven und (relativen) Korrelations-Lorenzkurven werden Maße entwickelt, die formal enge Bezüge zum Schutz- bzw. Gini-Koeffizienten aufweisen. Im folgenden sollen kurz die in der Literatur verwandten Progressionsmaße vorgestellt werden.¹⁰⁰ Ausführliche Erläuterungen finden sich insbesondere bei PFÄHLER (1983,1987), LAMBERT/PFÄHLER (1988), LAMBERT (1989).

Als **Minimalforderung an ein Progressionsmaß** kann formuliert werden¹⁰¹:

"Wenn der Steuertarif sich ändert, so daß ein Maß "of local progression" wie z.B. $\eta_{t,x}$ in allen x steigt, die Bruttoeinkommensverteilung aber gleich bleibt, dann sollte auch der Wert des Progressionsmaßes steigen."

¹⁰⁰ Analoge Regressionsmaße sind entwickelbar, aber nicht gebräuchlich.

¹⁰¹ Vgl. LAMBERT, P. J. (1989), S. 169.

In Analogie zum Schutz-Koeffizienten wird von PFÄHLER (1983) die maximale Differenz zwischen $L_X(F)$ und $L_t(F)$ als Progressionsmaß vorgeschlagen:

$$(8.78) \quad \Pi^P = \max_F (L_X(F) - L_t(F)).$$

An dieser Stelle F gilt $\frac{dL_X(F)}{dF} = \frac{dL_t(F)}{dF} \Leftrightarrow \frac{x(F)}{\mu_X} = \frac{t(x(F))}{\mu_t} \Leftrightarrow \bar{t}(x) = \frac{\mu_t}{\mu_X}$,

d.h. in diesem Punkt ist der durchschnittliche Steuersatz $\bar{t}(x)$ gleich dem durchschnittlichen Durchschnittssteuersatz, d.h. er entspricht beim Vergleich mit einer aufkommensgleichen Proportionalsteuer dem dortigen Durchschnittssteuersatz. Er trennt also solche Einkommensbezieher, die mehr als bei proportionaler aufkommensgleicher Besteuerung zahlen von denen, die weniger zahlen.

Sucht man in der relativen Korrelations-Lorenzkurve $L_t(L_X)$ die maximale Differenz zur Diagonalen L_X , gelangt man ebenfalls zu Π^P :

$$(8.79) \quad \Pi^P = \max_{L_X} (L_X - L_t(L_X)), \text{ da } \frac{dL_X}{dL_X} = \frac{dL_t}{dL_X} \Leftrightarrow 1 = \frac{dL_t dF}{dF \cdot dL_X} \Leftrightarrow 1 = \frac{t(x)\mu_X}{\mu_t x}.^{102}$$

Interpretiert man $\bar{t}(x)$ als Merkmal z mit der Dimension $\frac{\text{DM Steuer}}{\text{DM Einkommen}}$ sowie der Dichte $l(x)$ und folglich mit dem arithmetischen Mittel $\mu_z = \int_a^b \bar{t}(x) l(x) dx = \frac{\mu_t}{\mu_X}$, läßt

sich Π^P auch als die normierte relative Abweichung von μ_z schreiben:

$$(8.80) \quad \Pi^P = \int_a^b \frac{|\bar{t}(x) - \mu_t/\mu_X|}{2\mu_t/\mu_X} l(x) dx. \quad ^{103}$$

Dieses Abstandsmaß erfüllt die Minimalforderung, da die neue Steuerlorenzkurve unter der alten liegt, wenn $\eta_{t,x}$ steigt für alle x .

Neben diesem Streckenmaß werden Flächenstücke im Lorenzkurven-Schaubild bzw. bei der relativen Korrelations-Lorenzkurve als Progressionsindizes¹⁰⁴ vorgeschlagen. Dabei wird teilweise von der Annahme $t'(x) > 0$ abgegangen, so daß statt der Lorenzkurve

¹⁰² Vgl. PFÄHLER, W. (1983), S. 241 und LAMBERT, P. J. (1989), S. 176.

¹⁰³ Vgl. PFÄHLER, W. (1983), S. 241.

¹⁰⁴ Vgl. auch PFINGSTEN, A. (1986), PFINGSTEN, A. / SCHNEIDER, J. (1994) und WAGENHALS, G. (1994).

$L_t(F)$ allgemeiner die (relative) Korrelations-Lorenzkurve $F_t(F_X)$ bzw. $F_t(L_X)$ betrachtet wird.¹⁰⁵

ÜBERSICHT 10: Flächenprogressionsmaße im Überblick	
Flächenmaße	Quelle
$\begin{aligned}\Pi^K &= 2 \int_0^1 (L_X(F_X) - F_t(F_X)) dF_X \\ &= C_t - R_X \\ &= \frac{1}{\mu_t} \int_a^b (t(x) - \frac{\mu_t}{\mu_X} x) 2F(x) f(x) dx^{106}\end{aligned}$	KAKWANI (1977)
$\begin{aligned}\Pi^K(\nu) &= \nu(\nu-1) \int_0^1 (1-F)^{\nu-2} (L_X(F_X) - F_t(F_X)) dF_X \\ &= \Gamma(t(X), X, \nu) - \Gamma(X, \nu) \\ &= \frac{1}{\mu_t} \int_a^b (t(x) - \frac{\mu_t}{\mu_X} x) (-\nu(1-F_X(x))^{\nu-1}) f_X(x) dx^{107}\end{aligned}$	PFÄHLER (1987), LAMBERT (1989)
$\begin{aligned}\Pi^{HS} &= 2 \int_0^1 (L_X - F_t(L_X)) dL_X \\ &= 2 \int_0^1 (L_X(F_X) - F_t(F_X)) \frac{dL_X}{dF_X} dF_X \\ &= \frac{1}{\mu_t} \int_a^b (t(x) - \frac{\mu_t}{\mu_X} x) 2L_X(x) f_X(x) dx^{108}\end{aligned}$	HAINSWORTH (1964) SUITS (1977)

¹⁰⁵ Vgl. ausführlich PFÄHLER, W. (1983,1987).

¹⁰⁶ Vgl. PFÄHLER, W. (1987), S. 10.

¹⁰⁷ Vgl. PFÄHLER, W. (1987), S.11

¹⁰⁸ Vgl. PFÄHLER, W. (1987), S. 10.

Das KAKWANI-Maß nimmt wegen $-R_t \leq C_t \leq R_t$ Werte im Bereich von $-2 \leq -1 - R_X \leq C_t - R_X \leq 1 - R_X \leq 1$ an, das Maß von SUITS ist im Bereich $-1 \leq \Pi^{\text{HS}} \leq 1$ definiert.¹⁰⁹ Die Maße sind positiv (negativ) für einen progressiven (regressiven) Tarif über den gesamten Bereich von x ¹¹⁰. Im Fall einer Proportionalsteuer wird ihr Wert Null. Dieser Wert kann jedoch auch dann angenommen werden, wenn sich "positive" und "negative" Flächenstücke ausgleichen, d.h. wenn **nicht durchgehend** progressive bzw. regressive Steuertarife betrachtet werden.

Gilt ein linearer Steuertarif $t(x) = cx + d > 0$, lassen sich Zusammenhänge zwischen Π^{HS} und Π^{K} unter Anwendung von Aussagen bezüglich Lorenzkurven korrelierter Variabler bei PIESCH¹¹¹ herstellen:

ÜBERSICHT	11:	Flächenprogressionsmaße	bei	linearem	Steuertarif
Parameter- kondition		Π^{K}		Π^{HS}	es gilt
$c > 0, d > 0,$ $0 < \eta_{t,x} < 1$		$\Pi^{\text{K}} = R_t - R_X < 0$		$\Pi^{\text{HS}} = \frac{-d}{\mu_t} R_X = \frac{-d}{c\mu_X} R_t$	$\Pi^{\text{K}} = \Pi^{\text{HS}}$
$c > 0, d < 0,$ $\eta_{t,x} > 1$		$\Pi^{\text{K}} = R_t - R_X > 0$		$\Pi^{\text{HS}} = \frac{-d}{\mu_t} R_X = \frac{-d}{c\mu_X} R_t$	$\Pi^{\text{K}} = \Pi^{\text{HS}}$
$c < 0, d > 0,$ $\eta_{t,x} < 0$		$\Pi^{\text{K}} = -R_t - R_X < 0$		$\Pi^{\text{HS}} = \frac{-d}{\mu_t} R_X = \frac{-d}{-c\mu_X} R_t$	$\Pi^{\text{K}} = \Pi^{\text{HS}}$

¹⁰⁹ Vgl. LAMBERT, P. J. (1989), S. 175f.

¹¹⁰ Vgl. PFÄHLER, W. (1987), S. 11f.

¹¹¹ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 73ff.

PFÄHLER stellt 1987 eine Klasse von skaleninvarianten Progressionsmaßen vor, denen die Flächenmaße zugeordnet werden können¹¹²:

$$(8.81) \quad \text{ATR} = \frac{1}{\mu_t} \int_0^b \left(t(x) - \frac{\mu_t}{\mu_X} x \right) W(x) f(x) dx$$

mit $W(x)$ als monotonem, nicht linearem Gewichtungsschema.

Mit $W(x) = 2F(x)$ gelangt man zu $\text{ATR} = \Pi^K$, mit $W(x) = -\nu(1 - F(x))^{\nu-1}$ zur Verallgemeinerung $\Pi^K(\nu)$ und mit $W(x) = 2L(x)$ zu $\text{ATR} = \Pi^{\text{HS}}$.

Eine Analyse von **Umverteilungswirkungen** einer Steuer kann auf dem Vergleich von Brutto- und Nettoeinkommensverteilung aufbauen. In völliger Analogie zu der Herleitung von Progressionsmaßen können auch hier wieder Strecken- und Flächenmaße konstruiert werden. Diese lassen sich wiederum wegen $y(x) = x - t(x)$ leicht über die Steuerquote in Verbindung mit den bisher vorgestellten Maßen bringen. Ausführliche Darstellungen finden sich bei TACHIBANAKI (1981), PFÄHLER (1983,1987), LAMBERT (1989). Außerdem werden in LAMBERT/PFÄHLER (1988) weitere Komponenten neben Steuerbetrag, Brutto- und Nettoeinkommen in die Betrachtung einbezogen, wie z.B. Transfereinkommen oder die Bereitstellung öffentlicher Güter.

8.3.6 Anwendung im Rahmen der Segregationsanalyse

In der Literatur finden sich einige Beiträge, die sich mit "Ecological segregation"¹¹³, "Employment segregation" oder "Occupational segregation"¹¹⁴ befassen und dabei als Instrumentarium die Lorenzkurve bzw. allgemeiner die relative Korrelations-Lorenzkurve und die daraus abgeleiteten Indizes verwenden. Im Rahmen der Segregationsanalyse wird versucht, Maßgrößen für die Trennung von zwei (soziologischen) Gruppen zu entwickeln, bspw. für das Ausmaß, in dem bestimmte Stadtteile überwiegend von weißen oder schwarzen Bevölkerungsteilen bewohnt werden¹¹⁵ oder

¹¹² Vgl. PFÄHLER, W. (1987), S. 7.

¹¹³ Vgl. JAHN, J. / SCHMID, C. F. / SCHRAG, C. (1947).

¹¹⁴ Vgl. SILBER, J. (1989c).

¹¹⁵ Vgl. JAHN, J. / SCHMID, C. F. / SCHRAG, C. (1947).

unterschiedliche Beschäftigungsanteile von Frauen und Männern in verschiedenen Berufszweigen vorliegen. Es liegt keine Segregation vor, wenn die beiden Gruppen in den einzelnen Stadtteilen bzw. Berufszweigen gemäß ihrem proportionalen Anteil in der Bevölkerung vertreten sind, d.h. wenn die Verteilung unabhängig ist von dem nominalskalierten Merkmal Hautfarbe oder Geschlecht.

Hier soll nun die Analyse am Beispiel der Berufstätigkeit von Männern und Frauen in bestimmten Beschäftigungsarten vorgenommen werden, wobei auf die diskrete Schreibweise zurückgegriffen wird. Die Segregationsansätze lassen sich formal auf der Basis von Lorenz- bzw. relativen Korrelations-Lorenzkurven korrelierter Variabler betrachten, auf die von PIESCH ausführlich eingegangen wird.¹¹⁶ Als Merkmalsausprägungen werden die geschlechtsspezifischen Beschäftigungsanteile in i betrachtet, also verhältnisskalierte Merkmale:

$$y_i = \frac{n_i^M}{n_i} \text{ Männeranteil in Beschäftigungsart } i,$$

$$x_i = \frac{n_i^F}{n_i} : \text{Frauenanteil in Beschäftigungsart } i$$

mit n_i : Anzahl der Beschäftigten in i ,
 n_i^M : Anzahl der männlichen Beschäftigten in i ,
 n_i^F : Anzahl der weiblichen Beschäftigten in i .

Es ist $n_i = n_i^M + n_i^F$, damit $x_i + y_i = 1$ und $\mu_X + \mu_Y = 1$. Man betrachtet also zwei vollständig negativ korrelierte Merkmale X und Y , wobei jede Merkmalsausprägung mit der Häufigkeit der Beschäftigten in i auftritt. Damit lassen sich wieder die von PIESCH hergeleiteten Zusammenhänge für Lorenzkurven von lineartransformierten Variablen bzw. Lorenzkurven von korrelierten Variablen (als Spezialfall einer relativen Korrelations-Lorenzkurve) anwenden.¹¹⁷

¹¹⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), §7 und §8.

¹¹⁷ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 69 und S. 75.

Es gilt

– in Fall A mit $\mu_Y < 0,5 < \mu_X : L_Y(F) < L_X(F) \Rightarrow R_Y > R_X$ ¹¹⁸,

– in Fall B mit $\mu_X < 0,5 < \mu_Y : L_Y(F) > L_X(F) \Rightarrow R_Y < R_X$ ¹¹⁹.

Die Lorenzkurve L_X spiegelt die "diversity in the degree of feminization of the various occupations"¹²⁰ wider.

Betrachtet man nun die konvexe relative Korrelations-Lorenzkurve $F_{g^*}(F_g) = L_X(1 - L_Y)$ mit $g(X) = 1 - X$ und $g^*(X) = X$, läßt sich die Fläche zwischen der Diagonalen und dem Kurvenzug als "Maß für das Ausmaß an Segregation" interpretieren. Dieser Index R_S wird von SILBER als "G-Segregation-Index" bezeichnet.¹²¹ R_S kann als Gini-Koeffizient eines Merkmals mit den Merkmalsausprägungen $\frac{n_i^M}{n_i^F}$ interpretiert werden, die mit der Häufigkeit n_i^F auftreten.¹²

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$(8.82) \quad R_S = \frac{1}{\mu_Y} R_X = \frac{1}{\mu_X} R_Y.^{123}$$

D.h. der Wert der geschlechtsspezifischen Gini-Koeffizienten wird jeweils noch mit dem Faktor μ_X bzw. μ_Y relativiert. Es ist also immer auch $R_Y < \mu_X$ bzw. $R_X < \mu_Y$.

¹¹⁸ Die Indexierung erfolgt jeweils entsprechend der Bezeichnung der Merkmale.

¹¹⁹ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 71f.

¹²⁰ SILBER, J. (1989c), S. 238.

¹²¹ Vgl. SILBER, J. (1989c), S. 242.

¹²² Vgl. SILBER, J. (1989c), S. 242.

¹²³ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 75 Form (159).

Da zudem $\mu_X R_X = \mu_Y R_Y$ ¹²⁴ gilt, läßt sich R_S auch als Summe der beiden Gini-Koeffizienten formulieren:

$$(8.83) \quad R_S = R_X + R_Y.$$

Liegt keine Segregation vor, ist $x_i = \mu_X$ und $y_i = \mu_Y$, folglich sind R_X , R_Y und R_S gleich Null.

Im Schaubild der beiden Lorenzkurven bildet die (zweifache) Fläche zwischen F und $L_X(F)$ und F und $L_Y(F)$ ein Maß für das Segregationsausmaß. Ordnet man **beide** Verteilungen nach steigendem x_i (bzw. y_i), läßt sich R auch darstellen als

$$(8.84) \quad R_S = R_X - C_{g,Y} = R_Y - C_{g,X},$$

wobei $C_{g,Y}$ (bzw. $C_{g,X}$) der der Korrelations-Lorenzkurve $F_{g,Y}(F_X)$ (bzw. $F_{g,X}(F_Y)$) zugeordnete Korrelationsindex ist.¹²⁵

¹²⁴ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 69 Form (153).

¹²⁵ Vgl. SILBER, J. (1989c), S. 238f.

9. Die Lorenzkurve vor dem Hintergrund partieller Ordnungsrelationen

In der neueren Literatur taucht die Lorenzkurve bzw. die daraus abgeleitete Lorenz-Dominanzordnung oder die Ordnung der GL-Kurven immer öfter in Verbindung mit einer Vielzahl weiterer partieller Ordnungsrelationen auf, und das unter sehr unterschiedlichen Gesichtspunkten. Das drückt sich in der Gliederung dieses Kapitels aus, welche sehr unterschiedliche Aspekte in den einzelnen Abschnitten aufgreift.

In die Thematik soll mit zwei Kapiteln eingeführt werden, in denen

1. allgemeine ableitbare mathematische Zusammenhänge zwischen Funktionen kurz dargestellt werden (Kap. 9.1) und
2. bekannte Ordnungsrelationen systematisch beschrieben werden, wobei stets die Bezüge zur Lorenzkurve bzw. zur verallgemeinerten Lorenzkurve GL herausgearbeitet werden (Kap. 9.2).

Anschließend wird die Lorenz-Dominanzordnung selbst untersucht (Kap. 9.3). U.a. werden äquivalente Darstellungsformen vorgestellt, die wieder auf die Verwandtschaft zu vorher bereits vorgestellten Ordnungen hinweisen.

Einem anderen Strukturierungsaspekt folgen die weiteren Kapitel:

In ihnen werden bestimmte thematische Fragestellungen aufgegriffen und die dort wesentlichen Ordnungsrelationen nun vor dem jeweiligen Sachhintergrund interpretiert, und erneut die Bedeutung der Lorenzkurve vor diesem Hintergrund herausgearbeitet werden. Im einzelnen betrifft dies die Ungleichheitsmessung (Kap. 9.4), die Streuungsmessung (Kap. 9.5), die Analyse von Lebensdauerverteilungen (Kap. 9.6) und die Beurteilung risikobehafteter Projekte (Kap. 9.7). In der Literatur finden sich weitere Anwendungsbeispiele der Lorenz-Dominanzordnung für den Vergleich von Prognosen¹, oder die Ordnung von Stichprobenmittelwerten.²

Über den Zusammenhang der Lorenz-Dominanz zur Second order Dominanz und zur "variability"-Ordnung³ läßt sich das Anwendungsgebiet weiter ausdehnen: Bspw. kann zur Charakterisierung von Wartezeitverteilungen⁴ oder zur Definition von Armutsordnungen⁵ die Lorenzkurve herangezogen werden.

¹ Vgl. DEGROOT, M. H. / ERIKSSON, E. A. (1985).

² Vgl. ARNOLD, B. C. / VILLASENOR, J. A. (1986).

³ Vgl. Kap. 9.2.1.

⁴ Vgl. STOYAN, H. / STOYAN, D. (1969) und WHITT, W. (1980).

⁵ Vgl. SPENCER, B. D. / FISHER, S. (1992).

9.1 Einige allgemeine Zusammenhänge zwischen Ordnungsrelationen

Es existiert eine unübersichtliche Vielzahl von Ordnungsrelationen. In einem Überblick sollen relativ allgemeine Beziehungen zwischen Ordnungen dargestellt werden, die eine Systematisierung bestehender Ordnungen ermöglichen.

Die allgemeinen Ausführungen beschränken sich auf die Betrachtung zweier stetiger⁶, nichtnegativer Funktionen $K(x)$ bzw. $H(x)$ im Bereich $0 \leq e \leq x \leq d$ mit Ableitung $\frac{dK(x)}{dx} = k(x) \geq 0$ bzw. $\frac{dH(x)}{dx} = h(x) \geq 0$ ⁷ im Bereich $0 \leq e \leq x \leq d$.

ÜBERSICHT 12: Kriterien für Ordnungsrelationen zweier Funktionen und äquivalente Darstellungsformen	
Kriterium bezüglich $K(x)$, $H(x)$	Äquivalente Darstellung
1. positive Differenz $K(x) - H(x) > 0$ für $0 \leq e \leq x \leq d$	Verhältnis $\frac{K(x)}{H(x)} > 1$ für $0 \leq e \leq x \leq d$
2. nicht fallende Differenz $K(x) - H(x)$ nichtfallend $0 \leq e \leq x \leq d$	$k(x) - h(x) \geq 0$
3. nichtfallendes Verhältnis $\frac{K(x)}{H(x)}$ nichtfallend für $0 \leq e \leq x \leq d$	$\frac{k(x)}{K(x)} \geq \frac{h(x)}{H(x)} \Leftrightarrow \frac{k(x)}{h(x)} \geq \frac{K(x)}{H(x)}$ $\frac{k(x) \cdot x}{K(x)} \geq \frac{h(x) \cdot x}{H(x)}$ $\frac{K(x)}{H(x)} \geq \frac{K(y)}{H(y)}$ für $0 \leq e \leq y \leq x \leq d$

⁶ Eine Erweiterung der Aussagen auf diskrete Verteilungen ist in der Regel möglich. Für die Inversion von Verteilungsfunktionen findet man in der Literatur z.T. linksseitig und rechtsseitig stetige Versionen.

⁷ Die Annahme der Positivität ist nicht für alle Ausführungen zwingend.

Partielle Ordnungen sagen etwas darüber aus, in welcher Beziehung diese beiden Funktionen über einen vorgegebenen Bereich von x zueinander stehen sollte, damit die eine Verteilung die andere hinsichtlich eines **inhaltlich** vorgegebenen Kriteriums dominiert.

Eine Systematisierung nach **formalen** Kriterien führt zu den in Übersicht 12 aufgeführten wesentlichen Forderungskategorien und äquivalenten Darstellungsformen.

Daneben lassen sich einseitige Beziehungen aufstellen, mit deren Hilfe später in Kap. 9.2 Bezüge zwischen verschiedenen Ordnungsrelationen hergestellt werden können.

Drei wesentliche Überlegungen sollen hier angeführt werden:

Theorem A: "Gilt $k(x) \geq h(x)$ in $e \leq x \leq d$, dann folgt
 $K(x) - K(e) \geq H(x) - H(e)$ in $e \leq x \leq d$ ".

Überlegung: Flächenbetrachtungen führen sofort zu:

$$K(x) - K(e) = \int_e^x k(y) dy \geq \int_e^x h(y) dy = H(x) - H(e).$$

Theorem B: "Ist $\frac{k(x)}{h(x)}$ nichtfallend in $e \leq x \leq d$ und $K(e) = 0$, dann folgt

$$\frac{K(x)}{H(x)} \text{ nichtfallend in } e \leq x \leq d$$

Überlegung: Der Gedankengang baut auf dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung auf.⁸ Danach ist

⁸ "f sei eine monotone und g eine stetige reelle endliche Funktion in einem abgeschlossenen Intervall [a, b]. Dann existiert dort eine Zahl ξ , so daß für das (sicher vorhandene) Stieltjsche Integral von f über [a, b] bezüglich g die Gleichung $\int_a^b f(x) dg(x) \geq f(a) [g(\xi) - g(a)] + f(b) [g(b) - g(\xi)]$ gilt."

NAAS, J. / SCHMIDT, H. L. (1979), S. 181. Hier ist $f = \frac{k(x)}{h(x)}$, $g = H(x)$, $a = e$ und $b = x$.

$$\int_e^x \frac{k(x)}{h(x)} dH(x) = \frac{k(e)}{h(e)} [H(\xi) - H(e)] + \frac{k(x)}{h(x)} [H(x) - H(\xi)]$$

$$\Leftrightarrow K(x) - K(e) = \frac{k(x)}{h(x)} H(x) + \left[\frac{k(e)}{h(e)} - \frac{k(x)}{h(x)} \right] H(\xi) + \frac{k(e)}{h(e)} [-H(e)].$$

Da der zweite und dritte Summand nichtpositiv sind, gilt folglich

$$K(x) - K(e) \leq \frac{k(x)}{h(x)} H(x), \text{ damit } \frac{K(x)}{H(x)} \leq \frac{k(x)}{h(x)}.$$

Dies ist wegen 3. äquivalent zu " $\frac{K(x)}{H(x)}$ nichtfallend in $e \leq x \leq d$ ".

Theorem C: "Ist $\frac{k(x)}{h(x)}$ nichtfallend in $e \leq x \leq d$ und $k(d) = h(d)$,
dann folgt $k(x) \leq h(x)$ in $e \leq x \leq d$ ".

Überlegung: Aus $\frac{k(x)}{h(x)}$ nichtfallend in $e \leq x \leq d$ folgt, daß für $k(x)$ und $h(x) > 0$ in diesem Bereich maximal ein Schnittpunkt vorliegen kann.⁹ Wenn dieser bei d liegt, muß für $x < d$ $k(x) \leq h(x)$ gelten. Ein weiterer Schnittpunkt liegt vor, wenn $k(x) = h(x) = 0$ gilt. Dadurch werden obige Bedingungen nicht verletzt.

9.2 Überblick über bekannte Ordnungsrelationen und deren Bezüge zur Lorenzkurve

Zwischen den in den Kapiteln 3, 6 und 7 bereits vorgestellten Ordnungsrelationen $X \overset{*}{\underset{\bar{L}}{\succ}} Y, X \underset{\bar{L}}{\prec} Y, X \underset{\bar{G}L}{\prec} Y, X \underset{\bar{W}}{\prec} Y, X \overset{\bar{D}}{\succ} Y, X \overset{\bar{A}}{\succ} Y, X \underset{\bar{L}(\nu)}{\prec} Y$ und $X \overset{\bar{L}(\nu)}{\succ} Y$ lassen sich

u.a. folgende Bezüge herstellen (mit ^a für $\mu_X = \mu_Y$ und ^b für $\mu_X > \mu_Y$):

⁹ Bei dieser "weichen" Definition ist es durchaus möglich, daß $k(x) = c h(x)$ für ein bestimmtes Intervall $x \in [x_1, x_2]$. Dieser Fall soll auch mit dem Begriff "Schnittpunkt" kompatibel sein.

$$\begin{array}{c}
 X \underset{\text{GL}}{<} Y \\
 \uparrow^a, \uparrow^b \\
 X \underset{\text{L}}{<} Y \\
 \Rightarrow^{10} \\
 X \underset{*}{<} Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 X \underset{\text{L}}{<} Y \\
 \Rightarrow \\
 X \underset{\text{L}^{(\nu)}}{>} Y, \nu \geq 2 \\
 X \underset{\text{L}^{(\nu)}}{<} Y, \nu \geq 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 X \underset{\text{D}}{>} Y \Leftrightarrow X \underset{\text{W}}{>} Y, \quad X \underset{\text{A}}{>} Y
 \end{array}$$

In knapper Form soll hier ein kurzer Überblick über weitere bekannte Ordnungsrelationen gegeben werden.

Der Zielsetzung gemäß wird versucht, Bezüge zur Lorenzkurve aufzuzeigen, um damit indirekt eine Einordnung der Lorenz-Dominanzordnung¹¹ zu ermöglichen. Dabei wird hier zur Abgrenzung stets auch die Dominanzrelation der "verallgemeinerten Lorenzkurven" GL¹² betrachtet. Bei den in den anschließenden Kapiteln dargestellten Ordnungsrelationen und Anwendungsbeispielen werden überwiegend direkte Bezüge zur GL-Dominanzordnung hergestellt.

Die Überlegungen beschränken sich auf den Vergleich zweier nichtnegativer Variabler mit $F_X(x)$, $F_Y(x)$ stetig. Es ist $F_X = 0$ für $x \leq a_X$ und $F_X = 1$ für $x \geq b_X$, bzw. $F_Y = 0$ für $y \leq a_Y$ und $F_Y = 1$ für $y \geq b_Y$, wobei $b = \max[b_X, b_Y]$ und $a = \min[a_X, a_Y] \geq 0$.

Wesentlicher Baustein der bekannten Ordnungen sind Ausdrücke, die als "höhere" bzw. "kumulierte (inverse) Verteilungsfunktionen" bezeichnet werden sollen:

¹⁰ Vgl. Kap. 9.2.4.

¹¹ Vgl. Kap. 3.2.2.

¹² Vgl. Kap. 3.3.

Definition 9.1: Kumulierte Verteilungsfunktion¹³:

$$\begin{aligned}
 F_X^{(\nu)}(x) &= \int_0^x F_X^{(\nu-1)}(y) dy \text{ mit } \begin{cases} F_X^{(0)}(x) = f_X(x) \\ F_X^{(1)}(x) = F_X(x) \end{cases} \\
 &= \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^x (x-y)^{\nu-1} dF_X(y) \\
 &= \frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} x^{\nu-1-k} (-1)^k m_k' \cdot L_k(x)^{14} \\
 &\quad \text{für } 0 \leq x \leq \infty \text{ und } \nu \geq 1.
 \end{aligned}$$

Definition 9.2: Kumulierte inverse Verteilungsfunktion $x^{(\nu)}(F)$:

$$\begin{aligned}
 x^{(\nu)}(F) &= \int_0^F x^{(\nu-1)}(q) dq \begin{cases} \text{für alle } \nu \geq 1 \\ \text{für alle } 0 \leq F \leq 1 \end{cases} \text{ mit } \begin{cases} x^{(0)}(F) = x(F) \\ x^{(1)}(F) = GL(F) \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\nu!} \int_{x(0)}^{x(F)} (F-q)^\nu \frac{dx(q)}{dq} dq + \frac{1}{\nu!} F^\nu \cdot x(0)^{15} \\
 &= \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^F (F-q)^{\nu-1} x(q) dq = \mu_X L_X^{(\nu)}(F)
 \end{aligned}$$

Kumulierte inverse Verteilungsfunktionen und kumulierte Lorenzkurven unterscheiden sich durch den Faktor μ_X . Der Fall $\nu = 1$ führt zur verallgemeinerten Lorenzkurve $GL(F)$.

In Abhängigkeit davon, ob man

- die höhere Verteilungsfunktion oder die höhere inverse Verteilungsfunktion, und
- die "Differenz positiv bzw. Verhältnis größer eins" oder "Verhältnis nichtfallend"

¹³ Vgl. ARNOLD, B. C. (1987), S. 82.

¹⁴ Vgl. Kap. 8.3.1.

¹⁵ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M. (1989), S. 316.

als ordnungskonstituierend heranzieht, gelangt man zu vier verschiedenen Kategorien von partiellen Ordnungen:

	höhere Verteilungsfunktion	höhere inverse Verteilungsfunktion
Differenz positiv	stochastische Dominanz	inverse stochastische Dominanz
Verhältnis nichtfallend	"Verhältnis-Dominanz"	"inverse Verhältnis-Dominanz"

Bei stochastischer und inverser stochastischer Dominanzordnung läßt sich theoretisch eine normierte und eine nicht normierte Version unterscheiden. Für Verhältnis-Dominanzen führen solche Normierungsfaktoren nicht zu Bedeutungsänderungen. Die Überlegungen greifen auf die in Kapitel 9.1 dargestellten allgemeinen Zusammenhänge zurück.

9.2.1 Die stochastische Dominanzordnung und deren Bezüge zur Lorenzkurve

Die vielleicht bekanntesten Ordnungsrelationen sind die der stochastischen Dominanz, die für entscheidungstheoretische Fragestellungen entwickelt wurden:¹⁶

Definition 9.3: Die Variable X wird im ν ten Grad ($\nu = 1, 2, \dots$) stochastisch dominiert von Y , ($X \underset{(\nu)}{\leq} Y$), wenn $F_X^{(\nu)}(x) \geq F_Y^{(\nu)}(x)$ für $0 \leq x \leq b$, wobei für einige x eine echte Größer-Beziehung besteht.

Es gilt

Satz 9.1: $X \underset{(\nu)}{\leq} Y \Rightarrow X \underset{(m)}{\leq} Y$ mit $0 \leq \nu \leq m$

¹⁶ Vgl. HADAR, J. / RUSSELL, W. R. (1969).

Vgl. LEVY, H. (1992): Übersichtsartikel mit Literaturhinweisen.

Vgl. BAWA, V. S. (1982); Übersichtsartikel mit Literaturhinweisen zu Anwendungen.

Vgl. FISHBURN, P. (1980).

Überlegung: Anwendung von Theorem A mit $k(x) = F_X^{(\nu)}(x)$, $h(x) = F_Y^{(\nu)}(x)$, $e = 0$,

$d = b$, wobei für stetige nichtnegative Variablen

$$F_X^{(\nu)}(0) = F_Y^{(\nu)}(0) = 0 \text{ für } \nu = 1, 2, \dots \text{ ist.}$$

Bekannt sind insbesondere die Spezialfälle $\nu = 1$ und $\nu = 2$:

$$\text{First order Dominanz } (\nu=1): F_X(x) \geq F_Y(x) \Leftrightarrow 1 - F_X(x) \leq 1 - F_Y(x) \\ \text{für } 0 \leq x \leq b$$

$X \leq Y$ impliziert die Mittelwertrelation $\mu_X \leq \mu_Y$.
(1)

$$\text{Second order Dominanz } (\nu=2): \int_0^x F_X(y) dy \geq \int_0^x F_Y(y) dy \text{ für } 0 \leq x \leq b.^{17}$$

$X \leq Y$ impliziert ebenfalls die Mittelwertrelation $\mu_X \leq \mu_Y$.
(2)

Äquivalente Aussagen für First und Second order Dominanz können über Mittelwerte formuliert werden.

$$\text{Satz 9.2: } X \leq Y \Leftrightarrow E_X(g(x)) = \int_0^b g(x) f_X(x) dx \leq E_Y(g(x)) = \int_0^b g(x) f_Y(x) dx \\ \text{für alle } g(x) \text{ stetig, nichtfallend in } 0 \leq x \leq b^{18}.$$

$$\text{Satz 9.3: } X \leq Y \Leftrightarrow E_X(g(x)) \leq E_Y(g(x)) \text{ für alle } g \text{ stetig, nichtfallend, konkav}^{19} \\ \Leftrightarrow E_X(g(x)) \geq E_Y(g(x)) \text{ für alle } g \text{ stetig, nichtsteigend, konvex}^{20} \\ \text{für alle } 0 \leq x \leq b.$$

¹⁷ Vgl. MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979), S. 12, "weak supermajorization".

¹⁸ Vgl. HADAR, J. / RUSSEL, W. R. (1969), S. 28ff.

¹⁹ Vgl. HADAR, J. / RUSSEL, W. R. (1969), S. 30ff.

²⁰ Vgl. MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979), S. 12.

Satz 9.4: Ist $\mu_X = \mu_Y$, so gilt $X \stackrel{(2)}{\leq} Y \Leftrightarrow E_X(g(x)) \geq E_Y(g(x))$

für alle g stetig, konvex,²¹

$$\Leftrightarrow E_X(g(x)) \leq E_Y(g(x))$$

für alle g stetig, konkav in $0 \leq x \leq b$.

Satz 9.5: $X \stackrel{(2)}{\leq} Y \Leftrightarrow E_X[(x-y)^+] \geq E_Y[(x-y)^+] \forall x \in [0, b]$ ²²

$$\text{mit } E[(x-y)^+] = \int_0^x (x-y) f(y) dy = \int_0^b (x-y)^+ f(y) dy$$

$$\text{und } (x-y)^+ = \begin{cases} x-y & \text{für } x \geq y \\ 0 & \text{für } x < y \end{cases},$$

da $\int_0^x F(y) dy$ bei partieller Integration in $\int_0^x (x-y) f(y) dy$ übergeht.

Zwischen der Dominanzordnung der GL-Kurven und der Second order Dominanz besteht eine äquivalente Beziehung:²³

Satz 9.6: $\int_0^x F_X(x) dx \geq \int_0^x F_Y(x) dx$ für $0 \leq x < \infty$

$$\Leftrightarrow \int_0^F x(u) du \leq \int_0^F y(u) du \Leftrightarrow \mu_X L_X(F) \leq \mu_Y L_Y(F) \text{ für } 0 \leq F \leq 1.$$

Überlegung: Bei sich schneidenden Verteilungen wird die Second order Bedingung

$X \stackrel{(2)}{\leq} Y$ genau dann über den gesamten Bereich von x eingehalten, wenn in

den Schnittpunkten der Kurve die vorgegebene Größenrelation der Flächen

²¹ Vgl. MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979), S. 11.

²² Vgl. MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979), S.11f.

²³ Vgl. YITZHAKI, S. (1991) und THISTLE, P. (1989b), S. 5f.

vorliegt. Dort ist $x_S(F_S) = y_S(F_S)$ und $\int_0^{F_S} x(u)du \leq \int_0^{F_S} y(u)du$. Diese

Größenrelation muß ebenso für den gesamten Bereich von F gelten. Eine Umkehrung der obigen Überlegungen ist möglich.

Folglich gilt

Satz 9.7: Für $\mu_X = \mu_Y$ folgt $X \underset{(2)}{\leq} Y \Leftrightarrow X \underset{\bar{L}}{\geq} Y$ und für $\mu_X < \mu_Y$ $X \underset{\bar{L}}{\geq} Y \Rightarrow X \underset{(2)}{\leq} Y$.

Vergleicht man die Verteilung von $\tilde{X} = \frac{X}{\mu_X}$ und $\tilde{Y} = \frac{Y}{\mu_Y}$, ergibt sich demzufolge:

Satz 9.8: $\tilde{X} \underset{(2)}{<} \tilde{Y} \Leftrightarrow \tilde{X} \underset{\bar{L}}{\geq} \tilde{Y} \Leftrightarrow X \underset{\bar{L}}{\geq} Y$.^{24,25}

Daneben existiert eine Dominanzordnung, die auf der Kumulation von oben aufbaut und unter der Bezeichnung "variability"-Ordnung bekannt ist:

Definition 9.4: X ist variabler als Y ($X \underset{\bar{L}}{\geq} Y$), wenn

$$\int_x^b [1-F_X(y)]dy \geq \int_x^b [1-F_Y(y)]dy \text{ für } 0 \leq x \leq b.$$

²⁴ Vgl. Kap. 9.4.1.

²⁵ Einen Spezialfall einer second order dominance beschreibt SHAKED (1980):

Er betrachtet zwei Verteilungen mit gleichem Mittelwert. Schneiden sich f_X und f_Y zweimal, so daß das Vorzeichen der Differenz $f_X - f_Y$ erst negativ, dann positiv und schließlich wieder negativ ist, dann ergibt sich, daß die Verteilungsfunktionen sich genau einmal schneiden. Wegen $b - \mu_X = b - \mu_Y$ gilt folglich $X \underset{(2)}{\geq} Y$.

Vgl. SHAKED, M. (1980), ARNOLD, B. C. / VILLASENOR, J. A. (1986), S. 48 und WILFLING, B. (1993), S. 18.

²⁶ Vgl. ALZAID, A. A. (1988b), S. 35; "X is said more variable than Y".

Zu dieser Ordnungsrelation gibt es folgende Äquivalenzausdrücke:

Satz 9.9: $X \underset{\nu}{\geq} Y \Leftrightarrow E_X(g(x)) \geq E_Y(g(x))$ für alle g stetig, nichtfallend, konvex,²⁷
 $\Leftrightarrow E_X(g(x)) \leq E_Y(g(x))$ für alle g stetig, nichtsteigend, konkav,
 $\Leftrightarrow \mu_X(1 - L_X(F)) \geq \mu_Y(1 - L_Y(F))$ für $0 \leq F \leq 1$.²⁸

Folglich gilt $\tilde{X} \underset{\nu}{\geq} \tilde{Y} \Leftrightarrow X \underset{\bar{L}}{\geq} Y$

9.2.2 Inverse stochastische Dominanz und deren Bezüge zur Lorenzkurve

MULIERE/SCARSINI²⁹ definieren eine inverse Dominanzordnung analog der stochastischen Dominanzordnung, aufbauend auf der inversen Verteilungsfunktion, zu der auch die Ordnung der verallgemeinerten Lorenzkurve von SHORROCKS gehört:

Definition 9.5: Die Variable X wird "invers dominiert im ν ten Grad" von Y ($X \underset{(\nu)}{\leq}^{-1} Y$), $\nu \geq 0$, wenn $x^{(\nu)}(F) \leq y^{(\nu)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$.³⁰

Es ist beispielsweise

$$\begin{aligned} X \underset{(0)}{\leq}^{-1} Y &:= x^{(0)}(F) \leq y^{(0)}(F) \Leftrightarrow \mu_X \frac{dL_X(F)}{dF} \leq \mu_Y \frac{dL_Y(F)}{dF} \Leftrightarrow X \underset{(1)}{\leq} Y. \\ X \underset{(1)}{\leq}^{-1} Y &:= x^{(1)}(F) \leq y^{(1)}(F) \Leftrightarrow \mu_X L_X(F) \leq \mu_Y L_Y(F) \Leftrightarrow X \underset{GL}{\geq} Y \Leftrightarrow X \underset{(2)}{\leq} Y. \end{aligned}$$

Es gilt

Satz 9.10: $X \underset{(\nu)}{\leq}^{-1} Y \Leftrightarrow X \underset{(\bar{m})}{\leq}^{-1} Y$ mit $0 \leq \nu < m$.³¹

Überlegung: Wegen Theorem A mit $k(x) = x^{(\nu)}(F)$, $h(x) = y^{(\nu)}(F)$, $e = 0$, $d = 1$.

²⁷ Vgl. ALZAIID, A. A. (1988b), S. 35.

²⁸ Vgl. MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979), S. 12; Herleitung im Anhang.

²⁹ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M. (1989).

³⁰ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M. (1989), S. 316.

³¹ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M. (1989), S. 316.

Baut man diese Dominanzordnung auf der normierten inversen Verteilungsfunktion auf, gelangt man zur Ordnung der kumulierten Lorenzkurven selbst.³²

Für $\mu_X = \mu_Y$ stimmen $X \underset{L(\nu)}{\geq} Y$ und $X \underset{(\nu)}{\leq}^{-1} Y$ überein, ist $\mu_X < \mu_Y$ folgt aus $X \underset{L(\nu)}{\geq} Y$ $X \underset{(\nu)}{\leq}^{-1} Y$.

Wird die Lorenzkurve als Verteilungsfunktion interpretiert, stimmt demnach die stochastische Dominanzrelation

$$F_{X(\nu)} \underset{L(\nu)}{\geq} F_Y := L_X^{(\nu)}(u) \leq L_Y^{(\nu)}(u) \text{ mit } X \underset{L(\nu)}{\geq} Y \text{ überein.}$$

9.2.3 Verhältnis-Dominanz und deren Bezüge zur Lorenzkurve

Analog der stochastischen Dominanzordnung läßt sich allgemein folgende Verhältnis-Dominanz definieren:

Definition 9.6: Die Variable X wird von Y positiv verhältnisdominiert im ν ten Grad, $X \underset{(\nu)}{\leq} Y$, wenn $\frac{F_X^{(\nu)}(x)}{F_Y^{(\nu)}(x)}$ nichtfallend für $a \leq x \leq b$ gilt, $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$, vorausgesetzt, das Verhältnis ist definiert.

Bekannt sind die Spezialfälle $\nu = 0$ und $\nu = 1$ ³³:

$\nu = 0$:³⁴ Dominanz im Sinn des Likelihood-Quotienten.

$\nu = 1$:³⁵ Dominanz in dem Sinn, daß X "einheitlich größer in positiver Richtung" ist als Y .³⁶

³² Vgl. Kap. 7.. Der Fall $\frac{x(F)}{\mu_X} \leq \frac{y(F)}{\mu_Y}$ für alle F kann jedoch nicht auftreten.

³³ Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 211f.

³⁴ Vgl. ALZAID, A. A. (1988b) mit Hinweis auf ursprüngliche Entwürfe von LEHMANN, E. L. (1955) KARLIN, S. (1957) und KARLIN, S. / RUBIN, H. (1956).

³⁵ Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 211 und KEILSON, J. / SUMITA, U. (1982), S. 182ff.

³⁶ "Uniformly larger than Y in the positive direction", ALZAID, A. A. (1990), S. 211.

Es gilt

$$\text{Satz 9.11: } X \underset{(\nu)}{\overset{v^+}{\leq}} Y \Rightarrow X \underset{(m)}{\overset{v^+}{\leq}} Y \text{ mit } 0 \leq \nu < m$$

Überlegung: Anwendung von Theorem B mit $e = a$ und $d = b$, $k(x) = F_X^{(\nu)}(x)$,
 $h(x) = F_Y^{(\nu)}(x)$, $K(e) = F_X^{(\nu)}(a) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Satz 9.12: } X \underset{(\bar{1})}{\overset{v^+}{\leq}} Y \Rightarrow X \underset{(\bar{1})}{\overset{v^+}{\geq}} Y.$$

Überlegung: Anwendung von Theorem C mit $k(x) = F_X(x)$, $h(x) = F_Y(x)$,
 $e = a$, $d = b$; im Bereich $0 \leq x < a$ gilt $F_X(x) = F_Y(x) = 0$.

$$\text{Satz 9.13: } X \underset{(\bar{2})}{\overset{v^+}{\leq}} Y \text{ und } \mu_X = \mu_Y = \mu \Rightarrow X \underset{(\bar{2})}{\overset{v^+}{\geq}} Y \Leftrightarrow X \underset{\bar{L}}{\overset{v^+}{\leq}} Y.$$

Überlegung: Wegen $\mu_X = \mu_Y$ ist $F_X^{(2)}(b) = F_Y^{(2)}(b) = b - \mu$.

Anwendung von Theorem C mit $k(x) = F_X^{(2)}(x)$, $h(x) = F_Y^{(2)}(x)$,
 $e = a$, $d = b$ führt zu $F_X^{(2)}(x) \leq F_Y^{(2)}(x)$ für $a \leq x \leq b$;
für $0 \leq x < a$ gilt $F_X^{(2)}(x) = F_Y^{(2)}(x) = 0$.

Wiederum läßt sich als Spezialfall die Verteilungsfunktion "Lorenzkurve" betrachten:

$$\text{d.h. } F_X \underset{(\nu)}{\overset{v^+}{\leq}} F_Y, \text{ wenn } \frac{L_X^{(\nu)}(F)}{L_Y^{(\nu)}(F)} \text{ nichtfallend für } 0 < F \leq 1 \text{ für } \nu = 1, 2, \dots$$

An der Stelle $F = 0$ gilt $L_X^{(\nu)}(0) = L_Y^{(\nu)}(0) = 0$, damit $\frac{L_X^{(\nu)}(0)}{L_Y^{(\nu)}(0)} = \frac{a_X \mu_Y}{a_Y \mu_X}$, was für

$a_Y > 0$ definiert ist.

Eine Übertragung der obigen Sätze führt zu:

$$\text{Satz 9.14: } F_X \underset{(\bar{1})}{\overset{v^+}{\leq}} F_Y \Rightarrow L_X(F) \leq L_Y(F) \text{ für } 0 \leq F \leq 1.$$

Satz 9.15: $F_X \stackrel{v^+}{\leq} F_Y$ und $R_X = R_Y \Rightarrow L_X^{(2)}(F) \leq L_Y^{(2)}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$.

Neben dieser positiven Verhältnisdominanz ließe sich auch eine "negative Verhältnisdominanz" definieren. Es soll für diese Betrachtung jedoch nur zusätzlich die Dominanzordnung "X ist einheitlich größer in negativer Richtung als Y" eingeführt werden:

Definition 9.7: $X \stackrel{v^-}{\geq} Y$, wenn $\frac{1-F_X(x)}{1-F_Y(x)}$ nichtfallend in $a \leq x \leq b$, vorausgesetzt, das Verhältnis ist definiert.³⁷

Es gilt

Satz 9.16: $X \stackrel{v^-}{\geq} Y \Rightarrow X \stackrel{v}{\geq} Y$.³⁸

Überlegung: Analog Theorem C. Der Schnittpunkt liegt bei a. Demnach dürfen sich im im Bereich $a < x < b$ $1 - F_X(x)$ und $1 - F_Y(x)$ nicht mehr schneiden, wobei $1 - F_X(x) \geq 1 - F_Y(x)$ gelten muß.

9.2.4 Inverse Verhältnis–Dominanz und deren Bezüge zur Lorenzkurve

Einige in der Literatur sehr bekannte Ordnungsrelationen lassen sich zu der Gruppe der "inversen Verhältnis–Dominanzordnungen" zusammenfassen, wenn man zusätzlich fordert F_Y streng steigend.³⁹ Zu dieser Gruppe gehört beispielsweise auch die Star-shaped–Dominanzordnung.⁴⁰

³⁷ Vgl. ALZAIID, A. A. (1990), S. 211 und (1988b), S. 36.

³⁸ Vgl. ALZAIID, A. A. (1990), S. 212.

³⁹ Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 106.

⁴⁰ Vgl. Kap. 3.1.

Definition 9.8: Die Variable X wird von Y positiv invers verhältnisdominiert, $X \stackrel{\nu+(-1)}{\leq} Y$, wenn $\frac{y^{(\nu)}(F)}{x^{(\nu)}(F)}$ nichtfallend in $0 < F < 1$, $\nu = -1, 0, 1, \dots$ und $y'(x) > 0$. Es ist $x^{(-1)}(F) \equiv \frac{dx(F)}{dF} \equiv x'(F)$.

Folgende Spezialfälle treten in dieser Klasse auf:

Spezialfälle	Bezeichnung
$\nu = -1$ $\frac{y'(F)}{x'(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$	X ist konvex geordnet gegenüber Y , $X \leq_c Y^{41}$, wenn $F_Y^{-1} F_X(x)$ konvex ist über den Bereich von x .
$\nu = 0$ $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$	X ist "Starshaped" geordnet gegenüber Y , $X \leq_{\star} Y^{42}$
$\nu = 1$ $\frac{\mu_Y L_Y(F)}{\mu_X L_X(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$	X hat eine steigende Lorenzkurve relativ zu Y in positiver Richtung, $X \geq_{\Pi^+} Y^{43}$

Es gilt:

Satz 9.17: $X \stackrel{\nu+(-1)}{\leq} Y \Rightarrow X \stackrel{\nu+(-1)}{\leq} Y$ für alle $-1 \leq \nu < m$.

Überlegung: Anwendung von Theorem B mit $k(x) = y^{(\nu)}(F)$, $h(y) = x^{(\nu)}(F)$, $e = 0$,
 $d = 1$.⁴⁴

⁴¹ Vgl. VAN ZWET, W. R. (1964), S. 48 und BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 106.

⁴² Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 106 und ALZAID, A. A. (1990), S. 213.

⁴³ Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 214.

⁴⁴ Es wird davon ausgegangen, daß $x(0) = 0$ ist.

Damit ist z. B. $X \underset{c}{\leq} Y \Rightarrow X \underset{*}{\leq} Y$.⁴⁵

Auch hier lassen sich wieder Bezüge zur Lorenz-Dominanzordnung entwickeln. Es gilt insbesondere:

Satz 9.18: $X \underset{*}{\leq} Y \Rightarrow X \underset{\bar{L}}{\leq} Y$ ⁴⁶

Überlegung: $X \underset{*}{\leq} Y$ ist äquivalent der Aussage " $\frac{y(F)/\mu_Y}{x(F)/\mu_X}$ nichtfallend in $0 < F < 1$ "

Da die Fläche unter der normierten inversen Verteilungsfunktionen auf Eins normiert ist, müssen sich $\frac{x(F)}{\mu_X}$ und $\frac{y(F)}{\mu_Y}$ mindestens einmal schneiden. Daraus folgt, daß sich die beiden Funktionen im Bereich $0 < F < 1$ genau einmal schneiden, wenn eine Starshaped-Dominanzrelation vorliegt, wobei zunächst für kleine F

$\frac{y(F)}{\mu_Y} \leq \frac{x(F)}{\mu_X}$ gilt. Dies führt wiederum zur Relation

$$L_X(F) = \int_0^F \frac{x(q)}{\mu_X} dq \geq \int_0^F \frac{y(q)}{\mu_Y} dq = L_Y(F) \text{ für } 0 < F < 1.$$

Es ist hierbei möglich, daß $x(0) = y(0)$ bzw. $x(1) = y(1)$ gilt.

Satz 9.19: $X \underset{(1)}{\overset{v^{(-1)}}{\leq}} Y \Rightarrow X \underset{\bar{L}}{\leq} Y$ ⁴⁷

Überlegung: " $\frac{\mu_Y}{\mu_X} \cdot \frac{L_Y(F)}{L_X(F)}$ nichtfallend" ist äquivalent " $\frac{L_Y(F)}{L_X(F)}$ nichtfallend" in

$0 < F < 1$. Für stetige Verteilungen ist $\frac{L_Y(1-\delta)}{L_X(1-\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{L_Y(1)}{L_X(1)} = 1$ und

$\frac{L_Y(\epsilon)}{L_X(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L_Y(0)}{L_X(0)}$. D. h. für $F < 1$ muß $\frac{L_Y(F)}{L_X(F)}$ kleiner eins sein.

⁴⁵ Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 107.

⁴⁶ Vgl. auch FELLMAN, J. (1976), S. 823f.

⁴⁷ Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 214.

In Abhängigkeit von Lorenzkurvenausdrücken lassen sich die folgenden Ordnungen auch umschreiben:

$$\nu = 0: \quad X \underset{c}{\leq} Y := \frac{y'(F)}{x'(F)} = \frac{dL_Y^2(F)/dF^2}{dL_X^2(F)/dF^2} \cdot \frac{\mu_Y}{\mu_X} \text{ nichtfallend für } 0 < F < 1,$$

$$\nu = 1: \quad X \underset{*}{\leq} Y := \frac{y(F)}{x(F)} = \frac{dL_Y(F)/dF}{dL_X(F)/dF} \cdot \frac{\mu_Y}{\mu_X} \text{ nichtfallend für } 0 < F < 1$$

Im Gegensatz zur (inversen) stochastischen Dominanz spielen bei Verhältnisdominanz die Mittelwerte als konstante Faktoren keine Rolle.

$X \underset{*}{\leq} Y$ erfordert, daß die zweite Ableitung der relativen Korrelations-Lorenzkurve

$L_Y(L_X)$ nicht negativ ist:

$$\text{Es gilt } \frac{d \left[\frac{dL_Y(F)}{dL_X(F)} \right]}{dF} = \frac{d \left[\frac{dL_Y}{dL_X} \right]}{dL_X} \cdot \frac{dL_X(F)}{dF} \geq 0, \text{ genau dann, wenn}$$

$$\frac{d \left[\frac{dL_Y}{dL_X} \right]}{dL_X} = \frac{d^2 L_Y}{dL_X^2} \geq 0, \text{ da } \frac{dL_X(F)}{dF} \geq 0 \text{ erfüllt ist.}$$

In Analogie zu Definition 9.7 läßt sich auch hier eine negative inverse Verhältnisdominanz definieren.

Definition 9.9: X hat eine nichtfallende Lorenzkurve relativ zu Y in negativer Richtung ($X \underset{II}{\geq} Y$), wenn $\frac{1-L_X(F)}{1-L_Y(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$ gilt.⁴⁸

⁴⁸ Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 214.

9.2.5 Eine zusammenfassende Übersicht

Ein zusammenfassender Überblick über die wichtigsten Zusammenhänge zwischen den bereits vorgestellten Ordnungsrelationen (für $\nu \leq 3$) soll der Einordnung der Lorenz-Dominanzordnung dienen.

ÜBERSICHT 13: Wichtigste Zusammenhänge zwischen den in Kapitel 9.2 vorgestellten Ordnungsrelationen

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \underset{(\bar{1})}{\leq}^{V+} Y \Rightarrow & & X \underset{(\bar{2})}{\leq}^{V+} Y & & & & \\
 \Downarrow & & \Downarrow^a & & & & \\
 X \underset{(\bar{1})}{\succ} Y \Rightarrow & & X \underset{(\bar{2})}{\succ} Y \Rightarrow & & X \underset{(\bar{3})}{\succ} Y & & \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow & & & & \\
 X \underset{(\bar{1})}{\succ}^V \neg Y \Rightarrow & X \underset{(\bar{0})}{\succ}^{-1} Y \Rightarrow & X \underset{GL}{\leq} Y \Leftrightarrow & & X \underset{(\bar{1})}{\succ}^{-1} Y \Rightarrow & X \underset{(\bar{2})}{\succ}^{-1} Y & \\
 & & \Updownarrow^a \Updownarrow^b & & & \Updownarrow^b \Updownarrow^a & \\
 X \underset{c}{\leq} Y \Rightarrow & X \underset{*}{\leq} Y \Rightarrow & X \underset{L}{\leq} Y & \Rightarrow & X \underset{L}{\leq} Y & & \\
 & \Downarrow & \Updownarrow^a \Downarrow^c & & & & \\
 & X \underset{(\bar{1})}{\leq}^{V+(-1)} Y & X \underset{v}{\leq} Y & & & &
 \end{array}$$

mit ^a für $\mu_X = \mu_Y$, ^b für $\mu_X > \mu_Y$ und ^c für $\mu_X < \mu_Y$.

9.3 Die Lorenz–Dominanzordnung

Dieses Kapitel soll in einer übersichtlichen Darstellung noch einmal äquivalente Formen der Lorenz–Dominanzordnung und aus der Lorenz–Dominanzordnung folgende Beziehungen vorstellen (Kap. 9.3.1), sowie Auswirkungen von Transformationen (Kap. 9.3.2) bzw. von Mischung und Aggregation (Kap. 9.3.3) auf die Lorenz–Dominanzbeziehungen begutachten.

9.3.1 Äquivalente Darstellungsformen zur Lorenz–Dominanzordnung

Für zwei nichtnegative Variablen X und Y mit positivem und endlichem Erwartungswert ist die Lorenz–Dominanzbeziehung definiert als $X \underset{\bar{L}}{\leq} Y : L_X(F) \geq L_Y(F)$ für

$$0 \leq F \leq 1.$$

Eine solche Dominanzrelation folgt z.B. immer dann, wenn sich $\frac{x(F)}{\mu_X}$ und $\frac{y(F)}{\mu_Y}$ genau

einmal schneiden. Dies ist bspw. bei Starshaped geordneten Verteilungen der Fall. Umgekehrt ist aber auch eine Lorenz–Dominanzordnung möglich, obwohl sich die normierten inversen Verteilungsfunktionen zweier Variablen mehr als einmal schneiden.

Bspw. im Fall eines Transfers eines Merkmalsbetrags von einem größeren an einen kleineren Merkmalsträger schneiden sich die (normierten inversen) Verteilungsfunktionen im Bereich zwischen den beiden ursprünglichen Merkmalswerten genau einmal, davor bzw. danach sind sie deckungsgleich.

Einige Beiträge untersuchen die Fragestellung, inwieweit für bestimmte Klassen von Verteilungstypen bei verschiedenen Parameterkonstellationen eine Lorenz–Dominanzbeziehung besteht.⁴⁹

Äquivalente Definitionen setzen sehr oft $\mu_X = \mu_Y$ voraus. Diese Bedingung ist u. a. dann erfüllt, wenn statt X und Y $\tilde{X} = \frac{X}{\mu_X}$ und $\tilde{Y} = \frac{Y}{\mu_Y}$ oder $\mu_X \cdot Y$ und $\mu_Y \cdot X$ zum

Vergleich herangezogen werden.⁵⁰ Die Äquivalenzrelationen lassen sich entsprechend umformulieren.

$$\text{Es ist bspw. } X \underset{\bar{L}}{\leq} Y \Leftrightarrow \tilde{X} \underset{\bar{L}}{\leq} \tilde{Y} \Leftrightarrow \tilde{X} \underset{(2)}{\geq} \tilde{Y}.$$

⁴⁹ Vgl. TAILLIE, C. (1981), ARNOLD, B. C., ROBERTSON, C. A. / BROCKETT, P. L. / SHU, B.–Y. (1987), WILFLING, B. (1993) und WILFLING, B. / KRÄMER, W. (1993).

⁵⁰ Vgl. WILFLING, B. (1993), S. 20.

Im einzelnen gelten folgende (bereits bekannte) Äquivalenzaussagen zu $X \underset{\bar{L}}{\geq} Y$:

ÜBERSICHT 14: Äquivalente Darstellungsformen zur Lorenz-Dominanzordnung	
Voraussetzung	
1.	$\bar{X} \underset{\bar{L}}{\geq} \bar{Y}$ mit $\bar{X} = \frac{X}{\mu_X}$ und $\bar{Y} = \frac{Y}{\mu_Y}$ ⁵¹
2.	$F_{X \underset{(1)}{\geq}} F_Y$ (F_X mit Dichte $\frac{x(F)}{\mu_X}$, F_Y mit Dichte $\frac{y(F)}{\mu_Y}$) ⁵²
3.	$E_{F_X}[h(F)] \geq E_{F_Y}[h(F)]$ für alle h nichtfallend in F ⁵³
4. $\mu_X = \mu_Y$	$E[g(X)] \geq E[g(Y)]$ für alle g stetig konvex in x ⁵⁴
5. $\mu_X = \mu_Y$	$E[g(X)] \leq E[g(Y)]$ für alle g stetig konkav in x
6. $\mu_X = \mu_Y$	$X \underset{(2)}{\leq} Y: \mu_X A_X(x) \overset{x}{=} \int_0^x F_X(y) dy \geq \int_0^x F_Y(y) dy$ für alle $x \geq 0$ ⁵⁵
7. $\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X W_X(x) \overset{x}{=} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy \leq \int_0^x (1 - F_Y(y)) dy$ für alle $x \geq 0$ ⁵⁶
8. $\mu_X = \mu_Y$	$X \underset{v}{\geq} Y: \mu_X D_X(x) \overset{\infty}{=} \int_x^{\infty} (1 - F_X(y)) dy \geq \int_x^{\infty} (1 - F_Y(y)) dy$ für alle $x \geq 0$ ⁵⁷

⁵¹ Vgl. TAILLIE, C. (1981), S. 186.

⁵² Vgl. ALZAIID, A. (1990), S. 219f.

⁵³ Vgl. Kap. 9.4.1.

⁵⁴ Vgl. HARDY, G. H. / LITTLEWOOD, J. E. / POLYA, G. (1929), S. 151, KARAMATA, J. (1932), S. 145ff und ARNOLD, B. C. (1987), S. 37.

⁵⁵ Vgl. Kap. 6.3 und 9.2.1.

⁵⁶ Vgl. ATKINSON, A. B. (1970), S. 145ff.

⁵⁷ Vgl. Kap. 6.1.

⁵⁸ Vgl. TAILLIE, C. (1981), S. 186.

⁵⁹ Vgl. Kap. 6.2 und 9.2.1.

9. $\mu_X = \mu_Y$	$\int_x^b F_X(y)dy \leq \int_x^b F_Y(y)dy \text{ für alle } x \geq 0, b = \max [b_X, b_Y] < \infty$
10. $\mu_X = \mu_Y$	$E_X[(y-x)^+] \geq E_Y[(y-x)^+] \text{ für alle } 0 \leq x \leq b^{60}$ <p style="text-align: center;">b</p> $\text{mit } E[(y-x)^+] = \int_x^b (y-x) f(y)dy$
11. $\mu_X = \mu_Y$	$E_X[(x-y)^+] \geq E_Y[(x-y)^+] \text{ für alle } 0 \leq x \leq b$ <p style="text-align: center;">x</p> $\text{mit } E[(x-y)^+] = \int_0^x (x-y) f(y)dy$

Wie aus der Übersicht ersichtlich, erhält man diese Äquivalenzaussagen insbesondere über zwei unterschiedliche Ansätze:

1. Die Lorenzkurve wird als Verteilungsfunktion interpretiert und auf diese dann die Überlegungen bzgl. der First order Dominanz übertragen.
2. Unter der Nebenbedingung $\mu_X = \mu_Y$ besteht eine Äquivalenz zur Second order Dominanz und zur "variability"-Ordnung. Für diese gibt es, wie Kap. 9.2.1 zeigt, verschiedene Darstellungsformen.

Eine weitere Äquivalenzaussage stammt von STRASSEN:⁶¹

Satz 9.20: Es gilt $X \underset{L}{\leq} Y$ genau dann, wenn zwei Variablen Y' und Z' existieren, für die gilt " Y' ist verteilt wie Y " und " X ist verteilt wie $a \cdot E(Y' | Z')$ " für manche $a > 0$.⁶²

⁶⁰ Vgl. ARNOLD, B. C. (1987), S. 37. Vgl. auch Kap. 6.2.

⁶¹ Vgl. STRASSEN, V. (1965) und ARNOLD, B. C. (1987), S. 39.

⁶² Vgl. ARNOLD, B. C. (1986), S. 48 und (1990), S. 254 sowie WILFLING, B. (1993), S. 15f.

Entsprechend läßt sich aus der Lorenz–Dominanzordnung **folgern**:

Für den Fall $\mu_X > \mu_Y$ folgt aus $L_X(F) \geq L_Y(F)$ $GL_X(F) \geq GL_Y(F) \Leftrightarrow X \underset{(2)}{>} Y$, wobei

diese Beziehung wieder entsprechende Äquivalenzdarstellungen hat, wie in Kapitel 9.2.1 ausführlich erläutert wird.

Im Fall $\mu_X < \mu_Y$ folgt aus $L_X(F) \geq L_Y(F)$ $\mu_X(1-L_X(F)) \leq \mu_Y(1-L_Y(F))$ mit den entsprechenden Äquivalenzdarstellungen in Kapitel 9.2.1.

9.3.2 Lorenz–Dominanz erzeugende und erhaltende Transformationen

Eine Reihe von Autoren⁶³ haben sich mit der Frage auseinandergesetzt, welche Auswirkungen Transformationen auf eine Lorenz–Dominanzordnung haben. ARNOLD unterscheidet zwei Fragestellungen:

1. Welche Klasse G_1 von Transformationsbeziehungen g ist Lorenz–Dominanz erhaltend ("inequality preserving"), d.h. wann gilt $X \underset{\bar{L}}{\leq} Y \Rightarrow g(X) \underset{\bar{L}}{\leq} g(Y)$?
2. Welche Klasse G_2 von Transformationsbeziehungen g führt für jede nichtnegative Variable X mit $0 < \mu_X < \infty$ zu der Lorenz–Dominanzbeziehung $g(X) \underset{\bar{L}}{\leq} X$?

Folgende Ergebnisse lassen sich herleiten:

Satz 9.21:⁶⁴ Die einzigen Funktionen g , die zu G_1 mit

$G_1: \{g: X \underset{\bar{L}}{\leq} Y \Rightarrow g(X) \underset{\bar{L}}{\leq} g(Y)\}$ gehören, sind die der Form

$$g_{1,b_1}(x) = b_1 x, \quad x \geq 0 \text{ mit } b_1 \in (0, \infty)$$

$$g_{2,b_2}(x) = b_2, \quad x \geq 0 \text{ mit } b_2 \in (0, \infty)$$

$$g_{3,b_3}(x) = 0, \quad x = 0$$

$$= b_3, \quad x > 0 \text{ mit } b_3 \in (0, \infty).$$

⁶³ Vgl. FELLMAN, J. (1976), JAKOBSSON, U. (1976), EICHHORN, W. / FUNKE, H. / RICHTER, W. F. (1984), PIESCH, W. (1975), ARNOLD, B. C. (1987/1991), ARNOLD, B. C. / VILLASENOR, J. A. (1986) und ARNOLD, B. C. / ROBERTSON, C. A. / BROCKETT, P. L. / SHU, B.–Y. (1987).

⁶⁴ Vgl. ARNOLD, B. C. (1987), S. 45f und (1991), S. 28.

Überlegung: Ausführliche Überlegungen finden sich in ARNOLD/VILLASEÑOR.⁶⁵ Da proportionale Transformationen die Lorenz-Funktionen nicht ändern, muß g_1 dieser Klasse G_1 angehören. Weiter kann man für die spezielle Ausgangssituation einer Lorenz-Dominanzrelation von zwei Zweipunktverteilungen von X und Y mit gleichen Merkmalsausprägungen die geeigneten Funktionen g_i ermitteln. Dies führt zu g_1 , g_2 und g_3 .⁶⁶ Diese Menge an Funktionen gibt die maximal möglichen transformationserhaltenden g_i an. Eine anschließende Prüfung für alle übrigen Ausgangssituationen führt dann schließlich zu G_1 .

Da Lorenzkurven bei proportionalen Änderungen der Verteilung konstant bleiben, läßt sich zudem formulieren " $X \underset{\underline{L}}{\succ} Y \Leftrightarrow b_X X \underset{\underline{L}}{\succ} b_Y Y, b_X > 0, b_Y > 0$ ".⁶⁷

Satz 9.22: Zu der Klasse $G_2 \{ g: g(X) \underset{\underline{L}}{\leq} X \}$ gehören unter anderem Funktionen

$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ für die gilt:

$g(x) > 0$ für jedes $x > 0$, $g(x)$ ist monoton steigend für $0 \leq x < \infty$,

$\frac{g(x)}{x}$ ist monoton nichtsteigend für $0 < x < \infty$.

Überlegung: Für Funktionen g dieser Form gilt die Starshaped-Dominanzrelation

$Y = g(X) \underset{\star}{\succ} X$, aus der die Lorenz-Dominanzrelation $g(X) \underset{\underline{L}}{\leq} X$ folgt⁶⁸.

Für $g(X) = a + bX$ untersucht PIESCH⁶⁹ ausführlich, inwieweit eine Lorenz-Dominanzbeziehung entsteht.

⁶⁵ Vgl. dazu auch ARNOLD, B. C. (1991), S. 28.

⁶⁶ Mit Hilfe von Lemma 21 und 22, S. 27f in: ARNOLD, B. C. (1991).

⁶⁷ Vgl. WILFLING, B. (1993), S. 13.

⁶⁸ Ein ausführlicher Beweis findet sich bei ARNOLD, B. C. (1987), S. 47 und (1991), S. 29.

⁶⁹ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 68ff.

9.3.3 Lorenz-Dominanz bei Aggregation und Mischung von Verteilungen

Mit der Fragestellung der Lage von Lorenzkurven bei **Sektorenaggregation** hat sich ausführlich PIESCH⁷⁰ befaßt. Er zeigt

Satz 9.23: "Die Lorenzkurve eines Aggregats liegt immer zwischen oder unter den Lorenzkurven der Sektoren."⁷¹

LAM⁷² setzt sich mit der Fragestellung auseinander, unter welchen Bedingungen die Lorenzkurve einer aus zwei Verteilungen aggregierten Verteilung **zwischen** den Lorenzkurven der Ausgangsverteilungen liegt. Betrachtet wird eine Verteilung mit n_1 Merkmalsträgern, Dichte $f_1(x)$ und $x_{1,\min} > 0$ zu der eine zweite mit $n_2 = n - n_1$ Merkmalsträgern und Dichte $f_2(x)$ hinzugefügt wird, so daß sich die aggregierte Verteilung $f_{\text{agg}}(x)$ ergibt. LAM zeigt folgendes:

Satz 9.24: Es ist $X_{\text{agg}} \underset{L}{\leq} X_1$ genau dann, wenn $X_2 \underset{L}{\leq} X_1$ und $\mu_1 = \mu_2$.

Überlegung: Aus $L_2 \geq L_1$ und $\mu_2 = \mu_1$ folgt $\mu_{\text{agg}} = \mu_2 = \mu_1$. Die Werte der Verteilungsfunktion F_{agg} liegen stets zwischen den Verteilungsfunktionswerten F_1

$$\text{und } F_2: F_{\text{agg}} = \frac{n_1}{n} F_1 + \frac{n_2}{n} F_2 = h_1 F_1 + h_2 F_2.$$

F_1 und F_2 befinden sich in einer Second order Dominanzbeziehung

$$\int_0^y F_1(x) dx \geq \int_0^y F_2(x) dx. \text{ Daraus ist ableitbar wegen } h_2 = 1 - h_1$$

$$h_2 \int_0^y F_1(x) dx \geq h_2 \int_0^y F_2(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y F_1(x) dx \geq \int_0^y (h_1 F_1(x) + h_2 F_2(x)) dx = \int_0^y F_{\text{agg}}(x) dx.$$

⁷⁰ Vgl. PIESCH, W. (1967).

⁷¹ PIESCH, W. (1975), S. 209.

⁷² Vgl. LAM, D. (1986).

D.h. die aggregierte Verteilung und die Verteilung F_1 befinden sich ebenfalls in einer Second order Dominanzbeziehung und damit gilt bei gleichen Mittelwerten $L_{agg}(F) \geq L_1(F)$ für alle F .

Umgekehrt folgt aus $L_{agg}(F) \geq L_1(F)$ $\mu_1 = \mu_{agg}$, was aufgrund von Steigungsüberlegungen und der Tatsache, daß $x_{agg,min} \leq x_{1,min}$ und $x_{agg,max} \geq x_{1,max}$ gilt, nachweisbar ist. Wegen Satz 9.23 ergibt sich dann $L_2(F) \geq L_{agg}(F)$, also $L_2(F) \geq L_{agg}(F) \geq L_1(F)$.

Für die **Variablenaggregation** gilt folgendes:

Betrachtet man den allgemeinen Fall der gewogenen Summenvariable $Z = \sum_i^k \alpha_i X_i$ mit $\alpha_i > 0$, läßt sich über die Ergebnisse aus Kapitel 8.2 schnell herleiten:

Satz 9.25: $L_Z(F) \geq \sum_i^k \frac{\alpha_i \mu_{X_i}}{\mu_Z} L_{X_i}(F) \geq \min_i L_{X_i}(F)$ für jede Stelle F
mit $\mu_Z = \sum_i^k \alpha_i \mu_{X_i}$.

Die Lorenzkurve einer gewogenen Summenvariablen liegt also immer zwischen oder über den Lorenzkurven der einzelnen Komponenten, d. h. es läßt sich die "umgekehrte" Aussage im Vergleich zur Sektorenaggregation folgern.

Im Spezialfall $X_i = h_i(Z)$ mit $h_i'(Z) > 0$ für alle i , folgt wegen der Übereinstimmung der einzelnen Korrelations-Lorenzkurven $F_{h_i}(F_Z)$ mit den Lorenzkurven der Komponenten

$$L_{X_i}(F_{X_i}) \text{ aus (8.25) } L_Z(F) = \sum_i^k \frac{\alpha_i \mu_{X_i}}{\mu_Z} L_{X_i}(F).$$

Die Lorenzkurvenwerte des Aggregats ergeben sich dann als gewogenes Mittel der Lorenzkurvenwerte der einzelnen Summenvariablen.

Liegt eine Lorenz-Dominanzrelation $L_{X_1}(F) \leq L_{X_i}(F)$ für alle $i \neq 1$ über alle F vor,

folgt sofort $L_Z(F) \geq L_{X_1}(F)$.⁷⁴

⁷³ Vgl. SATCHELL, S. E. (1987), S. 325 und RIETVELD, P. (1990), S.189.

⁷⁴ Vgl. RIETVELD, P. (1990), S. 189.

Weiter läßt sich herleiten:

Satz 9.26: Gilt $\mu_X = \mu_Y$ und $L_X(F) \geq L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$, dann folgt

$$\text{für } Z = \alpha X + (1-\alpha)Y \text{ mit } 0 < \alpha < 1 \quad L_X(F) \geq L_Z(F) \geq L_Y(F).$$

Überlegung: Unter den in Satz 9.26 genannten Voraussetzungen gilt $E(g(X)) \leq E(g(Y))$

für alle g stetig, konvex und $\mu_X = \mu_Y = \mu_Z$.

Für stetige, nichtfallende, konvexe Funktionen g folgt

$g(Z) \leq \alpha g(X) + (1-\alpha)g(Y)$, also

$$\begin{aligned} E(g(Z)) &\leq \alpha E(g(X)) + (1-\alpha)E(g(Y)) \leq E(g(Y)) \\ \Leftrightarrow \mu_Z(1 - L_Z(F)) &\leq \mu_Y(1 - L_Y(F)) \text{ für } 0 \leq F \leq 1 \\ \Leftrightarrow L_Z(F) &\geq L_Y(F) \text{ für } 0 \leq F \leq 1. \end{aligned}$$

Für stetige, nichtsteigende, konvexe Funktionen g folgt

$g(Z) \geq \alpha g(X) + (1-\alpha)g(Y)$, also

$$\begin{aligned} E(g(Z)) &\geq \alpha E(g(X)) + (1-\alpha)E(g(Y)) \geq E(g(X)) \\ \Leftrightarrow \mu_Z L_Z(F) &\leq \mu_X L_X(F) \text{ für } 0 \leq F \leq 1 \\ \Leftrightarrow L_Z(F) &\leq L_X(F). \end{aligned}$$

D.h. die Lorenzkurve eines gewogenen Mittels zweier Variabler mit gleichem arithmetischen Mittel liegt bei Lorenz-Dominanz dieser Variablen zwischen den beiden Lorenzkurven. Folglich gilt $R_X \leq R_Z \leq R_Y$.

Eine Erweiterung dieses Satzes auf $Z = \sum_i^k \alpha_i X_i$ mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i^k \alpha_i = 1$ und identischen Mittelwerten $\mu_{X_i} = \mu_{X_j} = \mu_X$ führt unter Anwendung der Jensen'schen Ungleichung⁷⁵ bei der Ausgangslage $L_{X_1}(F) \leq L_{X_i}(F) \leq L_{X_2}(F)$ für $i \neq 1, 2$ zu der Aussage $L_{X_1}(F) \leq L_Z(F) \leq L_{X_2}(F)$ für alle F .

⁷⁵ Jensen'sche Ungleichung: g konvex $\rightarrow \sum \alpha_i g(x_i) \geq g(\sum \alpha_i x_i)$, g konkav $\rightarrow \sum \alpha_i g(x_i) \leq g(\sum \alpha_i x_i)$.

9.4 Die Bedeutung verschiedener Ordnungsrelationen für die Disparitätsmessung

Das Augenmerk dieser Arbeit richtet sich schwerpunktmäßig auf neuere Beiträge zur Ungleichheitsmessung im Zusammenhang mit der Lorenzkurve. Es soll daher (noch einmal) unter dem Aspekt der Betrachtung partieller Ordnungsrelationen herausgestellt werden

1. inwieweit die Lorenz–Dominanzordnung der Herleitung von relativen Ungleichheitsmaßen dienen kann. Von Ungleichheitsmaßen werden eine Vielzahl von Eigenschaften gefordert. Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften mit der Lorenz–Dominanzordnung einhergehen.
2. welche alternativen Ordnungen im Zusammenhang mit der Ungleichheitsmessung herangezogen werden.

Insbesondere letzteres wurde in vorangegangenen Kapiteln bereits angeschnitten und soll daher nur relativ kurz zusammengefaßt werden.

9.4.1 Die Lorenz–Dominanzordnung und Ungleichheitsindizes

Einen allgemeinen Zusammenhang von $X \underset{L}{\geq} Y$ [$L_X(F) \leq L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$] und der Ordnung von Indizes stellt FOSTER⁷⁶ vor:

Da die Lorenzkurve als Ungleichheitsindikator die vier Eigenschaften "Mittelwertsunabhängigkeit, Symmetrie, Transferprinzip und Populations–Vervielfachung" aufweist, läßt sich folgender Satz formulieren:

⁷⁶ Vgl. FOSTER, J. E. (1985), S. 48, FOSTER, J. E. / SHORROCKS, A. F. (1988) sowie auch CHAKRAVARTY, S. R. (1990), S. 35ff.

Satz 9.27: Beim Vergleich zweier Verteilungen nichtnegativer Merkmalswerte \mathbf{x} und \mathbf{y} sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $X \underset{\bar{L}}{\geq} Y: L_X(F) \leq L_Y(F)$ für $0 \leq F \leq 1$.
- (ii) $D_X^r > D_Y^r$ für alle Indizes D^r , die mittelwertsunabhängig und symmetrisch sind und sowohl die Verschiebungs- als auch Proportionalitätsprobe erfüllen.⁷⁷

Aus den bisher vorgestellten (Äquivalenz-)Relationen lassen sich zudem sehr direkt Beziehungen zwischen $X \underset{\bar{L}}{\geq} Y$ und Größenrelationen von Erwartungswerten herleiten, die z. T. mit bekannten Meßgrößen übereinstimmen.

$$X \underset{\bar{L}}{\geq} Y \Leftrightarrow \bar{X} \underset{(2)}{\leq} \bar{Y} \Leftrightarrow E[g(\bar{X})] \geq E[g(\bar{Y})] \text{ für alle stetigen, konvexen}$$

Funktionen $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Für spezielle Funktionen $g(\bar{X})$ ergeben sich demnach obige Größenrelation von Kennziffern, die eine notwendige Bedingung für die Einhaltung der Lorenz-Dominanzordnung darstellen:

$$g(\bar{x}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{x}} F_{\bar{X}}^-(u) du \quad \Rightarrow \quad E[g(\bar{X})] = R_X$$

$$g(\bar{x}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{x}} F_{\bar{X}}^{(2)}(u) du \quad \Rightarrow \quad E[g(\bar{X})] = \frac{V^2}{2}$$

$$g_t(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^{t+1} - 1}{t(t+1)} \quad \Rightarrow \quad E[g_t(\bar{X})] = \frac{E[\bar{X}^{t+1} - 1]}{t(t+1)} \quad 78$$

⁷⁷ Für eine identische Anzahl von Merkmalsträgern und gleichen Mittelwert ist die Äquivalenz für Indizes gegeben, die symmetrisch sind und das Transferprinzip erfüllen, also schur-konvex sind. Vgl. dazu beispielsweise WAGENHALS, G. (1981), S. 101f oder das Stichwort "Majorization" in MARSHALL, A. W. / OLKIN, I. (1979).

⁷⁸ Vgl. TAILLIE, C. (1981), S. 188.

Für $t = 1$ führt dies wieder zu $\frac{V^2}{2}$, für $t = 0$ zum Theilschen Ungleichheitsmaß $E[\bar{X} \log \bar{X}]^{79}$, für $t = -1$ zu $\log [\mu/GM]^{80}$ und für $t = -2$ zu $\frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{HM} - 1 \right]$ mit GM als geometrischem und HM als harmonischem Mittel.⁸¹

$$g(\bar{x}) = (\bar{x} + 1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad E[g(\bar{X})] = \lambda \text{ mit } \lambda \text{ als Lorenzkurvenlänge.}$$

Die Interpretation der Lorenzkurve als Verteilungsfunktion ermöglicht eine weitere Äquivalenzaussage. Es gilt

$$\text{Satz 9.28}^{82}: X \underset{\bar{L}}{\succ} Y \quad \Leftrightarrow \quad F_X \underset{(1)}{\succ} F_Y \quad \Leftrightarrow \quad E_{F_X}[J(F)] \geq E_{F_Y}[J(F)]$$

für alle nichtfallenden Funktionen J

$$\begin{aligned} \text{mit } E_{F_X}[J(F)] &= \int_0^1 \frac{x(F)}{\mu_X} \cdot J(F) dF = I \\ &= \int_0^b \frac{x}{\mu_X} J(F(x)) f(x) dx = E_X \left[\frac{J(F(X)) \cdot X}{\mu_X} \right]. \end{aligned}$$

Zwischen Lorenz-Dominanzrelation und der Ordnung der von PIESCH und MEHRAN⁸³ vorgeschlagenen Klasse von linearen Maßen $I = E_{F_X}[J(F)]$ für alle stetigen nichtfallenden Funktionen J besteht also obige Größenrelation. Spezielle Mitglieder dieser Klasse sind mit

$$\begin{aligned} J(F) &= 2F - 1 & : I &= R \\ J(F) &= \nu F^{\nu-1} - 1 & : I &= \Gamma = \frac{\mu_{\nu} \nu - \mu}{\mu} \\ J(F) &= 1 - \nu(1-F)^{\nu-1} & : I &= \Gamma = \frac{\mu - \mu_1}{\mu} \nu. \end{aligned}$$

⁷⁹ Vgl. z. B. WAGENHALS, G. (1981), S. 59f, RINNE, H. (1995), S. 155.

⁸⁰ Vgl. RINNE, H. (1995), S.155, wird auch als Teil-Koeffizient bezeichnet.

⁸¹ Herleitung siehe Anhang.

⁸² Vgl. ALZAID, A. (1990), S. 217.

⁸³ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 130ff und MEHRAN, F. (1976), S. 805ff. Vgl. dazu Kap. 7.

9.4.2 Die Bedeutung der Starshaped–Ordnung für die Ungleichheitsmessung

ZENGA⁸⁴ schlägt – wie bereits in Kap. 2 und 3.1 angesprochen – neben der Lorenz-Dominanzordnung (als Kriterium für "X is more concentrated than Y") eine weitere Ungleichheitsordnung vor, die sich (bei stetigen Variablen) im Kern auf die der Lorenz–Dominanzordnung vorgelagerte Starshaped–Ordnung $X \underset{*}{\leq} Y$ zurückführen läßt, wenn $y'(x) \geq 0$ gilt.

Definition 9.10: "Eine stetige, nichtnegative Variable X weist eine relativ stärkere "relative globale Ungleichverteilung"⁸⁵ als die der stetigen nichtnegativen Variablen Y auf, wenn $\frac{y(q)}{y(F)} \leq \frac{x(q)}{x(F)}$ für alle $0 \leq q \leq F \leq 1$ ".

Die Definition entspricht der Aussage $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend in $0 < F < 1$.

Dahinter steht das Werturteil, daß sich bei einer proportionalen Änderung $Y = bX$ diese "globale Ungleichverteilung" nicht ändert und bei einer Absolutverschiebung $Y = a + X$ ($a \geq 0$) die "globale Ungleichverteilung" zunehmen soll.

ZENGA fordert als eine Eigenschaft für ein Punktkonzentrationsmaß $C(p)$ ⁸⁶, daß gelten soll aus " $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend in $0 < F < 1$ " folgt " $C_X(p) \leq C_Y(p)$ für alle $0 < p < 1$ ".

Formal genügen also alle die Kurvenzüge diesem Anspruch, die sich über eine aus der Starshaped–Ordnung folgenden Ordnungsrelation in der angegebenen Richtung ordnen lassen; so z.B. $Z(p)$, die Differenzfunktion $F - L(F)$ oder $\frac{F-L(F)}{F} = 1 - \frac{M_u(F)}{\mu}$.

Die Lorenzkurven $L(F)$ selbst ordnen sich auch, aber es gilt $L_X(F) \geq L_Y(F)$.

⁸⁴ Vgl. ZENGA, M. (1990), S. 105 und POLISICCHIO, M. (1990), S. 384f.

⁸⁵ "Relative global inequality"; ZENGA, M. (1990), S. 105.

⁸⁶ Vgl. auch Kap. 2 und Kap. 5 sowie ZENGA, M. (1990), S. 106.

9.4.3 Inverse stochastische Dominanz, Dominanz der kumulierten Lorenzkurven und Ungleichheitsmessung

MULIERE/SCARSINI⁸⁷ und ALZAID⁸⁸ setzen sich mit der inversen stochastischen Ordnung zweiten Grades und der entsprechenden Ordnung der Gini-Koeffizienten zweier Verteilungen auseinander. Es gilt:

Satz 9.29:⁸⁹ "Wenn $X \stackrel{(-1)}{(2)} Y$ und $\mu_X = \mu_Y$ gegeben ist, folgt $R_X \geq R_Y$ ".

Überlegung: $x^{(2)}(F) \geq y^{(2)}(F) \Leftrightarrow \int_0^F \mu_X L_X(u) du \leq \int_0^F \mu_Y L_Y(u) du$

$$\Rightarrow \mu_X \left[\frac{1-R_X}{2} \right] \leq \mu_Y \left[\frac{1-R_Y}{2} \right].$$

Betrachtet man direkt die in Kap. 7.1 eingeführte Dominanzordnung der von unten kumulierten Lorenzkurven, so gilt

Satz 9.30: "Aus $X \stackrel{>}{L^{(2)}} Y$ folgt $R_X \geq R_Y$ ".

Überlegung: Aus $\int_0^F L_X(u) du \leq \int_0^F L_Y(u) du$ folgt sofort $\frac{1-R_X}{2} \leq \frac{1-R_Y}{2}$.

Satz 9.30 kann erweitert werden, indem man allgemein die kumulierte Lorenz-Dominanzrelation für $\nu \geq 2$ betrachtet:⁹⁰

Satz 9.31: Aus $X \stackrel{>}{L^{(\nu)}} Y$ für $0 \leq F \leq 1$ und $\nu \geq 1$ folgt $\Gamma(X, \nu) \geq \Gamma(Y, \nu)$ für $k \geq \nu$.

⁸⁷ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M (1989).

⁸⁸ Vgl. ALZAID, A. A. (1990).

⁸⁹ Vgl. MULIERE, P. / SCARSINI, M. (1989), S. 318.

⁹⁰ Vgl. Kap. 7.1.

Überlegung: Aus $L_X^{(\nu)}(F) \leq L_Y^{(\nu)}(F)$ folgt

1. $L_X^{(\nu)}(1) \leq L_Y^{(\nu)}(1) \Leftrightarrow \Gamma(X, \nu) \geq \Gamma(Y, \nu)$ und
2. $L_X^{(\nu+1)}(F) \leq L_Y^{(\nu+1)}(F) \Rightarrow L_X^{(\nu+1)}(1) \leq L_Y^{(\nu+1)}(1)$
 $\Leftrightarrow \Gamma(X, \nu+1) \geq \Gamma(Y, \nu+1).$

Folglich ist eine notwendige Bedingung für die Einhaltung der höheren inversen Dominanzordnung bei $\mu_X = \mu_Y$ die Bildung einer entsprechenden Reihenfolge dieser höheren Indizes Γ .

Entsprechend kann man auch für die von oben kumulierten Lorenzkurven formulieren:⁹¹

Satz 9.32: Aus $L_X^{((\nu))}(F) \leq L_Y^{((\nu))}(F)$ für $0 \leq F \leq 1$ und $\nu \geq 2$

folgt $\Gamma'(X, k) \leq \Gamma'(Y, k)$ mit $k \geq \nu$.

Überlegung: Es folgt aus $L_X^{((\nu))}(F) \leq L_Y^{((\nu))}(F)$

1. $L_X^{((\nu))}(1) \leq L_Y^{((\nu))}(1) \Rightarrow \Gamma'(X, \nu) \leq \Gamma'(Y, \nu),$
2. $L_X^{((\nu+1))}(F) \leq L_Y^{((\nu+1))}(F) \Rightarrow$
 $L_X^{((\nu+1))}(1) \leq L_Y^{((\nu+1))}(1) \Leftrightarrow \Gamma'(X, \nu+1) \leq \Gamma'(Y, \nu+1).$

Für sich schneidende Kurven läßt sich aussagen:

Satz 9.33:⁹² Ist $L_X(F) \leq L_Y(F)$ für alle $0 \leq F \leq q$ und

$L_X(F) \geq L_Y(F)$ für alle $q \leq F \leq 1$ und $R_X \geq R_Y,$

dann folgt $X \underset{L^{(2)}}{>} Y := L_X^{(2)}(F) \leq L_Y^{(2)}(F).$

Überlegung: Der Nachweis erfolgt über Flächenüberlegungen : Die Fläche unterhalb

von L_Y ist größer als die unter $L_X,$ d.h. an den Schnittstellen $F = 0,$

⁹¹ Vgl. Kap. 7.2.

⁹² Vgl. ALZAID, A. A. (1990), S. 219f.

$F = q$ und $F = 1$ gilt jeweils $\int_0^F L_X(u) du \leq \int_0^F L_Y(u) du$. Dieses Größen-

verhältnis kann sich für Zwischenwerte von F aber nicht umkehren.

Interpretiert man die Lorenzkurven als Verteilungsfunktionen, so ist die Ordnungsrelation $X \underset{L(2)}{\geq} Y$ nichts anderes als $F_X \underset{(2)}{\leq} F_Y$, für die die Äquivalenzaussage

" $E_{F_X}(J(F)) \geq E_{F_Y}(J(F))$ für alle h stetig, nichtfallend und konkav"⁹³ zutrifft. Zu

diesen Indizes gehören bspw. $\Gamma(X, \nu)$. D.h., gelten die Voraussetzungen von Satz 9.33, dann ordnen allgemeine Ungleichheitsmaße der Form

$E_{F_X}(J(F)) = I = \int_0^1 J(F) \frac{x(F)}{\mu_X} dF$ mit $J(F)$ steigend, konkav die Verteilungen in der

gleichen Reihenfolge wie die Gini-Koeffizienten.

Analog läßt sich für von oben kumulierte Lorenzkurven formulieren

Satz 9.34: Ist $L_X(F) \leq L_Y(F)$ für alle $0 \leq F \leq \bar{q}$ und

$L_X(F) \geq L_Y(F)$ für alle $\bar{q} \leq F \leq 1$ und $R_X \leq R_Y$,

dann folgt $\int_0^F L_X(\bar{u}) d\bar{u} \leq \int_0^F L_Y(\bar{u}) d\bar{u}$.

Überlegung: Wie bei 9.33 über Flächenüberlegungen, da $\frac{1}{2} \frac{R}{\bar{q}} = \int_0^1 L(\bar{q}) d\bar{q}$ gilt.

$\int_0^F L_X(\bar{q}) d\bar{q} \leq \int_0^F L_Y(\bar{q}) d\bar{q}$ für alle F bzw. $\int_F^1 [1 - L_X(q)] dq \leq \int_F^1 [1 - L_Y(q)] dq$

für alle F ist äquivalent der Aussage $E_{F_X}(J(F)) \leq E_{F_Y}(J(F))$ für alle J ,

⁹³ Vgl. Kap. 9.2.1.

stetig nichtfallend und konvex, da es definitionsgemäß mit $F_X \leq_v F_Y$ übereinstimmt.⁹⁴ Zu dieser Gruppe von Maßen gehören bspw. $\Gamma'(X, \nu)$ und $\Gamma_n'(X, \nu)$.

Satz 9.33 und Satz 9.34 lassen sich jeweils erweitern:

Satz 9.35: Gilt $L_X^{(\nu)}(F) \leq L_Y^{(\nu)}(F)$ für alle $0 \leq F \leq q$, $\nu \geq 1$ und $L_X^{(\nu)}(F) \geq L_Y^{(\nu)}(F)$ für alle $q \leq F \leq 1$, $\nu \geq 1$ und $\Gamma(X, \nu+1) \geq \Gamma(Y, \nu+1)$, dann folgt $L_X^{(\nu+1)}(F) \leq L_Y^{(\nu+1)}(F)$.

Satz 9.36: Gilt $L_X^{((\nu))}(F) \leq L_Y^{((\nu))}(F)$ für alle $0 \leq F \leq \bar{q}$, $\nu \geq 1$ und $L_X^{((\nu))}(F) \geq L_Y^{((\nu))}(F)$ für alle $\bar{q} \leq F \leq 1$, $\nu \geq 1$ und $\Gamma'(X, \nu+1) \leq \Gamma'(Y, \nu+1)$, dann folgt $L_X^{((\nu+1))}(F) \leq L_Y^{((\nu+1))}(F)$.

Die Beweisführung geht analog.

9.5 Streuungs- und Ungleichheitsordnungen im Vergleich

Eine einheitliche Abgrenzung von Ungleichheitsmessung sowie absoluter und relativer Streuungsmessung ist in der Literatur nicht zu finden. Generell gilt jedoch, absolute Streuungsmaße sind dimensionsbehaftet, relative Streuungsmaße und Disparitätsmaße wie R oder S sind dimensionslos. Daher spielt bei einem Vergleich stets der Aspekt der Relativierung eine große Rolle.

Meist werden von den jeweiligen Indikatoren bestimmte Eigenschaften gefordert, die z.T. untereinander identisch sind.⁹⁵ Bekannte Streuungsmaße wie Δ und σ^2 erfüllen von den an ein Disparitätsmaß gestellten Forderungen die Transfer- und die Proportionalitätsprobe und nehmen bei einer Einpunktverteilung ihren minimalen Wert Null an. Absolutverschiebungen lassen sie unverändert, proportionale Änderungen führen jedoch

⁹⁴ Vgl. Kap. 9.2.1.

⁹⁵ Vgl. LIPPE, P. von der (1993), S. 84f und S. 140f und PFLUG, G. (1979).

zu einem anderen Wert des Maßes. Einige Disparitätsmaße wie R und S lassen sich wiederum als Variationskoeffizienten, d.h. als relative Streuungsmaße interpretieren.

Will man eine gegebene Merkmalssumme auf n Merkmalsträger verteilen (mit $x_i \geq 0$), werden Δ , σ^2 , R und V^2 bei einer extremen Ungleichverteilung maximal. Verteilt man dagegen n Merkmalsträger auf ein gegebenes Intervall [a,b], so führt die extreme symmetrische Zweipunktverteilung zu einem Maximalwert für σ^2 und Δ . Ersteres ist eher die Fragestellung der Disparitätsmessung, letzteres eine Fragestellung, die der Streuungsmessung zugrundeliegt.⁹⁶

In der neueren Literatur⁹⁷ wird das Problem der Definition von "Streuung" – und damit indirekt der Abgrenzung zur Ungleichheit –, über Ordnungsrelationen angegangen. Hier soll insofern ein erster Einstieg in diesen Problemkreis vorgenommen werden, indem versucht wird, zwischen den jeweiligen Ordnungsrelationen der Streuungsmessung und der Star-shaped, der Lorenz-Dominanz und der verallgemeinerten Lorenz-Dominanzordnung Bezüge herzustellen. Dabei beziehen sich die Ausführungen lediglich weiterhin auf nichtnegative Merkmale, obwohl die Streuungsrelationen auch auf intervallskalierbare Merkmale angewandt werden könnten. Folgende Definitionen werden untersucht, wobei hier einschränkend nur von stetigen Funktionen ausgegangen wird.

Definition 9.4: X ist variabler als Y, wenn $\int_x^{\infty} (1-F_X(y))dy \geq \int_x^{\infty} (1-F_Y(y))dy$ für

$$0 \leq x \leq b.$$

Definition 9.11: X streut mehr als Y, wenn $x(q) - x(F) \geq y(q) - y(F)$ für $0 < F < q < 1$ bzw. äquivalent $\frac{dx(F)}{dF} \geq \frac{dy(F)}{dF}$ für $0 < F < 1$ gilt".⁹⁹

Definition 9.12: X ist mehr "dispersed" um $x(F)$ als Y um $y(F)$, wenn $|x(q) - x(F)| \geq |y(q) - y(F)|$ für $0 < q < 1$.¹⁰⁰

⁹⁶ Vgl. RINNE, H. (1995), S. 147.

⁹⁷ Vgl. FROSINI, B. V. (1984,1985b,1988) und MENDELSON, H. (1987,1988).

⁹⁸ Vgl. Kap. 9.2.1.

⁹⁹ Vgl. FROSINI, B. V. (1984), S. 375f, BICKEL, P. J. / LEHMANN, E. J. (1979), S. 34 und SHAKED, M. (1985), S. 486.

¹⁰⁰ Vgl. FROSINI, B. V. (1984), S. 375f.

Einen Spezialfall von Definition 9.12 stellt Definition 9.13 dar.

Definition 9.13: "Y is an α -quantile-preserving spread of X "¹⁰¹, d.h. Y hat mehr Gewicht an den Enden der Verteilung als X, wenn die stetigen Funktionen F_X und F_Y das gleiche α -Quantil haben und $F_Y(x) \geq F_X(x)$ für $x \leq F_X^{-1}(\alpha)$, $F_X(x) \geq F_Y(x)$ für $x \geq F_X^{-1}(\alpha)$ gilt.¹⁰²

Diese Definitionen bauen nicht auf relativen Größen auf. Es ist daher naheliegend, zusätzlich zu prüfen, inwieweit durch eine Relativierung mit μ (d.h. man betrachtet $\bar{X} = \frac{X}{\mu_X}$ statt X) ein direkter Bezug zur Lorenzkurve selbst und nicht nur zur GL-

Kurve hergestellt werden kann.

Definition 9.4 führt, wie aus Kapitel 9.2.1 bekannt, zu der Äquivalenzaussage $\mu_X(1 - L_X(F)) \geq \mu_Y(1 - L_Y(F))$ für $0 \leq F \leq 1$. D.h. für gleiche Mittelwerte (wie z. B. bei \bar{X} und \bar{Y}) entspricht dies einer Lorenz-Dominanz.

Definitionen 9.11 und 9.12 enthalten die oft geforderte Verschiebungs-Invarianz von absoluten Streuungsmaßen. Werden beide Verteilungen gleichmäßig proportional verändert, bleibt eine Dominanzrelation erhalten.¹⁰³

Aus den Definitionen 9.11 und 9.12 lassen sich leicht entsprechende Größenbeziehungen für Δ , σ^2 und δ_Z ableiten. Wenn 9.11 gilt, folgt z.B.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int_0^q [x(q) - x(F)]dF \geq \int_0^q [y(q) - y(F)]dF \\
 & \Rightarrow \int_0^1 \int_0^q [x(q) - x(F)]dFdq \geq \int_0^1 \int_0^q [y(q) - y(F)]dFdq \Leftrightarrow \Delta_X \geq \Delta_Y \text{ und}
 \end{aligned}$$

¹⁰¹ MENDELSON, H. (1987), S. 344.

¹⁰² Vgl. MENDELSON, H. (1987), S. 343.

¹⁰³ Vgl. FROSINI, B. V. (1984), S. 375.

$$2. \quad \int_0^1 \int_0^1 [x(q) - x(F)]^2 \geq \int_0^1 \int_0^1 [y(q) - y(F)]^2 \text{ für } 0 < F < q < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 [x(q) - x(F)]^2 dF dq \geq \int_0^1 \int_0^1 [y(q) - y(F)]^2 dF dq \Leftrightarrow \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2. {}^{104}$$

Aus 9.12 folgt sofort für $F = 0,5$

$$\int_0^1 |x(q) - x(0,5)| dq \geq \int_0^1 |y(q) - y(0,5)| dq \Leftrightarrow \delta_{Z_X} \geq \delta_{Z_Y}.$$

Betrachtet man die relativierten Größen \bar{X} und \bar{Y} , führen diese Relationen zu einer entsprechenden Ordnung von R , V^2 und $\frac{\delta_Z}{\mu}$.

Definition 9.11 stellt eine Vorstufe der inversen stochastischen Dominanzordnung dar.¹⁰⁵ Aus $\frac{dx(F)}{dF} \geq \frac{dy(F)}{dF}$ folgt $x(F) - x(0) \geq y(F) - y(0)$. Für $x(0) = y(0)$ gilt damit auch $\mu_X L_X(F) \geq \mu_Y L_Y(F)$. Betrachtet man also \bar{X} und \bar{Y} , ergibt sich die Lorenz–Dominanz.

Ebenso läßt sich keine eindeutige Beziehung zwischen einer Starshaped–Dominanzrelation und dieser Streuungsordnung herstellen: Ordnen sich zwei Verteilungen gemäß $X \leq_* Y$, kann $\frac{dx(F)}{dF} \geq \frac{dy(F)}{dF}$ für $0 < F < 1$ sein. Gilt jedoch zusätzlich $y(F) \geq x(F)$, muß $x'(F) \leq y'(F)$ gelten. Umgekehrt, wenn $x'(F) \leq y'(F)$ und $y(F) \leq x(F)$ für $0 < F < 1$, dann folgt eine Starshaped–Ordnung und damit auch eine Lorenz–Dominanzbeziehung.

Aus **Definition 9.12** folgt, daß sich die arithmetischen Mittel der an den Stellen F und q abgeschnittenen Verteilungen ordnen lassen. Diese arithmetischen Mittel lassen sich bekanntlicherweise an der (verallgemeinerten) Lorenzkurve interpretieren¹⁰⁶:

$${}^{104} \sigma^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (x(q) - x(F))^2 dF dq = \int_0^1 \int_0^1 (x(q) - x(F))^2 dF dq.$$

Vgl. BHANDARI, S. K. / MUKERJEE, R. (1986) und Kap. 4.2.2.

¹⁰⁵ Vgl. Kap. 9.2.2.

¹⁰⁶ Vgl. PIESCH, W. (1975), S. 47.

$$\begin{aligned}
& |x(q) - x(F)| \geq |y(q) - y(F)| \text{ für } 0 < q < 1 \\
\Rightarrow & \int_0^q (x(F) - x(q))dq \geq \int_0^q (y(F) - y(q))dq \text{ für } 0 < q < F \\
& \text{bzw. } \int_q^F (x(q) - x(F))dq \geq \int_q^F (y(q) - y(F))dq \text{ für } F < q < 1 \\
\Rightarrow & \frac{\mu_X(L_X(F) - L_X(q))}{F - q} \geq \frac{\mu_Y(L_Y(F) - L_Y(q))}{F - q} \text{ für } 0 < q < F \\
& \text{bzw. } \frac{\mu_X(L_X(q) - L_X(F))}{q - F} \geq \frac{\mu_Y(L_Y(q) - L_Y(F))}{q - F} \text{ für } F < q < 1.
\end{aligned}$$

Betrachtet man den Fall zweier symmetrischer Verteilungen mit gleichem Mittelwert und damit gleichem Median Z , so folgt, wie FROSINI zeigt¹⁰⁷, aus "X ist mehr "dispersed" als Y um Z" die Dominanzrelation $X \underset{L}{\geq} Y$ bzw. $X \underset{GL}{\geq} Y$. In diesem Fall

schnitten sich nämlich die (normierten) inversen Verteilungsfunktionen genau einmal an der Stelle $F = 0,5$. Für $0 < q < 0,5$ gilt $x(q) \leq y(q)$, im Bereich $0,5 < q < 1$ ist $x(q) \geq y(q)$.

Eine allgemeine Aussage über die Relation zwischen Starshaped- und dispersed-Ordnung läßt sich jedoch nicht formulieren.

Definition 9.13 kann, wie MENDELSON anführt¹⁰⁸, leicht über Ausdrücke der verallgemeinerten Lorenzkurven formuliert werden:

Für diese muß bei einem α -Quantil-erhaltenden Spread gelten, daß die Differenz $\mu_X L_X(F) - \mu_Y L_Y(F)$ unimodal nichtnegativ ist und ihr Maximum bei $F = \alpha$ annimmt.¹

Die Ableitung dieser Differenzfunktion führt zu $x(F) - y(F)$, für die gelten muß $x(F) \geq y(F)$ für $F < \alpha$, und $x(F) \leq y(F)$ für $F \geq \alpha$. Gilt $\mu_X = \mu_Y$, lassen sich die Aussagen auf die Lorenzkurven selbst übertragen. In diesem Fall kann auch aus einer

¹⁰⁷ Vgl. FROSINI, B. V. (1984), S. 390.

¹⁰⁸ Vgl. MENDELSON, H. (1987), S. 345.

¹⁰⁹ Vgl. MENDELSON, H. (1988), S. 116.

Starshaped–Ordnung mit $x(\alpha) = y(\alpha)$ ein α –Quantil–erhaltender Spread abgeleitet werden, da sich $x(F)$ und $y(F)$ genau an der Stelle $F = \alpha$ schneiden.

9.6 Partielle Ordnungen im Rahmen der Analyse von Lebensdauerverteilungen und deren Bezüge zur Lorenzkurve

In Kapitel 6.4 wurde kurz in die Analyse von Lebensdauerverteilungen eingeführt. Eine Vielzahl von Autoren hat sich hiermit auseinandergesetzt. Eine grundlegende Aufbereitung stellt das Werk von BARLOW / PROSCHAN (1981) "Statistical Theory of Reliability and Life Testing" dar. Auf Zusammenhänge zur Lorenzkurve wird insbesondere von CHANDRA/SINGPURWALLA (1981), TAILLIE (1981), KLEFSJÖ (1984), RINNE (1988), KOCHAR (1989) und ALZAID (1990) eingegangen.

An dieser Stelle sollen nur die bekanntesten partiellen Ordnungsrelationen für Lebensdauerverteilungen vor– und ein Zusammenhang zu Lorenzkurvenausdrücken hergestellt werden. Dabei werden ausschließlich stetige Verteilungsfunktionen $[0, \infty)$ mit $F(0) = 0$ betrachtet, die endliche Mittelwerte besitzen und streng steigend sind.

Die Charakterisierung von Verteilungen über die Einführung von Schiefeordnungen erfolgt über zwei grundlegende Ansätze: Vergleich einer gegebenen Verteilung F_X

– mit einer beliebigen Verteilung F_Y oder

– mit einer exponentialverteilten Variable E .

Die Exponentialverteilung $E(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ nimmt die Stellung einer Referenzverteilung ein, da die wichtigsten Kennziffern Hazardrate $r(x) = \frac{f(x)}{[1 - F(x)]}$ und mittlere restliche Lebensdauer $v(x) = M_0(x) - x$ konstant sind. Es gilt

$$\mu_E = \sigma_E^2 = \frac{1}{\lambda},$$

$$r_E(x) = r_E(F) = \lambda,$$

$$v_E(x) = v_E(F) = \frac{1}{\lambda}.$$

Die normierte total-time-on test-Funktion (in Abhängigkeit von F) $W_E(F)^{110}$ und die Lorenzkurve $L_E(F)$ sind unabhängig von Parameter λ :

$$W_E(F) = F$$

$$L_E(F) = F + (1 - F)\ln(1 - F).$$

Der Gini-Koeffizient einer Exponentialverteilung hat den Wert $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} R &= 1 - 2 \int_0^1 (F + (1 - F)\ln(1 - F))dF \\ &= 1 - 2 \left[0,5 + \left[-\frac{(1-F)^2}{2} \ln(1-F) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-F)}{2} dF \right] \\ &= 1 - 2 [0,5 - 0,25] = 0,5. \end{aligned}$$

9.6.1 Wesentliche Zusammenhänge in einer Übersicht

In Übersicht 15 sollen nun fünf wichtige partielle Ordnungsrelationen definiert und äquivalente Darstellungsformen angeführt werden:¹¹¹

Zwischen diesen Ordnungen bestehen folgende Beziehungen:^{112, 113}

$$\begin{array}{ccc} \text{IFR} & \Rightarrow & \text{IFRA} \\ \Downarrow & & \Downarrow^{114} \\ \text{DMRL} & \Rightarrow & \text{NBUE} \Rightarrow \text{HNBUE} \end{array}$$

¹¹⁰ Vgl. Kap. 6.1 und Kap. 6.4: Die normierte total-time-on-test-Funktion entspricht formal $W(F)$.

¹¹¹ Herleitung für " $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend $\Rightarrow \frac{W_Y(F)}{W_X(F)}$ nichtfallend" im Anhang.

¹¹² Vgl. z.B. KOCHAR, S. C. / WIENS, D. (1987), S. 824 und KLEFSJÖ, B. (1983), S. 908.

¹¹³ Bei Umkehrung der Beziehung (z. B. nichtfallend in nichtsteigend) ergeben sich analoge Definitionen, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

¹¹⁴ Nur bei Vergleich F_X mit E . Vgl. KOCHAR, S. C. / WIENS, D. (1987), S. 825.

ÜBERSICHT 15: Wichtige partielle Ordnungsrelationen bei der Analyse von Lebensdauerverteilungen

Bezeichnung	Definition	Aussagen bezüglich $W(F)$ $W(F) = L(F) + \frac{M(F)}{\mu} (1-F)$	Quelle
IFR X hat mehr "Increasing Failure Rate" als Y $X \leq Y$ IFR	$F_Y^{-1} F_X(x)$ konvex $\Leftrightarrow \frac{r_X(F)}{r_Y(F)}$ nichtfallend in $F \in [0, 1]$ ¹	$\Leftrightarrow \frac{dW_Y(F)}{dF} : \frac{dW_X(F)}{dF}$ nichtfallend in $F \in [0, 1]$	¹ Vgl. KOCHAR, S. C. / WIENS, D. (1987), S. 824.
X ist eine "Increasing Failure Rate"-Verteilung $X \leq E$ IFR	$r_X(x)$ nichtfallend in x ²	$\Leftrightarrow W_X(F)$ konkav in $F \in [0, 1]$ ³	² Vgl. KLEFSJÖ, B. (1982a), S. 37. ³ Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 84.
IFRA X hat mehr "Increasing Failure Rate in Average" als Y $X \leq Y$ IFRA	$F_Y^{-1} F_X(x)$ starshaped ⁴ $\Leftrightarrow X \leq Y := \frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend in $F \in (0, 1)$	$\Leftrightarrow \frac{W_Y(F)}{W_X(F)}$ nichtfallend in $F \in (0, 1)$	⁴ Vgl. KOCHAR, S. C. / WIENS, D. (1987), S. 824.
X ist eine "Increasing Failure Rate in Average"-Verteilung $X \leq E$ IFRA	$\frac{1}{t} \int_0^t r_X(y) dy$ nichtfallend in $t \geq 0$ ⁵	$\Leftrightarrow \frac{W_X(F)}{F}$ fallend in $F \in (0, 1)$ ⁶	⁵ Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 84. ⁶ Vgl. KLEFSJÖ, B. (1982a), S. 38 und (1983), S. 911.
DMRL X hat mehr "Decreasing Mean Residual Life" als Y $X \leq Y$ DMRL	$\frac{v_X(F)}{v_Y(F)}$ nichtsteigend in $F \in [0, 1]$ ⁷	$\Leftrightarrow \frac{1 - W_X(F)}{1 - W_Y(F)}$ nichtsteigend in $F \in [0, 1]$ ⁸	⁷ Vgl. KOCHAR, S. C. (1989), S. 236. ⁸ Vgl. ebenda.
X ist eine "Decreasing Mean Residual Life"-Verteilung $X \leq E$ DMRL	$v(x)$ nichtsteigend in x ⁹	$\Leftrightarrow \frac{1 - W_X(F)}{1 - F}$ nichtsteigend in $F \in [0, 1]$ ¹⁰	⁹ Vgl. BASU, A. S. (1988), S. 26. ¹⁰ Vgl. KLEFSJÖ, B. (1982a), S. 39.

Noch ÜBERSICHT 15: Wichtige partielle Ordnungsrelationen bei der Analyse von Lebensdauerverteilungen

Bezeichnung	Definition	Aussagen bezüglich $W(F)$ $W(F) = L(F) + \frac{x(F)}{\mu}(1-F)$	Quelle
NBUE X ist mehr "New Better than Used in Expectation" als Y $X \leq Y$ _{NBUE}	$\frac{v(F)}{v_Y(F)} \leq \frac{\mu_X}{\mu_Y}$ für $F \in [0, 1]$ ¹¹	$\Leftrightarrow W_X(F) \geq W_Y(F)$ für $F \in [0, 1]$ ¹²	¹¹ Vgl. KOCHAR, S. C. (1989), S. 237. ¹² Vgl. ebenda.
X ist eine "New Better than Used in Expectation"-Verteilung $X \leq E$ _{NBUE}	$\int_0^{\infty} \frac{(1 - F_X(y))}{1 - F_X(t)} dy \leq \mu_X$ für $t \geq 0$ ¹³	$\Leftrightarrow W_X(F) \geq F$ für $F \in [0, 1]$ ¹⁴	¹³ Vgl. BARLOW, R. E. / PROSCHAN, F. (1981), S. 159 und KOCHAR, S. C. / WIENS, D. (1987), S. 824. ¹⁴ Vgl. KLEFSJÓ, B. (1982a), S. 39.
HNBU X ist mehr "Harmonic New Better than Used in Expectation" als Y $X \leq Y$ _{HNBU}	$\int_0^{\bar{x}} [1 - F_X(y)] dy \geq \int_0^{\bar{y}} [1 - F_Y(y)] dy$ für $t \geq 0$ ¹⁵	$\Leftrightarrow W_X(F) - \frac{x(F)}{\mu_X}(1-F) \geq W_Y(F) - \frac{y(F)}{\mu_Y}(1-F)$	¹⁵ Vgl. KOCHAR, S. C. (1989), S. 237.
X ist eine "Harmonic New Better than Used in Expectation"-Verteilung $X \leq E$ _{HNBU}	$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{v_F(x)} dx \leq \mu_X$ für $t \geq 0$ ¹⁶	$\Leftrightarrow W_X(F) - \frac{x(F)}{\mu_X}(1-F) \geq F + (1-F) \ln(1-F)$ für $0 \leq F \leq 1$ ¹⁶	¹⁶ Vgl. ROLSKI, T. (1975), S. 715 und KLEFSJÓ, B. (1982b), S. 332.

9.6.2 Bezüge wichtiger Ordnungsrelationen zur Lorenzkurve

Aus dem Zusammenhang zwischen konvexer, Starshaped und Lorenz-Dominanzordnung ergibt sich:¹¹⁵

$$\begin{aligned} \text{Satz 9.37:} \quad X \underset{\text{IFR}}{\leq} Y &\quad \Rightarrow \quad X \underset{\text{IFRA}}{\leq} Y &\quad \Rightarrow \quad L_X(F) \geq L_Y(F) \text{ bzw.} \\ X \underset{\text{IFR}}{\leq} E &\quad \Rightarrow \quad X \underset{\text{IFRA}}{\leq} E &\quad \Rightarrow \quad L_X(F) \geq L_E(F), \end{aligned}$$

d.h. die Lorenzkurve einer IFR bzw. einer IFRA-Verteilung liegt stets oberhalb der Lorenzkurve der Exponentialverteilung und der Gini-Koeffizient ist damit stets kleiner als 0,5.¹¹⁶

Eine Formulierung von $X \underset{\text{DMRL}}{\leq} Y$ über Lorenzkurvenausdrücke führt zu dem recht unanschaulichen Ausdruck

$$\frac{\mu_X(1-L_X(F)) - x(F)(1-F)}{\mu_Y(1-L_Y(F)) - y(F)(1-F)} \text{ nichtsteigend für } 0 < F < 1''.$$

Vergleicht man F_X mit der Exponentialverteilung, so ist F_X eine DMRL-Verteilung genau dann, wenn

$$\frac{M_O(F) - x(F)}{\mu_X} = \frac{1 - L_X(F)}{1 - F} - \frac{x(F)}{\mu_X} \text{ nichtsteigend für } 0 < F < 1,$$

d.h. die Differenz aus dem Sekantenanstieg aus Punkt (1,1) und der Steigung der Lorenzkurve an einer bestimmten Stelle soll für jede Stelle nichtsteigend sein.

Die Ordnungsrelation $X \underset{\text{NBÜE}}{\leq} Y$ ist äquivalent zu der Aussage

$$'' L_X(F) + \frac{x(F)}{\mu_X}(1 - F) \geq L_Y(F) + \frac{y(F)}{\mu_Y}(1 - F) \text{ für } 0 \leq F \leq 1''.$$

¹¹⁵ Vgl. CHANDRA, M. / SINGPURWALLA, N. D. (1981), S. 117 und Kap. 9.2.4.

¹¹⁶ Vgl. CHANDRA, M. / SINGPURWALLA, N. D. (1981), S. 117 und RINNE, H. (1988), S. 394.

Für $X \underset{\text{NBUE}}{\leq} E$ gilt

$$L_X(F) + \frac{x(F)}{\mu_X}(1-F) \geq F$$

$$\Leftrightarrow L_X(F) \geq F - \frac{x(F)}{\mu_X}(1-F).$$

Man sieht, daß E die Grenzverteilung darstellt, da der Gleichheitsfall genau für $X = E$ angenommen wird.

Für eine NBUE-Verteilung muß also insbesondere gelten

$$\text{an der Stelle } F = F_\mu : L_\mu \geq 2F_\mu - 1 \Leftrightarrow 1 - F_\mu \geq S \text{ und}$$

$$\text{an der Stelle } F = 0,5: L(0,5) \geq 0,5\left(\frac{\mu - Z}{\mu}\right) \Leftrightarrow M_u(0,5) \geq \mu - Z \Leftrightarrow \delta_Z \geq Z.$$

Es gilt, wie in Kapitel 6.1 gezeigt wurde, daß aus $X \underset{\text{NBUE}}{\leq} Y$ $X \underset{\bar{L}}{\leq} Y$ folgt

Eine Verteilung heißt "harmonic new better than used in expectation"¹¹⁷, wenn das harmonische Integral von $v(x)$ im Intervall $(0, x)$ kleiner ist als der Mittelwert von x .¹¹⁸ Dies läßt sich zu der äquivalenten Aussage umformen

$$\int_x^\infty (1 - F_X(y))dy \leq \mu_X e^{-\frac{x}{\mu_X}} = \int_x^\infty (1 - E(y))dy^{119} \text{ mit } E(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\mu_X}},$$

was identisch ist mit der Relation $X \underset{v}{\leq} E^{120}$, die wiederum äquivalent zu der Beziehung

$$\mu_X[1 - L_X(F)] \leq \mu_X[1 - L_E(F)] \Leftrightarrow L_X(F) \geq L_E(F)$$

ist. Die Lorenzkurve der Variablen X liegt also genau dann über der Lorenzkurve der Exponentialverteilung, wenn X der Klasse der HNBUE-Verteilungen angehört.¹²¹

Für HNBUE-Verteilungen gilt bspw. $\int_a^b xl(x)dx \leq 2\mu_X^{122} \Leftrightarrow V^2 \leq 1$

¹¹⁷ ROLSKI, T. (1975), S. 716.

¹¹⁸ Vgl. KLEFSJÖ, B. (1984), S. 332f für ein Anwendungsgebiet.

¹¹⁹ Vgl. ROLSKI, T. (1975), S. 715. Herleitung im Anhang.

¹²⁰ Vgl. Kap. 9.2.1.

¹²¹ Vgl. KLEFSJÖ, B. (1984), S. 303.

¹²² Vgl. GUPTA, R. C. / KIRMANI, S. N. U. A. (1990), S. 3147ff.

Beim Vergleich zweier Verteilungen F_X und F_Y ($X \underset{\text{HNBUE}}{\leq} Y$) geht obige Bedingung in folgende Definition über:¹²³

$$\int_{\tilde{t}}^{\infty} [1 - F_{\tilde{X}}(y)] dy \leq \int_{\tilde{t}}^{\infty} [1 - F_{\tilde{Y}}(y)] dy \text{ für } \tilde{t} \geq 0.$$

Diese Definition führt damit zu $\tilde{X} \underset{v}{\leq} \tilde{Y}$, was äquivalent ist zu $X \underset{L}{\leq} Y$ ¹²⁴.

D.h. eine Lorenz-Dominanz besteht genau dann, wenn eine Verteilung "more harmonic new better than used in expectation" ist als eine andere.

9.7 Anwendung bei der Beurteilung risikobehafteter Anlageformen

Ansätze zur Beurteilung und Bildung einer Rangfolge risikobehafteter Anlageprojekte sind die stochastischen Dominanzrelationen¹²⁵ und beim Vergleich von Kennziffern das μ - σ -Kriterium sowie in Analogie dazu zwei Regeln von YITZHAKI, die auf μ und Δ aufbauen.¹²⁶

Ausgangspunkt ist die Betrachtung einer Vielzahl risikobehafteter Projekte, aus denen nach bestimmten Kriterien ein effiziente Auswahl getroffen werden soll. Beurteilungsmaßstab ist die Verteilung der unsicheren Rendite einer jeden Anlageform.

Hinter einer Beurteilung von unsicheren Anlageformen nach der **Second order Dominanz** steht die Vorstellung eines risikoaversen Investors, der ein Projekt mit höherem Erwartungsnutzen einem anderen vorzieht, wobei die Nutzenfunktion als stetig, steigend und konkav angenommen wird.¹²⁷ Für Projekte mit gleichem Erwartungswert kann der risikoaverse Investor folglich seine Auswahl auch über Lorenzkurvenvergleiche treffen.

¹²³ Vgl. KOCHAR, S. C. / WIENS, D. P. (1987), S. 828 und KOCHAR, S. C. (1989), S.237.

¹²⁴ Vgl. KOCHAR, S. C. (1989), S. 241.

¹²⁵ Vgl. Kap. 9.2.1 und auch Kap. 8.3.4 sowie HADAR, J. / RUSSELL, W. R. (1969) und BAWA, V. S. (1982), Übersichtsartikel mit zahlreichen Literaturhinweisen.

¹²⁶ Vgl. YITZHAKI, S. (1982b) und BEY, R. P. / HOWE, K. M. (1984).

¹²⁷ Vgl. LEVY, H. (1992), S. 556f und Kap. 9.2.1: $E(g(x))$ als Erwartungsnutzen interpretiert.

Nach der ersten **Mittelwert–mittlere Differenz–Regel** dominiert ein Projekt X ein Projekt Y, wenn $\mu_X \geq \mu_Y$ und $\Delta_X \leq \Delta_Y$ mit mindestens einer strikten Ungleichung gilt. In einem solchen Fall ist folglich $R_X \leq R_Y$, d.h. die Ungleichverteilung gemessen mit R ist in Anlage X geringer.

Nach der zweiten μ - Δ -Regel dominiert das Projekt X das Projekt Y, wenn $\mu_X \geq \mu_Y$ und $\mu_X - \frac{\Delta_X}{2} \geq \mu_Y - \frac{\Delta_Y}{2}$ mit mindestens einer strikten Ungleichung gilt.¹²⁸ Im Vergleich zu Regel 1 kann hier $\Delta_X > \Delta_Y$ vorliegen, d. h. bei der Bewertung der Projekte kann ein höherer Erwartungswert bei X eine größere Streuung überkompensieren. Diese Regel ist folglich schwächer, d.h. sie ordnet mehr Projekte als Kriterium 1.

Das 2. μ - Δ -Kriterium stellt eine **notwendige** Bedingung für die Einhaltung einer Second order Dominanzrelation $X \succ Y$ dar:

$$(2)$$

Satz 9.38: $X \succ Y \Rightarrow \mu_X \geq \mu_Y$
(2)

und $X \succ Y \Leftrightarrow \mu_X L_X(F) \geq \mu_Y L_Y(F) \Rightarrow$
(2)

$$\mu_X - \frac{\Delta_X}{2} \geq \mu_Y - \frac{\Delta_Y}{2} \Leftrightarrow \mu_X \left(\frac{1 - R_X}{2} \right) \geq \mu_Y \left(\frac{1 - R_Y}{2} \right).$$

Für $\mu_X = \mu_Y$ muß also $R_X \leq R_Y$ als Voraussetzung für $X \succ Y$ gelten.
(2)

Von YITZHAKI¹²⁹ wurde folgende **allgemeine notwendige Bedingung** für die Einhaltung einer Second order Dominanz von X über Y vorgestellt.

Es muß gelten:

$$\mu_{1:\nu}^X \geq \mu_{1:\nu}^Y \text{ für } \nu = 1, 2, \dots$$

Überlegung: Aus der Second order Beziehung $X \succ Y$ ist für $F = 1$ sofort $\mu_{1:1}^X \geq \mu_{1:1}^Y$
(2)

ableitbar. Es folgt zudem $\mu_X L_X^{(\nu)}(F) \geq \mu_Y L_Y^{(\nu)}(F)$ für alle $0 \leq F \leq 1$,

¹²⁸ Vgl. YITZHAKI, S. (1982), S. 180 und BEY, R. P. / HOWE, K. M. (1984).

¹²⁹ Vgl. YITZHAKI, S. (1982b).

$\nu \geq 2, 3, \dots$. An der Stelle $F = 1$ gilt also

$$\mu_X \frac{1-\Gamma(X,\nu)}{\nu!} \geq \mu_Y \frac{1-\Gamma(Y,\nu)}{\nu!} \Leftrightarrow \mu_{1:\nu}^X \geq \mu_{1:\nu}^Y. {}^{130}$$

Bezüglich Γ kann jedoch **keine allgemeine** Aussage getroffen werden. Gilt jedoch $\mu_X = \mu_Y$ stellt eine Ordnung $\Gamma(X,\nu) \leq \Gamma(Y,\nu)$ eine (analoge) notwendige Bedingung dar.

Je schwächer ein Kriterium ist, desto mehr Projekte lassen sich ordnen d.h. desto mehr Projekte werden auch dominiert und damit aussortiert. Die Anwendung dieser notwendigen Regel führt damit zu einer Auswahl von Projekten, die eine Untergruppe des "effizienten Sets" an Projekten ist. Im "effizienten Set", der durch die Second order Regel festgelegt ist, sind dabei solche Projekte enthalten, die über diese Dominanz-Regel nicht aussortiert werden, d.h. nicht dominiert werden.

¹³⁰ Vgl. YITZHAKI, S. (1982b), S. 180 mit anderer Herleitung. Vgl. weiter LEVY, H. (1992), S. 569f.

10. Abschließende Bemerkungen

Die vorliegende Arbeit soll folgendes verdeutlichen:

Lorenzkurve und Gini-Koeffizient bieten über die Disparitätsmessung hinaus aufgrund ihrer vielseitigen Interpretierbarkeit einen weiten Bereich von Anwendungsmöglichkeiten. Dabei wird der Gini-Koeffizient entweder

- selbst vor einem speziellen Sachhintergrund neu (bspw. als Durchschnitt) belegt bzw. interpretiert,
- als Komponente eines weiteren Maßes verwendet oder
- Komponenten seiner Zerlegung werden wiederum als Meßindikatoren herangezogen und interpretiert.

Zudem haben eine Vielzahl von Autoren die Lorenzkurve als Ausgangspunkt genommen, um verallgemeinernde Ansätze oder Abwandlungen für unterschiedlichste Zielsetzungen zu entwickeln. Eine Vorstellung solch allgemeiner Strukturen verdeutlicht indirekt die den gebräuchlichen Indikatoren inliegenden Wertungen. Die Modifikationen im Konzept der Lorenzkurve beziehen sich bspw.

- auf die Aufhebung des Normierungsgedankens bei der Lorenzkurve,
- auf die Betrachtung und Interpretation alternativer Flächenstücke im Schaubild der normierten inversen Verteilungsfunktion,
- auf eine Weiterführung des Kumulationsvorganges oder
- auf eine Ausdehnung des Instrumentariums auf die Messung des Zusammenhangs zweier funktional miteinander verbundener Merkmale, indem der der Lorenzkurve inliegende Größenordnungsgedanke modifiziert wird.

Dabei ergeben sich zwischen den einzelnen Ansätzen immer wieder Verknüpfungspunkte, die über eine einfache übersichtliche Gliederung nicht mehr erfaßt werden können. So lassen die scheinbar so unverbunden nebeneinanderstehenden Kapitel 7 und 8 doch im Aufbau der betrachteten Kennziffern eine gemeinsame Struktur erkennen:

In beiden Fällen arbeitet man mit Kovarianzen der Struktur $\text{cov}\left(\frac{g(x)}{\mu_g}, \frac{h(F(x))}{\mu_h}\right)$ mit μ_g

$$= \int_a^b g(x)f(x)dx \text{ und } \mu_h = \int_a^b h(F(x))f(x)dx \text{ mit } \frac{dh(F)}{dF} \geq 0,$$

d.h. man mißt die Korrelation zweier relativierter Merkmale $g(x)$ und $h(F(x))$. Wählt man $g(x) = x$, gelangt man zu den Disparitätsmaßen in Kapitel 7.

Bei der großen Vielzahl an Beiträgen bleibt es nicht aus, daß einige Aspekte im Rahmen der vorgelegten Arbeit nur im Ansatz berücksichtigt werden können. So erscheint eine Verknüpfung des "Konzepts der weighted distributions" mit dem Instrumentarium der (verallgemeinerten) Lorenzkurve vertiefenswert. Ebenso könnten über den Zusammenhang der Second order dominance mit der Lorenzkurven-Dominanz weitere Anwendungsbereiche erschlossen und Erkenntnisse übertragen werden.

ANHANG:

1. Fußnote 47 in Kapitel 4.2.1.2

$$\begin{aligned}
 \mu_{1:2}^G - \mu_{1:2}^K &= 4 \int_{0,5}^1 2x(F)dF - 4 \int_0^1 2F \cdot x(F)dF \\
 \Leftrightarrow \mu_{1:2}^G - \mu_{1:2}^K &= 4\mu \frac{[1-L(0,5)]}{0,5} - 4\mu[1+R] \\
 \Leftrightarrow \mu_{1:2}^G - \mu_{1:2}^K &= 4[M_o(0,5) - \mu - \mu R] \\
 \Leftrightarrow \mu_{1:2}^G - \mu_{1:2}^K &= 4[-M_u(0,5) + \mu - \mu R] \\
 \Leftrightarrow R &= \frac{\mu - M_u(0,5)}{\mu} - \frac{\mu_{1:2}^G - \mu_{1:2}^K}{4}
 \end{aligned}$$

2. Fußnote 109 in Kapitel 4.7:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n |x_i - x| &= \sum_{i=1}^k (x - x_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - x) \quad (\text{mit } x_i \leq x_{i+1} \text{ und } x_k \leq x \leq x_{k+1}) \\
 &= kx - \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i - (n-k)x \\
 &= 2kx - nx + \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^k x_i
 \end{aligned}$$

3. Fußnoten 116 und 119 in Kapitel 4.7:

$$\begin{aligned}
 \int_0^y \int_0^y (y-x) f_1(x) dx f_j(y) dy &= \int_0^{\infty} [yF_1(y) - \mu_1 L_1(y)] f_j(y) dy \\
 &= \int_0^{\infty} y F_1(y) f_j(y) dy - [\mu_1 L_1(y) F_j(y)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mu_1 l_1(y) F_j(y) dy \\
 &= \int_0^{\infty} y [F_1(y) f_j(y) + F_j(y) f_1(y)] dy - \mu_1
 \end{aligned}$$

Über partielle Integration gelangt man dann zu

$$\int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_1(x) dx f_j(y) dy = - \int_0^{\infty} F_1(y) F_j(y) dy + \int_0^{\infty} F_1(y) dy = \int_0^{\infty} F_1(y) (1-F_j(y)) dy.$$

$$\text{Analog gilt } \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_j(x) dx f_1(y) dy = \int_0^{\infty} F_j(y) (1-F_1(y)) dy.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |x-y| f_1(x) dx f_j(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_1(x) dx f_j(y) dy + \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} (x-y) f_1(x) dx f_j(y) dy \end{aligned}$$

Der zweite Summand stimmt mit $\int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_j(x) dx f_1(y) dy$ überein:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \int_y^{\infty} (x-y) f_1(x) dx f_j(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} [\mu_1 (1-L_1(y)) - y(1-F_1(y))] f_j(y) dy \\ &= \mu_1 - \int_0^{\infty} \mu_1 L_1(y) f_j(y) dy - \int_0^{\infty} y f_j(y) dy + \int_0^{\infty} y F_1(y) f_j(y) dy \\ &= \mu_1 - [\mu_1 L_1(y) F_j(y)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} y f_1(y) F_j(y) dy - \mu_j + [F_1(y) \mu_j L_j(y)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mu_j L_j(y) f_1(y) dy \\ &= \mu_1 - \mu_1 + \int_0^{\infty} y f_1(y) F_j(y) dy - \mu_j + \mu_j - \int_0^{\infty} \mu_j L_j(y) f_1(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} [y F_j(y) - \mu_j L_j(y)] f_1(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_j(x) dx f_1(y) dy. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_i(x) dx f_j(y) dy + \int_0^{\infty} \int_0^y (y-x) f_j(x) dx f_i(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} F_i(y)(1-F_j(y)) dy + \int_0^{\infty} F_j(y)(1-F_i(y)) dy. \end{aligned}$$

4. Fußnote 13 in Kapitel 6.2

$$\begin{aligned} \kappa(F) &= \frac{1}{F} \int_0^F D(F) dF \\ &= \frac{1}{F} [F - L(F) + \int_0^F \frac{x(q)q}{\mu} dq - \int_0^F L(q) dq] \\ &= \frac{F - L(F)}{F} + \frac{1}{F} [F \cdot L(F) - 2 \int_0^F L(q) dq] \\ &= \frac{F - L(F)}{F} + L(F) \cdot R(F) \end{aligned}$$

5. Fußnote 13 in Kapitel 7.1:

$$\begin{aligned} \frac{(F_{\eta} - F_{\xi})^{\nu}}{\nu} \cdot \mu_{1:\nu}(F_{\xi}, F_{\eta}) &= \int_{F_{\xi}}^{F_{\eta}} (F_{\eta} - F)^{\nu-1} x(F) dF \\ &= [(F_{\eta} - F)^{\nu-1} \mu L(F)]_{F_{\xi}}^{F_{\eta}} + \int_{F_{\xi}}^{F_{\eta}} (F_{\eta} - F)^{\nu-2} (\nu-1) \mu L(F) dF \\ &= -(F_{\eta} - F_{\xi})^{\nu-1} \mu L(F_{\xi}) + \int_{F_{\xi}}^{F_{\eta}} (F_{\eta} - F)^{\nu-2} (\nu-1) \mu L(F) dF \\ &= -\mu L(F_{\xi}) \int_{F_{\xi}}^{F_{\eta}} (F_{\eta} - F)^{\nu-2} (\nu-1) dF + \int_{F_{\xi}}^{F_{\eta}} (F_{\eta} - F)^{\nu-2} (\nu-1) \mu L(F) dF \end{aligned}$$

6. Fußnote 22 in Kapitel 7.2:

$$\begin{aligned}
\frac{(F_\eta - F_\xi)^\nu}{\nu} \cdot \mu_{1:\nu}(F_\xi, F_\eta) &= \int_{F_\xi}^{F_\eta} (F - F_\xi)^{\nu-1} x(F) dF \\
&= [(F - F_\xi)^{\nu-1} \mu L(F)]_{F_\xi}^{F_\eta} - \int_{F_\xi}^{F_\eta} (F - F_\xi)^{\nu-2} (\nu-1) \mu L(F) dF \\
&= (F_\eta - F_\xi)^{\nu-1} \mu L(F_\eta) - \int_{F_\xi}^{F_\eta} (F - F_\xi)^{\nu-2} (\nu-1) \mu L(F) dF \\
&= \mu L(F_\eta) \int_{F_\xi}^{F_\eta} (F - F_\xi)^{\nu-2} (\nu-1) dF - \int_{F_\xi}^{F_\eta} (F - F_\xi)^{\nu-2} (\nu-1) \mu L(F) dF
\end{aligned}$$

7. Fußnote 10 in Kap. 8.1

$$\begin{aligned}
C_g &= \int_a^b \frac{g(x)}{\mu_g} [2F(x)-1] f(x) dx \\
&= \int_a^b \frac{g(x)}{\mu_g} [\sum_i h_i [2F_i(x)-1]] \sum_j h_j f_j(x) dx \\
&= \sum_i \sum_j h_i h_j \int_a^b \frac{g(x)}{\mu_g} [2F_i(x)-1] f_j(x) dx \\
&= \sum_i h_i^2 \frac{\mu_{g_i}}{\mu_g} \int_{a_i}^{b_i} \frac{g_i(x)}{\mu_{g_i}} [2F_i(x)-1] f_i(x) dx + \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{\mu_g} \int_a^b g(x) [2F_i(x)-1] f_j(x) dx \\
&= \sum_i h_i l_i C_{g_i} + \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j}{\mu_g} \int_a^b g(x) [2F_i(x)-1] f_j(x) dx.
\end{aligned}$$

8. Fußnote 28 in Kap. 9.2:

Überlegungen analog Satz 9.6:

Gilt $X \underset{v}{\geq} Y$, dann muß die Größenrelation $\int_x^b [1 - F_X(y)] dy \geq \int_x^b [1 - F_Y(y)] dy$

insbesondere auch an den Schnittstellen von $1 - F_X(y)$ und $1 - F_Y(y)$ gegeben sein. An

diesen Stellen ist jedoch $\mu_X L_X(F_S) = \int_0^{F_S} \bar{x}(\bar{u}) d\bar{u} \geq \mu_Y L_Y(F_S) = \int_0^{F_S} \bar{y}(\bar{u}) d\bar{u}$ bzw.

$$\mu_X [1 - L_X(F_S)] \geq \mu_Y [1 - L_Y(F_S)] \text{ erfüllt.}$$

Diese Größenrelation kann sich für Zwischenstellen F bzw. F nicht umkehren.

9. Fußnote 81 aus Kapitel 9.4:

$H_t(x) = \frac{E(\bar{X}^{t+1} - 1)}{t(t+1)}$ für $t = 1, 0, -1, -2$:

$$1. t = 1: \frac{E(\bar{X}^2 - 1)}{2} = \frac{1}{2} E\left(\frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot V^2$$

$$2. t = 0: \frac{E(\bar{X} - 1)}{0 \cdot 1} = \frac{0''}{n0} \Rightarrow \text{nach Satz von de l'Hospital:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\bar{x}^{t+1} \log \bar{x} f(x) dx}{2t+1} \Big|_{t=0} = E(\bar{X} \log \bar{X})$$

$$3. t = -1: \frac{E(\bar{X}^0 - 1)}{0 \cdot -1} = \frac{0''}{n0} \Rightarrow \text{nach Satz von de l'Hospital:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\bar{x}^{t+1} \log \bar{x} f(x) dx}{2t+1} \Big|_{t=-1} = - \int_0^{\infty} \log \bar{x} f(x) dx = \log \mu - \int_0^{\infty} \log x f(x) dx = \log \mu - \log GM.$$

$$4. t = -2: \frac{E(\bar{X}^{-1} - 1)}{-2 \cdot -1} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{\mu_f(x)}{x} dx - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{HM} - 1 \right].$$

10. Fußnote 111 aus Kap. 9.6:

A: $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$ ist äquivalent der Aussage $\frac{y'(F)}{x'(F)} \geq \frac{y(F)}{x(F)}$.

B: Wegen Satz 9.17 folgt aus " $\frac{y(F)}{x(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$ " auch

" $\frac{\mu_Y L_Y(F)}{\mu_X L_X(F)}$ nichtfallend für $0 < F < 1$ ". Dies ist äquivalent der Größenrelation

$$\frac{y(F)}{x(F)} \geq \frac{\mu_Y L_Y(F)}{\mu_X L_X(F)}$$

$$\Leftrightarrow y(F)x(F)[1-F] + \mu_X L_X(F)y(F) \geq y(F)x(F)[1-F] + \mu_Y L_Y(F)x(F)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(F)}{x(F)} \geq \frac{\mu_Y L_Y(F) + y(F)[1-F]}{\mu_X L_X(F) + x(F)[1-F]} \quad \text{für } 0 < F < 1.$$

Aus A und B zusammen folgt dann $\frac{y'(F)}{x'(F)} \geq \frac{y(F)}{x(F)} \geq \frac{\mu_Y L_Y(F) + y(F)[1-F]}{\mu_X L_X(F) + x(F)[1-F]}$ für $0 < F < 1$.

Die Aussage " $\frac{W_Y(F)}{W_X(F)}$ nichtfallend in $0 < F < 1$ " ist aber äquivalent der Bedingung

$$\frac{y'(F)[1-F]}{\mu_Y} W_X(F) \geq \frac{x'(F)[1-F]}{\mu_X} W_Y(F)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'(F)}{x'(F)} \geq \frac{\mu_Y L_Y(F) + y(F)[1-F]}{\mu_X L_X(F) + x(F)[1-F]} \quad \text{für } 0 < F < 1.$$

11. Fußnote 119 aus Kapitel 9.6:

Definition HNBUE: $\frac{x}{\int_0^x v_X(t)^{-1} dt} \leq \mu_X$ mit $v_X(t) = \int_t^\infty \frac{[1-F(y)] dy}{1-F(t)}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\mu_X} \leq \int_0^x v_X(t)^{-1} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\mu_X} \leq - \int_0^x \frac{d \ln \left[\int_t^\infty [1-F(y)] dy \right]}{dt} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{\mu_X} \geq \ln \int_x^\infty (1-F(y)) dy - \ln \int_0^\infty (1-F(y)) dy$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{-x}{\mu_X}} \geq \frac{\int_x^\infty [1-F(y)] dy}{\int_0^\infty [1-F(y)] dy}$$

Literaturverzeichnis

- Aaron, H. J. / Boskin, M. J. (Eds.) (1980)**
The Economics of Taxation, Washington, D.C. 1980.
- Adams, J. D. (1981)**
Asset Inequality Over the Life Cycle, in: Economics Letters 7 (1981), S. 287–293.
- Aghevli, B. B. / Mehran, F. (1981)**
Optimal Grouping of Income Distribution Data, in: Journal of the American Statistical Association 76 (1981), S. 22–26.
- Allison, P. D. (1978)**
Measures of Inequality, in: American Sociological Review 43 (1978), S. 865–880.
- Aly, E.–E. A. A. (1991)**
On Testing for Lorenz Ordering, in: Metrika 38 (1991), S. 117–124.
- Alzaid, A. A. (1988a)**
Length-biased Orderings with Applications, in: Probability in the Engineering and Informational Sciences 2 (1988), S. 329–341.
- Alzaid, A. A. (1988b)**
Mean Residual Life Ordering, in: Statistical Papers 29 (1988), S. 35–43.
- Alzaid, A. A. (1990)**
Lorenz Ranking of Income Distributions, in: Statistical Papers 31 (1990), S. 209–224.
- Anand, S. (1977)**
Aspects of Poverty in Malaysia, in: Review of Income and Wealth 23 (1977), S. –16.
- Arnold, B. C. (1986)**
A Class of Hyperbolic Lorenz Curves, in: Sankhyā B 48 (1986), S. 427–436.
- Arnold, B. C. (1987)**
Majorization and the Lorenz Order: a Brief Introduction, New York, Berlin, Heidelberg 1987.
- Arnold, B. C. (1988)**
Bounds on the Expected Maximum, in: Communications in Statistics – Theory and Methods 17 (1988), S. 2135–2150.
- Arnold, B. C. (1990)**
The Lorenz Order and the Effects of Taxation Policies, in: Bulletin of Economic Research 42 (1990), S. 249–264.

- Arnold, B. C. (1991)**
 Preservation and Attenuation of Inequality as Measured by the Lorenz Order, in: Mosler, K. / Scarsini, M. (1991), S. 25–37.
- Arnold, B. C. / Robertson, C. A. / Brockett, P. L. / Shu, B.–Y. (1987)**
 Generating Ordered Families of Lorenz Curves by Strongly Unimodal Distributions, in: Journal of Business and Economic Statistics 5 (1987), S. 305–308.
- Arnold, B. C. / Villasenor, J. A. (1986)**
 Lorenz Ordering of Means and Medians, in: Statistics and Probability Letters 4 (1986), S. 47–49.
- Atkinson, A. B. (1970)**
 On the Measurement of Inequality, in: Journal of Economic Theory 2 (1970), S. 244–263.
- Atkinson, A. B. (1980)**
 Horizontal Equity and the Distribution of the Tax Burden, in: Aaron, H. J. / Boskin, M. J. (1980), S. 3–18.
- Atkinson, A. B. (1987)**
 On the Measurement of Poverty, in: Econometrica 55 (1987), S. 749–764.
- Atkinson, A. B. / Bourguignon, F. / Morrisson, C. (1988)**
 Income Distribution and Wealth Inequalities, in: European Economic Review 32 (1988), S. 619–632.
- Baccini, A. / Falguerolles, A. de / Qannari, E. A. (1986)**
 Etude de quelques indices de concentration: un essai de présentation unifiée, in: Revue de Statistiques Appliquées 34 (1986), S. 31–44.
- Barlow, R. E. / Proschan, F. (1981)**
 Statistical Theory of Reliability and Lifetesting, 1981, Silver Spring, USA.
- Barbut, M. (1984)**
 Sur quelques propriétés élémentaires des fonctions de concentration de C. Gini, in: Mathématiques et Sciences Humaines 22 (1984), S. 5–19.
- Barbut, M. (1986)**
 Diamètres et écarts. Une décomposition du coefficient d'inégalité de C. Gini, in: Mathématiques et Sciences Humaines 23 (1986), S. 61–69.
- Basmann, R. L. / Hayes, K. J. / Slottje, D. J. (1991)**
 The Lorenz curve and the mobility function, in: Economics Letters 35 (1991), S. 105–111.
- Basmann, R. L. / Slottje, D. J. (1987)**
 A New Index of Income Inequality. The B Measure, in: Economics Letters 24 (1987), S. 385–389.
- Basu, A. D. (1988)**
 Reliability, Probabilistic, in: Kotz, S. / Johnson, N.L. / Read, C. B. (1982–1988), Vol. 8, S. 24–29.

- Basu, K. (1987)**
Axioms for a Fuzzy Measure of Inequality, in: *Mathematical Social Sciences* 14 (1987), S. 275–288.
- Baumann R. (1971)**
Die Lohnsteuerpflichtigen und ihr Einkommen 1968, in: *Baden–Württemberg in Wort und Zahl* 19 (1971), S. 154–159.
- Bawa, V. S. (1982)**
Stochastic Dominance: A research Bibliography, in : *Management Science* 28 (1982), S. 698–712.
- Beach, C. M. / Kaliski, S. F. (1986)**
Lorenz Curve Inference with Sample Weights: an Application to the Distribution of Unemployment Experience, in: *Applied Statistics* 35 (1986), S. 38–45.
- Benedetti, C. (1961)**
A proposito dei rapporti fra differenza media e scostamenti medio quadratico semplice medio e semplice medio dalla mediana, in : *Metron* 21 (1961), S. 181–185.
- Benedetti, C. (1980)**
Di alcuni indici di disuguaglianza del benessere, in: *Statistica* 40 (1980), S. 7–12.
- Benedetti, C. (1986)**
Sulla interpretazione benessere di noti indici di concentrazione e di altri, in: *Metron* 44 (1986), S. 421–429.
- Bentzel, R. (1970)**
The Social significance of Income Distribution Statistics, in: *The Review of Income and Wealth* 16 (1970), S. 253–264.
- Bergman, B. / Klefsjö, B. (1984)**
The Total Time on Test Concept and Its Use in Reliability Theory, in: *Operations Research* 32 (1984), S. 596–606.
- Bernardo, J. M. / DeGroot, M. H. / Lindley, D. V. / Smith, A. F. M. (Eds.) (1985)**
Bayesian Statistics 2, Amsterdam 1985.
- Berndt, E. R. (1991)**
The practice of Econometrics classic and contemporary, Reading (Mass.) 1991.
- Berrebi, Z. M. / Silber, J. (1981)**
Weighting Income Ranks and Levels. A Multiple–Parameter Generalization for Absolute and Relative Inequality Indices, in: *Economics Letters* 7 (1981), S. 391–397.
- Berrebi, Z. M. / Silber, J. (1985)**
Income Inequality Indices and Deprivation: a Generalization, in: *Quarterly Journal of Economics* 99 (1985), S. 807–810.

- Berrebi, Z. M. / Silber, J. (1987a)**
Dispersion, Asymmetry and the Gini Index of Inequality, in: *International Economic Review* 28 (1987), S. 331–338.
- Berrebi, Z. M. / Silber, J. (1987b)**
Interquantile Differences, Income Inequality Measurement and the Gini Concentration Index, in: *Mathematical Social Sciences* 13 (1987), S. 67–72.
- Berrebi, Z. M. / Silber, J. (1987c)**
Regional Differences and the components of growth and inequality change, in : *Economics Letters* 25 (1987), s. 295–298.
- Berrebi, Z. M. / Silber, J. (1989)**
Deprivation, the Gini Index of Inequality and the Flatness of an Income Distribution, in: *Mathematical Social Sciences* 18 (1989), S. 229–237.
- Besley, T. J. / Preston, I. P. (1988)**
Invariance and the Axiomatics of Income Tax Progression: a Comment, in: *Bulletin of Economic Research* 40 (1988), S. 159–163.
- Bey, R. P. / Howe, K. M. (1984)**
Gini's Mean Difference and Portfolio Selection: An Empirical Evaluation, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19 (1984).
- Bhandari, S. K. / Mukerjee, R. (1986)**
Some Relations Among Inequality Measures, in: *Sankhyā B* 48 (1986), S. 258–261.
- Bhattacharjee, M. C. (1988)**
Reliability Ideas and Applications in Economics and Social Sciences, in: *Krishnaiah, P. R. / Rao, C. R. (1988)*, S. 175–213.
- Bhattacharya, N. / Mahalanobis, B. (1967)**
Regional Disparities in Household Consumption in India, in: *Journal of the American Statistical Association* 62 (1967), S. 143–161.
- Bickel, P. J. / Lehmann, E. L. (1979)**
Descriptive Statistics for Nonparametric Models IV. Spread, in: *Jureckova, J. (1979)*, S. 33–40.
- Bishop, J. A. / Chakraborti, S. / Thistle, P. D. (1989)**
Asymptotically Distribution-Free Statistical Inference for Generalized Lorenz Curves, in: *Review of Economics and Statistics* 71 (1989), S. 725–727.
- Bishop, J. A. / Chow, K. V. / Formby, J. P. (1991)**
A Stochastic Dominance Analysis of Growth, Recessions and the U.S. Income Distribution, 1967–1986, in: *Southern Economic Journal* 57 (1991), S. 936–946.
- Blackburn, M. L. (1989)**
Interpreting the Magnitude of Changes in Measures of Income Inequality, in: *Journal of Econometrics* 42 (1989), S. 21–25.

- Blackorby, C. / Donaldson, D. (1978)**
Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, in: *Journal of Economic Theory* 18 (1978), S. 59–80.
- Blitz, R. C. / Brittain, J. A. (1964)**
An Extension of the Lorenz Diagram to the Correlation of Two Variables, in: *Metron* 23 (1964), S. 137–143.
- Bomsdorf, E. (1982)**
Zur Abschätzung des Ginkoeffizienten bei klassierten Daten, in: *Statistische Hefte* 23 (1982), S. 240–257.
- Bomsdorf, E. (1989)**
Measurement of Disparity from Grouped Data with Different Degrees of Information, in: *Statistical Papers* 30 (1989), S. 49–60.
- Bonferroni, C. E. (1940)**
Un indice quadratico di concentrazione, in: *Atti del secondo Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, Bologna 1940, S. 700–706.
- Bortkiewicz, L. von (1931)**
Die Disparitätsmaße der Einkommensstatistik, *Bulletin de l'Institut International de Statistique* 25 (1931), S. 189–320.
- Bossert, W. (1990)**
An Axiomatization of the Single-Series Gini, in: *Journal of Economic Theory* 50 (1990), S. 82–92.
- Bossert, W. / Pfingsten, A. (1990)**
Intermediate Inequality: Concepts, Indices, and Welfare Implications, in: *Mathematical Social Sciences* 19 (1990), S. 117–134.
- Bruckmann, G. (1969)**
Einige Bemerkungen zur statistischen Messung von Konzentration, in: *Metrika* 14 (1969), S. 183–213.
- Buscemi, S. (1986)**
Sull'indice quadratico di concentrazione del Bonferroni e di una sua variante come indici di disuguaglianza del benessere, in: *Metron* 44 (1986), S. 359–364.
- Butler, R. J. / McDonald, J. B. (1987)**
Interdistributional Income Inequality, in: *Journal of Business & Economic Statistics* 5 (1987), S. 13–18.
- Butler, R. J. / McDonald, J. B. (1989)**
Using Incomplete Moments to Measure Inequality, in: *Journal of Econometrics* 42 (1989), S. 109–119.
- Chakravarty, S. R. (1988)**
Extended Gini Indices of Inequality, in: *International Economic Review* 29 (1988), S. 147–156.
- Chakravarty, S. R. (1990)**
Ethical Social Index Numbers, Berlin, Heidelberg, New York 1990.

- Chakravarty, S. R. / Chakraborty, A. B. (1984)**
On Indices of Relative Deprivation, in: *Economics Letters* 14 (1984), S. 283–287.
- Chandra, M. / Singpurwalla, N. D. (1981)**
Relationships Between Some Notions which Are Common to Reliability Theory and Economics, in: *Mathematics of Operations Research* 6 (1981), S. 113–121.
- Cicchitelli, G. (1979)**
Un test per la verifica dell'omogenita delle varianze di piu popolazioni basato sul rapporto di concentratione, in : *Quaderno dell'Istituto di Statistica, Facolta di Economia e Commercio, Universita di Perugia* 1979.
- Cifarelli, D. M. / Regazzini, E. (1987)**
On a General Definition of Concentration Function, in: *Sankhyā B* 49 (1987), S. 307–319.
- Cole, J. P. (1981)**
Economic Development: A spatial analysis of world poverty and inequality, New York (1981).
- Cowell, F. A. / Kuga, K. (1981)**
Inequality Measurement. An Axiomatic Approach, in: *European Economic Review* 15 (1981), S. 287–305.
- Crow, E. L. (1982)**
Double Cumulative and Lorenz Curves in Weather Modification, in: *Journal of Applied Meteorology* 21 (1982), S. 1063–1070.
- Dagum, C. (1980a)**
Inequality Measures Between Income Distributions with Applications, in: *Econometrica* 48 (1980), S. 1791–1803.
- Dagum, C. (1980b)**
The Generation and Distribution of Income, the Lorenz Curve and the Gini Ratio, in: *Economie Appliquée* 33 (1980), S. 327–367.
- Dagum, C. (1983)**
Income Inequality Measures, in: *Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1988), Vol. 4, S. 34–40.*
- Dagum, C. (1987)**
Measuring the Economic Affluence Between Populations of Income Receivers, in: *Journal of Business and Economic Statistics* 5 (1987), S. 5–12.
- Dagum, C. (1990)**
On the Relationship Between Income Inequality Measures and Social Welfare Functions, in: *Journal of Econometrics* 43 (1990), S. 91–102.
- Dagum, C. (1993)**
The Social Welfare Bases of Gini and Other Income Inequality Measures, in: *Statistica* 53 (1993), S. 3–30.

- Dagum, C. / Zenga, M. (Eds.) (1990)**
Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty, Proceedings, Pavia, Italy, 1989, Berlin, Heidelberg, New York 1990.
- Dancelli, L. (1987)**
Su un metodo per stimare l'elasticità de consumi in uno schema di concentrazione, in: *Statistica* 47 (1987), S. 407–425.
- Dancelli, L. (1990)**
On the Behaviour of the Z_p Concentration Curve, in: Dagum, C. / Zenga, M. (1990), S. 111–127.
- David, H. A. (1968)**
Gini's Mean Difference Rediscovered, in: *Biometrika* 55 (1968), S. 573–575.
- David, H. A. (1981)**
Order statistics, 2. Auflage, New York, London, Sydney, Toronto 1981.
- De Groot, M. H. / Eriksson, E. A. (1985)**
Probability Forecasting, Stochastic Dominance, and the Lorenz Curve, in: Bernardo, J. M. / DeGroot, M. H. / Lindley, D. V. / Smith, A. F. M. (1985), S. 99–118.
- De Simoni, S. (1967)**
Sulle relazioni tra il rapporto di concentrazione ed una funzione di dissomiglianza nello schema di graduazione, in: *Statistica* 27 (1967), S. 19–35.
- De Simoni, S. (1974)**
Prime considerazioni generali sull'uso di una misura della concentrazione quale criterio per l'analisi dei raggruppamenti, in *Statistica* 34 (1979), S. 665–688.
- Donaldson, D. / Weymark, J. A. (1980)**
A Single-Parameter Generalization of the Gini Indices of Inequality, in: *Journal of Economic Theory* 22 (1980), S. 67–86.
- Donaldson, D. / Weymark, J. A. (1983)**
Ethically Flexible Gini Indices for Income Distributions in the Continuum, in: *Journal of Economic Theory* 29 (1983), S. 353–358.
- Dorfman, R. (1979)**
A Formula for the Gini Coefficient, in: *The Review of Economics and Statistics* 61 (1979), S. 146–149.
- Duncan, O. D. / Duncan, B. (1955)**
A Methodological Analysis of Segregation Indices, in: *American Sociological Review* 20 (1955), S. 210–217.
- Dykstra, R. L. (1985)**
Ordering, Starshaped, in: Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1988), Vol. 6, S. 499–501.

- Ebert, U. (1984)**
Measures of Distance Between Income Distributions, in: *Journal of Economic Theory* 32 (1984), S. 266–274.
- Ebert, U. (1987)**
Size and Distribution of Incomes as Determinants of Social Welfare, in: *Journal of Economic Theory* 41, (1987), S. 23–33.
- Eichhorn, W. / Gehrig, W. (1982)**
Measurement of Inequality in Economics, in: Korte, B. (1982), S. 657–693.
- Eichhorn, W. / Funke, H. / Richter, W. F. (1984)**
Tax Progression and Inequality of Income Distribution, in: *Journal of Mathematical Economics* 13 (1984), S. 127–131.
- Eichhorn, W. (Hrsg.) (1994)**
Models and Measurement of Welfare and Inequality, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1994.
- Eisele, W. (1976)**
Menge und Struktur der öffentlich beseitigten Abfälle, in: *Baden–Württemberg in Wort und Zahl* 24 (1976), S. 298–302.
- Eubank, R. / Schechtman, E. / Yitzhaki, S. (1993)**
A Test for Second Order Stochastic Dominance, in: *Communications in Statistics – Theory and Methods* 22 (1993), S. 1893–1905.
- Euler, M. (1991)**
Wertpapiervermögen privater Haushalte am Jahresende, in: *Baden–Württemberg in Wort und Zahl* 39 (1991), S. 410–415.
- Fei, J. C. H. / Ranis, G. / Kuo, S. W. Y. (1978)**
Growth and the Family Distribution of Income by Factor Components, in: *Quarterly Journal of Economics* 92 (1978), S. 17–53.
- Fellman, J. (1976)**
The Effect of Transformations on Lorenz Curves, in: *Econometrica* 44 (1976), S. 823–824.
- Ferreri, C. (1978)**
Su un sistema di indicatori di concezione daltoniana del grado di benessere economico individuale del reddito, in: *Statistica* 38 (1978), S. 13–42.
- Fields, G. S. (1979)**
Decomposing LDC Inequality, in: *Oxford Economic Papers* 31 (1979), S. 437–459.
- Fields, G. S. / Fei, J. C. H. (1978)**
On Inequality Comparisons, in: *Econometrica* 46 (1978), S. 303–316.
- Fishburn, P. C. (1980)**
Stochastic Dominance and Moments of Distributions, in: *Mathematics of Operations Research* 5 (1980), S. 94–100.

- Formby, J. P. / Smith, W. J. / Sykes, D. (1986)**
Intersecting Tax Concentration Curves and the Measurement of Tax Progressivity, in: *National Tax Journal* 39 (1986), S. 115–121.
- Foster, J. E. (1985)**
Inequality Measurement, in: Young, H. P. (1985), S. 31–68.
- Foster, J. E. / Shorrocks, A. F. (1988)**
Inequality and Poverty Orderings, in: *European Economic Review* 32 (1988), S. 654–662.
- Frosini, B. V. (1984)**
Concentration, Dispersion and Spread: an Insight into Their Relationship, in: *Statistica* 44 (1984), S. 373–394.
- Frosini, B. V. (1985a)**
Comparing Inequality Measures, in: *Statistica* 45 (1985), S. 299–317.
- Frosini, B. V. (1985b)**
Sugli ordinamenti di concentrazione e di variabilità, in: *Rivista di Statistica Applicata* 18 (1985), S. 121–141.
- Frosini, B. V. (1988)**
Characterizations of Variability Measures, in: *Communications in Statistics – Simulations* 17 (1988), S. 1459–1481.
- Frosini, B. V. (1989)**
Aggregate Units, Within-Group Inequality and the Decomposition of Inequality Measures, in: *Statistica* 49 (1989), S. 349–369.
- Gail, M. H. / Gastwirth, J. L. (1978)**
A Scale-free Goodness-of-fit Test for the Exponential Distribution based on the Gini Statistic, in: *Journal of the Royal Statistical Society B* 40 (1978), S. 350–357.
- Gastwirth, J. L. (1971)**
A General Definition of the Lorenz Curve, in: *Econometrica* 39 (1971), S. 1037–1039.
- Gastwirth, J. L. (1972)**
The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index, in: *Review of Economics and Statistics* 54 (1972), S. 306–316.
- Gini, C. (1912)**
Variabilità e Mutabilità: contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche, in: *Studi Economico-Giuridici della Facoltà di Giurisprudenza della Regia Università di Cagliari* 3 (1912), S. 1–158.
- Gini, C. (1914)**
Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri, in: *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti* 73 (1913–14), S. 1203–1248.

- Gini, C. (1932)**
Intorno alle curve di concentrazione, in: *Metron* 9 (1932), S. 3–76.
- Gini, C. (1939)**
Memorie di *Metologica Statistica*, vol. 1: Variabilita e concentrazione, Milano 1939
- Giorgi, G. M. (1986)**
Un'Analisi Teorica della Scomponibilita' del Rapporto di Concentrazione, Istituto di statistica, Universita di Siena 1986
- Giorgi, G. M. (1984a)**
A Methodological Survey of Recent Studies for the Measurement of Inequality of Economic Welfare Carried out by Some Italian Statisticians, in: *Economic Notes* 13 (1984), S. 146–157.
- Giorgi, G. M. (1984b)**
Alcune considerazioni teoriche su di un vecchio ma pur sempre attuale indice: il rapporto di concentrazione del Gini, in: *Metron* 42 (1984), S. 25–40.
- Giorgi, G. M. (1990)**
Bibliographic Portrait of the Gini Concentration Ratio, in: *Metron* 48 (1990), S. 183–221.
- Giorgi, G. M. (1992)**
Il Rapporto di Concentrazione di Gini, Siena (1992)
- Giorgi, G. M. (1993)**
A fresh look at the topical interest of the Gini concentration ratio, in: *Metron* 51 (1993), S. 83–98.
- Giorgi, G. M. / Pallini, A. (1986)**
Di talune soglie inferiori e superiori del rapporto di concentrazione, in: *Metron* 44 (1986), S. 377–390.
- Giorgi, G. M. / Pallini, A. (1987a)**
About a General Method for the Lower and Upper Distribution-Free Bounds on Gini's Concentration Ratio from Grouped Data, in: *Statistica* 47 (1987), S. 171–183.
- Giorgi, G. M. / Pallini, A. (1987b)**
On the Speed of Convergence to the Normal Distribution of Some Inequality Indices, in: *Metron* 45 (1987), S. 137–149.
- Giorgi, G. M. / Pallini, A. (1989)**
Upper Bounds on Gini Index: a Measure for Geometric Comparison, in: *Economics Letters* 19 (1989), S. 282–286.
- Giorgi, G. M. / Pallini, A. (1990)**
Inequality Indices: Theoretical and Empirical aspects of Their Asymptotic Behaviour, in: *Statistical Papers* 31 (1990), S. 65–76.

Girone, G. (1974)

Uno nuovo test di omogenita di piu varianze, in : *Annali dell'Istituto di Statistica, Facolta di Economia e Commercio, Universita di Bari* 38, S. 5–13.

Glasser, G. J. (1961)

Relationship between the mean difference and other measures of variation, in: *Metron* 21 (1961), S. 176–180.

Grassini, L. (1986)

Sull'interpretazione e scomposizione dell'indice di concentrazione, in: *Rivista di Statistica Applicata* 19 (1986), S. 107–111.

Gumbel, E. J. (1929)

Das Konzentrationsmaß, in: *Allgemeines Statistisches Archiv* 18 (1929), S. 279–300.

Gupta, R. C. (1975)

Some Characterizations of Discrete Distributions by Properties of Their Moment Distributions, in: *Communications in Statistics* 4 (1975), S. 761–765.

Gupta, R. C. / Keating, J. P. (1986)

Relations for Reliability Measures Under Length Biased Sampling, in: *Scandinavian Journal of Statistics* 13 (1986), S. 49–55.

Gupta, R. C. / Kirmani, S. N. U. A. (1990)

The Role of Weighted Distributions in Stochastic Modeling, in: *Communcations in Statistics – Theory and Methods* 19 (1990), S. 3147–3162.

Hadar, J. / Russel, W. R. (1969)

Rules for Ordering Uncertain Prospects, in: *American Economic Review* 59 (1969), S. 25–34.

Hagerbaumer, J. B. (1977)

The Gini Concentration Ratio and the Minor Concentration Ratio: a Two-Parameter Index of Inequality, in: *The Review of Economics and Statistics* 59 (1977), S. 377–379.

Hainsworth, G. B. (1964)

The Lorenz Curve as a General Tool of Economic Analysis, in: *Economic Record* 1964, S. 426–441.

Hakkert, R. (1987)

Life Table Transformations and Inequality Measures: Some Noteworthy Formal Relationships, in: *Demography* 24 (1987), S. 615–622.

Hall, M. / Tideman, N. (1967)

Measures of Concentration, in: *Journal of the American Statistical Association* 62 (1967), S. 162–168.

Hampe, A. (1972)

Statistik für Betriebswirte I, 2. Auflage, Stuttgart 1972.

- Hanada, K. (1983)**
A Formula of Gini's Concentration Ratio and Its Application to Life Tables, in: *Journal of the Japanese Statistical Society* 13 (1983), S. 95–98.
- Hardy, G. H. / Littlewood, J. E. / Pólya, G. (1929)**
Some Simple Inequalities Satisfied by Convex Functions, in: *Messenger of Mathematics* 58 (1929), S. 145–152.
- Heilmann, W.–R. (1980)**
Basic Distribution Theory for Nonparametric Gini–Like Measures of Location and Dispersion, in: *Biometrical Journal* 22 (1980), S. 51–59.
- Herzel, A. (1971)**
Un completamento del teorema fondamentale sulle medie ponderate di V Castellano, in: *Metron* 29 (1971), S. 31–36.
- Hey, J. D. / Lambert, P. J. (1980)**
Relative Deprivation and the Gini Coefficient: Comment, in: *Quarterly Journal of Economics* 94 (1980), S. 567–573.
- Hutchens, R. M. (1991)**
Segregation Curves, Lorenz Curves, and Inequality in the Distribution of People Across Occupations, in: *Mathematical Social Sciences* 21 (1991), S. 31–51.
- Iyengar, N. S. (1960)**
On a Method of Computing Engel Elasticities from Concentration Curves, in: *Econometrica* 28 (1960), S. 882–891.
- Jahn, J. / Schmid, C. F. / Schrag, C. (1947)**
The Measurement of Ecological Segregation, in: *American Sociological Review* 12 (1947), S. 293–303.
- Jain, K. / Singh, H. / Bagai, I. (1989)**
Relations for Reliability Measures of Weighted Distributions, in: *Communications in Statistics – Theory and Methods* 18 (1989), S. 4393–4412.
- Jakobsson, U. (1976)**
On the Measurement of the Degree of Progression, in: *Journal of Public Economics* 5 (1976), S. 161–168.
- Jasso, G. (1981)**
Who Gains and Who Loses Under Alternative Income Distributional Regimes that Have Identical Magnitudes of the Gini Coefficient, in: *Social Statistics Section of the American Statistical Association* 81 (1981) S. 350–355.
- Jasso, G. (1982)**
Measuring Inequality Using the Geometric Mean / Arithmetic Mean Ratio, in: *Sociological Methods and Research* 10 (1982), S. 303–326.
- Jöhnk, M. D. (1970)**
Eine axiomatisch begründete Methode der Konzentrationsmessung, Institut für Angewandte Statistik der freien Universität Berlin, 1970.

- Jureckova, J. (1979)**
Contributions to Statistics, Dordrecht 1979
- Kakwani, N. C. (1977)**
Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis, In *Econometrica* 45 (1977), S. 719–727.
- Kakwani, N. C. (1978)**
A New Method of Estimating Engel Elasticities, in: *Journal of Econometrics* 8 (1978), S. 103–110.
- Kakwani, N. C. (1980a)**
Income Inequality and Poverty, Oxford 1980.
- Kakwani, N. C. (1980b)**
On a Class of Poverty Measures, *Econometrica* 48 (1980), S. 437–446.
- Kakwani, N. C. (1984)**
The Relative Deprivation Curve and Its Applications, in: *Journal of Business and Economic Statistics* 2 (1984), S. 384–394.
- Kakwani, N. C. (1988)**
Income Inequality, Welfare and Poverty in a Developing Economy with Applications to Sri Lanka, in: *Social Choice and Welfare* 5 (1988), S. 199–222.
- Kakwani, N. C. (1993)**
Poverty and Economic Growth with Application to Côte d'Ivoire, in: *Review of Income and Wealth* 39 (1993), S. 121–139.
- Karamata, J. (1932)**
Sur une inégalité relative aux fonctions convexes, in: *Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade* 1 (1932), S. 145–148.
- Karlin, S. (1957)**
Polya-type distributions, II, in: *Annals of mathematical Statistics* 28 (1957), S. 281–308.
- Karlin, S. / Rubin, H. (1956)**
The Theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratio, in: *Annals of Mathematical Statistics* 27 (1956), S. 272–299.
- Keilson, J. / Sumita, U. (1982)**
Uniform Stochastic Ordering and Related Inequalities, in: *The Canadian Journal of Statistics* 10 (1982), S. 181–198.
- Kendall, M. / Stuart, A. (1977)**
The Advanced Theory of Statistics, vol. 1, (1977)
- Kestenbaum, B. (1980)**
Notes on the Index of Dissimilarity: a Research Note, in: *Social Forces* 59 (1980), S. 275–280.

- Kim, J. S. / Proschan, F. / Sethuraman, J. (1988)**
Stochastic Comparisons of Order Statistics, with Applications in Reliability, in: Communications in Statistics – Theory and Methods 17 (1988), S. 2151–2172.
- Kirman, S. N. U. A. / Ahsanullah, M. (1987)**
A Note on Weighted Distributions, in: Communications in Statistics – Theory and Methods, 16 (1987), S. 275–280.
- Klefsjö, B. (1982a)**
On Aging Properties and Total Time on Test Transforms, in: Scandinavian Journal of Statistics 9 (1982), s. 37–41.
- Klefsjö, B. (1982b)**
The HNBUE and HNWUE Classes of Life Distributions, in: Naval Research Logistics Quarterly 29 (1982), S. 331–344.
- Klefsjö, B. (1983)**
Some Tests Against Aging Based on the Total Time on Test Transform, in: Communications in Statistics – Theory and Methods 12 (1983), S. 907–927.
- Klefsjö, B. (1984)**
Reliability Interpretations of Some Concepts from Economics, in: Naval Research Logistics Quarterly 31 (1984), S. 301–308.
- Knight, C. A. / Foote, G. B. / Summers, P. W. (1979)**
Results of a Randomized Hail Suppression Experiment in Northeast Colorado. Part IX: Overall Discussion and Summary in the Context of Physical Research, in: Journal of Applied Meteorology 18 (1979), S. 1629–1639.
- Kochar, S. C. (1989)**
On Extensions of DMRL and Related Partial Orderings of Life Distributions, in: Communications in Statistics – Stochastic Models 5 (1989), S. 235–245.
- Kochar, S. C. / Wiens, D. (1987)**
Partial Orderings of Life Distributions with Respect to Their Aging Properties, in: Naval Research Logistics 34 (1987), S. 823–829.
- Kolm, S.-C. (1976a)**
Unequal Inequalities. I, in: Journal of Economic Theory 12 (1976), S. 416–442.
- Kolm, S.-C. (1976b)**
Unequal Inequalities. II, in: Journal of Economic Theory 13 (1976), S. 82–111.
- Korte, B. (Ed.) (1982)**
Modern Applied Mathematics. Optimization and Operations Research, Amsterdam, New York, Oxford 1982.
- Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1988)**
Encyclopedie of Statistical Sciences, Vols. 1 – 9, New York et al. 1982–1988.

- Krelle, W. / Shorrocks, A. F. (Eds.) (1978)**
Personal Income Distribution, Amsterdam, 1978
- Krishnaiah, P. R. (Ed.) (1977)**
Applications of Statistics, Amsterdam, New York, Oxford 1977.
- Krishnaiah, P. R. / Rao, C. R. (Eds.) (1988)**
Handbook of Statistics, Volume 7, Amsterdam 1988.
- Lam, D. (1986)**
The Dynamics of Population Growth, Differential Fertility, and Inequality, in: The American Economic Review 76 (1986), S. 1103–1116.
- Lambert, P. J. (1985)**
Social Welfare and the Gini Coefficient Revisited, in: Mathematical Social Sciences 9 (1985), S. 19–26.
- Lambert, P. J. (1989)**
The Distribution and Redistribution on Income, Oxford 1989.
- Lambert, P. J. / Aronson, J. R. (1993)**
Inequality Decomposition Analysis and the Gini Coefficient revisited, in : The Economic Journal 103 (1993), S. 1221–1227.
- Lambert, P. J. / Pfähler, W. (1987)**
Intersecting Tax Concentration Curves and the Measurement of Tax Progressivity: a Rejoinder, in: National Tax Journal 40 (1987), S. 635–638.
- Lambert, P. J. / Pfähler, W. (1988)**
On Aggregate Measures of the Net Redistributive Impact of Taxation and Government Expenditure, in: Public Finance Quarterly 16 (1988), S. 178–202.
- Latham, R. (1988)**
Lorenz-Dominating Income Tax Functions, in: International Economic Review 29 (1988), S. 185–200.
- Lehmann, E. L. (1955)**
Ordered families of distributions, in: Annals of Mathematical statistics 26 (1955), S. 399–419.
- Lerman, R. I. / Yitzhaki, S. (1984)**
A Note on the Calculation and Interpretation of the Gini Index, in: Economics Letters 15 (1984), S. 363–368.
- Lerman, R. I. / Yitzhaki, S. (1985)**
Income Inequality Effects by Income Source: a New Approach and Applications to the United States, in: The Review of Economics and Statistics 67 (1985), S. 151–156.
- Levy, H. (1992)**
Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis, in: Management Science 38 (1992), S. 555ff.

- Levy, H. / Kroll, Y. (1978)**
Ordering Uncertain Options with Borrowing and Lending, in: *The Journal of Finance* 33 (1978), S. 553–574.
- Levy, H. / Kroll, Y. (1979)**
Efficiency Analysis with Borrowing and Lending: Criteria and Their Effectiveness, in: *The Review of Economics and Statistics* 61 (1979), S. 125–130.
- Lienert, G. A. (1981)**
Nonparametric, Gini-Like Measures of Location and Dispersion, in: *Biometrical Journal* 23 (1981), S. 675–679.
- Lippe, P. von der (1993)**
Deskriptive Statistik, Stuttgart, Jena, 1993
- Loetzner, T. (1988)**
Einige geometrische Interpretationen des Herfindahl-Index und seiner ökonomischen Eigenschaften. Diskussionsbeiträge aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre der Universität Hohenheim, Nr. 46/1988.
- Loetzner, T. (1994)**
Einige Überlegungen zum Herfindahl-Index und seinen Erweiterungen, Hohenheim 1994.
- Lorenz, M. O. (1905)**
Methods of Measuring the Concentration of Wealth, in: *Quarterly Publications of the American Statistical Association (New Series)*, Vol. IX, No. 70, S. 210–219.
- Märtz, T. (1987)**
Zur Analyse von Steuerreformen mit Hilfe von Lorenzkurven. Diskussionsbeitrag aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre der Universität Hohenheim, Nr. 32/1987.
- Märtz, T. (1988)**
Zur Analyse der Distributionseffekte der Einkommensbesteuerung. Das Konzept der Lorenzkurve, in: *Wirtschaftswissenschaftliches Studium* 17 (1988), S. 531–534.
- Malik, H. J. / Balakrishnan, N. / Ahmed, S. E. (1988)**
Recurrence Relations and Identities for Moments of Order statistics, I: Arbitrary continuous distribution, in: *Communications in Statistics – Theory and Methods* 17 (1988), S. 2623–2655.
- Marshall, A. W. / Olkin, I. (1979)**
Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, 1979.
- Maurer, A. (1988)**
Geometrische Abschätzungen des Gini-Koeffizienten bei klassierten Werten. Diskussionsbeiträge aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre der Universität Hohenheim, Nr. 38/1988.

- Maurer, A. (1990)**
 Statistische Verfahren zur Ermittlung oligopolistischer Strukturen, Frankfurt am Main, Bern, New York, Paris 1990.
- Mehran, F. (1975)**
 A Statistical Analysis of Income Inequality Based on a Decomposition of the Gini Index, in: Bulletin of the International Statistical Institute, 40th Session, Warsaw 1975, S. 145–150.
- Mehran, F. (1976)**
 Linear Measures of Income Inequality, in: *Econometrica* 44 (1976), S. 805–809.
- Mendelson, H. (1987)**
 Quantile-Preserving Spread, in: *Journal of Economic Theory* 42 (1987), S. 334–351.
- Mendelson, H. (1988)**
 Testing Quantile-Preserving Spreads, in: *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 4 (1988), S. 115–125.
- Michal, J. M. (1978)**
 Size distribution of Household Incomes and Earnings in Developed Socialist Countries With a proposed Marginal Utility-weighted Gini Coefficient, in: Krelle, W. / Shorrocks, A. F. (1978), S. 199 – 225.
- Moothathu, T. S. K. (1983)**
 Properties of Gastwirth's Lorenz Curve and Bounds for General Gini Index, in: *Journal of the Indian Statistical Association* 21 (1983), S. 149–154.
- Moothathu, T. S. K. (1991)**
 Lorenz Curve and Gini Index, in: *Calcutta Statistical Association Bulletin* 40 (1990–91), S. 307–324.
- Morrison, D. G. (1973)**
 Some Results for Waiting Times with an Application to Survey Data, in: *The American Statistician* 27 (1973), S. 226–227.
- Mosler, K. (1994)**
 Majorization in Economic Disparity Measures, in: *Linear Algebra and its Applications* 199 (1994), S. 91–114.
- Mosler, K. / Scarsini, M. (Eds.) (1991)**
Stochastic Orders and Decision Under Risk, Hayward/Calif. 1991.
- Mosler, K. / Muliere, P. (1993)**
 Robin Hood Operations, Absolutely Speaking. *Diskussionsbeiträge zur Statistik und quantitativen Ökonomik der universität der Bundeswehr Hamburg* 60 (1993).
- Moyes, P. (1987)**
 A New Concept of Lorenz Domination, in: *Economics Letters* 23 (1987), S. 203–207.

- Moyes, P. (1988)**
A Note on Minimally Progressive Taxation and Absolute Income Inequality, in: *Social Choice and Welfare* 5 (1988), S. 227–234.
- Münzenmaier, W. (1985)**
Die Bruttowertschöpfung nach Stadt- und Landkreisen 1982, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 33 (1985), S. 100–109.
- Münzner, H. (1963)**
Probleme der Konzentrationsmessung, in: *Allgemeines Statistisches Archiv* 47 (1963), S. 1–9.
- Muliere, P. (1981)**
Sull'invarianza del rapporto di concentrazione R di Gini, in: *Statistica* 41 (1981), S. 333–344.
- Muliere, P. / Petrone, S. (1992)**
Generalized Lorenz curve and monotone dependence orderings, in: *Metron*, vol. L (1992), S. 19 – 38.
- Muliere, P. / Scarsini, M. (1989)**
A Note on Stochastic Dominance and Inequality Measures, in: *Journal of Economic Theory* 49 (1989), S. 314–323.
- Musgrave, R. A. / Thin, T. (1948)**
Income Tax Progression , 1928 – 1948, in: *Journal of Political Economy* 56 (1948), S. 498–514.
- Naas, J. / Schmidt, H. L. (1979)**
Mathematisches Wörterbuch Bd. II,3. Aufl. , Berlin, Stuttgart, 1979.
- Naddeo, A. (Ed.) (1987)**
Italian Contributions to the Methodology of Statistics, Padova 1987.
- Nayak, T. K. / Gastwirth, J. L. (1989)**
The Use of Diversity Analysis to Assess the Relative Influence of Factors Affecting the Income Distribution, in: *Journal of Business and Economic Statistics* 7 (1989), S. 453–460.
- Nygård, F. / Sandström, A. (1981)**
Measuring Income Inequality, Stockholm 1981.
- Nygård, F. / Sandström, A. (1985a)**
Income Inequality Measures Based on Sample Surveys, in: *Bulletin of the International Statistical Institute*, 45th Session, Amsterdam, Invited Papers, Book 1, S. 2.2–1 – 2.2–16.
- Nygård, F. / Sandström, A. (1985b)**
The Estimation of the Gini and the Entropy Inequality Parameters in Finite Populations, in: *Journal of Official Statistics* 1 (1985), S. 399–412.

- Nygård, F. / Sandström, A. (1988)**
The Weighted Mean Difference, in: *Metron* 46 (1988), S. 21–31.
- O'Brien, G. L. (1984)**
Stochastic Dominance and Moment Inequalities, in: *Mathematics of Operations Research* 9 (1984), s. 475–477.
- Oja, H. (1985)**
Ordering of Distributions, Partial, in: *Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1988), Vol. 6, S. 490–494.*
- Olkin, I. / Yitzhaki, S. (1992)**
Gini Regression Analysis, in: *International Statistical Review* 60 (1992), S. 185–196.
- Ortega, P. / Martín, G. / Fernández, A. / Ladoux, M. / García, A. (1991)**
A New Functional Form for Estimating Lorenz Curves, in: *Review of Income and Wealth* 37 (1991), S. 447–452.
- Ott, A. E. (Hrsg.) (1967)**
Theoretische und empirische Beiträge zur Wirtschaftsforschung, Tübingen 1967.
- Patil, G. P. / Ord, J. K. (1976)**
On Size-Biased Sampling and Related Form-Invariant Weighted Distributions, in: *Sankhyā B* 38 (1976), S. 48–61.
- Patil, G. P. / Rao, C. R. (1977)**
The Weighted Distributions: A Survey of Their Applications, in: *Krishnaiah, P. R. (1977), S. 383–405.*
- Patil, G. P. / Rao, C. R. (1978)**
Weighted Distributions and Size-Biased Sampling with Applications to Wildlife Populations and Human Families, in: *Biometrics* 34 (1978), S. 179–189.
- Patil, G. P. / Rao, C. R. / Zelen, M. (1988)**
Weighted Distributions, in: *Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1988), Vol. 9, S. 565–571.*
- Pfähler, W. (1983)**
Measuring Redistributive Effects of Tax Progressivity by Lorenz Curves, in: *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 198 (1983), S. 237–249.
- Pfähler, W. (1985)**
Relative Concentration Curve: Functional Form and Measures of Non-Proportionality, in: *Bulletin of Economic Research* 37 (1985), S. 201–211.
- Pfähler, W. (1987)**
Redistributive Effects of Tax Progressivity: Evaluating a General Class of Aggregate Measures, in: *Public Finance* 42 (1987), S. 1–31.

- Pflug, G. (1979)**
 Statistische Konzentrationsmaße – ein mathematischer Überblick, in:
 Allgemeines Statistisches Archiv 63 (1979), S. 240–259.
- Pfingsten, A. (1986)**
 The measurement of tax progression, Berlin u. a. 1986.
- Pfingsten, A. / Schneider, J. (1994)**
 Retrieving Inequality Concepts and Progressivity Objectives from Tax
 Functions via Approximations, in : Eichhorn, W. (1994), S. 316–325.
- Piesch, W. (1967)**
 Konzentrationsmaße von aggregierten Verteilungen, in: Ott, A. E. (1967),
 S. 269–280.
- Piesch, W. (1971)**
 Lorenzkurve und inverse Verteilungsfunktion, in: Jahrbücher für National-
 ökonomie und Statistik 185 (1971), S. 209–234.
- Piesch, W. (1975)**
 Statistische Konzentrationsmaße, Tübingen 1975.
- Piesch, W. (1980)**
 Disparitäts- und Konzentrationsmessung – Eine Übersicht mit neueren
 Ergebnissen. Diskussionsbeiträge aus dem Institut für Volkswirtschafts-
 lehre der Universität Hohenheim Nr. 2/1980.
- Piesch, W. (1983)**
 Einige Überlegungen zur Abgrenzung oligopolistischer Kerne mit Hilfe von
 Dominanzmaßen, in : Struktur und Dynamik der Wirtschaft,
 Hrsg.: Enke, H. usw., Freiburg 1983.
- Piesch, W. (1985)**
 Zur Abschätzung des Klassierungseffekts bei Disparitäts- und Streuungsmaßen
 mit Hilfe von aggregierten Rechteckverteilungen, in : Statistik zwischen Theorie
 und Praxis, Festschrift für K. A. Schäffer zur Vollendung seines 60.
 Lebensjahres; hrsg. von Buttler, G., Dickmann, H., Helten, E., Vogel, F.,
 Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1985.
- Piesch, W. (1992)**
 Kumuliertengewichtung in der statistischen Konzentrationsmessung. Diskus-
 sionsbeiträge aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre der Universität
 Hohenheim, Nr. 73/1992.
- Piesch, W. (1994)**
 Einige Eigenschaften von gleichmäßig normierten Disparitäts- und
 Konzentrationsmaßen, in: Allgemeines Statistisches Archiv 78 (1994), S. 386–
 400.
- Piesch, W. / Wirth, S. (1995)**
 Lorenzkurven und gewogene durchschnittliche Abweichungssummen.
 Diskussionsbeiträge aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre, Nr. 114/1995.

- Plotnick, R. (1981)**
A Measure of Horizontal Inequity, in: *The Review of Economics and Statistics* 63 (1981), S. 283–288.
- Podder, N. (1993)**
The Disaggregation of the Gini Coefficient by Factor Components and Its Applications to Australia, in: *Review of Income and Wealth* 39 (1993), S. 51–61.
- Polisicchio, M. (1990)**
Sulla interpretazione dei parametri di modelli analitici per la distribuzione del reddito personale, in: *Statistica* 50 (1990), S. 383–397.
- Pristl, K. (1988)**
Entwicklungen im Krankenhausbereich, in: *Baden–Württemberg in Wort und Zahl* 36 (1988), S. 43–45.
- Pyatt, G. (1976)**
On the Interpretation and Disaggregation of Gini Coefficients, in: *The Economic Journal* 86 (1976), S. 243–255.
- Pyatt, G. / Chen, C.–N. / Fei, J. (1980)**
The Distribution of Income by Factor Components, in: *Quarterly Journal of Economics* 95 (1980), S. 451–473.
- Rao, V. M. (1969)**
Two Decompositions of the Concentration Ratio, in: *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A*, vol. 132.
- Raveh, A. (1981)**
A Numerical Nonmetric Approach for Analyzing Time Series Data, in: *Communications in Statistics – Theory and Methods* 10 (1981), S. 809–821.
- Raveh, A. (1989a)**
A Nonmetric Approach to Linear Discriminant Analysis, in: *Journal of the American Statistical Association* 84 (1989), S. 176–183.
- Raveh, A. (1989b)**
Gini Correlation as a Measure of Monotonicity and Two of Its Usages, in: *Communications in Statistics – Theory and Methods* 18 (1989), S. 1415–1423.
- Riese, M. (1987)**
An Extension of the Lorenz–Diagram with Special Reference to Survival Analysis, in: *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 49 (1987), S. 245–250.
- Riese, M. (1993)**
Canetti's "Friedhofsgefühl" as a Gini–Index, in: *Allgemeines Statistisches Archiv* 77 (1993), S. 441–442.
- Rietveld, P. (1990)**
Multidimensional Inequality Comparisons. On Aggravation and Mitigation of Inequalities, in: *Economics Letters* 32 (1990), S. 187–192.

- Rigo, P. (1985)**
Lower and Upper Distribution Free Bounds for Gini's Concentration Ratio, in: Bulletin of the International Statistical Institute, 45th Session, Amsterdam, Contributed Papers, Book 2, S. 629–630.
- Rigo, P. (1987)**
Two Inequalities for the Gini Index, in *Statistica* 47 (1987), S. 531–541.
- Rinne, H. (1988)**
Zur Verwandtschaft einiger Konzepte in der Konzentrationsmessung und im Life-Testing, in: *Allgemeines Statistisches Archiv* 72 (1988), S. 378–398.
- Rodriguez-Ponga y Salamanca, P. (1976)**
Una misura della concentrazione delle distribuzioni tronche, in: *Statistica* 36 (1976), S. 561–573.
- Rolski, T. (1975)**
Mean Residual Life, in: Bulletin of the International Statistical Institute, 40th Session, Warsaw, Contributed Papers, S. 714–718.
- Rosenbluth, G. (1961)**
Rund Table-Gespräche über Messung der industriellen Konzentration, in: Neumark, F. (Hrsg.), *Die Konzentration in der Wirtschaft*, Schriften des Vereins für Socialpolitik, Neue Folge, Bd. 22, Berlin, 1961, S. 391–394.
- Ross, S. M. (1983)**
Stochastic Processes, New York et al. 1983.
- Ross, S. M. / Schechner, Z. (1984)**
Some Reliability Applications of the Variability Ordering, in: *Operations Research* 32 (1984), S. 679–687.
- Rothschild, M. / Stiglitz, J. E. (1970)**
Increasing Risk: I. A Definition, in: *Journal of Economic Theory* 2 (1970), S. 225–243.
- Rothschild, M. / Stiglitz, J. E. (1973)**
Some Further Results on the Measurement of Inequality, in: *Journal of Economic Theory* 6 (1973), S. 188–204.
- Rudolph, B. (1979)**
Zur Theorie des Kapitalmarktes, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 49 (1979), S. 1034–1067.
- Runciman, W. G. (1966)**
Relative Deprivation. A Social Justice. London (1966).
- Salant, S. W. (1977)**
Search Theory and Duration Data: A Theory of Sorts, in: *Quarterly Journal of Economics* 91 (1977), S. 39–57.
- Salvaterra, T. (1990)**
Comparisons among Concentration Curves and its Indexes in some empirical Distributions, in: Dagum, C. / Zenga, M. (1990), S. 194–214.

- Sandström, A. (1982)**
Estimating the Gini Coefficient. Research Report, Department of Statistics – University of Stockholm, Nr. 18, 1982.
- Satchell, S. E. (1987)**
Source and Subgroup Decomposition Inequalities for the Lorenz Curve, in: International Economic Review 28 (1987), S. 323–329.
- Schaich, E. (1970)**
Lorenzfunktion und Gini-Koeffizient in kritischer Betrachtung, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 185 (1970), S. 193–208.
- Schaich, E. / Münzenmaier, W. (1980)**
Das Aggregationsproblem beim Einsatz von Konzentrationsmeßmethoden in der amtlichen Statistik, in: Jahrbücher für Statistik und Landeskunde von Baden-Württemberg 25 (1980), 1. Heft, S. 35–46.
- Schaich, E. / Wisniewski, M. (1990)**
Sensitivitätsanalyse von Disparitätsmaßen, in: Allgemeines Statistisches Archiv 74 (1990), S. 457–488.
- Schechtman, E. / Yitzhaki, S. (1987)**
A Measure of Association Based on Gini's Mean Difference, in: Communications in Statistics – Theory and Methods 16 (1987), S. 207–231.
- Scheurle, U. (1991)**
Statistische Erfassung von Armut, Göttingen 1991.
- Schittenhelm, G. (1973)**
Fremdenverkehrsangebot und –nachfrage in regionaler Sicht, in: Baden-Württemberg in Wort und Zahl 21 (1973), S. 347–352.
- Schmid, F. (1991)**
Zur Sensitivität von Disparitätsmaßen, in: Allgemeines Statistisches Archiv 75 (1991), S. 155–167
- Schmid, F. (1992)**
Einkommensdisparität der privaten Haushalte in der Bundesrepublik Deutschland 1950 bis 1988. Einige Ergebnisse der Auswertung des DIW, in: Vierteljahreshefte zur Wirtschaftsforschung, Heft 3/4 – 1992, S. 138–146.
- Schmid, F. (1994)**
Zur Messung der interdistributionellen Einkommensungleichheit, Theoretische Begründung und deskriptive Verfahren, in: Allgemeines Statistisches Archiv 78, S. 1 – 20.
- Schrag, H. / Krämer, W. (1993)**
A Simple Necessary and Sufficient Condition for the Convexity of Interpolated Lorenz Curves, in: Statistica 53 (1993), S. 167–169.
- Schwarz, K. (1970)**
Meßzahlen zur Beurteilung der räumlichen Verteilung der Bevölkerung im Bundesgebiet, in: Wirtschaft und Statistik (1970), S. 337–342.

- Sen, A. K. (1973)**
On Economic Inequality, Oxford 1973.
- Sen A. K. (1976)**
Poverty: An ordinal Approach to Measurement, in: *Econometrica* 44 (1976), S. 219–231.
- Sen, P. K. (1986)**
The Gini Coefficient and Poverty Indexes: Some Reconciliations, in: *Journal of the American Statistical Association* 81 (1986), S. 1050–1057.
- Sen, P. K. (1987)**
What Do the Arithmetic, Geometric and Harmonic Means Tell Us in Length-Biased Sampling?, in: *Statistics and Probability Letters* 5 (1987), S. 95–98.
- Sen, P. K. (1988)**
The Harmonic Gini Coefficient and Affluence Indexes, in: *Mathematical Social Sciences* 16 (1988), S. 65–76.
- Sen, A. K. (1976)**
Poverty: An Ordinal Approach to Measurement, in: *Econometrica* 44 (1976), S. 219–231.
- Shaked, M. (1980)**
On Mixtures from Exponential Families, in: *Journal of the Royal Statistical Society B* 42 (1980), S. 192–198.
- Shaked, M. (1983)**
Geometry in Statistics: Convexity, in: Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1988), Vol. 3, S. 419–424.
- Shaked, M. (1985)**
Ordering Distributions by Dispersion, in: Kotz, S. / Johnson, N. L. / Read, C. B. (1982–1989), Vol. 6, S. 485–490.
- Shalit, H. / Yitzhaki, S. (1984)**
Mean–Gini, Portfolio Theory, and the Pricing of Risky Assets, in: *The Journal of Finance* 39 (1984), S. 1449–1468.
- Sheshinski, E. (1972)**
Relation Between a Social Welfare Function and the Gini Index of Income Inequality, in: *Journal of Economic Theory* 4 (1972), S. 98–100.
- Shorrocks, A. F. (1982)**
On the Distance Between Income Distributions, in: *Econometrica* 50 (1982), S. 1337–1339.
- Shorrocks, A. F. (1983)**
Ranking Income Distributions, in: *Economica* 50 (1983), S. 3–17
- Shorrocks, A. F. (1984)**
Inequality Decomposition by Population Subgroups, in: *Econometrica* 52 (1983), S. 1369–1385.

- Silber, J. (1983)**
ELL (The Equivalent Length of Life) or Another Attempt at Measuring Development, in: *World Development* 11 (1983), S. 21–29.
- Silber, J. (1989a)**
Factor Components, Population Subgroups and the Computation of the Gini Index of Inequality, in: *The Review of Economics and Statistics* 71 (1989), S. 107–115.
- Silber, J. (1989b)**
Gini's Concentration Index and the Measurement of the Distance Between Relative Price Vectors, in: *Statistical Papers* 30 (1989), S. 231–238.
- Silber, J. (1989c)**
On the Measurement of Employment Segregation, in: *Economics Letters* 30 (1989), S. 237–243.
- Silber, J. (1990)**
On a New Algorithm to Derive Bounds on Gini's Concentration Ratio from Grouped Observations, in: *Statistica* 50 (1990), S. 215–220.
- Silber, J. (1991)**
Inequality Indices as Measures of Dissimilarity: a Generalization, in: *Statistical Papers* 32 (1991), S. 223–231.
- Sinn, H. (1978)**
Betriebsgrößen im Verarbeitenden Gewerbe, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 26 (1978), S. 423–425.
- Spencer, B. D. / Fisher, S. (1992)**
On Comparing Distributions of Poverty Gaps, in: *Sankhyā B* 54 (1992), S. 114–126.
- Stadler, R. (1982)**
Nutztierbestände an der Jahreswende 1981/82, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 30 (1982) S. 62–70.
- Stark, O. / Taylor, J. E. / Yitzhaki, S. (1986)**
Remittances and Inequality, in: *The Economic Journal* 96 (1986), S. 722–740.
- Stark, O. / Taylor, J. E. / Yitzhaki, S. (1988)**
Migration, Remittances and Inequality. A Sensitivity Analysis Using the Extended Gini Index, in: *Journal of Development Economics* 28 (1988), S. 309–322.
- Steiger, H. H. (1974)**
Das Bruttoinlandsprodukt der neuen Stadt- und Landkreise 1961 und 1970, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 22 (1974), S. 62–74.
- Steiger, H. H. (1980)**
Investitionen im Verarbeitenden Gewerbe, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 28 (1980), S. 143–150.

- Stoyan, H. / Stoyan, D. (1969)**
 Monotonieigenschaften der Kundenwartezeiten im Modell GI/G/1, in: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 49 (1969), S. 729–734.
- Strassen, V. (1965)**
 The existence of probability measures with given marginals, in: *Annals of Mathematical Statistics* 36, S. 423 – 439.
- Suits, D. B. (1977)**
 Measurement of Tax Progressivity, in: *The American Economic Review* 67 (1977), S. 747–752.
- Suppes, P. (1988)**
 Lorenz Curves for Various Processes: A Pluralistic Approach to Equity, in: *Social Choice and Welfare* 5 (1988), S. 89–101.
- Sykes, D. / Smith, W. J. / Formby, J. P. (1987)**
 On the Measurement of Tax Progressivity: an Implication of the Atkinson Theorem, in: *Southern Economic Journal* 53 (1987), S. 768–776.
- Tachibanaki, T. (1981)**
 A Note on the Impact of Tax on Income Distribution, in: *Review of Income and Wealth* 27 (1981), S. 327–332.
- Taguchi, T. (1981)**
 On a Multiple Gini's Coefficient and Some Concentrative Regressions, in: *Metron* 39 (1981), S. 69–97.
- Taguchi, T. (1987)**
 On the Structure of Multivariate Concentration – Some Relationships Among the Concentration Surface and Two Variate Mean Difference and Regressions, in: *Computational Statistics and Data Analysis* 6 (1987), S. 307–334.
- Taillie, C. (1981)**
 Lorenz Ordering Within the Generalized Gamma Family of Income Distributions, in: Taillie, C. et al. (1981), S. 181–192.
- Taillie, C. et al. (Eds.) (1981)**
 Statistical Distributions in Scientific Work, Vol. 6.
- Tarsitano, A. (1988)**
 Measuring the Asymmetry of the Lorenz Curve, in: *Ricerche Economiche* 42 (1988), S. 507–519.
- Thistle, P. D. (1989a)**
 Duality Between Generalized Lorenz Curves and Distribution Functions, in: *The Economic Studies Quarterly* 40 (1989), S. 183–187.
- Thistle, P. D. (1989b)**
 Ranking Distributions with Generalized Lorenz Curves, in: *Southern Economic Journal* 56 (1989), S. 1–12.

- Thistle, P. D. (1990)**
Large Sample Properties of Two Inequality Indices, in: *Econometrica* 58 (1990), S. 725–728.
- Thompson, W. A. (1976)**
Fisherman's Luck, in: *Biometrics* 32 (1976), S. 265–271.
- Thon, D. (1979)**
On Measuring Poverty, in: *The review of Income and Wealth* 25 (1979), S. 429–439.
- Trajtenberg, M. / Yitzhaki, S. (1989)**
The Diffusion of Innovations: a Methodological Reappraisal, in: *Journal of Business Economics and Statistics* 7 (1989), S. 35–47.
- Ullrich, A. (1983)**
Das Bruttoinlandsprodukt in den Stadt- und Landkreisen 1980, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 31 (1983), S. 300–303.
- Wagenhals, G. (1981)**
Wohlfahrtstheoretische Implikationen von Disparitätsmaßen, Königstein 1981.
- Wagenhals, G. (1994)**
Income Tax Reform in Germany: A Welfare Analysis, in: Eicchorn, W. (1994), S. 419–432.
- Wagner, E. (1980)**
Die Ausländer in den Stadt- und Landkreisen, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 28 (1980), S. 119–124.
- Wagner, E. (1988)**
Das steuerpflichtige Vermögen 1983, in: *Baden-Württemberg in Wort und Zahl* 36 (1988), S. 304–308.
- Weick, S. (1995)**
Unerwartet geringe Zunahme der Einkommensungleichheit in Ostdeutschland, in: *Informationsdienst Soziale Indikatoren* Nr. 14, 1995, S. 6–9.
- Weiner, J. / Solbrig, O. T. (1984)**
The Meaning and Measurement of Size Hierarchies in Plant Populations, in: *Oecologia* 61 (1984), S. 334–336.
- Weymark, J. A. (1979)**
Generalized Gini Inequality Indices. Discussion Paper 79–12, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver 1979.
- Weymark, J. A. (1981)**
Generalized Gini Inequality Indices, in: *Mathematical Social Sciences* 1 (1981), S. 409–430.
- Whitt, W. (1980)**
The Effect of Variability in the $GI/G/s$ Queue, in: *Journal of Applied Probability* 17 (1980), S. 1062–1071.

- Wilfling, B. (1993)**
Die Lorenz-Ordnung von Einkommensverteilungen, Dortmund 1993.
- Wilfling, B. / Krämer, W. (1993)**
The Lorenz-Ordering of Singh-Maddala Income Distributions, in: *Economics Letters* 43 (1993), S. 53–57.
- Wold, H. (1935)**
A Study on the Mean Difference, Concentration Curves and Concentration Ratio, in: *Metron* 12 (1935), S. 39–58.
- Yaari, M. E. (1988)**
A Controversial Proposal Concerning Inequality Measurement, in: *Journal of Economic Theory* 44 (1988), S. 381–397.
- Yitzhaki, S. (1979)**
Relative Deprivation and the Gini Coefficient, in: *The Quarterly Journal of Economics* 93 (1979), S. 321–324.
- Yitzhaki, S. (1980)**
Relative Deprivation and the Gini Coefficient: Reply, in: *The Quarterly Journal of Economics* 95 (1980), S. 575–576.
- Yitzhaki, S. (1982a)**
Relative Deprivation and Economic Welfare, in: *European Economic Review* 17 (1982), S. 99–113.
- Yitzhaki, S. (1982b)**
Stochastic Dominance, Mean Variance, and Gini's Mean Difference, in: *The American Economic Review* 72 (1982), S. 178–185.
- Yitzhaki, S. (1983)**
On an Extension of the Gini Inequality Index, in: *International Economic Review* 24 (1983), S. 617–628.
- Yitzhaki, S. (1990)**
On the sensitivity of a regression coefficient to monotonic transformations, in: *Econometric Theory* 6 (1990), S. 165–169.
- Yitzhaki, S. (1991)**
Calculating Jackknife Variance Estimators for Parameters of the Gini Method, in: *Journal of Business and Economic Statistics* 9 (1991), S. 235–239.
- Yitzhaki, S. / Lerman, R. I. (1991)**
Income Stratification and Income Inequality, in: *Review of Income and Wealth* 37 (1991), S. 313–329.
- Yitzhaki, S. / Olkin, I. (1991)**
Concentration Indices and Concentration Curves, in: Mosler, K. / Scarsini, M. (1991), S. 380–392.

- Yitzhaki, S. / Thirsk, W. (1990)**
Welfare Dominance and the Design of Excise Taxation in the Cote d'Ivoire, in: Journal of Development Economics 33 (1990), S. 1–18.
- Yoshida, T. (1983)**
The Lorenz Partial Ordering and Lerner's Probabilistic Egalitarianism, in: Economic Studies Quarterly 34 (1983), S. 225–236.
- Young, H. P. (Ed.) (1985)**
Fair Allocation, Providence 1985.
- Zagier, D. (1983)**
Inequalities for the Gini Coefficient of Composite Populations, in: Journal of Mathematical Economics 12 (1983), S. 103–118.
- Zenga, M. (1984a)**
Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione e quantili di reddito, in: Giornale degli Economisti e Annali di Economia 43 (1984), S. 301–326.
- Zenga, M. (1984b)**
Tendenza alla massima ed alla minima concentrazione per variabili casuali continue, in: Statistica 44 (1984), S. 619–640.
- Zenga, M. (1987)**
Concentration Measures, in: Naddeo, A. (1987), S. 42–51.
- Zenga, M. (1990)**
Concentration Curves and Concentration Indexes Derived from Them, in: Dagum, C. / Zenga, M. (1990), S. 94–109.
- Zwet, W. R. van (1964)**
Convex transformations of Random Variables, Mathematical Centrum, Amsterdam 1964.

HOHENHEIMER VOLKSWIRTSCHAFTLICHE SCHRIFTEN

- Band 1 Walter Deffaa: Anonymisierte Befragungen mit zufallsverschlüsselten Antworten. Die Randomized-Response-Technik (RRT). Methodische Grundlagen, Modelle und Anwendungen. 1982.
- Band 2 Thomas Michael Baum: Staatsverschuldung und Stabilisierungspolitik in der Demokratie. Zur neoinstitutionalistischen Kritik der keynesianischen Fiskalpolitik. 1982.
- Band 3 Klaus Schröter: Die wettbewerbspolitische Behandlung der leitungsgebundenen Energiewirtschaft. Dargestellt am Beispiel der Fernwärmewirtschaft der Bundesrepublik Deutschland. 1986.
- Band 4 Hugo Mann: Theorie und Politik der Steuerreform in der Demokratie. 1987.
- Band 5 Max Christoph Wewel: Intervallarithmetische Dependenzanalyse in der Ökonometrie. Ein konjekturaler Ansatz. 1987.
- Band 6 Heinrich Pascher: Die U.S.-amerikanische Deregulation Policy im Luftverkehrs- und Bankenbereich. 1987.
- Band 7 Harald Lob: Die Entwicklung der französischen Wettbewerbspolitik bis zur Verordnung Nr. 86-1243 vom 01. Dezember 1986. Eine exemplarische Untersuchung der Erfassung der Behinderungsstrategie auf der Grundlage des Konzepts eines wirksamen Wettbewerbs. 1988.
- Band 8 Ulrich Kirschner: Die Erfassung der Nachfragemacht von Handelsunternehmen. Eine Analyse der ökonomischen Beurteilungskriterien und der wettbewerbsrechtlichen Instrumente im Bereich der Verhaltenskontrolle. 1988.
- Band 9 Friedhelm Herb: Marktwirtschaftliche Innovationspolitik. 1988.
- Band 10 Claus Schnabel: Zur ökonomischen Analyse der Gewerkschaften in der Bundesrepublik Deutschland. Theoretische und empirische Untersuchungen von Mitgliederentwicklung, Verhalten und Einfluß auf wirtschaftliche Größen. 1989.
- Band 11 Jan B. Rittaler: Industrial Concentration and the Chicago School of Antitrust Analysis. A Critical Evaluation on the Basis of Effective Competition. 1989.
- Band 12 Thomas März: Interessengruppen und Gruppeninteressen in der Demokratie. Zur Theorie des Rent-Seeking. 1990.
- Band 13 Andreas Maurer: Statistische Verfahren zur Ermittlung von oligopolistischen Strukturen. 1990.
- Band 14 Peter Mender: Zur ökonomischen und politisch-institutionellen Analyse öffentlicher Kredithilfen. 1992.
- Band 15 Heinrich J. Engelke: Die Interpretation der Rundfunkfreiheit des Grundgesetzes: Eine Analyse aus ökonomischer Sicht. 1992.
- Band 16 Thomas Fischer: Staat, Recht und Verfassung im Denken von Walter Eucken. Zu den staats- und rechtstheoretischen Grundlagen einer wirtschaftsordnungspolitischen Konzeption. 1993.
- Band 17 Stefan Elßer: Innovationswettbewerb. Determinanten und Unternehmensverhalten. 1993.
- Band 18 Reinhard Scharff: Regionalpolitik und regionale Entwicklungspotentiale. Eine kritische Analyse. 1993.
- Band 19 Karin Beckmann: Probleme der Regionalpolitik im Zuge der Vollendung des Europäischen Binnenmarktes. Eine ökonomische Analyse. 1995.

- Band 20 Bernd Nolte: Engpaßfaktoren der Innovation und Innovationsinfrastruktur. Eine theoretische und empirische Analyse für ländliche Wirtschaftsräume in Baden-Württemberg. 1996.
- Band 21 Klaus-Rainer Brintzinger: Die Nationalökonomie an den Universitäten Freiburg, Heidelberg und Tübingen 1918 - 1945. Eine institutionenhistorische, vergleichende Studie der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultäten und Abteilungen südwestdeutscher Universitäten. 1996.
- Band 22 Steffen Binder: Die Idee der Konsumentensouveränität in der Wettbewerbstheorie. Teleokratische vs. nomokratische Auffassung. 1996.
- Band 23 Alexander Burger: Deregulierungspotentiale in der Gesetzlichen Rentenversicherung. Reformnotwendigkeiten versus Reformmöglichkeiten. 1996.
- Band 24 Burkhard Scherer: Regionale Entwicklungspolitik. Konzeption einer dezentralisierten und integrierten Regionalpolitik. 1997.
- Band 25 Frauke Wolf: Lorenzkurvendisparität. Neuere Entwicklungen, Erweiterungen und Anwendungen. 1997.