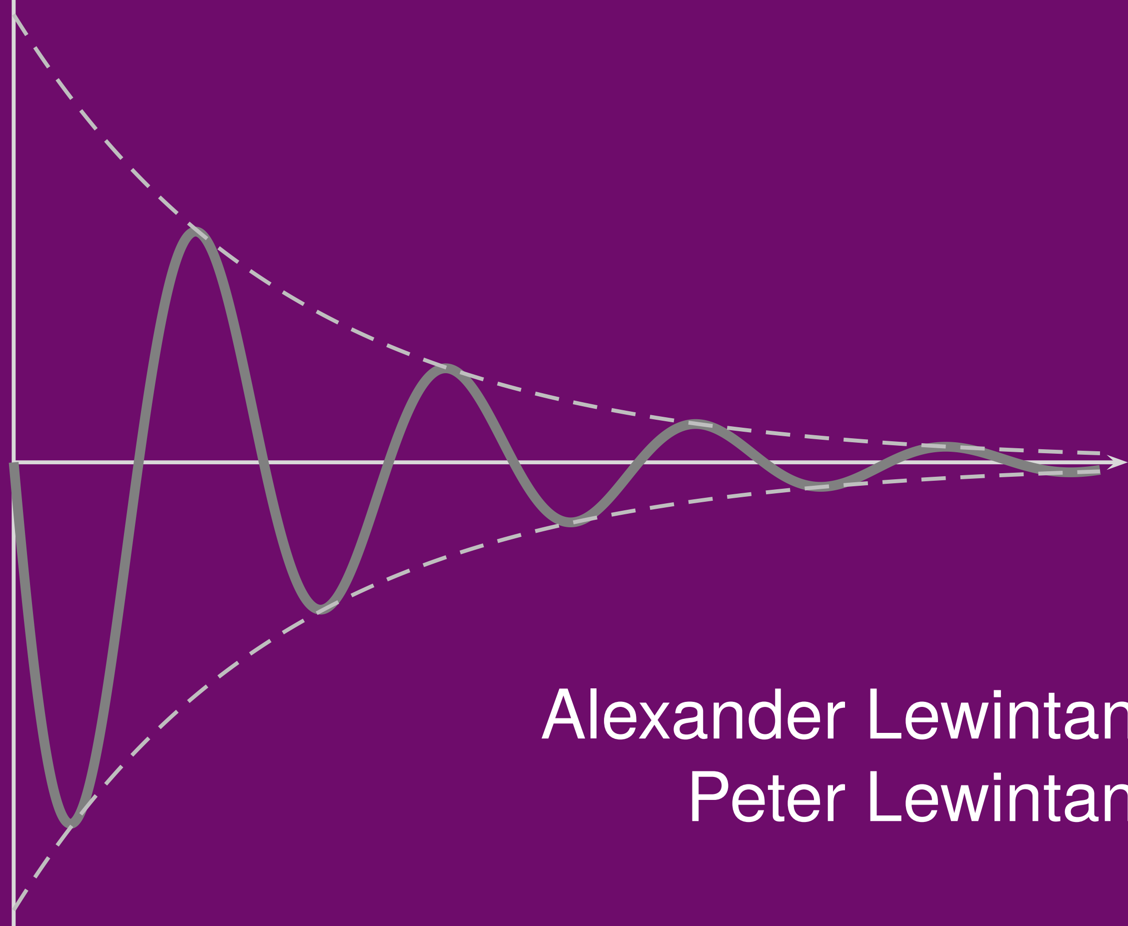
Einführung in die

Differential-

und in die

Differenzengleichungen



Alexander Lewintan
Peter Lewintan

λογος

Einführung in die Differential- und in die Differenzengleichungen

Alexander Lewintan
Peter Lewintan

Logos Verlag Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Die frei zugängliche Open-Access-Publikation des vorliegenden Titels wurde mit Mitteln des Publikationsfonds der Universitätsbibliothek Duisburg-Essen ermöglicht.

Logos Verlag Berlin GmbH 2022

ISBN 978-3-8325-5448-4

Logos Verlag Berlin GmbH
Georg-Knorr-Str. 4, Geb. 10,
12681 Berlin
Tel.: +49 (0)30 / 42 85 10 90
Fax: +49 (0)30 / 42 85 10 92
http://www.logos-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Schwerpunkt des vorliegenden Lehrbuches ist es Parallelen bei den Untersuchungen von linearen Differential- und linearen Differenzengleichungen aufzuzeigen. Die Grundlage des Buches bildetete der Vorlesungskurs “Einführung in die Differentialgleichungen und in die Differenzengleichungen” für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker der Universität Duisburg-Essen. Für die Digitalisierung der vorliegenden Version danken wir besonders herzlich Larissa Charitonowa! Außerdem gilt unser Dank allen Studierenden, die mit ihren Anmerkungen und Anregungen zur stetigen Verbesserung des Skriptes beigetragen haben. Auch Sie, liebe Leserinnen und Leser, laden wir herzlich ein, uns Ihre Anregungen oder weitere Korrekturvorschläge entgegenzubringen!

Essen, im Januar 2022

Alexander Lewintan und Peter Lewintan

1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Generalvoraussetzung: Im Folgenden bezeichnet $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, d.h., I ist eine nichtleere zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, die ein nichtleeres Inneres hat. Gehört ein Randpunkt zum Intervall, so betrachten wir für die Differenzierbarkeit in diesem Randpunkt einen einseitigen Grenzwert.

1.1 Anfangswertproblem für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 1.1.1

Gegeben seien die Funktionen $p, f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und stetig sind. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x). \tag{1.1.1}$$

Gleichung (1.1.1) *heißt <u>lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung erster Ordnung</u>. Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Gleichung* (1.1.1) *auf dem Intervall I.*

Satz und Definition 1.1.2

Seien die Funktionen $p, f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und stetig, sowie $x_0 \in I$. Dann existiert für beliebiges $y_0 \in \mathbb{R}$ auf I <u>genau eine</u> Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x), \quad x \in I\,, \\ \qquad\qquad y(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Für einen Beweis verweisen wir auf die spätere Bemerkung 1.3.6.

Bemerkung und Definition 1.1.3
Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in I$, so heißt Gleichung (1.1.1) *lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung, andernfalls heißt diese lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung.*

1.2 Lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

Wir untersuchen zuerst die homogene Gleichung

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0 \tag{1.1.1h}$$

(dabei ist die Funktion $p : I \to \mathbb{R}$ auf I definiert und stetig).

Satz 1.2.1
Sei $y_1 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1.1.1h)*, dann ist $y(x) := c \cdot y_1(x)$ ebenfalls eine Lösung von* (1.1.1h)*, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.*

BEWEIS:
Da y_1 eine Lösung von (1.1.1h) ist, gilt für alle $x \in I$:

$$y_1'(x) + p(x) \cdot y_1(x) = 0. \tag{1.2.1}$$

Dann folgt für $y(x) := c \cdot y_1(x)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist:

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x) \cdot y(x) &= \{c \cdot y_1(x)\}' + p(x) \cdot \{c \cdot y_1(x)\} \\ &= c \cdot y_1'(x) + p(x) \cdot c \cdot y_1(x) \\ &= c \cdot (y_1'(x) + p(x) \cdot y_1(x)) \\ &\overset{(1.2.1)}{=} 0 \qquad \text{für alle } x \in I. \end{aligned}$$

Nach Definition 1.1.1 ist also $y(x) := c \cdot y_1(x)$ eine Lösung von (1.1.1h) auf I, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

$\square$

Bemerkung 1.2.2

Da die Funktion p auf I stetig ist, besitzt sie auf I eine Stammfunktion. Sei $P : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von p auf I. Dann ist $y_1 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{-P(x)}$$

eine Lösung von (1.1.1h) *auf I. In der Tat:*

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= (-P(x))' \cdot \mathrm{e}^{-P(x)} = -p(x) \cdot \mathrm{e}^{-P(x)} \quad \textit{und} \\ y_1'(x) + p(x) \cdot y_1(x) &= -p(x) \cdot \mathrm{e}^{-P(x)} + p(x) \cdot \mathrm{e}^{-P(x)} = 0 \quad \textit{auf} \quad I. \end{aligned}$$

Satz und Definition 1.2.3

Allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

Jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ von (1.1.1h) *lässt sich in der Form $y(x) := c \cdot y_1(x)$ darstellen, wobei*

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}, \tag{1.2.2}$$

$P : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von p und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Lässt man in $c \cdot y_1(x)$ die Zahl c die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man alle Lösungen der Gleichung (1.1.1h). *Man sagt: Durch $y(x) = c \cdot y_1(x)$ ist die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung* (1.2.1) *gegeben.*

Beweis:

Nach Bemerkung 1.2.2 und Satz 1.2.1 ist jede Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) := c \cdot y_1(x) \qquad \text{und} \qquad y_1(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}$$

immer eine Lösung von (1.1.1h) für alle $c \in \mathbb{R}$.

Sei umgekehrt $\widetilde{y} : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung von (1.1.1h) und y_1 (durch eine beliebige aber feste Wahl der Stammfunktion P) fest gewählt. Wir zeigen: Es existiert ein $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$, sodass auf dem ganzen Intervall I gilt

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{c} \cdot y_1(x)\,.$$

Da $\widetilde{y}$ eine Lösung von (1.1.1h) ist, folgt

$$\widetilde{y}'(x) + p(x) \cdot \widetilde{y}(x) = 0 \quad \text{für alle} \;\; x \in I.$$

Die Funktion $z : I \to \mathbb{R}$ mit

$$z(x) := \frac{\widetilde{y}(x)}{y_1(x)}$$

ist auf ganz I definiert (es gilt stets $y_1(x) > 0$), differenzierbar und es folgt

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{\widetilde{y}'(x) \cdot y_1(x) - \widetilde{y}(x) \cdot y_1'(x)}{(y_1(x))^2} \\ &= \frac{-p(x) \cdot \widetilde{y}(x) \cdot y_1(x) - \widetilde{y}(x) \cdot (-p(x) \cdot y_1(x))}{(y_1(x))^2} \\ &= 0 \qquad \text{für alle } x \in I. \end{aligned}$$

Dann ist z konstant auf dem ganzen Intervall I. Also existiert ein $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\widetilde{y}(x)}{y_1(x)} = \widetilde{c} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Somit ist <u>jede</u> Lösung von (1.1.1h) in der Form $c \cdot y_1(x)$ mit $y_1(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}$ und geeignetem $c \in \mathbb{R}$ darstellbar. □

Beispiel 1.2.4

$$y'(x) - \tan(x) \cdot y(x) = 0, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.2.3}$$

Es gilt für jedes $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: $p(x) = -\tan(x)$, und da $\cos(x) > 0$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ folgt:

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = -\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \ln(\cos(x)) + m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Wir nehmen (z.B.) $m = 0$, dann ist

$$P(x) = \ln(\cos(x))$$

und

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-P(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\,.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (1.2.3) lautet somit nach Satz 1.2.3:

$$y(x) = \frac{c}{\cos(x)} \qquad \text{mit beliebigem } c \in \mathbb{R}.$$

Folgerung 1.2.5 (Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems)
Sei die Funktion $p : I \to \mathbb{R}$ auf I definiert und stetig, sowie $x_0 \in I$. Dann existiert für beliebiges $y_0 \in \mathbb{R}$ auf I genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0\,, \\ \hfill y(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Beweis:
Da die Funktion p auf I stetig ist, ist die Funktion $P : I \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) := \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von p auf I. Nach Satz 1.2.3 ist die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) := c \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}$$

und beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0 \qquad \text{auf} \quad I.$$

Mit dem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ können wir die Konstante bereits eindeutig anpassen:

$$y(x_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} p(t)\,\mathrm{d}t} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad c = y_0.$$

Also ist die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (1.2.4). □

Beispiel 1.2.6 (Gesetz des radioaktiven Zerfalls)
Sei $N := N(t)$ die Zahl der zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ noch nicht zerfallenen Kerne eines radioaktiven Stoffes. Die Anzahl der Kerne, die radioaktiv zerfallen können, nimmt mit der Zeit ab und es gilt:

$$\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

mit einer Konstante $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$. Mit anderen Worten gilt

$$\dot{N}(t) + \lambda \cdot N(t) = 0, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{1.2.5}$$

Sei $t_0 = 0$ der Anfangspunkt der Prozessbeobachtung. Mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ erhalten wir nach Folgerung 1.2.5 durch

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_0^t \lambda \,\mathrm{d}\tau} = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

die eindeutig bestimmte Lösung dieses Anfangswertproblems.

Beachte: Für $t > t_0$ bzw. $t < t_0$ zeigt die Lösung die Anzahl der nicht zerfallenen Kerne nach bzw. vor dem Start der Beobachtung.

Bemerkung 1.2.7

<u>Lineare homogene Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten</u>

Sei $p \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$y'(x) + p \cdot y(x) = 0\,. \tag{1.2.6}$$

Offensichtlich ist die Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) := p \cdot x$ eine Stammfunktion der konstanten Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) := p$ auf $\mathbb{R}$. Nach Bemerkung 1.2.2 ist die Funktion $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) := \mathrm{e}^{-p\cdot x}$ eine Lösung und nach Satz 1.2.3 ist

$$y(x) = c \cdot y_1(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-p\cdot x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung (1.2.6) *auf* $\mathbb{R}$.

1.3 Lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

Satz 1.3.1

Seien die Funktionen $p, f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig. Dann lässt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x) \tag{1.3.1}$$

auf I schreiben als: $\mathbb{L} = y^*(x) + \mathbb{L}_0$, *wobei $\mathbb{L}_0$ die Lösungsmenge der entsprechenden homogenen Differentialgleichung*

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

und $y^*(x)$ eine (sogenannte partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Beweis:
Wir haben bereits in Satz 1.2.3 gesehen, dass $\mathbb{L}_0$ nichtleer ist. Wir werden in Bemerkung 1.3.4 zeigen, dass auch $\mathbb{L} \neq \varnothing$, mit anderen Worten existiert eine partikuläre Lösung $y^*(x)$ von (1.3.1) und es gilt auf I

$$(y^*)'(x) + p(x) \cdot y^*(x) = f(x)\,.$$

1. Sei $y_L(x) \in \mathbb{L}$ eine beliebige Lösung von (1.3.1). Dann gilt

   $$y_L'(x) + p(x) \cdot y_L(x) = f(x)$$

   auf I und somit

   $$\begin{aligned} & y_L'(x) - (y^*)'(x) + p(x) \cdot (y_L(x) - y^*(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (y_L(x) - y^*(x))' + p(x) \cdot (y_L(x) - y^*(x)) = 0\,. \end{aligned}$$

   D.h., $\widetilde{y}(x) := y_L(x) - y^*(x)$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

   $$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

   auf I. Also gilt für jedes $y_L(x) \in \mathbb{L}$:

   $$y_L(x) = y^*(x) + \widetilde{y}(x) \in y^*(x) + \mathbb{L}_0$$

   und

   $$\mathbb{L} \subseteq y^*(x) + \mathbb{L}_0.$$

2. Sei nun $\widetilde{y}(x) \in \mathbb{L}_0$ eine beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dann gilt auf I:

   $$\widetilde{y}'(x) + p(x) \cdot \widetilde{y}(x) = 0.$$

Da $y^*(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.3.1) ist, folgt

$$\begin{aligned} & \widetilde{y}'(x) + (y^*)'(x) + p(x) \cdot (\widetilde{y}(x) + y^*(x)) = f(x) \\ \Leftrightarrow \quad & (\widetilde{y}(x) + y^*(x))' + p(x) \cdot (\widetilde{y}(x) + y^*(x)) = f(x) \,. \end{aligned}$$

D.h., $y(x) := \widetilde{y}(x) + y^*(x)$ ist eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.3.1) auf I. Also gilt für jedes $\widetilde{y}(x) \in \mathbb{L}_0$:

$$y(x) := y^*(x) + \widetilde{y}(x) \in \mathbb{L}$$

und

$$y^*(x) + \mathbb{L}_0 \subseteq \mathbb{L}.$$

Insgesamt haben wir $\mathbb{L} = y^*(x) + \mathbb{L}_0$ gezeigt. □

Folgerung 1.3.2

Wie wir schon wissen, ist

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-P(x)} \tag{1.3.2}$$

immer eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (1.1.1h) *auf* I*. (Dabei ist* $P : I \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* p *auf* I*.) Lässt man in* $c \cdot y_1(x)$ *die Zahl* c *die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man* <u>*alle*</u> *Lösungen der Gleichung* (1.1.1h).

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$*:*

$$\mathbb{L}_0 = \{c \cdot y_1(x) : c \in \mathbb{R}\},$$

dabei heißt $c \cdot y_1(x)$ *die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Ist jetzt* $y^*(x)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* (1.3.1), *dann gilt nach Satz 1.3.1 für die Lösungsmenge* $\mathbb{L}$*:*

$$\mathbb{L} = \{c \cdot y_1(x) + y^*(x) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Man sagt: Durch

$$y(x) = c \cdot y_1(x) + y^*(x)$$

ist die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung (1.3.1) *gegeben.*

Oder auch: Die allgemeine Lösung der linearen <u>*inhomogenen*</u> *Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form*

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x),$$

wobei $\widetilde{y}(x)$ *die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung und* $y^*(x)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.*

Beispiel 1.3.3

$$y'(x) - 3y(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.3.3}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) - 3y(x) = 0\,. \tag{1.3.3h}$$

Hier gilt $p = -3$ und nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.3.3h) auf $\mathbb{R}$.

2) Wie ist nun $y^*(x)$ zu wählen?

Dazu betrachten wir den Ansatz

$$y^*(x) := A \cdot x + B$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (y^*)'(x) = A \quad \text{und} \quad (y^*)'(x) - 3y^*(x) &= x \\ \Leftrightarrow \quad A - 3 \cdot (A \cdot x + B) &= x \\ \Leftrightarrow \quad -3A \cdot x + (A - 3B) &= x \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ A - 3B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{9}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Nach Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 ist

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c \cdot \mathrm{e}^{3x} + \left(-\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{9}\right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.3.3) auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.3.4 (Variation der Konstanten)

Seien die Funktionen $p, f : I \to \mathbb{R}$ *auf einem Intervall* I *definiert und stetig. Sei* $P : I \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* p *auf* I*. Nach Bemerkung 1.2.2 ist* $y_1 : I \to \mathbb{R}$ *mit*

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{-P(x)}$$

eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

auf I*. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x)$$

findet man nach dem Verfahren der <u>Variation der Konstanten</u>:

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = c(x) \cdot y_1(x), \tag{1.3.4}$$

wobei $c : I \to \mathbb{R}$ *eine unbekannte Funktion ist. Dann gilt (mit Voraussetzung, dass die Funktion* c *in* I *differenzierbar ist):*

$$(y^*)'(x) = c'(x) \cdot y_1(x) + c(x) \cdot y_1'(x).$$

In die Differentialgleichung (1.3.1) *eingesetzt ergibt das:*

$$\begin{aligned}
& & (c'(x) \cdot y_1(x) + c(x) \cdot y_1'(x)) + p(x) \cdot c(x) \cdot y_1(x) &= f(x) \\
&\Leftrightarrow & c'(x) \cdot y_1(x) + c(x) \cdot \underbrace{(y_1'(x) + p(x) \cdot y_1(x))}_{=0} &= f(x) \\
&\Leftrightarrow & c'(x) \cdot y_1(x) &= f(x),
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Funktion y_1 *eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.*

Da $y_1(x) = \mathrm{e}^{-P(x)} \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *ist, ist die Gleichung* $c'(x) \cdot y_1(x) = f(x)$ *eindeutig lösbar. Es gilt somit*

$$c'(x) = \mathrm{e}^{P(x)} \cdot f(x)\,.$$

Da die Funktion $\mathrm{e}^{P(x)} \cdot f(x)$ *auf* I *stetig ist, besitzt sie dort eine Stammfunktion.*

Beispiel 1.3.5

$$y'(x) - \cot(x) \cdot y(x) = \sin(x), \qquad x \in (0; \pi)\,. \tag{1.3.5}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) - \cot(x) \cdot y(x) = 0\,. \tag{1.3.5h}$$

Es gilt für alle $x \in (0; \pi)$ mit $p(x) := -\cot(x)$, und da $\sin(x) > 0$ auf $(0; \pi)$ folgt

$$\int p(x)\,\mathrm{d}t = -\int \cot(x)\,\mathrm{d}t = -\ln(\sin(x)) + m, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

Wir nehmen (z.B.) $m = 0$, dann ist $\quad P(x) = -\ln(\sin(x)) \quad$ auf $(0; \pi)$. Nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{c} \cdot \sin(x)$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen (1.3.5h) Differentialgleichung.

2) Wir suchen nun $y^*(x)$ mit dem Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 1.3.4 erhalten wir auf dem offenen Intervall $(0; \pi)$:

$$c'(x) = \mathrm{e}^{-\ln(\sin(x))} \cdot \sin(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \sin(x) = 1.$$

Somit ist $c(x) = x + n$, mit $n \in \mathbb{R}$. Mit $n = 0$ bekommen wir folgende partikuläre Lösung

$$y^*(x) = c(x) \cdot y_1(x) = x \cdot \sin(x)\,.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.3.5) auf $(0; \pi)$ ist somit

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = \widetilde{c} \cdot \sin(x) + x \cdot \sin(x) \quad \text{mit} \quad \widetilde{c} \in \mathbb{R}\,.$$

Beachte: Diese Funktion ist natürlich auch außerhalb des Intervalls $(0;\pi)$ wohldefiniert, die Einschränkung des Intervalls kommt aber daher, dass wir ein Intervall benötigen auf dem der Kotangens aus der Differentialgleichung (1.3.5) stetig ist.

Bemerkung 1.3.6

Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. (Beweis des Satzes 1.1.2)

$$\begin{cases} y'(x) + p(x)\cdot y(x) = f(x), \quad x \in I\,, \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Beweis:

Da die Funktion p auf I stetig ist, ist die Funktion $P : I \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von p auf I. Nach Satz 1.2.3 ist die Funktion $\widetilde{y} : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{y}(x) := \widetilde{c}\cdot \mathrm{e}^{-P(x)}$$

und mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) + p(x)\cdot y(x) = 0$$

auf I. Die Funktion $c : I \to \mathbb{R}$ mit

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{P(t)}\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist eine Stammfunktion von $\mathrm{e}^{P(x)}\cdot f(x)$ auf I. Nach Bemerkung 1.3.4 ist durch die Funktion $y^* : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y^*(x) := c(x)\cdot \mathrm{e}^{-P(x)}$$

eine partikuläre Lösung und durch

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = (\widetilde{c} + c(x))\cdot \mathrm{e}^{-P(x)}$$

die <u>allgemeine</u> Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(x) + p(x)\cdot y(x) = f(x)$$

auf I gegeben.

Mit dem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ können wir nun die Konstante $\widetilde{c}$ bereits eindeutig anpassen:

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad (\widetilde{c} + c(x_0)) \cdot \mathrm{e}^{-P(x_0)} = y_0 \\ \Leftrightarrow \qquad \widetilde{c} = y_0, \quad &\text{denn} \quad c(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{-P(x_0)} = 1\,. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) \coloneqq (y_0 + c(x)) \cdot \mathrm{e}^{-P(x)}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (1.3.6). □

Satz 1.3.7 (Superpositionsprinzip)

Seien die Funktionen $p, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig. Seien weiter $y_1^*(x)$ eine partikuläre Lösung von

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f_1(x) \tag{1.3.7a}$$

und $y_2^*(x)$ eine partikuläre Lösung von

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f_2(x). \tag{1.3.7b}$$

Dann ist

$$y^*(x) \coloneqq y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

eine partikuläre Lösung von

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f_1(x) + f_2(x)\,. \tag{1.3.8}$$

Beweis:

Einsetzen von $y^*(x)$ in (1.3.8) liefert die Behauptung, weil $y_1^*(x)$ und $y_2^*(x)$ partikuläre Lösungen der entsprechenden Gleichungen sind:

In der Tat gilt für jedes $x \in I$:

$$(y^*)'(x) = (y_1^*)'(x) + (y_2^*)'(x),$$

sodass

$$\begin{aligned} (y^*)'(x) + p(x) \cdot y^*(x) &= (y_1^*)'(x) + (y_2^*)'(x) + p(x) \cdot (y_1^*(x) + y_2^*(x)) \\ &= [(y_1^*)'(x) + p(x) \cdot y_1^*(x)] + [(y_2^*)'(x) + p(x) \cdot y_2^*(x)] \\ &\overset{(1.3.7a)}{\underset{(1.3.7b)}{=}} f_1(x) + f_2(x)\,. \end{aligned}$$

□

1.4 Lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Bemerkung 1.4.1

Gegeben seien eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I definiert und stetig ist, und eine reelle Zahl $p \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$y'(x) + p \cdot y(x) = f(x)\,. \tag{1.4.1}$$

Nach Folgerung 1.3.2 und Bemerkung 1.2.7 hat die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung (1.4.1) *die Form $y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x)$, wobei*

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-p \cdot x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) + p \cdot y(x) = 0$$

und $y^*(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. In Bemerkung 1.3.4 haben wir $y^*(x)$ mit dem Verfahren der Variation der Konstanten gesucht. Wir betrachten nun die Form partikulärer Lösungen $y^*(x)$ von (1.4.1) *für einige Sonderfälle der rechten Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

i) *$f(x) := \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot P_n(x)$, wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ und $P_n(x)$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ ist.*

a) *$\underline{\gamma \neq -p}$. Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form*

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot Q_n(x),$$

wobei $Q_n(x)$ ein Polynom vom Grad n mit unbekannten Koeffizienten ist.

Beispiel 1.4.2: $y'(x) - 5y(x) = x^2 + 3x,$

Beispiel 1.4.3: $y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot (x + 1).$

b) $\underline{\gamma = -p}$. *Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form*

$$y^*(x) = x \cdot \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot Q_n(x),$$

wobei $Q_n(x)$ *ein Polynom vom Grad* n *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

Beispiel 1.4.4: $\quad y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot (x-1).$

ii) $f(x) := \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos(\delta \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(\delta \cdot x))$, *wobei* $\gamma \in \mathbb{R}$ *und* $\delta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. *Dabei sind* $P_n(x), Q_m(x)$ *Polynome vom Grad* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom.*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot (S_N(x) \cdot \cos(\delta \cdot x) + T_N(x) \cdot \sin(\delta \cdot x)),$$

wobei $S_N(x), T_N(x)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{n, m\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

Beispiel 1.4.5: $\quad y'(x) - 2y(x) = \sin(3x) + x \cdot \cos(3x),$

Beispiel 1.4.6: $\quad y'(x) + 4y(x) = \mathrm{e}^{x} \cdot \cos(2x).$

Beispiel 1.4.2

$$y'(x) - 5y(x) = x^2 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.2}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) - 5y(x) = 0. \tag{1.4.2h}$$

Hier gilt $p = -5$ und nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{5x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.4.2h) auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 0 \neq 5 = -p$, sowie $P_2(x) = x^2 + 3x$ und suchen nach Bemerkung 1.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + D, \quad \text{mit } A, B, D \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$(y^*)'(x) = 2A \cdot x + B$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (1.4.2) ergibt:

$$\begin{aligned} & (2A \cdot x + B) - 5 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + D) = x^2 + 3x \\ \Leftrightarrow \quad & -5A \cdot x^2 + (2A - 5B) \cdot x + (B - 5D) = x^2 + 3x\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -5A = 1 \\ 2A - 5B = 3 \\ B - 5D = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{17}{25} \\ D = -\dfrac{17}{125} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = -\frac{x^2}{5} - \frac{17x}{25} - \frac{17}{125}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.2). Nach Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 ist

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c \cdot \mathrm{e}^{5x} + \left(-\frac{x^2}{5} - \frac{17x}{25} - \frac{17}{125}\right) \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.2) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.4.3

$$y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot (x + 1), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.3}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) + 2y(x) = 0\,. \tag{1.4.3h}$$

Hier gilt $p = 2$ und nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.4.3h) auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 2 \neq -2 = -p$, sowie $P_1(x) = x + 1$ und suchen nach Bemerkung 1.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot (A \cdot x + B), \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$(y^*)'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot (A \cdot x + B) + \mathrm{e}^{2x} \cdot A = \mathrm{e}^{2x} \cdot (2A \cdot x + (A + 2B))$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (1.4.3) ergibt:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{2x} \cdot (2A \cdot x + (A + 2B)) + 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot (A \cdot x + B) = \mathrm{e}^{2x} \cdot (x + 1) \\
\underset{\mathrm{e}^{2x} \neq 0}{\iff} \quad & 2A \cdot x + (A + 2B) + 2A \cdot x + 2B = x + 1 \\
\iff \quad & 4A \cdot x + (A + 4B) = x + 1.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ A + 4B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16} \right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.3). Nach Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 ist

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16} \right) \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.3) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.4.4

$$y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot (x - 1), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.4}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) + 3y(x) = 0\,. \tag{1.4.4h}$$

Hier gilt $p = 3$ und nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.4.4h) auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = -3 = -p$, sowie $P(x) = x - 1$ und suchen nach Bemerkung 1.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-3x} \cdot (A \cdot x + B) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x), \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= -3 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x) + \mathrm{e}^{-3x} \cdot (2A \cdot x + B) \\ &= \mathrm{e}^{-3x} \cdot (-3A \cdot x^2 + (2A - 3B) \cdot x + B)\end{aligned}$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (1.4.4) ergibt:

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-3x} \cdot (-3A \cdot x^2 + (2A - 3B) \cdot x + B) \\ &\qquad + 3\mathrm{e}^{-3x} \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot (x - 1) \\ \underset{\mathrm{e}^{-3x} \neq 0}{\Longleftrightarrow} &\qquad 2A \cdot x + B = x - 1\,.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x\right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.4). Nach Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 ist

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-3x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung (1.4.4) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.4.5

$$y'(x) - 2y(x) = x \cdot \cos(3x) + \sin(3x), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.5}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) - 2y(x) = 0\,. \tag{1.4.5h}$$

Hier gilt $p = -2$ und nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.4.5h) auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 0$, $\delta = 3$, $P_1(x) = x$ und $Q_0(x) = 1$ und suchen nach Bemerkung 1.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = (A \cdot x + B) \cdot \cos(3x) + (D \cdot x + E) \cdot \sin(3x)\,,$$

mit $A, B, D, E \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= A \cdot \cos(3x) + D \cdot \sin(3x) + (D \cdot x + E) \cdot 3\cos(3x)\\ &= (3D \cdot x + (A + 3E)) \cdot \cos(3x)\\ &\qquad\qquad + (-3A \cdot x + (D - 3B)) \cdot \sin(3x)\end{aligned}$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (1.4.5) ergibt:

$$\begin{aligned}&(3D \cdot x + (A + 3E)) \cdot \cos(3x) + (-3A \cdot x + (D - 3B)) \cdot \sin(3x)\\ &\quad - 2 \cdot ((A \cdot x + B) \cdot \cos(3x) + (D \cdot x + E) \cdot \sin(3x))\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \sin(3x) + x \cdot \cos(3x)\\ \Leftrightarrow\quad &(3D - 2A) \cdot x \cdot \cos(3x) + (A - 2B + 3E) \cdot \cos(3x)\\ &\quad + (-3A - 2D) \cdot x \cdot \sin(3x) + (D - 3B - 2E) \cdot \sin(3x)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \sin(3x) + x \cdot \cos(3x)\,.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -2A + 3D = 1 \\ -3A - 2B = 0 \\ A - 2B + 3E = 0 \\ D - 3B - 2E = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{2}{13} \\ D = \dfrac{3}{13} \\ B = -\dfrac{34}{169} \\ E = -\dfrac{14}{169} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \left(-\frac{2}{13} \cdot x - \frac{34}{169}\right) \cdot \cos(3x) + \left(\frac{3}{13} \cdot x - \frac{14}{169}\right) \cdot \sin(3x)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.5). Nach Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 ist

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= c \cdot \mathrm{e}^{2x} + \left(-\frac{2}{13} \cdot x - \frac{34}{169}\right) \cdot \cos(3x) + \left(\frac{3}{13} \cdot x - \frac{14}{169}\right) \cdot \sin(3x) \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.5) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.4.6

$$y'(x) + 4y(x) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.6}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) + 4y(x) = 0\,. \tag{1.4.6h}$$

Hier gilt $p = 4$ und nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-4x}$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.4.6h) auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 1, \delta = 2, P_0(x) = 1$ und $Q(x) \equiv 0$ (Nullpolynom) und suchen nach Bemerkung 1.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = \mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)), \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)) \\ &\qquad + \mathrm{e}^x \cdot (-2A \cdot \sin(2x) + 2B \cdot \cos(2x)) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot ((A + 2B) \cdot \cos(2x) + (-2A + B) \cdot \sin(2x))\end{aligned}$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (1.4.6) ergibt:

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^x \cdot ((A + 2B) \cdot \cos(2x) + (-2A + B) \cdot \sin(2x)) \\ & \qquad + 4\mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(2x) \\ \underset{\mathrm{e}^x \neq 0}{\iff} \quad & (A + 2B) \cdot \cos(2x) + (-2A + B) \cdot \sin(2x) \\ & \qquad + 4 \cdot (A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)) = \cos(2x) \\ \iff \quad & (5A + 2B) \cdot \cos(2x) + (-2A + 5B) \cdot \sin(2x) = \cos(2x)\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 5A + 2B = 1 \\ -2A + 5B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{5}{29} \\ B = \dfrac{2}{29} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left(\frac{5}{29} \cdot \cos(2x) + \frac{2}{29} \cdot \sin(2x) \right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.6). Nach Satz 1.3.1 und Folgerung 1.3.2 ist

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-4x} + \mathrm{e}^x \cdot \left(\frac{5}{29} \cdot \cos(2x) + \frac{2}{29} \cdot \sin(2x) \right) \quad \text{mit}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1.4.6) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.4.7 (Anfangswertproblem)

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} &= -2\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{12}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}^{>0}, \\ \qquad y(1) &= 5\,. \end{cases} \tag{1.4.7}$$

1) Der maximale gemeinsame Definitionsbereich der Funktionen $p, f : D \to \mathbb{R}$ mit $p(x) := -\frac{1}{x}$, $f(x) := -2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{12}{x^3}$ lautet $D = \mathbb{R}^{>0}$. Der Anfangspunkt $x_0 = 1 > 0$ liegt also im Definitionsbereich D. Die inhomogene Gleichung

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = -2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{12}{x^3}$$

darf auf $\mathbb{R}^{>0}$ untersucht werden.

2) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 0\,. \tag{1.4.7h}$$

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$:

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln(x) + m \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

Wir nehmen (z.B.) $m = 0$, dann ist $P(x) = -\ln(x)$ und $y_1 = \mathrm{e}^{-P(x)} = x$, sowie $\mathrm{e}^{P(x)} = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}^{>0}$. Nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{c} \cdot x$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1.4.7h) auf $(0; \infty)$.

3) Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = -2\frac{\ln(x)}{x} \tag{1.4.7a}$$

mit dem Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 1.3.4 erhalten wir auf $\mathbb{R}^{>0}$:

$$c'(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(-2\frac{\ln(x)}{x}\right) = -\frac{2\ln(x)}{x^2},$$

und somit

$$c(x) = \int \frac{-2\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln(x) \\[1em] u'(x) = \dfrac{1}{x} \\[1em] v'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \\[1em] v(x) = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} = \frac{2\ln(x)}{x} - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} + n, \quad n \in \mathbb{R}\,.$$

Mit $n = 0$ bekommen wir folgende partikuläre Lösung

$$y_1^*(x) = c(x) \cdot y_1(x) = \left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x}\right) \cdot x = 2\ln(x) + 2$$

der inhomogenen Differentialgleichung (1.4.7a) auf $(0;\infty)$.

4) Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = -\frac{12}{x^3} \tag{1.4.7b}$$

mit dem Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 1.3.4 erhalten wir auf $\mathbb{R}^{>0}$:

$$c'(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{12}{x^3}\right) = -\frac{12}{x^4},$$

und somit

$$c(x) = -\int \frac{12}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{x^3} + n, \quad n \in \mathbb{R}\,.$$

Mit $n = 0$ bekommen wir folgende partikuläre Lösung

$$y_2^*(x) = c(x) \cdot y_1(x) = \frac{4}{x^2}$$

der inhomogenen Differentialgleichung (1.4.7b) auf $(0;\infty)$.

5) Nach dem Superpositionsprinzip 1.3.7 ist

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = -2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{12}{x^3}$$

auf $\mathbb{R}^{>0}$ und

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = \widetilde{c} \cdot x + 2\ln(x) + 2 + \frac{4}{x^2}$$

die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung auf $\mathbb{R}^{>0}$.

6) Mit Hilfe des Anfangswertes $y(1) = 5$ bekommen wir:

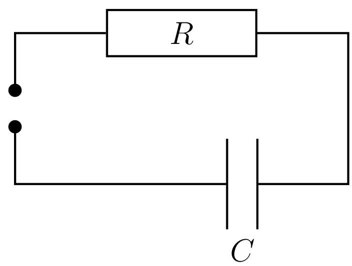
$$y(1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c} \cdot 1 + 2\ln(1) + 2 + \frac{4}{1^2} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c} = -1$$

Dann ist

$$y(x) = -x + 2\ln(x) + 2 + \frac{4}{x^2}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1.4.7) auf $(0; \infty)$.

1.5 Auf- und Entladung eines Kondensators



Wir untersuchen einen Stromkreis, bestehend aus einem Ohm'schen Widerstand[1] $R > 0$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C > 0$.

1.5.1 Aufladung eines Kondensators

Die Stromquelle wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eingeschaltet und mit einer konstanten Spannung U_0 betrieben. Der Kondensator fäng an sich aufzuladen.

Nach dem zweiten KIRCHHOFF'schen Gesetz[2] gilt

$$U_0 = U_R(t) + U_C(t), \quad t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}\,.$$

[1] Georg Simon Ohm, 1789-1854

[2] Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887

Wobei wir mit $U_R(t)$ die Spannung am Widerstand und mit $U_C(t)$ die Spannung am Kondensator bezeichnen. Es gilt ($C > 0$):

$$U_R(t) = R \cdot I(t), \quad U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad I(t) = \dot{Q}(t),$$

wobei $I := I(t)$ Stromstärke im Kreis und $Q := Q(t)$ Ladung des Kondensators sind. Dann

$$U_R(t)+U_C(t) = U_0 \quad \Leftrightarrow \quad R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C} = U_0 \quad \underset{R>0}{\Leftrightarrow} \quad \dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{R \cdot C} = \frac{U_0}{R},$$

d.h., die Ladung am Kondensator genügt einer linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{R \cdot C} = 0$$

Nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{Q}(t) = \widetilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Nach Bemerkung 1.4.1 suchen wir nun eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$Q^*(t) = A \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}\text{, dann ist} \quad \dot{Q}^*(t) = 0$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt:

$$0 + \frac{A}{R \cdot C} = \frac{U_0}{R} \quad \underset{R,C>0}{\Longleftrightarrow} \quad A = U_0 \cdot C\,.$$

Dann ist $Q^*(t) = U_0 \cdot C$ eine partikuläre Lösung und

$$Q(t) = \widetilde{Q}(t) + Q^*(t) = \widetilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}} + U_0 \cdot C$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

Mit der Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ erhalten wir

$$\widetilde{c}+U_0\cdot C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c} = -U_0 \cdot C \quad \text{und somit} \quad Q(t) = U_0 \cdot C \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right).$$

Für die Kondensatorspannung bekommen wir

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

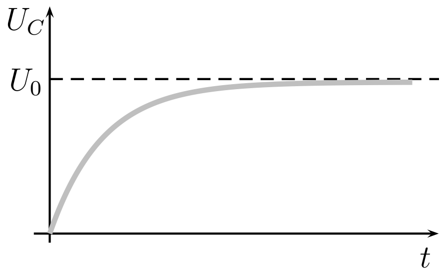
und für die Stromstärke

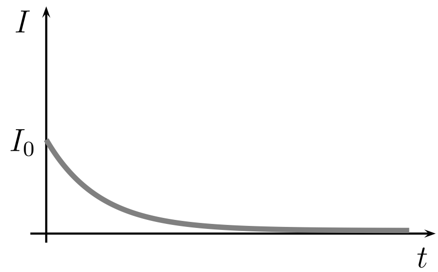
$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}} .$$

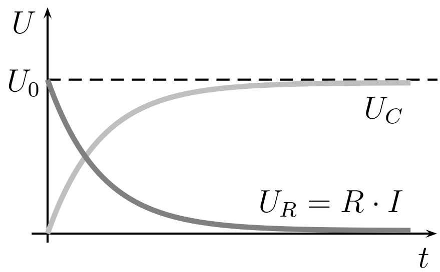
Bezeichnen wir die Stromstärke am Anfang durch

$$I_0 := I(0) = \frac{U_0}{R}, \quad \text{dann gilt} \quad I(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}},$$

wir sprechen von einem Ladestrom.







Für die Widerstandspannung gilt:

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}} .$$

Beachte: Es gilt stets $U_R(t) + U_C(t) = U_0$ zu jeder Zeit $t \geqslant 0$.

1.5.2 Entladung eines Kondensators

Die Stromquelle wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ abgeschaltet. Der Kondensator beginnt sich zu entladen. Nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz gilt:

$$U_R(t) + U_C(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0} .$$

Mit $U_R(t) = R \cdot I(t)$, $U_C(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$, $I(t) = \dot{Q}(t)$ (wobei $R, C > 0$) folgt

$$U_R(t) + U_C(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{R \cdot C} = 0\,,$$

d.h., die Ladung am Kondensator genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$Q(t) = \widetilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Wenn $Q(0) = Q_0$ die Anfangsbedingung ist, dann ist $\widetilde{c} = Q_0$ und somit

$$Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\ .$$

Für die Kondensatorspannung bekommen wir

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

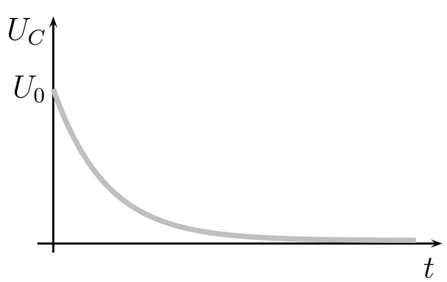
und für die Stromstärke

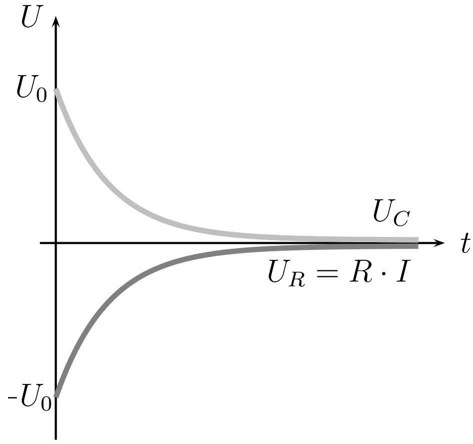
$$I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{R \cdot C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\ .$$

Bezeichnen wir mit $U_0 := \dfrac{Q_0}{C}$ und mit $I_0 := -\dfrac{U_0}{R}$, dann gilt

$$U_C(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \text{und} \quad I(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}},$$

(sog. Entladestrom).





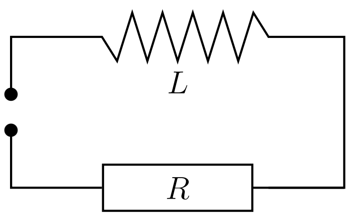
Für die Widerstandspannung gilt

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = -\frac{Q_0}{C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}} = -U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Beachte: Es gilt stets $U_R(t) + U_C(t) = 0$ zu jeder Zeit $t \geqslant 0$.

Der Wert $\tau := R \cdot C$ heißt Zeitkonstante, dann ist $\mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$.

1.6 Ein- und Ausschalten eines Stromkreises mit Spule und Ohm'schem Widerstand



Wir untersuchen einen Stromkreis, bestehend aus einem Ohm'schen Widerstand $R > 0$ und einer Spule mit der Induktivität $L > 0$.

1.6.1 Einschalten des Stroms

Die Stromquelle wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eingeschaltet und mit einer konstanten Spannung U_0 betrieben. Nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz gilt:

$$U_0 = U_R(t) + U_L(t), \quad t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0},$$

wobei wir mit U_R die Spannung am Widerstand und mit U_L die Spannung an der Spule bezeichnen. Es gilt:

$$U_R(t) = R \cdot I(t), \quad U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t),$$

wobei $I := I(t)$ die Stromstärke im Kreis ist. Dann

$$U_R(t)+U_L(t) = U_0 \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot I(t)+L \cdot \dot{I}(t) = U_0 \quad \underset{L>0}{\Leftrightarrow} \quad \dot{I}(t)+\frac{R}{L} \cdot I(t) = \frac{U_0}{L},$$

d.h., die Stromstärke genügt einer linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0\,.$$

Nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$\widetilde{I}(t) = \widetilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

Nach Bemerkung 1.4.1 suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Form

$$I^*(t) = A, \qquad \text{mit } A \in \mathbb{R}, \text{ dann ist} \quad \dot{I}^*(t) = 0\,,$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$0 + \frac{R}{L} \cdot A = \frac{U_0}{L} \quad \underset{R,L>0}{\Longleftrightarrow} \quad A = \frac{U_0}{R}\,.$$

Dann ist $I^*(t) = \dfrac{U_0}{R}$ eine partikuläre und

$$I(t) = \widetilde{I}(t) + I^*(t) = \widetilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ erhalten wir

$$\widetilde{c} + \frac{U_0}{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c} = -\frac{U_0}{R} \quad \text{und somit} \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)\,.$$

Für die Widerstandspannung bekommen wir

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = U_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) \, .$$

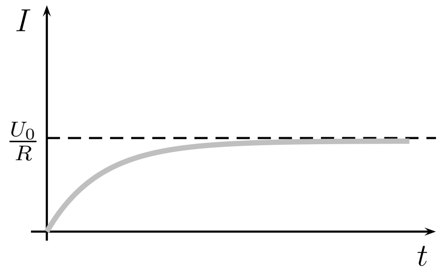
Es gilt

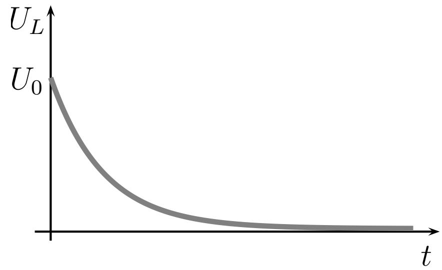
$$\dot{I}(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

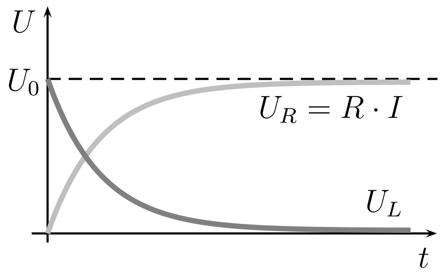
und für die Spulenspannung folgt

$$U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

Beachte: Es gilt stets $U_R(t) + U_L(t) = U_0$ zu jeder Zeit $t \geqslant 0$.







1.6.2 Ausschalten des Stroms

Die Stromquelle wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ausgeschaltet. Nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz gilt:

$$U_R(t) + U_L(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$$

mit $U_R(t) = R \cdot I(t)$ und $U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t)$. Somit

$$U_R(t) + U_L(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t) = 0 \quad \underset{L>0}{\Leftrightarrow} \quad \dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0 \, ,$$

d.h., die Stromstärke genügt einer linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Nach Bemerkung 1.2.7 ist

$$I(t) = \widetilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ folgt $\widetilde{c} = I_0$ und somit

$$I(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

Für die Widerstandspannung bekommen wir

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}\,.$$

Bezeichnen wir mit $U_0 \coloneqq R \cdot I_0$ dann gilt

$$U_R(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}\,.$$

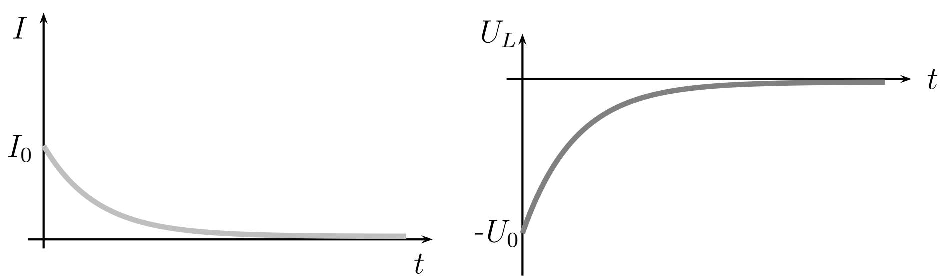
Ferner ist

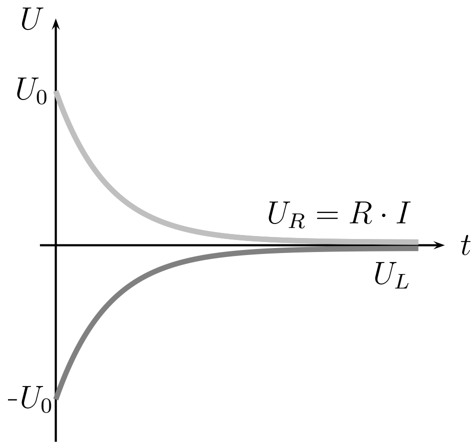
$$\dot{I}(t) = I_0 \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t} = -\frac{U_0}{L} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t},$$

sodass für die Spulenspannung folgt

$$U_L(t) = L \cdot I(t) = -U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} \cdot t}\,.$$

Beachte: Es gilt stets $U_R(t) + U_L(t) = 0$ zu jeder Zeit $t \geqslant 0$.





Der Wert $\tau := \dfrac{L}{R}$ heißt <u>Zeitkonstante</u>, dann ist $\quad \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$.

2 Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Vorbemerkung: Im Folgenden werden wir Differenzengleichungen auf der Menge $\mathbb{N}_0$ untersuchen. Analoge Betrachtungen lassen sich auf $\mathbb{Z}^{\geqslant n_0} := \{n_0, n_0+1, \ldots\}$ mit einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ oder auf der ganzen Menge $\mathbb{Z}$ durchführen.

2.1 Anfangswertproblem für lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Definition 2.1.1

Gegeben seien die Funktionen $p, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Gesucht ist eine Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f(n). \tag{2.1.1}$$

Gleichung (2.1.1) *heißt <u>lineare Differenzengleichung erster Ordnung</u>. Die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Gleichung* (2.1.1).

Satz und Definition 2.1.2

Gegeben seien die Funktionen $p, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist, sowie $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert für beliebiges $\mu_0 \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{N}_0$ <u>genau eine</u> Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \qquad\qquad x(n_0) = \mu_0\,. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

BEWEIS:

Existenz:

Ist der Wert $x(n_0)$ an einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gegeben, so ist auch der Wert an der Stelle $(n_0 + 1)$ bereits bestimmt:

$$x(n_0 + 1) = f(n_0) - p(n_0) \cdot x(n_0)\,.$$

Für $(n_0 - 1) \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir aus der Gültigkeit der Differenzengleichung

$$x(n_0 - 1) = \frac{f(n_0 - 1) - x(n_0)}{p(n_0 - 1)}\,.$$

Sukzessive kann also jeder Wert von $x(.)$ auf $\mathbb{N}_0$ bestimmt werden und es existiert eine Lösung des Anfangswertproblems.

Eindeutigkeit:

Seien $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.2). Dann gilt

$$\begin{cases} x_1(n+1) + p(n) \cdot x_1(n) = f(n), & n \in \mathbb{N}_0\,, \\ x_1(n_0) = \mu_0\,. \end{cases}$$

Aber auch

$$\begin{cases} x_2(n+1) + p(n) \cdot x_2(n) = f(n), & n \in \mathbb{N}_0\,, \\ x_2(n_0) = \mu_0\,. \end{cases}$$

Für $\widetilde{x}(n) := x_2(n) - x_1(n)$ folgt:

$$\begin{cases} \widetilde{x}(n+1) + p(n) \cdot \widetilde{x}(n) = 0, & n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \widetilde{x}(n_0) = 0\,. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Wir beweisen, dass (2.1.3) nur die triviale Lösung $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zulässt:

Wir zeigen zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant n_0$ bereits $\widetilde{x}(n) = 0$ gelten muss:

Mit der Anfangsbedingung haben wir schon $\widetilde{x}(n_0) = 0$. Angenommen, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0 + 1$, sodass $\widetilde{x}(n) \neq 0$ gilt. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant (n_0 + 1) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$ nichtleer.

Sei $s := \min\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant (n_0+1) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$. Dann gilt $\widetilde{x}(s-1) = 0$. Nach (2.1.3) folgt $\widetilde{x}(s) = -p(s-1) \cdot \widetilde{x}(s-1) = 0$, im Widerspruch zur Auswahl von s. Also ist $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant n_0$.

Ist $n_0 = 0$, so folgt somit sofort $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Jetzt zeigen wir, dass auch die Behauptung $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leqslant (n_0 - 1)$ folgt:

Andernfalls wäre die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leqslant (n_0 - 1) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$ nichtleer und es existierte $t := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leqslant (n_0-1) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$. Dann gilt $\widetilde{x}(t+1) = 0$. Wegen

$$\underbrace{\widetilde{x}(t+1)}_{=0} + p(t) \cdot \widetilde{x}(t) = 0 \quad \text{und} \quad p(t) \neq 0 \quad \text{folgt} \quad \widetilde{x}(t) = 0,$$

im Widerspruch zur Auswahl von t. Also ist auch $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leqslant (n_0 - 1)$.

Wir haben gezeigt, dass das Anfangswertproblem (2.1.3) nur die triviale Lösung $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt, d.h., es gilt $x_1(n) = x_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Lösung von (2.1.2) eindeutig bestimmt. □

Bemerkung und Definition 2.1.3
Ist $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt Gleichung (2.1.1) lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung, andernfalls heißt diese lineare inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung.

2.2 Lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung

Wir untersuchen zuerst die homogene Gleichung

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = 0 \tag{2.2.1}$$

(dabei ist die Funktion $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben).

Satz 2.2.1
Sei $x_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *eine Lösung von* (2.2.1), *dann ist* $x(n) \coloneqq c \cdot x_1(n)$ *ebenfalls eine Lösung von* (2.2.1), *wobei* $c \in \mathbb{R}$ *eine beliebige Konstante ist.*

Beweis:
Da x_1 eine Lösung von (2.2.1) ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x_1(n+1) + p(n) \cdot x_1(n) = 0 \tag{2.2.2}$$

Dann folgt für $x(n) \coloneqq c \cdot x_1(n)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist:

$$\begin{aligned} x(n+1) + p(n) \cdot x(n) &= c \cdot x_1(n+1) + p(n) \cdot c \cdot x_1(n) \\ &= c \cdot (x_1(n+1) + p(n) \cdot x_1(n)) \\ &\overset{(2.2.2)}{=} 0 \qquad \text{auf } \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Nach Definition 2.1.1 ist also $x(n) \coloneqq c \cdot x_1(n)$ eine Lösung von (2.2.1) auf $\mathbb{N}_0$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. □

Bemerkung 2.2.2
Die Funktion $x_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$x_1(n) \coloneqq (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k)$$

ist eine Lösung von (2.2.1) *auf* $\mathbb{N}_0$. *Dabei gilt für* $n = 0$ *nach Definition des leeren Produktes*

$$x_1(0) = (-1)^0 \cdot 1 = 1\,.$$

In der Tat gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} x_1(n+1) + p(n) \cdot x_1(n) &= (-1)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} p(k) + p(n) \cdot (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k) \\ &= (-1)^n \cdot \left(-\prod_{k=0}^{n} p(k) + p(n) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k) \right) \\ &= (-1)^n \cdot \left(-\prod_{k=0}^{n} p(k) + \prod_{k=0}^{n} p(k) \right) = 0\,. \end{aligned}$$

Satz und Definition 2.2.3

Allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung

Jede Lösung $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *von* (2.2.1) *lässt sich in der Form* $x(n) = c \cdot x_1(n)$ *darstellen, wobei*

$$x_1(n) = (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k) \tag{2.2.3}$$

und der Koeffizient $c \in \mathbb{R}$ *eindeutig bestimmt ist. Lässt man in* $c \cdot x_1(n)$ *die Zahl* c *die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man* alle *Lösungen der Gleichung* (2.2.1). *Man sagt: Durch* $x(n) = c \cdot x_1(n)$ *ist die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung* (2.2.2) *gegeben.*

Beweis:

Nach Bemerkung 2.2.2 und Satz 2.2.1 ist jede Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ der Form $x(n) := c \cdot x_1(n)$ mit

$$x_1(n) = (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k)$$

immer eine Lösung von (2.2.1) für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Sei $\widetilde{x} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung von (2.2.1). Wir zeigen: Es existiert ein $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$, sodass auf $\mathbb{N}_0$ gilt: $\widetilde{x}(n) = \widetilde{c} \cdot x_1(n)$.

Da $\widetilde{x}$ eine Lösung von (2.2.1) ist, gilt $\widetilde{x}(n+1) + p(n) \cdot \widetilde{x}(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$. Die Funktion $z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$z(n) := \frac{\widetilde{x}(n)}{x_1(n)}$$

ist auf $\mathbb{N}_0$ definiert, denn $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$z(n+1) = \frac{\widetilde{x}(n+1)}{x_1(n+1)} = \frac{-p(n) \cdot \widetilde{x}(n)}{-p(n) \cdot x_1(n)} = \frac{\widetilde{x}(n)}{x_1(n)} = z(n)$$

Somit ist z konstant auf $\mathbb{N}_0$. Also existiert ein $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{\widetilde{x}(n)}{x_1(n)} = \widetilde{c}$ auf $\mathbb{N}_0$. Dann ist jede Lösung von (2.2.1) in der Form $c \cdot x_1(n)$ mit

$$x_1(n) = (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k)$$

und $c \in \mathbb{R}$ darstellbar. $\square$

Beispiel 2.2.4

$$x(n+1) - (n+1) \cdot x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{2.2.4}$$

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$p(n) = (-1) \cdot (n+1) \,.$$

Dann ist

$$\prod_{k=0}^{n-1} p(k) = \prod_{k=0}^{n-1} (-1) \cdot (k+1) = (-1)^n \cdot n! \,.$$

Nach Bemerkung 2.2.2 ist

$$x_1(n) = (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k) = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot n! = n!$$

eine Lösung und nach Satz 2.2.3 ist

$$x(n) = c \cdot n! \quad \text{mit beliebigem} \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (2.2.4) auf $\mathbb{N}_0$.

Folgerung 2.2.5 (Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems)
Gegeben sei die Funktion $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist, sowie $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert für beliebiges $\mu_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = 0, & n \in \mathbb{N}_0 \,, \\ \qquad\qquad\qquad x(n_0) = \mu_0 \,. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Beweis:
Nach Satz 2.2.3 ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) = c \cdot (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k)$$

und beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{N}_0.$$

Mit dem Anfangswert $\mu_0 \in \mathbb{R}$ können wir die Konstante eindeutig auswählen:

$$x(n_0) = \mu_0 \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot (-1)^{n_0} \cdot \prod_{k=0}^{n_0-1} p(k) = \mu_0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{\mu_0}{(-1)^{n_0} \cdot \prod\limits_{k=0}^{n_0-1} p(k)} .$$

Also ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) \coloneqq \mu_0 \cdot (-1)^{n-n_0} \cdot \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} p(k)}{\prod\limits_{k=0}^{n_0-1} p(k)}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (2.2.5). □

Beachte: Es gilt

$$x(n) = \begin{cases} \mu_0 \cdot (-1)^{n-n_0} \cdot \prod\limits_{k=n_0}^{n-1} p(k), & \text{falls} \quad n \geqslant n_0 + 1, \\ \mu_0, & \text{falls} \quad n = n_0, \\ \mu_0 \cdot (-1)^{n-n_0} \cdot \dfrac{1}{\prod\limits_{k=n}^{n_0-1} p(k)}, & \text{falls} \quad 0 \leqslant n \leqslant n_0 - 1 . \end{cases}$$

Beispiel 2.2.6 (Anfangswertproblem)

$$\begin{cases} x(n+1) + \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \cdot x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 , \\ x(5) = 12 . \end{cases} \tag{2.2.6}$$

1) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$p(n) = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} .$$

Dann ist

$$\prod_{k=0}^{n-1} p(k) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{k+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Nach Bemerkung 2.2.2 ist

$$x_1(n) = (-1)^n \cdot (n+1)$$

eine Lösung und nach Satz 2.2.3 ist

$$x(n) = c \cdot (-1)^n \cdot (n+1)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung

$$x(n+1) + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot x(n) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{N}_0.$$

2) Weiter gilt

$$x(5) = 12 \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot (-1)^5 \cdot 6 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2$$

Also ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) = (-2) \cdot (-1)^n \cdot (n+1) = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n+1)$$

die Lösung des Anfangswertproblems (2.2.6).

Bemerkung 2.2.7

Lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Sei $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Gesucht ist eine Funktion* $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, *sodass für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$x(n+1) + p \cdot x(n) = 0. \tag{2.2.7}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *ist hier* $p(n) = p$ *und*

$$\prod_{k=0}^{n-1} p(k) = \prod_{k=0}^{n-1} p = p^n$$

Nach Bemerkung 2.2.2 ist die Funktion $x_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$x_1(n) := (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k) = (-1)^n \cdot p^n = (-p)^n$$

eine Lösung und nach Satz 2.2.3 ist

$$x(n) = c \cdot x_1(n) = c \cdot (-p)^n$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung der Gleichung* (2.2.7) *auf* $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.2.8
Seien $b, q \in \mathbb{R}$. Die unendliche Folge $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}_0}$ die rekursiv durch $b_n \coloneqq b_{n-1} \cdot q$ für $n \geqslant 1$ mit dem Anfangsglied $b_0 \coloneqq b$ definiert ist, heißt geometrische Folge. Wir können diese als folgendes Anfangswertproblem auffassen:

$$\begin{cases} x(n+1) - q \cdot x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \qquad\qquad\qquad x(0) = b\,. \end{cases}$$

I. Fall $q \neq 0$

1) Nach Bemerkung 2.2.7 ist $x(n) = c \cdot (-(-q))^n = c \cdot q^n$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung $x(n+1) - q \cdot x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$.

2) Weiter gilt

$$x(0) = b \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot q^0 = b \quad \Leftrightarrow \quad c = b\,.$$

Also ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x(n) \coloneqq b \cdot q^n$ die eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems.

II. Fall $q = 0$

Dann gilt

$$\begin{cases} x(n+1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \qquad x(0) = b\,. \end{cases}$$

Für alle $q \in \mathbb{R}$ gilt hierbei $q^0 \coloneqq 1$. Also ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x(n) \coloneqq b \cdot q^n$ auch in diesem Fall die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Bemerkung: Für die geometrische Folge $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt: $\quad b_n = b \cdot q^n$.

2.3 Lineare inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung

Satz 2.3.1
Gegeben seien die Funktionen $p, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann lässt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der inhomogenen Differenzengleichung erster Ordnung

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f(n) \tag{2.3.1}$$

auf $\mathbb{N}_0$ *schreiben als:* $\mathbb{L} = x^*(n) + \mathbb{L}_0$, *wobei* $\mathbb{L}_0$ *die Lösungsmenge der entsprechenden homogenen Differenzengleichung*

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = 0$$

und $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist.*

Beweis:

Wir haben bereits in Satz 2.2.3 gesehen, dass $\mathbb{L}_0$ nichtleer ist. Wir werden in Bemerkung 2.3.4 zeigen, dass auch $\mathbb{L} \neq \varnothing$, mit anderen Worten existiert eine partikuläre Lösung $x^*(n)$ von (2.3.1) und es gilt auf $\mathbb{N}_0$

$$x^*(n+1) + p(n) \cdot x^*(n) = f(n)\,.$$

1. Sei $x_L(n) \in \mathbb{L}$ eine beliebige Lösung von (2.3.1). Dann gilt

   $$x_L(n+1) + p(n) \cdot x_L(n) = f(n)$$

   auf $\mathbb{N}_0$ und somit

   $$x_L(n+1) - x^*(n+1) + p(n) \cdot (x_L(n) - x^*(n)) = 0\,.$$

   D.h., $\widetilde{x}(n) = x_L(n) - x^*(n)$ ist eine Lösung der homogenen Differenzengleichung

   $$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = 0 \tag{2.3.2}$$

   auf $\mathbb{N}_0$. Also gilt für <u>jedes</u> $x_L(n) \in \mathbb{L} : x_L(n) = x^*(n) + \widetilde{x}(n) \in x^*(n) + \mathbb{L}_0$ und $\mathbb{L} \subseteq x^*(n) + \mathbb{L}_0$.

2. Sei $\widetilde{x}(n) \in \mathbb{L}_0$ eine beliebige Lösung der homogenen Differenzengleichung. Dann gilt auf $\mathbb{N}_0$:

   $$\widetilde{x}(n+1) + p(n) \cdot \widetilde{x}(n) = 0$$

   Da $x^*(n)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (2.3.1) ist, folgt:

   $$\widetilde{x}(n+1) + x^*(n+1) + p(n) \cdot (\widetilde{x}(n) + x^*(n)) = f(n)\,.$$

   D.h., $x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n)$ ist eine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (2.3.1) auf $\mathbb{N}_0$. Also gilt für jedes $\widetilde{x}(n) \in \mathbb{L}_0 : x^*(n) + \widetilde{x}(n) \in \mathbb{L}$ und $x^*(n) + \mathbb{L}_0 \subseteq \mathbb{L}$.

Insgesamt haben wir $\mathbb{L} = x^*(n) + \mathbb{L}_0$ gezeigt. □

Folgerung 2.3.2
Wie wir schon wissen, ist

$$x_1(n) := (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k)$$

immer eine Lösung der homogenen Differenzengleichung (2.3.2) *auf* $\mathbb{N}_0$. *Lässt man in* $c \cdot x_1(n)$ *die Zahl* c *die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man* <u>*alle*</u> *Lösungen der Gleichung* (2.3.2).

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$*:*

$$\mathbb{L}_0 = \{c \cdot x_1(n) : c \in \mathbb{R}\},$$

dabei heißt $c \cdot x_1(n)$ *allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung. Ist jetzt* $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung* (2.3.1), *dann gilt nach Satz 2.3.1 für die Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ *:*

$$\mathbb{L} = \{c \cdot x_1(n) + x^*(n) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Man sagt: Durch

$$x(n) = c \cdot x_1(n) + x^*(n)$$

ist die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung erster Ordnung (2.3.1) *gegeben.*

Oder auch: Die allgemeine Lösung der linearen <u>*inhomogenen*</u> *Differenzengleichung erster Ordnung hat die Form*

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n),$$

wobei $\widetilde{x}(n)$ *die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung und* $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist.*

Beispiel 2.3.3

Seien $a, d \in \mathbb{R}$. Die unendliche Folge $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch

$$a_n := a_{n-1} + d$$

für $n \geqslant 1$ mit dem Anfangsglied $a_0 := a$ definiert ist, heißt arithmetische Folge. Wir können diese als folgendes Anfangswertproblem auffassen:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = d, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \qquad\qquad x(0) = a\,. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - x(n) = 0\,.$$

Hier gilt $p = -1$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c \cdot (-(-1))^n = c$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung

$$x(n+1) - x(n) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{N}_0.$$

2) Wie ist nun $x^*(n)$ zu wählen, falls $d \neq 0$?

Dazu betrachten wir den Ansatz $x^*(n) := A \cdot n$ mit $A \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x^*(n+1) = A \cdot (n+1)$$

und

$$x^*(n+1) - x^*(n) = d \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot (n+1) - A \cdot n = d \quad \Leftrightarrow \quad A = d\,.$$

Dann ist $x^*(n) = d \cdot n$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c + d \cdot n$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

3) Weiter gilt

$$x(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad c = a\,.$$

Also ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) := a + d \cdot n$$

die Lösung dieses Anfangswertproblems.

Bemerkung: Für die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt: $\quad a_n = a + d \cdot n\,.$

Bemerkung 2.3.4 (Variation der Konstanten)

Gegeben seien die Funktionen $p, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Nach Bemerkung 2.2.2 ist $x_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x_1(n) := (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k)$$

eine Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = 0$$

auf $\mathbb{N}_0$. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f(n)$$

findet man nach dem Verfahren der Variation der Konstanten:

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = c(n) \cdot x_1(n), \tag{2.3.4}$$

wobei $c : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion ist. Dann gilt:

$$x^*(n+1) = c(n+1) \cdot x_1(n+1).$$

In die Differenzengleichung (2.3.1) *eingesetzt ergibt das auf $\mathbb{N}_0$:*

$$\begin{aligned}
& & c(n+1) \cdot x_1(n+1) + p(n) \cdot c(n) \cdot x_1(n) &= f(n) \\
&\Leftrightarrow & c(n+1) \cdot x_1(n+1) - c(n) \cdot x_1(n+1) + c(n) \cdot x_1(n+1) & \\
& & + p(n) \cdot c(n) \cdot x_1(n) &= f(n) \\
&\Leftrightarrow & (c(n+1) - c(n)) \cdot x_1(n+1) + c(n) \cdot \underbrace{(x_1(n+1) + p(n) \cdot x_1(n))}_{=0} &= f(n) \\
&\Leftrightarrow & (c(n+1) - c(n)) \cdot x_1(n+1) &= f(n),
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Funktion x_1 Lösung der homogenen Differenzengleichung ist. Da

$$x_1(n+1) = (-1)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} p(k) \neq 0$$

auf $\mathbb{N}_0$ ist, erhalten wir

$$c(n+1) - c(n) = \frac{f(n)}{x_1(n+1)}\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} && c(n+1) - c(0) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{x_1(k+1)} \\ \Leftrightarrow && c(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{x_1(k+1)} + c(0) \end{aligned}$$

sowie

$$c(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)} + c(0)\,,$$

wobei $c(0) \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

Beispiel 2.3.5

$$x(n+1) - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \cdot x(n) = \frac{2}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2.3.5}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \cdot x(n) = 0\,. \tag{2.3.5h}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\quad p(n) = (-1) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2$. Nach Bemerkung 2.2.2 ist

$$\begin{aligned} x_1(n) &= (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (-1) \cdot \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 \\ &= (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

eine Lösung und nach Satz 2.2.3 ist

$$\widetilde{x}(n) = \widetilde{c} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.3.5h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir suchen nun $x^*(n)$ mit dem Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 2.3.4 erhalten wir auf $\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} c(n) - c(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2 \cdot (k+2)^2}{k+2} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+2) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k + 4 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 4 \cdot n \\ &= n^2 + 3n \,. \end{aligned}$$

Also ist

$$c(n) = n^2 + 3n + c(0) \,.$$

Wir nehmen (z.B.) $c(0) = 2$ und bekommen folgende partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} x^*(n) = c(n) \cdot x_1(n) &= \frac{n^2 + 3n + 2}{(n+1)^2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (2.3.5) auf $\mathbb{N}_0$ ist somit

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = \widetilde{c} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n+2}{n+1} \quad \text{mit} \quad \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 2.3.6 (Konstruktion der Lösung des Anfangswertproblems)

$$\begin{cases} x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \,, \\ \qquad\qquad x(n_0) = \mu_0 \,. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Beweis:
Nach Satz 2.1.2 existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (2.3.6). Diese kann wie folgt konstruiert werden: Nach Satz 2.2.3 ist

$$\widetilde{x}(n) = \widetilde{c} \cdot x_1(n) \quad \text{mit beliebigem} \quad \widetilde{c} \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$, wobei

$$x_1(n) := (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} p(k) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Bemerkung 2.3.4 betrachten wir die Funktion $c : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$c(n) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)} \,,$$

wobei wir hierbei

$$c(0) := \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)},$$

gewählt haben. Es ist also

$$c(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)}, & \text{falls} \quad n \geqslant n_0 + 1, \\[2ex] 0, & \text{falls} \quad n = n_0, \\[2ex] \displaystyle -\sum_{k=n}^{n_0-1} \frac{f(k)}{x_1(k+1)}, & \text{falls} \quad 0 \leqslant n \leqslant n_0 - 1\,. \end{cases}$$

Die Funktion $x^* : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x^*(n) := c(n) \cdot x_1(n)$$

ist eine partikuläre Lösung und

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = (\widetilde{c} + c(n)) \cdot x_1(n)$$

die <u>allgemeine</u> Lösung der inhomogenen Differenzengleichung

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f(n) \qquad \text{auf } \mathbb{N}_0.$$

Mit dem Anfangswert $\mu_0 \in \mathbb{R}$ können wir nun die Konstante $\widetilde{c}$ bereits eindeutig bestimmen:

$$x(n_0) = \mu_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{c} + \underbrace{c(n_0)}_{=0}) \cdot x_1(n_0) = \mu_0 \underset{x_1(n_0)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \widetilde{c} = \frac{\mu_0}{x_1(n_0)} .$$

Also ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) := \left(\frac{\mu_0}{x_1(n_0)} + c(n) \right) \cdot x_1(n)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (2.3.6). □

Satz 2.3.7 (Superpositionsprinzip)
Gegeben seien die Funktionen $p, f_1, f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*, wobei* $p(n) \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist. Seien weiter* $x_1^*(n)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f_1(n) \tag{2.3.7a}$$

und $x_2^*(n)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f_2(n) . \tag{2.3.7b}$$

Dann ist

$$x^*(n) := x_1^*(n) + x_2^*(n)$$

eine partikuläre Lösung von

$$x(n+1) + p(n) \cdot x(n) = f_1(n) + f_2(n) . \tag{2.3.8}$$

Beweis:
Einsetzen von $x^*(n)$ in (2.3.8) liefert die Behauptung, weil $x_1^*(n)$ und $x_2^*(n)$ partikuläre Lösungen der entsprechenden Gleichungen sind.
In der Tat gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} x^*(n+1) + p(n) \cdot x^*(n) &= (x_1^*(n+1) + x_2^*(n+1)) \\ &\qquad + p(n) \cdot (x_1^*(n) + x_2^*(n)) \\ &= (x_1^*(n+1) + p(n) \cdot x_1^*(n)) \\ &\qquad + (x_2^*(n+1) + p(n) \cdot x_2^*(n)) \\ &\underset{(2.3.7b)}{\overset{(2.3.7a)}{=}} f_1(n) + f_2(n) . \end{aligned}$$

□

2.4 Lineare inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Bemerkung 2.4.1

Gegeben seien eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *und eine reelle Zahl* $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Gesucht ist eine Funktion* $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*, sodass für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$x(n+1) + p \cdot x(n) = f(n)\,. \tag{2.4.1}$$

Nach Folgerung 2.3.2 und Bemerkung 2.2.7 hat die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung (2.4.1) *die Form*

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n),$$

wobei

$$\widetilde{x}(n) = c \cdot (-p)^n \quad \textit{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Differenzengleichung

$$x(n+1) + p \cdot x(n) = 0$$

und $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist. In Bemerkung 2.3.4 haben wir* $x^*(n)$ *mit dem Verfahren der Variation der Konstanten gesucht. Wir betrachten nun die Form partikulärer Lösungen* $x^*(n)$ *von* (2.4.1) *für einige Sonderfälle der rechten Seite* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*.*

i) $f(n) := \gamma^n \cdot P_m(n)$*, wobei* $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *und* $P_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* $m \in \mathbb{N}_0$ *ist.*

   a) $\underline{\gamma \neq -p}$*. Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form*

$$x^*(n) = \gamma^n \cdot Q_m(n),$$

   wobei $Q_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* m *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

   Beispiel 2.4.2: $x(n+1) + 3x(n) = n^2 - 4n,$

   Beispiel 2.4.3: $x(n+1) - 2x(n) = 4^n \cdot (n+1).$

b) $\underline{\gamma = -p}$. *Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form*

$$x^*(n) = n \cdot \gamma^n \cdot Q_m(n),$$

wobei $Q_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* m *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

Beispiel 2.4.4: $\quad x(n+1) - 5x(n) = 5^n \cdot (n-1)$.

ii) $f(n) := \gamma^n \cdot (P_m(n) \cdot \cos(n\psi) + Q_l(n) \cdot \sin(n\psi))$, *wobei* $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *und* $\psi \in \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$. *Dabei sind* $P_m(n), Q_l(n)$ *Polynome vom Grad* $m, l \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom.*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = \gamma^n \cdot (S_N(n) \cdot \cos(n\psi) + T_N(n) \cdot \sin(n\psi)),$$

wobei $S_N(n), T_N(n)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{l, m\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

Beispiel 2.4.5: $\quad x(n+1) + 2x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$,

Beispiel 2.4.6: $\quad x(n+1) - 4x(n) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$.

Beispiel 2.4.2

$$x(n+1) + 3x(n) = n^2 - 4n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{2.4.2}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) + 3x(n) = 0 \,. \tag{2.4.2h}$$

Hier gilt $p = 3$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c \cdot (-3)^n$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.2h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = 1 \neq -3 = -p$, sowie $P_2(n) = n^2 - 4n$ und suchen nach Bemerkung 2.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = A \cdot n^2 + B \cdot n + D \quad \text{mit } A, B, D \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x^*(n+1) = A \cdot (n+1)^2 + B \cdot (n+1) + D$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (2.4.2) ergibt:

$$\begin{aligned}
& A \cdot (n^2 + 2n + 1) + B \cdot (n+1) + D + 3 \cdot (A \cdot n^2 + B \cdot n + D) = n^2 - 4n \\
\Leftrightarrow \quad & 4A \cdot n^2 + (2A + b + 3B) \cdot n + (A + B + D + 3D) = n^2 - 4n \\
\Leftrightarrow \quad & 4A \cdot n^2 + (2A + 4B) \cdot n + (A + B + 4D) = n^2 - 4n.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 4B = -4 \\ A + B + 4D = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{9}{8} \\ D = \dfrac{7}{32} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = \frac{n^2}{4} - \frac{9}{8} \cdot n + \frac{7}{32}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.2). Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c \cdot (-3)^n + \left(\frac{n^2}{4} - \frac{9}{8} \cdot n + \frac{7}{32} \right)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.2) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.4.3

$$x(n+1) - 2x(n) = 4^n \cdot (n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2.4.3}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - 2x(n) = 0\,. \tag{2.4.3h}$$

Hier gilt $p = -2$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c \cdot 2^n$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.3h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = 4 \neq 2 = -p$, sowie $P_1(n) = n + 1$ und suchen nach Bemerkung 2.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = 4^n \cdot (A \cdot n + B) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x^*(n+1) = 4^{n+1} \cdot (A \cdot (n+1) + B)$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (2.4.3) ergibt:

$$\begin{aligned} & 4^{n+1} \cdot (A \cdot (n+1) + B) - 2 \cdot 4^n \cdot (A \cdot n + B) = 4^n \cdot (n+1) \\ \underset{4^n \neq 0}{\iff} \quad & 4 \cdot (A \cdot (n+1) + B) - 2 \cdot (A \cdot n + B) = n + 1 \\ \iff \quad & 2A \cdot n + (4A + 2B) = n + 1. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4A + 2B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = 4^n \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.3). Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c \cdot 2^n + 4^n \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.3) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.4.4

$$x(n+1) - 5x(n) = 5^n \cdot (n-1), \quad n \in \mathbb{N}_0 . \tag{2.4.4}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - 5x(n) = 0 . \tag{2.4.4h}$$

Hier gilt $p = -5$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c \cdot 5^n$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.4h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = 5 = -p$, sowie $P_1(n) = n - 1$ und suchen nach Bemerkung 2.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = n \cdot 5^n \cdot (A \cdot n + B) = 5^n \cdot (A \cdot n^2 + B \cdot n) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x^*(n+1) = 5^{n+1} \cdot (A \cdot (n+1)^2 + B \cdot (n+1))$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (2.4.4) ergibt:

$$\begin{aligned}
& 5^{n+1} \cdot (A \cdot (n^2 + 2n + 1) + B \cdot (n+1)) \\
& \qquad -5 \cdot 5^n \cdot (A \cdot n^2 + B \cdot n) = 5^n \cdot (n-1) \\
\underset{5^n \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad & 5 \cdot (A \cdot (n^2 + 2n + 1) + B \cdot (n+1)) \\
& \qquad -5 \cdot (A \cdot n^2 + B \cdot n) = n - 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 5 \cdot (2A + B - B) \cdot n + 5 \cdot (A + B) = n - 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 10A \cdot n + 5 \cdot (A + B) = n - 1 .
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ 5A + 5B = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{10} \\ B = -\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = 5^n \cdot \left(\frac{n^2}{10} - \frac{3}{10} \cdot n\right) = \frac{5^{n-1}}{2} \cdot \left(n^2 - 3 \cdot n\right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.4). Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c \cdot 5^n + \frac{5^{n-1}}{2} \cdot \left(n^2 - 3 \cdot n\right)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.4) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.4.5

$$x(n+1) + 2x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2.4.5}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) + 2x(n) = 0\,. \tag{2.4.5h}$$

Hier gilt $p = 2$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c \cdot (-2)^n$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.5h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $P_0(n) = 1$ und $Q(n) \equiv 0$ (Nullpolynom) und suchen nach Bemerkung 2.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
x^*(n+1) &= A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right) \\
&= A \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&\quad + B \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= A \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)
\end{aligned}$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (2.4.5) ergibt:

$$\begin{aligned} &A \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right) + B\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) \\ &\quad + 2\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2A+B)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + (-A+2B)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ -A+2B=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{2}{5} \\ B=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = \frac{1}{5}\cdot\left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.5). Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c\cdot(-2)^n + \frac{1}{5}\cdot\left(2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.5) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.4.6

$$x(n+1) - 4x(n) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right), \quad n\in\mathbb{N}_0 . \tag{2.4.6}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - 4x(n) = 0 . \tag{2.4.6h}$$

Hier gilt $p=-4$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c\cdot 4^n$$

mit beliebigem $c\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.6h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = 2$, $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, $P(n) \equiv 0$ (Nullpolynom) und $Q_0(n) = 1$ und suchen nach Bemerkung 2.4.1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = 2^n \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} x^*(n+1) &= 2^{n+1} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right)\right) \\ &= 2^{n+1} \cdot \left(A \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \end{aligned}$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (2.4.6) ergibt:

$$\begin{aligned} & 2^{n+1} \cdot \left(A \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \\ & \qquad -4 \cdot 2^n \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ \underset{2^n \neq 0}{\iff} \quad & (2B - 4A) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + (-2A - 4B) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -4A + 2B = 0 \\ -2A - 4B = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{10} \\ B = -\dfrac{2}{10} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = -\frac{2^n}{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.6). Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c \cdot 4^n - \frac{2^n}{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.6) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 2.4.7 (Anfangswertproblem)

$$\begin{cases} x(n+1) - \frac{1}{2} \cdot x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2 \cdot (2^n + 1) \cdot (2^{n+1} + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ x(0) = 2. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - \frac{1}{2} \cdot x(n) = 0. \tag{2.4.7h}$$

Hier gilt $p = -\frac{1}{2}$ und nach Bemerkung 2.2.7 haben wir

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ferner ist

$$\widetilde{x}(n) = \widetilde{c} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

mit beliebigem $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.7h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+1) - \frac{1}{2} \cdot x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{2.4.7a}$$

nach Bemerkung 2.4.1 in der Form

$$x_1^*(n) = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot A \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x_1^*(n+1) = (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot A$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung (2.4.7a) ergibt:

$$(n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot A = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\underset{\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad (n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot n \cdot A = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot A = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = 2.$$

Dann ist

$$x_1^*(n) = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.7a) auf $\mathbb{N}_0$.

3) Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+1) - \frac{1}{2} \cdot x(n) = \frac{1}{2 \cdot (2^n + 1) \cdot (2^{n+1} + 1)} \tag{2.4.7b}$$

nach dem Verfahren der Variation der Konstanten in der Form

$$x_2^*(n) = c(n) \cdot x_1(n),$$

wobei $c : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine noch unbekannte Funktion ist.

Nach Bemerkung 2.3.4 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
c(n) - c(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 \cdot (2^k + 1) \cdot (2^{k+1} + 1)} \cdot 2^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{(2^k + 1) \cdot (2^{k+1} + 1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{(2^k + 1) \cdot (2 \cdot 2^k + 1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(2^k + 1)} - \frac{1}{2 \cdot 2^k + 1} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(2^k + 1)} - \frac{1}{2^{k+1} + 1} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1} \,.
\end{aligned}$$

Also ist

$$c(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1} + c(0)\,.$$

Wir wählen (z.B.) $c(0) = 0$. Dann haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Gestalt:

$$c(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1} = \frac{2^n}{(2^n + 1)}\,.$$

Folgt:

$$x_2^*(n) = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n + 1}$$

ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (2.4.7b) auf $\mathbb{N}_0$.

4) Nach dem Superpositionsprinzip (Satz 2.3.7) ist

$$x^*(n) = x_1^*(n) + x_2^*(n)$$

eine partikuläre und

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = \widetilde{c} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^n + 1}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+1) - \frac{1}{2} \cdot x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2 \cdot (2^n + 1) \cdot (2^{n+1} + 1)}$$

auf $\mathbb{N}_0$.

5) Mit Hilfe des Anfangswertes $x(0) = 2$ bekommen wir

$$x(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c} \cdot 1 + 0 + \frac{1}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c} = \frac{3}{2}\,.$$

Dann ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^n + 1}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.4.7).

Beispiel 2.4.8

Im Beispiel 2.2.8 haben wir die geometrische Folge $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch $b_n := b_{n-1} \cdot q$ für $n \geqslant 1$ mit dem Anfangsglied $b_0 := b$ definiert ist, untersucht und gezeigt, dass $b_n = b \cdot q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (für alle $q \in \mathbb{R}$ ist hierbei $q^0 := 1$). Die summierten Glieder dieser Folge bilden eine neue Folge $\langle \sigma_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch $\sigma_n := \sigma_{n-1} + b_n$ für $n \geqslant 1$ mit dem Anfangsglied $\sigma_0 := b_0$ definiert ist. Wir können diese als folgendes Anfangswertproblem auffassen:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = b \cdot q^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ x(0) = b\,. \end{cases} \tag{2.4.8}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - x(n) = 0\,. \tag{2.4.8h}$$

Hier gilt $p = -1$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.8h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+1) - x(n) = b \cdot q^{n+1}\,.$$

<u>I. Fall: $q \neq 1, \quad q \neq 0, \quad b \neq 0$</u>

Nach Bemerkung 2.4.1 suchen wir $x^*(n)$ in der Form

$$x^*(n) = A \cdot b \cdot q^{n+1} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x^*(n+1) = A \cdot b \cdot q^{n+2}.$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt:

$$A \cdot b \cdot q^{n+2} - A \cdot b \cdot q^{n+1} = b \cdot q^{n+1}$$

$$\underset{b\neq 0, q\neq 0}{\iff} \qquad A \cdot (q-1) = 1 \quad \underset{q\neq 1}{\iff} \quad A = \frac{1}{q-1}$$

Dann ist

$$x^*(n) = \frac{b \cdot q^{n+1}}{q-1}$$

eine partikuläre und

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c + \frac{b \cdot q^{n+1}}{q-1}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Mit Hilfe des Anfangswertes $x(0) = b$ bekommen wir

$$x(0) = b \quad \Leftrightarrow \quad c + \frac{b \cdot q}{q-1} = b \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{b}{q-1}\,.$$

Dann ist

$$x(n) = -\frac{b}{q-1} + \frac{b \cdot q^{n+1}}{q-1} = b \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.4.8) in diesem Fall.

II. Fall: $q = 1, \quad b \neq 0$

Die inhomogene Gleichung lautet

$$x(n+1) - x(n) = b\,.$$

Nach Bemerkung 2.4.1 suchen wir $x^*(n)$ in der Form

$$x^*(n) = A \cdot n \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x^*(n+1) = A \cdot (n+1).$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt:

$$A \cdot (n+1) - A \cdot n = b \quad \Leftrightarrow \quad A = b\,.$$

Dann ist $x^*(n) = b \cdot n$ eine partikuläre und

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c + b \cdot n$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Mit Hilfe des Anfangswertes $x(0) = b$ bekommen wir

$$x(0) = b \qquad \Leftrightarrow \qquad c = b\,.$$

Dann ist

$$x(n) = b + b \cdot n = b \cdot (n+1)$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.4.8) in diesem Fall.

III. Fall: $q = 0$ oder $b = 0$

Wir bekommen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \qquad\qquad x(0) = b\,. \end{cases}$$

Nach 1) ist $x(n) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differenzengleichung. Mit Hilfe des Anfangswertes $x(0) = b$ bekommen wir

$$x(0) = b \qquad \Leftrightarrow \qquad c = b\,.$$

Dann ist

$$x(n) = b$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.4.8) in diesem Fall.

Bemerkung: Insgesamt gilt für die summierten Glieder einer geometrischen Folge ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$\sigma_n = \begin{cases} b \cdot \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, & \text{falls} \quad q \neq 1\,, \\ b \cdot (n+1), & \text{falls} \quad q = 1\,. \end{cases}$$

Beispiel 2.4.9

Im Beispiel 2.3.3 haben wir die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch $a_n := a_{n-1} + d$ für $n \geqslant 1$ mit dem Anfangsglied $a_0 := a$ definiert ist, untersucht und gezeigt, dass $a_n = a + d \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Die summierten Glieder dieser Folge bilden eine neue Folge $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch $s_n := s_{n-1} + a_n$ für $n \geqslant 1$ mit dem Anfangsglied $s_0 := a_0$ definiert ist. Wir können diese als folgendes Anfangswertproblem auffassen:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = a + d \cdot (n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ x(0) = a\,. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

1) Die entsprechende homogene Differenzengleichung lautet

$$x(n+1) - x(n) = 0\,. \tag{2.4.9h}$$

Hier gilt $p = -1$ und nach Bemerkung 2.2.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung (2.4.9h) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Nach Bemerkung 2.4.1 suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+1) - x(n) = a + d \cdot (n+1)$$

in der Form

$$x^*(n) = n \cdot (A \cdot n + B) = A \cdot n^2 + B \cdot n \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Wir haben

$$x^*(n+1) = A \cdot (n+1)^2 + B \cdot (n+1)$$

und ein Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & (A \cdot (n+1)^2 + B \cdot (n+1)) - (A \cdot n^2 + B \cdot n) = a + d \cdot (n+1) \\ \Leftrightarrow \quad & 2A \cdot n + (A+B) = a + d \cdot (n+1)\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 2A = d \\ A + B = a + d \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{d}{2} \\ B = a + \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a + \frac{d}{2}\right) \cdot n$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Nach Satz 2.3.1 und Folgerung 2.3.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c + \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a + \frac{d}{2}\right) \cdot n$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

3) Mit Hilfe des Anfangswertes $x(0) = a$ bekommen wir

$$x(0) = a \qquad \Leftrightarrow \qquad c = a.$$

Dann ist

$$x(n) = a + \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a + \frac{d}{2}\right) \cdot n = a \cdot (n+1) + \frac{d \cdot n \cdot (n+1)}{2}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.4.9).

<u>Bemerkung</u>: Für die summierten Glieder einer arithmetischen Folge gilt:

$$s_n = a \cdot (n+1) + \frac{d \cdot n \cdot (n+1)}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

3 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Generalvoraussetzung: Im Folgenden bezeichnet $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, d.h., I ist eine nichtleere zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, die ein nichtleeres Inneres hat. Gehört ein Randpunkt zum Intervall, so betrachten wir für die Differenzierbarkeit in diesem Randpunkt einen einseitigen Grenzwert.

3.1 Anfangswertproblem für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Definition 3.1.1
Gegeben seien die Funktionen $p, q, f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I definiert und stetig sind. Gesucht ist eine zwei mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x). \tag{3.1.1}$$

Gleichung (3.1.1) *heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Gleichung* (3.1.1) *auf dem Intervall I.*

Satz und Definition 3.1.2
Seien die Funktionen $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig, sowie $x_0 \in I$. Dann existiert für beliebige $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ auf I genau eine Lösung des

Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y(x_0) = y_0\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y'(x_0) = y_0'\,. \end{cases}$$

Für einen Beweis verweisen wir auf Heuser [1, Satz 21.4].

Bemerkung und Definition 3.1.3
Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in I$, so heißt Gleichung (3.1.1) *lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, andernfalls heißt diese lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.*

3.2 Lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Wir untersuchen zuerst die homogene Gleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0 \tag{3.2.1}$$

(dabei sind die Funktionen $p, q : I \to \mathbb{R}$ auf I definiert und stetig).

Satz 3.2.1
Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen von (3.2.1)*, dann ist $y(x) := c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ ebenfalls eine Lösung von* (3.2.1) *auf I, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zwei beliebige Konstanten sind.*

BEWEIS:
Da y_1 und y_2 zwei Lösungen von (3.2.1) sind, gilt für alle $x \in I$:

$$y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x) = 0 \tag{3.2.2a}$$

und

$$y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + q(x) \cdot y_2(x) = 0\,. \tag{3.2.2b}$$

Dann folgt für $y(x) := c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$, mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) \\
&= [c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)]'' \\
&\quad + p(x) \cdot [c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)]' \\
&\quad + q(x) \cdot [c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)] \\
&= c_1 \cdot [y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x)] \\
&\quad + c_2 \cdot [y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + q(x) \cdot y_2(x)] \\
&\underset{(3.2.2b)}{\overset{(3.2.2a)}{=}} 0 \quad \text{für alle } x \in I.
\end{aligned}$$

Nach Definition 3.1.1 ist also

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

eine Lösung von (3.2.1) auf I, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. □

Definition 3.2.2 (Komplexwertige Funktion der reellen Variablen)
Eine Abbildung $g : I \to \mathbb{C}$ heißt komplexwertige Funktion der reellen Variablen.

Bemerkung und Definition 3.2.3

i) Jede komplexwertige Funktion $g : I \to \mathbb{C}$ der reellen Variablen lässt sich in der Form $g = u + \mathrm{i} \cdot v$ schreiben, wobei $u, v : I \to \mathbb{R}$ zwei reellwertige Funktionen sind.

ii) Seien die Funktionen $u, v : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig und an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann heißt die komplexwertige Funktion $g := u + \mathrm{i} \cdot v$ an der Stelle x_0 differenzierbar und wir setzten

$$g'(x_0) := u'(x_0) + \mathrm{i} \cdot v'(x_0).$$

iii) Seien die Funktionen $u, v : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig, so besitzen sie dort ihre Stammfunktionen U bzw. V. Dann ist die Funktion $G : I \to \mathbb{C}$ mit $G(x) := U(x) + \mathrm{i} \cdot V(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $g = u + \mathrm{i} \cdot v$ auf I.

In der Tat gilt nach $ii)$ für alle $x \in I$:

$$(G(x))' = (U(x) + \mathrm{i} \cdot V(x))' = U'(x) + \mathrm{i} \cdot V'(x) = u(x) + \mathrm{i} \cdot v(x).$$

Ferner setzen wir

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x := \int u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \cdot \int v(x)\,\mathrm{d}x$$

auf I und

$$\int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x := \int_c^d u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \cdot \int_c^d v(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $[c; d] \subset I$ ein beliebiges beschränktes abgeschlossenes Intervall ist.

iv) Gegeben seien die Funktionen $p, q, f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I definiert und stetig sind. Gesucht ist eine zwei mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{C}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x).$$

Die Funktion $y : I \to \mathbb{C}$ heißt (komplexwertige) Lösung dieser Gleichung.

Beispiel 3.2.4

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\lambda := (\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta) \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}$ auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda x} &= \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\cdot\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x + \mathrm{i}\cdot\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\beta x} \overset{(*)}{=} \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ die EULER'sche Formel[3] benutzt haben:

EULER'sche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\xi} = \cos(\xi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\xi) \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

[3] Leonhard Euler, 1707-1783

i) Nach Definition 3.2.3 ist die komplexwertige Funktion g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' &= \left(\mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)\right)' \\
&= \left(\mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)\right)' + \mathrm{i} \cdot \left(\mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)\right)' \\
&= \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \alpha \cdot \cos(\beta x) + \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot (-\beta) \cdot \sin(\beta x) \\
&\qquad + \mathrm{i} \cdot \left(\mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \alpha \cdot \sin(\beta x) + \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \beta \cdot \cos(\beta x)\right) \\
&\overset{\mathrm{i}^2=-1}{=} \ \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)\right) \\
&\qquad + \mathrm{i} \cdot \beta \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)\right) \\
&= \alpha \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{i} \cdot \beta \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}.
\end{aligned}$$

Also gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist.} \tag{3.2.3}$$

ii) Gilt außerdem $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, d.h., $\lambda = (\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta) \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, so besitzt die komplexwertige Funktion g eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$. Nach Definition 3.2.3 erhalten wir mit beliebigen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \cdot \int \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(**)}{=} \left[\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\alpha \cdot \cos(\beta x) + \beta \cdot \sin(\beta x)\right) + C_1\right] \\
&\qquad + \mathrm{i} \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\alpha \cdot \sin(\beta x) - \beta \cdot \cos(\beta x)\right) + C_2\right] \\
&\overset{\mathrm{i}^2=-1}{=} \ \frac{\alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)\right) \\
&\qquad - \mathrm{i} \cdot \frac{\beta \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)\right) + \underbrace{(C_1 + \mathrm{i} \cdot C_2)}_{=:C} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)\right) \cdot (\alpha - \mathrm{i} \cdot \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + C \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot (\alpha - \mathrm{i} \cdot \beta)}{(\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta) \cdot (\alpha - \mathrm{i} \cdot \beta)} + C = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

D.h., auf $\mathbb{R}$ gilt

$$\int \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + C \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \text{ und } C \in \mathbb{C}. \tag{3.2.4}$$

Übung

Weisen Sie die Umformung $(**)$ in der obigen Rechnung nach.

Satz 3.2.5

Ist $y(x) := u(x) + \mathrm{i}\cdot v(x)$ *mit den reellen Funktionen* $u, v : I \to \mathbb{R}$ *eine komplexwertige Lösung von* (3.2.1), *dann lösen diese beiden Funktionen ebenfalls diese Differentialgleichung.*

Beweis:

Da die Funktion $y = u + \mathrm{i}\cdot v$ eine komplexwertige Lösung von (3.2.1) ist, gilt für alle $x \in I$ (nach Definition 3.1.1):

$$\begin{aligned}
0 &= y''(x) + p(x)\cdot y'(x) + q(x)\cdot y(x)\\
&= [u(x) + \mathrm{i}\cdot v(x)]''\\
&\qquad\qquad + p(x)\cdot[u(x)+\mathrm{i}\cdot v(x)]'\\
&\qquad\qquad\qquad + q(x)\cdot[u(x)+\mathrm{i}\cdot v(x)]\\
&= [u''(x) + p(x)\cdot u'(x) + q(x)\cdot u(x)]\\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}\cdot[v''(x) + p(x)\cdot v'(x) + q(x)\cdot v(x)]\,.
\end{aligned}$$

Für jedes $x \in I$ liefert der Vergleich zweier komplexen Zahlen

$$\begin{cases} u''(x) + p(x)\cdot u'(x) + q(x)\cdot u(x) = 0\,,\\ v''(x) + p(x)\cdot v'(x) + q(x)\cdot v(x) = 0\,. \end{cases}$$

Nach Definition 3.1.1 sind also die Funktionen u, v Lösungen der homogenen Gleichung (3.2.1) auf I.

$\square$

Beispiel 3.2.6

Die komplexwertige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $y(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2x}$ ist eine Lösung der Gleichung

$$y''(x) + 4 \cdot y(x) = 0$$

auf $\mathbb{R}$. In der Tat gilt nach Beispiel 3.2.4 ii) für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = 2\mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2x},\; y''(x) = -4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2x} \text{ und}$$

$$y''(x) + 4 \cdot y(x) = -4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2x} + 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2x} = 0\,.$$

Nach der Euler'schen Formel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2x} = \cos(2x) + \mathrm{i} \cdot \sin(2x)\,.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ seien $u(x) := \cos(2x)$ und $v(x) := \sin(2x)$. Dann gilt auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= -2\sin(2x)\,, & v'(x) &= 2\cos(2x)\,,\\ u''(x) &= -4\cos(2x)\,, & v''(x) &= -4\sin(2x)\,,\\ u''(x) + 4u(x) &= 0\,, & v''(x) + 4v(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

D.h., die Funktionen u, v sind reellwertige Lösungen von $y''(x) + 4 \cdot y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$.

Definition 3.2.7

Seien die Funktionen $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und differenzierbar. Dann heißt die Determinante

$$W(x) := \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Wronski-Determinante[4] *dieser Funktionen.*

Definition 3.2.8

Seien y_1 und y_2 zwei verschiedene Lösungen von (3.2.1). *Dann heißt $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von* (3.2.1) *auf I, falls für die Wronski-Determinante dieser Funktionen stets $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ erfüllt ist.*

[4]Josef Maria Hoëné-Wronski, 1776-1853

Beispiel 3.2.9

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1) $y_1(x) := \mathrm{e}^x$ und $y_2(x) := \mathrm{e}^{-x}$ sind Lösungen dieser Gleichung auf $\mathbb{R}$. In der Tat gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \mathrm{e}^x\,, & y_2'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\,, \\ y_1''(x) &= \mathrm{e}^x\,, & y_2''(x) &= \mathrm{e}^{-x}\,, \\ y_1''(x) - y_1(x) &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = 0\,, & y_2''(x) - y_2(x) &= \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = 0\,. \end{aligned}$$

2) Nach Definition 3.2.7 gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Nach Definition 3.2.8 ist $\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}\}$ ein Fundamentalsystem von $y''(x) - y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$.

Satz 3.2.10

Seien y_1 und y_2 zwei verschiedene Lösungen von (3.2.1). *Existiert ein $x_0 \in I$ mit $W(x_0) \neq 0$, so gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis:

Da die Funktionen $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (3.2.1) sind, gilt für jedes $x \in I$ und jedes $k \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} & y_k''(x) + p(x) \cdot y_k'(x) + q(x) \cdot y_k(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & y_k''(x) = -p(x) \cdot y_k'(x) - q(x) \cdot y_k(x)\,. \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Funktion $W : I \to \mathbb{R}$, wobei

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x)$$

Wronski-Determinante der Funktionen y_1, y_2 auf I ist.

Die Funktion W ist auf I differenzierbar und für jedes $x \in I$ gilt:

$$\begin{aligned}
W'(x) &= [y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x)]' \\
&= y_1'(x) \cdot y_2'(x) + y_1(x) \cdot y_2''(x) - y_1''(x) \cdot y_2(x) - y_1'(x) \cdot y_2'(x) \\
&= y_1(x) \cdot y_2''(x) - y_1''(x) \cdot y_2(x) \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} y_1(x) \cdot [-p(x) \cdot y_2'(x) - q(x) \cdot y_2(x)] \\
&\qquad - [-p(x) \cdot y_1'(x) - q(x) \cdot y_1(x)] \cdot y_2(x) \\
&= -p(x) \cdot y_1(x) \cdot y_2'(x) + p(x) \cdot y_1'(x) \cdot y_2(x) \\
&= -p(x) \cdot [y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x)] \\
&= -p(x) \cdot W(x).
\end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} W'(x) = -p(x) \cdot W(x)\,, \\ W(x_0) = W_0 \quad (\text{mit } W_0 \in \mathbb{R})\,. \end{cases}$$

ist auf I eindeutig lösbar (vgl. Folgerung 1.2.5) und es gilt für jedes $x \in I$:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Somit folgt: Ist $W(x_0) \neq 0$, dann gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

$\square$

Satz und Definition 3.2.11

Allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung.
Sei $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von (3.2.1) *auf I, dann lässt sich jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ von* (3.2.1) *in der Form*

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

darstellen, wobei die Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind.

Lässt man in $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ die Koeffizienten c_1, c_2 unabhängig von einander die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man alle Lösungen der Gleichung (3.2.1).

Man sagt: Durch

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

ist die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

auf I gegeben.

BEWEIS:
Da $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von (3.2.1) ist, ist nach Definition 3.2.8 und Satz 3.2.1 jede Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) := c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

immer eine Lösung von (3.2.1) für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Sei $\widetilde{y} : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung von (3.2.1). Wir zeigen: Es existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass auf I gilt:

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \,.$$

Dazu nehmen wir ein beliebiges $x_0 \in I$ und bestimmen $\widetilde{y}(x_0)$ und $\widetilde{y}'(x_0)$. Wir suchen also $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{cases} c_1 \cdot y_1(x_0) + c_2 \cdot y_2(x_0) = \widetilde{y}(x_0) \,, \\ c_1 \cdot y_1'(x_0) + c_2 \cdot y_2'(x_0) = \widetilde{y}'(x_0) \,. \end{cases} \tag{$*$}$$

Weiter gilt

$$\triangle := \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

da $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von (3.2.1) ist. Dann ist das LGS ($*$) eindeutig für c_1, c_2 lösbar. Sei $\{\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}\}$ diese eindeutige Lösung des LGS ($*$). Wir untersuchen die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) := \widetilde{c_1} \cdot y_1(x) + \widetilde{c_2} \cdot y_2(x).$$

Nach Satz 3.2.1 ist y eine Lösung von (3.2.1) auf I und

$$y(x_0) = \widetilde{c_1} \cdot y_1(x_0) + \widetilde{c_2} \cdot y_2(x_0) = \widetilde{y}(x_0),$$

sowie

$$y'(x_0) = \widetilde{c_1} \cdot y_1'(x_0) + \widetilde{c_2} \cdot y_2'(x_0) = \widetilde{y}'(x_0).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (Satz 3.1.2) gilt für alle $x \in I$:

$$y(x) = \widetilde{y}(x)$$

und

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{c_1} \cdot y_1(x) + \widetilde{c_2} \cdot y_2(x)$$

Dann ist jede Lösung von (3.2.1) in der Form $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ darstellbar. □

Beispiel 3.2.12

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1) $y_1(x) := \cos(x)$ und $y_2(x) := \sin(x)$ sind Lösungen dieser Gleichung auf $\mathbb{R}$. In der Tat gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\sin(x)\,, & y_2'(x) &= \cos(x)\,,\\ y_1''(x) &= -\cos(x)\,, & y_2''(x) &= -\sin(x)\,,\\ y_1''(x) + y_1(x) &= 0\,, & y_2''(x) + y_2(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

2) Nach Definition 3.2.7 gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x)\\ &= 1 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Nach Definition 3.2.8 ist somit $\{\cos(x), \sin(x)\}$ ein Fundamentalsystem von $y''(x) + y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$.

3) Die allgemeine Lösung der Gleichung $y''(x) + y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$ lautet also nach Satz 3.2.11:

$$y(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x) \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.2.13
Sei y_1 eine Lösung von (3.2.1)*, sodass $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann kann man eine zweite Lösung y_2 der Gleichung* (3.2.1) *bestimmen, sodass $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von* (3.2.1) *bildet.*

BEWEIS:
Wir suchen die Lösung y_2 in der Form $y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x)$, wobei $u : I \to \mathbb{R}$ eine unbekannte zweimal differenzierbare Funktion ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= y_1'(x) \cdot u(x) + y_1(x) \cdot u'(x), \\ y_2''(x) &= y_1''(x) \cdot u(x) + 2y_1'(x) \cdot u'(x) + y_1(x) \cdot u''(x). \end{aligned}$$

In die Differentialgleichung (3.2.1) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} & y_1''(x) \cdot u(x) + 2y_1'(x) \cdot u'(x) + y_1(x) \cdot u''(x) \\ & \qquad + p(x) \cdot (y_1'(x) \cdot u(x) + y_1(x) \cdot u'(x)) + q(x) \cdot y_1(x) \cdot u(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{(y''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x))}_{=0} \cdot u(x) \\ & \qquad + y_1(x) \cdot u''(x) + (2y_1'(x) + p(x) \cdot y_1(x)) \cdot u'(x) = 0, \end{aligned}$$

da y_1 eine Lösung von (3.2.1) ist. Die unbekannte Funktion u genügt also der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & y_1(x) \cdot u''(x) + (2y_1'(x) + p(x) \cdot y_1(x)) \cdot u'(x) = 0 \\ \underset{y_1(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & u''(x) + \left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) \cdot u'(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Mit anderen Worten genügt u' einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung auf I. Bezeichnet $P : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von p, so ist $\overline{P}(x) := \ln\left((y_1(x))^2\right) + P(x)$ eine Stammfunktion von $\dfrac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)$. Nach Bemerkung 1.2.2 ist dann

$$u'(x) := \mathrm{e}^{-\ln\left((y_1(x))^2\right) - P(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-P(x)}}{(y_1(x))^2}$$

eine Lösung von (3.2.5) auf I und wir erhalten u als eine Stammfunktion von u'. Mit dieser Funktion u ist also $y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x)$ eine (weitere) Lösung der Gleichung (3.2.1) auf I.

Nach Definition 3.2.7 erhalten wir ferner für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \cdot u(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) \cdot u(x) + y_1(x) \cdot u'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x) \cdot (y_1'(x) \cdot u(x) + y_1(x) \cdot u'(x)) - y_1'(x) \cdot y_1(x) \cdot u(x) \\ &= (y_1(x))^2 \cdot u'(x) = \mathrm{e}^{-P(x)} \neq 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\{y_1, y_2\}$ nach Definition 3.2.8 ein Fundamentalsystem der Gleichung (3.2.1) auf I. □

Beispiel 3.2.14

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.6}$$

1) Wir suchen zunächst eine komplexwertige Lösung y_1 in der Form $y_1(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt nach Beispiel 3.2.4 für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$y_1'(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y_1''(x) = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$y_1''(x) - 2y_1'(x) + y_1(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 2\lambda + 1) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

$$\underset{\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1.$$

Also ist $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ eine reellwertige Lösung der Gleichung (3.2.6) auf $\mathbb{R}$.

2) Wir suchen eine weitere Lösung y_2 in der Form $y_2(x) := \mathrm{e}^x \cdot u(x)$, wobei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine neue unbekannte Funktion ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= (\mathrm{e}^x \cdot u(x))' = \mathrm{e}^x \cdot u(x) + \mathrm{e}^x \cdot u'(x) \quad \text{und} \\ y_2''(x) &= (\mathrm{e}^x \cdot u(x) + \mathrm{e}^x \cdot u'(x))' \\ &= \mathrm{e}^x \cdot u(x) + \mathrm{e}^x \cdot u'(x) + \mathrm{e}^x \cdot u'(x) + \mathrm{e}^x \cdot u''(x) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot u(x) + 2\mathrm{e}^x \cdot u'(x) + \mathrm{e}^x \cdot u''(x). \end{aligned}$$

Mit der Bedingung $y_2''(x) - 2y_2'(x) + y_2(x) = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^x \cdot u(x) + 2\mathrm{e}^x \cdot u'(x) + \mathrm{e}^x \cdot u''(x) \\ & \qquad - 2(\mathrm{e}^x \cdot u(x) + \mathrm{e}^x \cdot u'(x)) + \mathrm{e}^x \cdot u(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \mathrm{e}^x \cdot u''(x) = 0 \quad \underset{\mathrm{e}^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad u''(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & u(x) = m \cdot x + n \quad \text{mit beliebigen} \quad m, n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir nehmen (z.B.) $n = 0$ und $m = 1$, woraus $u(x) = x$ und somit $y_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt. Also ist $y_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$ auch eine Lösung der Gleichung (3.2.6) auf $\mathbb{R}$.

3) Nach Definition 3.2.7 gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x \cdot \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x \cdot x \cdot \mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^{2x} \neq 0\,.$$

Nach Definition 3.2.8 ist somit $\{\mathrm{e}^x, x \cdot \mathrm{e}^x\}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung (3.2.6) auf $\mathbb{R}$.

4) Die allgemeine Lösung der Gleichung (3.2.6) auf $\mathbb{R}$ lautet nach Satz 3.2.11:

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^x + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^x \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.2.15

Die Funktionen $p, q : I \to \mathbb{R}$ seien auf einem Intervall I definiert und stetig. Dann besitzt die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

ein Fundamentalsystem auf I.

Beweis:

Wir wählen ein beliebiges $x_0 \in I$ und finden zwei (spezielle) Lösungen y_1 und y_2 der homogenen Differentialgleichung (3.2.1) mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Nach Satz 3.1.2 sind die Funktionen y_1 und y_2 im ganzen Intervall I eindeutig bestimmt. An der Stelle x_0 erhalten wir für die Wronski-Determinante dieser Funktionen:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Nach Satz 3.2.10 ist $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und nach Definition 3.2.8 ist somit $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von (3.2.1) auf I. □

3.3 Lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.3.1

Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$*. Gesucht ist eine Funktion* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, sodass für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0. \tag{3.3.1}$$

Die Gleichung (3.3.1) *heißt lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Funktion* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt Lösung der Gleichung* (3.3.1) *auf* $\mathbb{R}$*.*

Eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, die* (3.3.1) *erfüllt, heißt komplexwertige Lösung der Gleichung* (3.3.1) *auf* $\mathbb{R}$*.*

Bemerkung und Definition 3.3.2

Wir suchen Lösungen der Gleichung (3.3.1) *in der Form*

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$*. Nach Beispiel 3.2.4 gilt für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$y'(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} .$$

In Gleichung (3.3.1) *eingesetzt:*

$$\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + p \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + q \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

liefert unter Berücksichtigung, dass $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{C}$*:*

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0 \tag{3.3.1c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Gleichung (3.3.1c) *heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung* (3.3.1) *und* $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ *die Diskriminante der charakteristischen Gleichung* (3.3.1c)*.*

Es gilt: Die (komplexwertige) Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *mit* $y(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist genau dann eine (komplexwertige) Lösung von* (3.3.1) *auf* $\mathbb{R}$*, wenn* λ *eine (komplexe) Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung* (3.3.1c) *ist.*

I. Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

Seien $\lambda_1 := -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad \lambda_2 := -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

Dann sind $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ zwei verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung (3.3.1c).

Die reellwertigen Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) := \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) := \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ bilden ein Fundamentalsystem von (3.3.1) auf $\mathbb{R}$. In der Tat:

Die Funktionen y_1, y_2 sind Lösungen von (3.3.1) und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$
$$= \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x} - \lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x + \lambda_2 x} \neq 0,$$

da $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Folgerung 3.3.3

Nach Satz 3.2.11 ist die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$y(x) := c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

und beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung von* (3.3.1) *im Fall* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$.

Beispiel 3.3.4

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 3\,.$$

Seien $\lambda_1 := -1$ und $\lambda_2 := 3$. Dann bilden die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{-x} \quad \text{und} \quad y_2(x) := \mathrm{e}^{3x}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$. Nach Folgerung 3.3.3 ist

$$y(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{R}$.

II. Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

Die reelle Zahl $\lambda := -\frac{p}{2}$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung (3.3.1c) (mit Vielfachheit $r = 2$). Die reellwertige Funktion $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $\lambda = -\frac{p}{2}$ ist eine Lösung von (3.3.1). Wir suchen eine weitere Lösung $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der Form

$$y_2(x) := \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x),$$

wobei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine neue unbekannte Funktion ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
y_2'(x) &= [\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x)]' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x) + \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u'(x), \\
y_2''(x) &= \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x) + 2\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u'(x) + \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u''(x)\,.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& y_2''(x) + p \cdot y_2'(x) + q \cdot y_2(x) = 0 \\
\iff\quad & \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x) + 2\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u'(x) + \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u''(x) \\
& \qquad + p \cdot [\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x) + \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u'(x)] + q \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot u(x) = 0 \\
\iff\quad & [(\lambda^2 + p \cdot \lambda + q) \cdot u(x) + (2\lambda + p) \cdot u'(x) + u''(x)] \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \\
\underset{\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0}{\iff}\quad & \underbrace{(\lambda^2 + p \cdot \lambda + q)}_{=0} \cdot u(x) + \underbrace{(2\lambda + p)}_{=0} \cdot u'(x) + u''(x) = 0,
\end{aligned}$$

da $\lambda = -\frac{p}{2} (\Leftrightarrow 2\lambda + p = 0)$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Es folgt

$$u''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = m \cdot x + n \quad \text{mit beliebigen} \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Wir nehmen (z.B.) $n = 0$ und $m = 1$, woraus $u(x) = x$ und somit

$$y_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

sich ergibt.

Die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y_2(x) := x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ (wobei $\lambda = -\frac{p}{2}$ ist) bilden ein Fundamentalsystem von (3.3.1) auf $\mathbb{R}$. In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x} & x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \\ \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} & \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2\lambda x} \neq 0.$$

Folgerung 3.3.5

Nach Satz 3.2.11 ist die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$y(x) := c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

und beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung von* (3.3.1) *im Fall* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0.$

Beispiel 3.3.6

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -3 \quad \text{(mit Vielfachheit } r = 2\text{)}.$$

Dann bilden die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y_1 := \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{und} \quad y_2 := x \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$. Nach Folgerung 3.3.5 ist

$$y(x) = \mathrm{e}^{-3x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{R}$.

III. Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$

Wegen

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-\left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}$$
$$= -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

sind $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i} \cdot \beta$ mit $\alpha := -\frac{p}{2}$ und $\beta := \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ zwei verschiedene komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung (3.3.1c).

Die komplexwertigen Funktionen $y_1^\star, y_2^\star : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$y_1^\star(x) := \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\cdot\beta)x} \overset{\text{Bsp 3.2.4}}{=} \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x))$$

und

$$\begin{aligned} y_2^\star(x) &:= \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\cdot\beta)x} = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\cdot(-\beta))x} \\ &\overset{\text{Bsp 3.2.4}}{=} \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot (\cos((-\beta)x) + \mathrm{i} \cdot \sin((-\beta)x)) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) - \mathrm{i} \cdot \sin(\beta x)) \end{aligned}$$

sind Lösungen der Gleichung (3.3.1).

Nach Satz 3.2.5 sind somit auch $\mathrm{Re}(y_1^\star(x))$, $\mathrm{Im}(y_1^\star(x))$, $\mathrm{Re}(y_2^\star(x))$ und $\mathrm{Im}(y_2^\star(x))$ Lösungen der Gleichung (3.3.1).

Wir wählen (z.B.)

$$y_1(x) := \mathrm{Re}(y_1^\star(x)) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$

und

$$y_2(x) := \mathrm{Im}(y_1^\star(x)) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x).$$

Dann bilden die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von (3.3.1) auf $\mathbb{R}$. In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) & \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \\ \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) - \beta \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) & \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) + \beta \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{e}^{2\alpha x} \cdot \Big(\alpha \cdot \cos(\beta x) \cdot \sin(\beta x) + \beta \cdot \cos^2(\beta x) \\ &\qquad - \alpha \cdot \cos(\beta x) \cdot \sin(\beta x) + \beta \cdot \sin^2(\beta x)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{2\alpha x} \cdot \beta \cdot \underbrace{(\cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x))}_{=1} = \beta \cdot \mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0, \end{aligned}$$

denn $\mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0$ und $\beta \neq 0$ (s.o.).

Folgerung 3.3.7

Nach Satz 3.2.11 ist im Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ *die Funktion* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\begin{aligned} y(x) &:= c_1 \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x)) \end{aligned}$$

und beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung von* (3.3.1) *auf* $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.3.8

i) $\quad y''(x) + 9y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Die entsprechende charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\, \mathrm{i} \cdot 3\,.$$

Es gilt $\alpha = 0$ und $\beta = 3$. Dann bilden die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y_1(x) := \cos(3x) \quad \text{und} \quad y_2(x) := \sin(3x)$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung $y''(x) + 9y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$.

Nach Folgerung 3.3.7 ist

$$y(x) = c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{R}$.

ii) $\quad y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Die entsprechende charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \pm\, \mathrm{i} \cdot 2\,.$$

Es gilt $\alpha = -1$ und $\beta = 2$. Dann bilden die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos(2x) \quad \text{und} \quad y_2(x) := \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(2x)$$

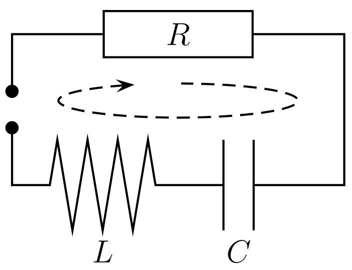
ein Fundamentalsystem der Gleichung $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$.

Nach Folgerung 3.3.7 ist

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x))$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{R}$.

3.4 Gedämpfter elektrischer Schwingkreis



Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus einem OHM'schen Widerstand[5] $R \geqslant 0$, einem Kondensator mit der Kapazität $C > 0$ und einer Spule mit der Induktivität $L > 0$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird der Kondensator geladen und anschließend über den Widerstand und die Spule entladen. Es ergibt sich eine gedämpfte Schwingung.

Nach dem zweiten KIRCHHOFF'schen Gesetz[6] gilt:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}. \tag{3.4.1}$$

Wobei wir mit U_R die Spannung am Widerstand, mit U_C die Spannung am Kondensator und mit U_L die Spannung an der Spule bezeichnen. Es gilt:

$$U_R(t) = R \cdot I(t); \quad U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}; \quad U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t); \quad I(t) = \dot{Q}(t);$$

dabei sind $I := I(t)$ Stromstärke im Schwingkreis und $Q := Q(t)$ Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \cdot \ddot{Q}(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L} \cdot \dot{Q}(t) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q(t) = 0, \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

d.h., die Ladung am Kondensator genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Betrachten wir nun die folgenden Anfangsbedingungen:

$$Q(0) = Q_0 \quad \text{und} \quad I(0) = \dot{Q}(0) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung von (3.4.2) lautet:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0,$$

[5] Georg Simon Ohm, 1789-1854

[6] Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887

und die Diskriminante der charakteristischen Gleichung beträgt

$$D = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C} = \frac{R^2 \cdot C - 4L}{4L^2 \cdot C}$$

I. Fall $D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \cdot C - 4L > 0$

Dann gilt:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0 \quad \underset{D>0}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{D}\,.$$

Seien $\lambda_1 := -\dfrac{R}{2L} - \sqrt{D}$ und $\lambda_2 := -\dfrac{R}{2L} + \sqrt{D}$.

Dann sind $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ zwei verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung. Beachte, dass die beiden Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ negativ sind! Nach Folgerung 3.3.3 ist

$$Q(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung (3.4.2) auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

Für die Ableitung gilt:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = c_1 \cdot \lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem (mit zwei Unbekannten c_1, c_2):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = Q_0 \\ c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{\lambda_2 \cdot Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 = \dfrac{-\lambda_1 \cdot Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases}$$

Dann gilt auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$:

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right)$$

und

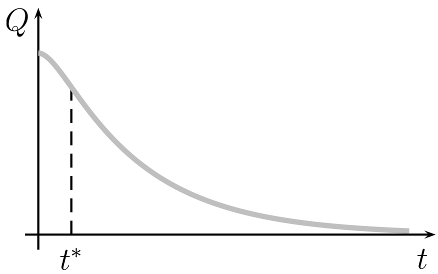
$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right).$$

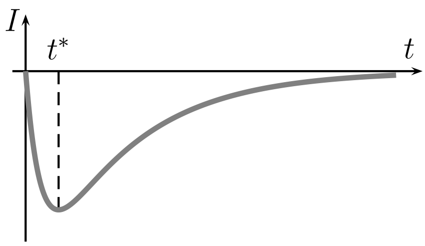
Mit $\lambda_1 = -\dfrac{R}{2L} - \sqrt{D}$ und $\lambda_2 = -\dfrac{R}{2L} + \sqrt{D}$ folgt:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{Q_0}{2\sqrt{D}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \left(\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{D} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{D}\cdot t} - \left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{D} \right) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{D}\cdot t} \right) \\ &= Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \left(\left(-\frac{R}{2L} \right) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{D}\cdot t} - \mathrm{e}^{\sqrt{D}\cdot t}}{2\sqrt{D}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\sqrt{D}\cdot t} + \mathrm{e}^{\sqrt{D}\cdot t} \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$I(t) = \frac{Q_0}{L \cdot C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{D}\cdot t} - \mathrm{e}^{\sqrt{D}\cdot t}}{2\sqrt{D}} .$$





Bemerkung 3.4.1

i) Da $I(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ist, ist $Q(t) \searrow 0$ für $t \to +\infty$. Auch ist $I(t) \to 0$ für $t \to +\infty$.

ii) Weiter gilt:

$$\ddot{Q}(t) = \dot{I}(t) = c_1 \cdot \lambda_1^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

mit $c_1 = \dfrac{\lambda_2 \cdot Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$ *und* $c_2 = \dfrac{-\lambda_1 \cdot Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$, *sodass wir bekommen*

$$\ddot{Q}(t) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \right) .$$

Dann gilt:

$$\ddot{Q}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad \underset{\lambda_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} .$$

Übung

Weisen Sie nach: An der Stelle

$$t^* := \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

hat der Graph der Funktion $Q = Q(t)$ einen Wendepunkt und der Graph der Funktion $I = I(t)$ seinen tiefsten Punkt.

iii) Im Fall $D > 0 \;\Leftrightarrow\; R^2 \cdot C - 4L > 0$ haben wir keine Schwingung im eigentlichen Sinne. Es liegt ein <u>*aperiodisches*</u> *Verhalten vor.*

II. Fall $D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \cdot C = 4L$

Dann gilt:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0 \quad \overset{D=0}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda = -\frac{R}{2L} \quad \text{(mit Vielfachheit } r = 2\text{).}$$

Beachte, dass die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ negativ ist! Nach Folgerung 3.3.5 ist

$$Q(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung (3.4.2) auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

Für die Ableitung gilt:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem (mit zwei Unbekannten c_1, c_2):

$$\begin{cases} c_1 = Q_0 \\ \lambda \cdot c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = Q_0 \\ c_2 = -\lambda \cdot Q_0 \end{cases}$$

Dann gilt auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot (1 - \lambda t) \quad \text{und} \quad I(t) = \dot{Q}(t) = -Q_0 \cdot \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot t\,.$$

Mit $\lambda := -\dfrac{R}{2L}$ folgt:

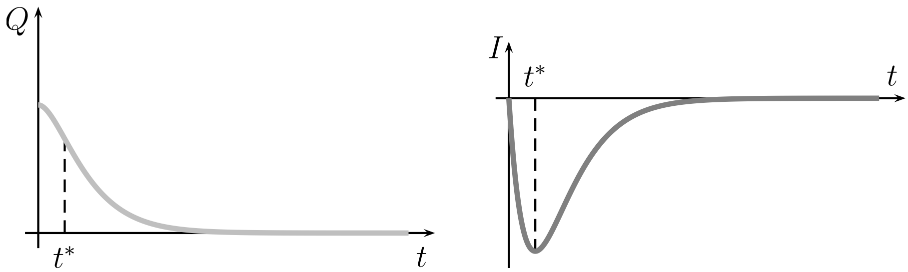
$$Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \left(1 + \frac{R}{2L} \cdot t\right)$$

und

$$I(t) = -\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \cdot Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot t = -\frac{Q_0}{L\cdot C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot t\,.$$

Wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \cdot C = 4L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{L\cdot C}\,.$$



Bemerkung 3.4.2

i) *Da $I(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\lambda < 0$ ist, ist $Q(t) \searrow 0$ für $t \to +\infty$. Auch gilt $I(t) \to 0$ für $t \to +\infty$.*

ii) *Ferner:*

$$\ddot{Q}(t) = \dot{I}(t) = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t) + 2\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot c_2.$$

Mit $c_1 = Q_0$ und $c_2 = -\lambda \cdot Q_0$ bekommen wir

$$\ddot{Q}(t) = -\lambda^2 \cdot Q_0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda \cdot t + 1)\,.$$

Dann gilt:

$$\ddot{Q}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \cdot t + 1 = 0\,.$$

Übung

Weisen Sie nach: An der Stelle

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{R}$$

hat der Graph der Funktion $Q = Q(t)$ einen Wendepunkt und der Graph der Funktion $I = I(t)$ seinen tiefsten Punkt.

iii) Im Fall $D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \cdot C = 4L$ *haben wir keine Schwingung im eigentlichen Sinne. Es liegt ein aperiodisches Verhalten vor.*

iv) Für $x \to 0$ *gilt* $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, *sodass wir für* $D \to 0$ *erhalten:*

$$\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{D}\cdot t} - \mathrm{e}^{\sqrt{D}\cdot t}}{2\sqrt{D}} \approx (-t)\,.$$

Fall I verhält sich somit wie Fall II, wenn $D \to 0$.

III. Fall $\quad D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \cdot C - 4L < 0$

Dann gilt:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0 \quad \underset{D<0}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda = \alpha \pm \mathrm{i} \cdot \beta,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha := -\frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \beta := \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,.$$

Beachte: $\alpha < 0$ und $\beta > 0$. Wir erhalten zwei verschiedene komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung. Nach Folgerung 3.3.7 ist

$$Q(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot \sin(\beta t))$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung (3.4.2) auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} I(t) &= \dot{Q}(t) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot \Big(\alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\beta t) + \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\beta t) \\ &\qquad\qquad - \beta \cdot c_1 \cdot \sin(\beta t) + \beta \cdot c_2 \cdot \cos(\beta t)\Big)\,. \end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem (mit zwei Unbekannten c_1, c_2):

$$\begin{cases} c_1 = Q_0 \\ \alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2 = 0 \end{cases} \quad \underset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} c_1 = Q_0 \\ c_2 = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot Q_0 \end{cases}$$

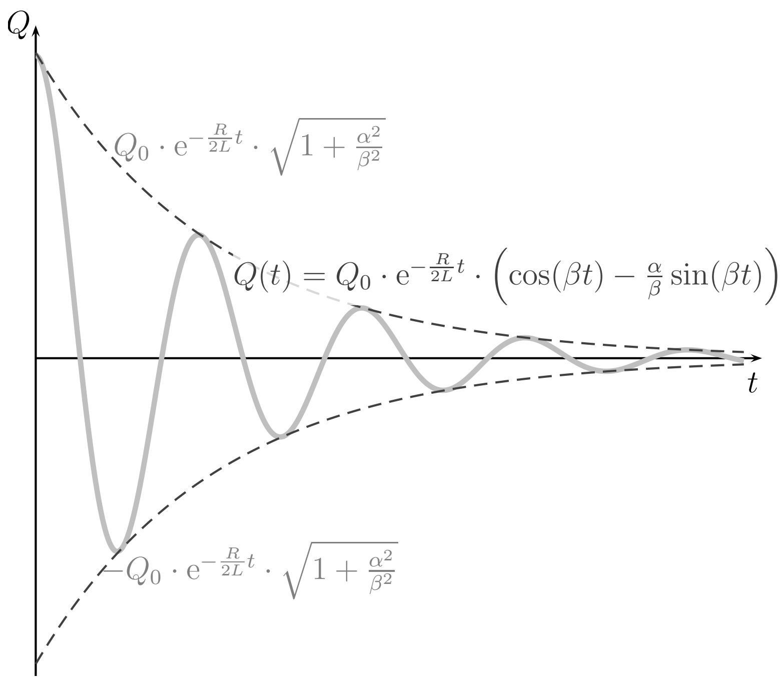
Dann gilt auf $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$:

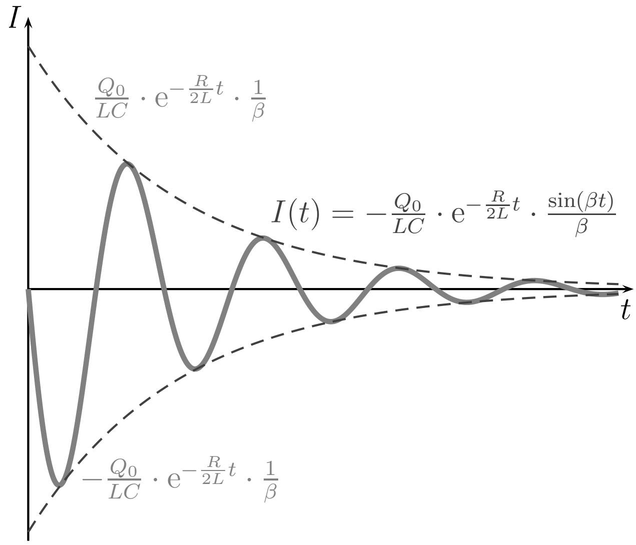
$$Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \left(\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right)$$

und

$$\begin{aligned} I(t) &= \dot{Q}(t) \\ &= Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \left(-\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right) \cdot \sin(\beta t) \\ &= -\frac{Q_0}{L \cdot C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \frac{\sin(\beta t)}{\beta}, \end{aligned}$$

wobei wir $\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{1}{L \cdot C}$ ausgenutzt haben.





Bemerkung 3.4.3

i) Es gilt: $Q(t) \to 0$ *für* $t \to +\infty$. *Auch ist* $I(t) \to 0$ *für* $t \to +\infty$.

ii) Für die elektrische Ladung gilt:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \left(\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin(\beta t)\right)$$

$$\underset{\beta>0}{=} Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} \cdot \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \sin(\beta t)\right)$$

$$= Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} \cdot \cos(\beta t + \varphi)$$

wobei der Winkel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ *eindeutig festgelegt ist durch*

$$\cos(\varphi) := \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} > 0 \quad \textit{und} \quad \sin(\varphi) := \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 0.$$

iii) Im Fall $D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \cdot C - 4L < 0$ *haben wir eine gedämpfte Schwingung (bei schwacher Dämpfung).*

iv) *Für $x \to 0$ gilt $\sin(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$ ist, sodass wir für $\beta \to 0$ erhalten:*

$$\frac{\sin(\beta t)}{\beta} \approx t$$

und

$$\left(\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin(\beta t)\right) \approx (1 - \alpha \cdot t) = 1 + \frac{R}{2L} \cdot t\,.$$

Fall III verhält sich somit wie Fall II, wenn $\beta \to 0$ ist.

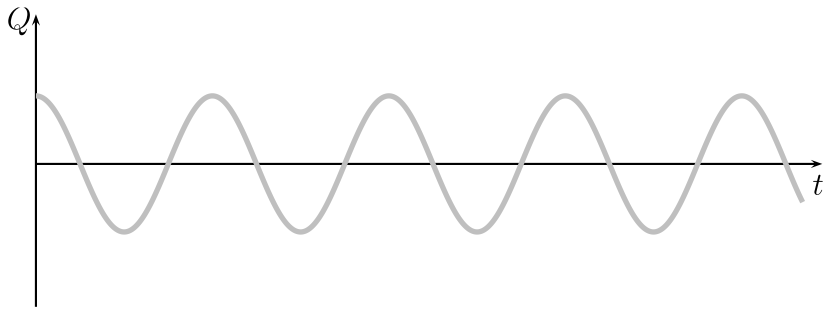
Sonderfall 3.4.4

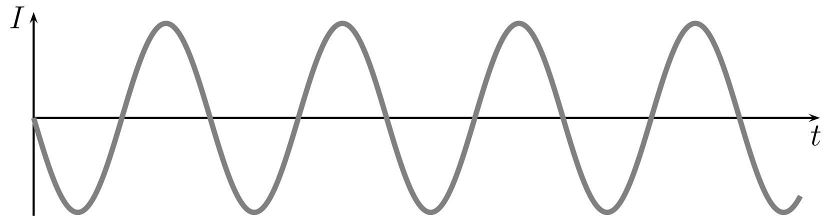
Liegt kein Widerstand vor, d.h., haben wir $R = 0$, so gilt für den III. Fall:

$$\alpha = 0 \quad \textit{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

Aus den Funktionsgleichungen für $Q(t)$ bzw. $I(t)$ des III. Falls bekommen wir:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\beta t) \quad \textit{und} \quad I(t) = -\beta \cdot Q_0 \cdot \sin(\beta t)$$





Im Fall $R = 0$ haben wir eine ungedämpfte Schwingung:

$$\ddot{Q}(t) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q(t) = 0$$

(Mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$.)

Die entsprechende charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + \frac{1}{L \cdot C} = 0.$$

3.5 Analogien bei mechanischen und elektromagnetischen gedämpften Schwingungen

Mechanische Schwingung	*Elektromagnetische Schwingung*
Koordinate x	Ladung Q
Geschwindigkeit $v = \dot{x}$	Stromstärke $I = \dot{Q}$
Beschleunigung $a = \ddot{x}$	Zeitliche Änderung der Stromstärke $\dot{I}$
Masse m	Induktivität L
Richtgröße k (Federkonstante)	$\frac{1}{C}$, wobei C :=Kapazität
Dämpfungskonstante b	Ohmscher Widerstand R
Schwingungsgleichung $m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	Schwingungsgleichung $L \cdot \ddot{Q}(t) + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$
ungedämpfte Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	ungedämpfte Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$
gedämpfte Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$	gedämpfte Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

3.6 Lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Satz 3.6.1

Seien die Funktionen $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig. Dann lässt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x) \tag{3.6.1}$$

auf I schreiben als: $\mathbb{L} = y^* + \mathbb{L}_0$, wobei $\mathbb{L}_0$ die Lösungsmenge der entsprechenden homogenen Gleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0 \tag{3.6.1h}$$

und $y^*(x)$ eine (sog. partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung (3.6.1) *ist.*

Beweis:

Wir haben bereits in Satz 3.2.15 gesehen, dass $\mathbb{L}_0$ nichtleer ist. Wir werden in Bemerkung 3.6.4 zeigen, dass auch $\mathbb{L} \neq \varnothing$, mit anderen Worten existiert eine partikuläre Lösung $y^*(x)$ von (3.6.1) und es gilt auf I:

$$(y^*)''(x) + p(x) \cdot (y^*)'(x) + q(x) \cdot y^*(x) = f(x)\,.$$

1. Sei $y_L(x) \in \mathbb{L}$ eine beliebige Lösung von (3.6.1). Dann

$$y_L''(x) + p(x) \cdot y_L'(x) + q(x) \cdot y_L(x) = f(x)$$

auf I und somit

$$\begin{aligned} & y_L''(x) - (y^*)''(x) + p(x) \cdot (y_L'(x) - (y^*)'(x)) + q(x) \cdot (y_L(x) - y^*(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y_L(x) - y^*(x))'' + p(x) \cdot (y_L(x) - y^*(x))' + q(x) \cdot (y_L(x) - y^*(x)) = 0 \end{aligned}$$

D.h., $\widetilde{y}(x) := y_L(x) - y^*(x)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

auf I. Also gilt für jedes $y_L(x) \in \mathbb{L}$:

$$y_L(x) = y^*(x) + \widetilde{y}(x) \in y^*(x) + \mathbb{L}_0 \quad \text{und} \quad \mathbb{L} \subseteq y^*(x) + \mathbb{L}_0.$$

2. Sei nun $\widetilde{y}(x) \in \mathbb{L}_0$ eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung. Dann

$$\widetilde{y}''(x) + p(x) \cdot \widetilde{y}'(x) + q(x) \cdot \widetilde{y}(x) = 0$$

auf I. Da $y^*(x)$ eine (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung (3.6.1) ist, folgt:

$$\begin{aligned} &\widetilde{y}''(x) + (y^*)''(x) + p(x) \cdot (\widetilde{y}'(x) + (y^*)'(x)) + q(x) \cdot (\widetilde{y}(x) + y^*(x)) = f(x) \\ \Leftrightarrow \quad &(\widetilde{y}(x) + y^*(x))'' + p(x) \cdot (\widetilde{y}(x) + y^*(x))' + q(x) \cdot (\widetilde{y}(x) + y^*(x)) = f(x) \end{aligned}$$

D.h., $y(x) := \widetilde{y}(x) + y^*(x)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.6.1) auf I. Also gilt für jedes $\widetilde{y}(x) \in \mathbb{L}_0$:

$$y^*(x) + \widetilde{y}(x) \in \mathbb{L} \quad \text{und} \quad y^*(x) + \mathbb{L}_0 \subseteq \mathbb{L}.$$

Insgesamt haben wir $\mathbb{L} = y^*(x) + \mathbb{L}_0$ gezeigt. □

Folgerung 3.6.2
Sei $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0 \quad \textit{auf } I. \tag{3.6.1h}$$

Lässt man in $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ die Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ unabhängig voneinander die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man alle Lösungen der homogenen Gleichung (3.6.1h).

Also gilt für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_0 = \{c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

dabei heißt $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Ist jetzt $y^*(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.6.1)*, dann gilt nach Satz 3.6.1 für die Lösungsmenge:*

$$\mathbb{L} = \{c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y^*(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Man sagt: Durch $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y^*(x)$ ist die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung (3.6.1) *gegeben.*

Oder auch: Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung hat die Form

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x), \tag{3.6.2}$$

wobei $\widetilde{y}(x)$ die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Gleichung und $y^*(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung (3.6.1) *ist.*

Beispiel 3.6.3

$$y''(x) - 9y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.6.3}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y''(x) - 9y(x) = 0 \tag{3.6.3h}$$

und die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 9 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm 3.$$

Nach Folgerung 3.3.3 ist

$$\widetilde{y}(x) := c_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (3.6.3h).

2) Wie ist nun $y^*(x)$ zu wählen?

Dazu betrachten wir den Ansatz $y^*(x) := A \cdot x + B$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$(y^*)'(x) = A, \quad (y^*)''(x) = 0 \quad \text{und}$$
$$(y^*)''(x) - 9y^*(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad -9 \cdot (A \cdot x + B) = x\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -9A = 1 \\ \quad B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{9} \\ B = 0 \end{cases}$$

Dann ist $y^*(x) := -\frac{1}{9} \cdot x$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.6.3). Nach Satz 3.6.1 und Folgerung 3.6.2 ist

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot x$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.6.3) auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 3.6.4 (Variation der Konstanten)
Seien die Funktionen $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert und stetig. Sei weiter $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

auf I. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x)$$

findet man nach dem Verfahren der Variation der Konstanten:

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form:

$$y^*(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x),$$

wobei $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ unbekannte Funktionen sind. Dann gilt (mit Voraussetzung, dass die Funktionen c_1, c_2 in I differenzierbar sind):

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x) \\ &= c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x) + c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x).\end{aligned}$$

Als zusätzliche Bedingung nehmen wir an:

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \qquad \textit{auf } I.$$

Somit erhalten wir

$$(y^*)'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

und folglich

$$(y^*)''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x) .$$

In die Differentialgleichung (3.6.1) *eingesetzt ergibt das:*

$$\begin{aligned}[c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)]& \\ +p(x) \cdot [c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)]& \\ +q(x) \cdot [c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)] &= f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff \quad c_1(x) \cdot (\underbrace{y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x)}_{=0})& \\ +c_2(x) \cdot (\underbrace{y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + q(x) \cdot y_2(x)}_{=0})& \\ +(c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x)) &= f(x),\end{aligned}$$

da die Funktionen y_1, y_2 *Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind, folgt*

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x)\,.$$

Mit der zusätzlich angenommenen Bedingung $c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$ *erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten* $c_1'(x), c_2'(x)$*:*

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

mit der Hauptdeterminante

$$\triangle := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\,.$$

Nach Definition 3.2.7 ist $\triangle = W(x)$ *die* Wronski*-Determinante der Funktionen* y_1, y_2*. Da* $\{y_1, y_2\}$ *ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung ist, gilt* $W(x) \neq 0$ *auf ganz* I*. Dann ist das lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten* $c_1'(x), c_2'(x)$ *eindeutig lösbar. Mit der* Cramer*'schen Regel*[7] *erhalten wir*

$$\triangle_1 := \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \qquad \triangle_2 := \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix},$$

[7] Gabriel Cramer, 1704-1752

und

$$c_1'(x) = \frac{\triangle_1}{\triangle} = -\frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(x)}. \tag{3.6.4}$$

Da die Funktionen $\frac{y_1 \cdot f}{W}, \frac{y_2 \cdot f}{W} : I \to \mathbb{R}$ *auf* I *stetig sind, besitzen sie dort ihre Stammfunktionen. Wir erhalten die Funktionen* $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ *und somit eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in der Form*

$$y^*(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x).$$

Beispiel 3.6.5

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad x \in (0; \pi). \tag{3.6.5}$$

1) Die entsprechende homogene Differentialgleichung lautet

$$y''(x) + y(x) = 0 \tag{3.6.5h}$$

und die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm\, \mathrm{i}\,.$$

D.h., $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Nach Folgerung 3.3.7 ist

$$\widetilde{y}(x) := c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x) \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (3.6.5h) auf $(0; \pi)$. Die Funktionen $y_1(x) := \cos(x)$ und $y_2(x) := \sin(x)$ bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung auf $(0; \pi)$.

2) Wir suchen nun $y^*(x)$ mit dem Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 3.6.4 erhalten wir auf dem offenen Intervall $(0; \pi)$:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot \cos(x) + c_2'(x) \cdot \sin(x) = 0\,, \\ c_1'(x) \cdot (-\sin(x)) + c_2'(x) \cdot \cos(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}\,. \end{cases}$$

mit der Hauptdeterminante

$$\triangle := W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

und

$$\triangle_1 := \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \dfrac{1}{\sin(x)} & \cos(x) \end{vmatrix} = -1, \qquad \triangle_2 := \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \dfrac{1}{\sin(x)} \end{vmatrix} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Nach der CRAMER'schen Regel gilt:

$$c_1'(x) = \frac{\triangle_1}{\triangle} = -1 \quad \text{und} \quad c_2'(x) = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

und somit (beachte, dass $\sin(x) > 0$ auf $(0;\pi)$ ist):

$$c_1(x) = -x+m \quad \text{und} \quad c_2(x) = \ln(\sin(x))+n \quad \text{mit beliebigen} \quad m,n \in \mathbb{R}.$$

Mit $m = 0$ und $n = 0$ bekommen wir folgende partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^*(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \ln(\sin(x)).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.6.5) auf $(0;\pi)$ ist somit

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \ln(\sin(x)) \end{aligned}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Satz 3.6.6 (Superpositionsprinzip)

Seien die Funktionen $p, q, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ *auf einem Intervall* I *definiert und stetig. Seien weiter* $y_1^*(x)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f_1(x) \tag{3.6.6a}$$

und $y_2^*(x)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f_2(x). \tag{3.6.6b}$$

Dann ist $y^*(x) := y_1^*(x) + y_2^*(x)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f_1(x) + f_2(x). \tag{3.6.7}$$

BEWEIS:
Einsetzen von $y^*(x)$ in (3.6.7) liefert die Behauptung, weil $y_1^*(x)$ und $y_2^*(x)$ partikuläre Lösungen der entsprechenden Gleichungen sind. In der Tat gilt für jedes $x \in I$:

$$(y^*)'(x) = (y_1^*)'(x) + (y_2^*)'(x), \quad (y^*)''(x) = (y_1^*)''(x) + (y_2^*)''(x)$$

und

$$\begin{aligned}
&(y^*)''(x) + p(x) \cdot (y^*)'(x) + q(x) \cdot y^*(x) \\
&\quad = (y_1^*)''(x) + (y_2^*)''(x) + p(x) \cdot ((y_1^*)'(x) + (y_2^*)'(x)) \\
&\qquad\qquad + q(x) \cdot (y_1^*(x) + y_2^*(x)) \\
&\quad = \underline{(y_1^*)''(x) + p(x) \cdot (y_1^*)'(x) + q(x) \cdot y_1^*(x)} \\
&\qquad\qquad + \underline{(y_2^*)''(x) + p(x) \cdot (y_2^*)'(x) + q(x) \cdot y_2^*(x)} \\
&\quad \underset{(3.6.6b)}{\overset{(3.6.6a)}{=}} f_1(x) + f_2(x)\,.
\end{aligned}$$

□

3.7 Lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.7.1
Gegeben seien eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I definiert und stetig ist, und reelle Zahlen $p, q \in \mathbb{R}$.

Gesucht ist eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x). \tag{3.7.1}$$

Gleichung (3.7.1) *heißt lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Gleichung* (3.7.1) *auf dem Intervall I. (Vgl. Definition 3.1.1, Bemerkung 3.1.3, Definition 3.3.1).*

Bemerkung 3.7.2

Nach 3.6.2 hat die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung (3.7.1) *die Form*

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x), \tag{3.7.2}$$

wobei $\widetilde{y}(x)$ *die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Differentialgleichung*

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0 \tag{3.7.1h}$$

und $y^*(x)$ *eine partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung* (3.7.1) *ist. Die allgemeine Lösung* $\widetilde{y}(x)$ *von* (3.7.1h) *bekommt man, wenn man die charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0 \tag{3.7.1c}$$

untersucht (s. Folgerungen 3.3.3, 3.3.5, 3.3.7).

Wir betrachten nun die Form partikulärer Lösungen $y^*(x)$ *von* (3.7.1) *für einige Sonderfälle der rechten Seite* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, (d.h., hier gilt* $I := \mathbb{R}$*):*

i) $f(x) := P_n(x)$*, ein Polynom vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$.

a) $\lambda = 0$ *ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = Q_n(x),$$

wobei $Q_n(x)$ *ein Polynom vom Grad* n *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 3.7.3: $\quad y''(x) - y'(x) + y(x) = x^3 + 6$*)*

b) $\lambda = 0$ *ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c) *(mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = x^r \cdot Q_n(x),$$

wobei $Q_n(x)$ *ein Polynom vom Grad* n *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 3.7.4: $\quad y''(x) - 2y'(x) = x^2 - 1$*)*

ii) $f(x) := \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot P_n(x)$*, wobei* $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *und* $P_n(x)$ *ein Polynom vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist.*

a) $\lambda = \gamma$ *ist* *<u>keine Lösung</u>* *der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot Q_n(x),$$

wobei $Q_n(x)$ *ein Polynom vom Grad* n *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 3.7.5: $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x \cdot \mathrm{e}^{2x}$*)*

b) $\lambda = \gamma$ *ist* *<u>eine Lösung</u>* *der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c) *(mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = x^r \cdot \mathrm{e}^{\gamma \cdot x} \cdot Q_n(x),$$

wobei $Q_n(x)$ *ein Polynom vom Grad* n *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 3.7.6: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x}$*)*

iii) $f(x) := P_n(x) \cdot \cos(\delta \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(\delta \cdot x)$*, wobei* $\delta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Dabei sind* $P_n(x), Q_m(x)$ *Polynome vom Grad* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom.*

a) $\lambda = \pm\mathrm{i} \cdot \delta$ *sind* *<u>keine Lösungen</u>* *der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = S_N(x) \cdot \cos(\delta \cdot x) + T_N(x) \cdot \sin(\delta \cdot x),$$

wobei $S_N(x), T_N(x)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{n, m\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

(s. Beispiel 3.7.7: $y''(x) + 4y(x) = 9x \cdot \sin(x)$*)*

b) $\lambda = \pm\mathrm{i} \cdot \delta$ *<u>sind Lösungen</u>* *der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c) *(jeweils mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*). Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form*

$$y^*(x) = x^r \cdot (S_N(x) \cdot \cos(\delta \cdot x) + T_N(x) \cdot \sin(\delta \cdot x)),$$

wobei $S_N(x), T_N(x)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{n, m\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

(s. Beispiel 3.7.8: $y''(x) + y(x) = 4 \cdot \cos(x)$*)*

iv) $f(x) := \mathrm{e}^{\gamma\cdot x}\cdot(P_n(x)\cdot\cos(\delta\cdot x)+Q_m(x)\cdot\sin(\delta\cdot x))$, *wobei* $\gamma, \delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Dabei sind* $P_n(x), Q_m(x)$ *Polynome vom Grad* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom.*

a) $\lambda = \gamma \pm \mathrm{i}\cdot\delta$ *sind keine Lösungen der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c). *Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form*

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\gamma\cdot x}\cdot(S_N(x)\cdot\cos(\delta\cdot x)+T_N(x)\cdot\sin(\delta\cdot x)),$$

wobei $S_N(x), T_N(x)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{n, m\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

(s. Beispiel 3.7.9: $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x\cdot\sin(x)$*)*

b) $\lambda = \gamma \pm \mathrm{i}\cdot\delta$ *sind Lösungen der charakteristischen Gleichung* (3.7.1c) *(jeweils mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*
Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$y^*(x) = x^r\cdot\mathrm{e}^{\gamma\cdot x}\cdot(S_N(x)\cdot\cos(\delta\cdot x)+T_N(x)\cdot\sin(\delta\cdot x)),$$

wobei $S_N(x), T_N(x)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{n, m\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

(s. Beispiel 3.7.10: $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \mathrm{e}^x\cdot\cos(2x)$*)*

Beispiel 3.7.3

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = x^3 + 6,\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.3}$$

1) $y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(jeweils mit Vielfachheit } r = 1\text{)}.$$

Hier gilt $\alpha = \dfrac{1}{2}, \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und nach Folgerung 3.3.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\left(c_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $P_3(x) = x^3 + 6$. Da 0 keine Lösung unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad \text{mit } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$(y^*)'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

sowie

$$(y^*)''(x) = 6Ax + 2B.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.3) ergibt

$$\begin{aligned} & (6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) \\ & \qquad\qquad + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & Ax^3 + (-3A + B) \cdot x^2 + (6A - 2B + C) \cdot x \\ & \qquad\qquad + (2B - C + D) = x^3 + 6 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} A = 1 \\ -3A + B = 0 \\ 6A - 2B + C = 0 \\ 2B - C + D = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = x^3 + 3x^2$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right) + (x^3 + 3x^2) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.3) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.4

$$y''(x) - 2y'(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.4}$$

1) $y''(x) - 2y'(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \quad \text{oder} \quad \lambda = 0 \quad \text{(jeweils mit Vielfachheit } r = 1\text{).}$$

Seien $\lambda_1 \coloneqq 2$, $\lambda_2 \coloneqq 0$. Nach Folgerung 3.3.3 ist

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $P_2(x) = x^2 - 1$. Da $\lambda = 0$ eine Lösung mit Vielfachheit $r = 1$ unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = x^1 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad \text{mit } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$(y^*)'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

sowie

$$(y^*)''(x) = 6Ax + 2B\,.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.4) ergibt

$$\begin{aligned} & (6Ax + 2B) - 2 \cdot (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -6A \cdot x^2 + (6A - 4B) \cdot x + (2B - 2C) = x^2 - 1\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 0 \\ 2B - 2C = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{6} \\ B = -\dfrac{1}{4} \\ C = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$$

eine partikuläre Lösung und

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 + \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\right)$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.4) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.5

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x \cdot \mathrm{e}^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.5}$$

1) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \text{(mit Vielfachheit} \quad r = 2\text{)}.$$

Nach Folgerung 3.3.5 ist

$$\widetilde{y}(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 2$ und $P_1(x) = 3x$. Da 2 keine Lösung unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = (Ax + B) \cdot \mathrm{e}^{2x} \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= A \cdot \mathrm{e}^{2x} + (Ax + B) \cdot 2\mathrm{e}^{2x} \\ &= (2Ax + A + 2B) \cdot \mathrm{e}^{2x},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(y^*)''(x) &= 2A \cdot \mathrm{e}^{2x} + (2Ax + A + 2B) \cdot 2\mathrm{e}^{2x} \\ &= (4Ax + 4A + 4B) \cdot \mathrm{e}^{2x}\,.\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.5) ergibt:

$$(4Ax+4A+4B)\cdot \mathrm{e}^{2x}+2\cdot(2Ax+A+2B)\cdot \mathrm{e}^{2x}+(Ax+B)\cdot \mathrm{e}^{2x}=3x\cdot \mathrm{e}^{2x}$$

$$\underset{\mathrm{e}^{2x}\neq 0}{\Longleftrightarrow} \qquad 9A\cdot x+(6A+9B)=3x\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 9A=3 \\ 6A+9B=0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x)=\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{9}\right)\cdot \mathrm{e}^{2x}$$

eine partikuläre Lösung und

$$y(x)=\widetilde{y}(x)+y^*(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot(c_1+c_2\cdot x)+\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{9}\right)\cdot \mathrm{e}^{2x}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.5) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.6

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=2x\cdot \mathrm{e}^{x},\ x\in\mathbb{R}\,. \tag{3.7.6}$$

1) $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=1 \quad (\text{ mit Vielfachheit } r=2).$$

Nach Folgerung 3.3.5 ist

$$\widetilde{y}(x)=\mathrm{e}^{x}\cdot(c_1+c_2\cdot x)$$

mit beliebigen $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 1$ und $P_1(x) = 2x$. Da $\lambda = 1$ eine Lösung mit Vielfachheit $r = 2$ unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = x^2 \cdot (Ax + B) \cdot \mathrm{e}^x = (Ax^3 + Bx^2) \cdot \mathrm{e}^x \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= (3Ax^2 + 2Bx) \cdot \mathrm{e}^x + (Ax^3 + Bx^2) \cdot \mathrm{e}^x \\ &= (Ax^3 + (3A + B) \cdot x^2 + 2Bx) \cdot \mathrm{e}^x,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(y^*)''(x) &= (3Ax^2 + (6A + 2B) \cdot x + 2B) \cdot \mathrm{e}^x \\ &\qquad\qquad + (Ax^3 + (3A + B) \cdot x^2 + 2Bx) \cdot \mathrm{e}^x \\ &= (Ax^3 + (6A + B) \cdot x^2 + (6A + 4B) \cdot x + 2B) \cdot \mathrm{e}^x .\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.6) ergibt

$$\begin{aligned}&(Ax^3 + (6A + B) \cdot x^2 + (6A + 4B) \cdot x + 2B) \cdot \mathrm{e}^x \\ &\quad -2 \cdot (Ax^3 + (3A + B) \cdot x^2 + 2Bx) \cdot \mathrm{e}^x + (Ax^3 + Bx^2) \cdot \mathrm{e}^x = 2x \cdot \mathrm{e}^x \\ &\underset{\mathrm{e}^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \qquad Ax + 2B = 2x .\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 6A = 2 \\ 2B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \frac{x^3 \cdot \mathrm{e}^x}{3}$$

eine partikuläre Lösung und

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = \mathrm{e}^x \cdot (c_1 + c_2 \cdot x) + \frac{x^3 \cdot \mathrm{e}^x}{3}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.6) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.7

$$y''(x) + 4y(x) = 9x \cdot \sin(x),\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.7}$$

1) $y''(x) + 4y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\, \mathrm{i} \cdot 2 \quad \text{(jeweils mit Vielfachheit } r = 1\text{).}$$

Hier gilt $\alpha = 0$, $\beta = 2$ und nach Folgerung 3.3.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\delta = 1$, $P(x) \equiv 0$ (Nullpolynom) und $Q_1(x) = 9x$. Da $\pm\mathrm{i}$ keine Lösungen unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = (Ax + B) \cdot \cos(x) + (Cx + D) \cdot \sin(x) \quad \text{mit } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= A \cdot \cos(x) - (Ax + B) \cdot \sin(x) \\ &\qquad + C \cdot \sin(x) + (Cx + D) \cdot \cos(x) \\ &= (Cx + (A + D)) \cdot \cos(x) + (-Ax + (-B + C)) \cdot \sin(x),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(y^*)''(x) &= C \cdot \cos(x) + (Cx + (A + D)) \cdot (-\sin(x)) \\ &\qquad + (-A) \cdot \sin(x) + (-Ax + (-B + C)) \cdot \cos(x) \\ &= (-Ax + (-B + 2C)) \cdot \cos(x) + (-Cx + (-2A - D)) \cdot \sin(x)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.7) ergibt

$$\begin{aligned}&(-Ax + (-B + 2C)) \cdot \cos(x) + (-Cx + (-2A - D)) \cdot \sin(x) \\ &\qquad +4 \cdot ((Ax + B) \cdot \cos(x) + (Cx + D) \cdot \sin(x)) = 9x \cdot \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad &3Ax \cdot \cos(x) + (3B + 2C) \cdot \cos(x) \\ &\qquad +3Cx \cdot \sin(x) + (-2A + 3D) \cdot \sin(x) = 9x \cdot \sin(x)\,.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B + 2C = 0 \\ 3C = 9 \\ -2A + 3D = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 3 \\ D = 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = -2 \cdot \cos(x) + 3x \cdot \sin(x)$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x) + (-2 \cdot \cos(x) + 3x \cdot \sin(x)) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.7) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.8

$$y''(x) + y(x) = 4 \cdot \cos(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.8}$$

1) $y''(x) + y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\,\mathrm{i} \quad \text{(jeweils mit Vielfachheit } \; r = 1).$$

Hier gilt $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und nach Folgerung 3.3.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\delta = 1$, $P_0(x) = 4$ und $Q(x) \equiv 0$ (Nullpolynom). Da $\lambda = \pm\mathrm{i}$ Lösungen (jeweils mit Vielfachheit $r = 1$) unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = x \cdot (A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x) + x\cdot(-A\cdot\sin(x) + B\cdot\cos(x))\\ &= (A+Bx)\cdot\cos(x) + (B-Ax)\cdot\sin(x),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(y^*)''(x) &= B\cdot\cos(x) + (A+Bx)\cdot(-\sin(x))\\ &\qquad + (-A)\cdot\sin(x) + (B-Ax)\cdot\cos(x)\\ &= (-Ax+2B)\cdot\cos(x) + (-Bx-2A)\cdot\sin(x)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.8) ergibt

$$\begin{aligned}&(-Ax+2B)\cdot\cos(x) + (-Bx-2A)\cdot\sin(x)\\ &\qquad\qquad + x\cdot(A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x)) = 4\cdot\cos(x)\\ \Leftrightarrow\qquad &\qquad\qquad 2B\cdot\cos(x) - 2A\cdot\sin(x) = 4\cdot\cos(x)\,.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases}2B = 4\\ -2A = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}A = 0\\ B = 2\end{cases}$$

Dann ist $y^*(x) = 2x\cdot\sin(x)$ eine partikuläre Lösung und

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + y^*(x) = c_1\cdot\cos(x) + c_2\cdot\sin(x) + 2x\cdot\sin(x)$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.8) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.9

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x\cdot\sin(x),\ x\in\mathbb{R}\,. \tag{3.7.9}$$

1) $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = -1\pm\mathrm{i} \quad \text{(jeweils mit Vielfachheit } r = 1\text{)}.$$

Hier gilt $\alpha = -1$, $\beta = 1$ und nach Folgerung 3.3.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = \mathrm{e}^{-x}\cdot(c_1\cdot\cos(x) + c_2\cdot\sin(x))$$

mit beliebigen $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 1$, $\delta = 1$, $P(x) \equiv 0$ (Nullpolynom) und $Q_0(x) = 1$. Da $1 \pm \mathrm{i}$ keine Lösungen unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$y^*(x) = \mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}(y^*)'(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)) \\ &\qquad + \mathrm{e}^x \cdot (-A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot ((A+B) \cdot \cos(x) + (-A+B) \cdot \sin(x)),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(y^*)''(x) &= \mathrm{e}^x \cdot ((A+B) \cdot \cos(x) + (-A+B) \cdot \sin(x)) \\ &\qquad + \mathrm{e}^x \cdot (-(A+B) \cdot \sin(x) + (-A+B) \cdot \cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot (2B \cdot \cos(x) + (-2A) \cdot \sin(x))\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.9) ergibt

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x \cdot (2B \cdot \cos(x) - 2A \cdot \sin(x)) \\ &\quad +2\mathrm{e}^x \cdot ((A+B) \cdot \cos(x) + (-A+B) \cdot \sin(x)) \\ &\qquad\qquad +2\mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)) = \mathrm{e}^x \cdot \sin(x) \\ \underset{\mathrm{e}^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} &\qquad (4A+4B) \cdot \cos(x) + (-4A+4B) \cdot \sin(x) = \sin(x)\,.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ -4A + 4B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} \\ B = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot \cos(x) + \frac{1}{8} \cdot \sin(x)\right)$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned}y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot (c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)) + \mathrm{e}^x \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot \cos(x) + \frac{1}{8} \cdot \sin(x)\right)\end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.9) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.10

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.10}$$

1) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \mathrm{i} \cdot 2 \quad \text{(jeweils mit Vielfachheit } r = 1\text{)}.$$

Hier gilt $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und nach Folgerung 3.3.7 ist

$$\widetilde{y}(x) = \mathrm{e}^x \cdot (c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x))$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Wir haben $\gamma = 1$, $\delta = 2$, $P_0(x) = 1$ und $Q(x) \equiv 0$ (Nullpolynom). Da $\lambda = 1 \pm \mathrm{i} \cdot 2$ Lösungen (jeweils mit Vielfachheit $r = 1$) unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 3.7.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} y^*(x) &= x \cdot \mathrm{e}^x \cdot (A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot (Ax \cdot \cos(2x) + Bx \cdot \sin(2x)) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} (y^*)'(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (Ax \cdot \cos(2x) + Bx \cdot \sin(2x)) \\ &\qquad + \mathrm{e}^x \cdot \Big(A \cdot \cos(2x) - 2Ax \cdot \sin(2x) \\ &\qquad\qquad + B \cdot \sin(2x) + 2Bx \cdot \cos(2x)\Big) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot \Big((Ax + A + 2Bx) \cdot \cos(2x) \\ &\qquad + (Bx - 2Ax + B) \cdot \sin(2x)\Big) \\ &= \mathrm{e}^x \cdot \Big(((A + 2B)x + A) \cdot \cos(2x) \\ &\qquad + ((B - 2A)x + B) \cdot \sin(2x)\Big)\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(y^*)''(x) = \mathrm{e}^x \cdot \Big(&((A+2B)x+A) \cdot \cos(2x) \\
&+ ((B-2A)x+B) \cdot \sin(2x)\Big) \\
+ \mathrm{e}^x \cdot \Big(&(A+2B) \cdot \cos(2x) \\
&+ ((A+2B)x+A) \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 \\
&+ (B-2A) \cdot \sin(2x) \\
&+ ((B-2A) \cdot x + B) \cdot \cos(2x) \cdot 2\Big) \\
= \mathrm{e}^x \cdot \Big(&((-3A+4B)x + (2A+4B)) \cdot \cos(2x) \\
&+ ((-4A-3B)x + (-4A+2B)) \cdot \sin(2x)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.10) ergibt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x \cdot \Big(((-3A+4B)x + (2A+4B)) \cdot \cos(2x) \\
&\qquad +((-4A-3B)x + (-4A+2B)) \cdot \sin(2x)\Big) \\
&-2\mathrm{e}^x \cdot \Big(((A+2B)x+A) \cdot \cos(2x) \\
&\qquad +((B-2A)x+B) \cdot \sin(2x)\Big) \\
&\qquad\qquad +5\mathrm{e}^x \cdot \Big(Ax \cdot \cos(2x) + Bx \cdot \sin(2x)\Big) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(2x) \\
\underset{\mathrm{e}^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} &\qquad 4B \cdot \cos(2x) + (-4A) \cdot \sin(2x) = \cos(2x)\,.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 4B = 1 \\ -4A = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = \dfrac{1}{4} \\ A = 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$y^*(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot x \cdot \sin(2x)}{4}$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned}
y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\
&= \mathrm{e}^x \cdot (c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)) + \frac{\mathrm{e}^x \cdot x \cdot \sin(2x)}{4}
\end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.10) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.11

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \cos(3x) + x \cdot \mathrm{e}^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.7.11}$$

1) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung.

   Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2 \text{ oder } \lambda = 3 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

   Seien $\lambda_1 := 2$ und $\lambda_2 := 3$. Nach Folgerung 3.3.3 ist

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

   mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Nach Bemerkung 3.7.2 suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \cos(3x) \tag{3.7.11a}$$

   in der Form

$$y_1^*(x) = A \cdot \cos(3x) + B \cdot \sin(3x) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

   Dann haben wir

$$(y_1^*)'(x) = -3A \cdot \sin(3x) + 3B \cdot \cos(3x)\,,$$

   sowie

$$(y_1^*)''(x) = -9A \cdot \cos(3x) - 9B \cdot \sin(3x)\,.$$

   Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.11a) ergibt

$$\begin{aligned} & -9A \cdot \cos(3x) - 9B \cdot \sin(3x) \\ & \qquad -5 \cdot (-3A \cdot \sin(3x) + 3B) \cdot \cos(3x)) \\ & \qquad\qquad +6 \cdot (A \cdot \cos(3x) + B \cdot \sin(3x)) = \cos(3x) \\ \Leftrightarrow \quad & (-3A - 15B) \cdot \cos(3x) + (15A - 3B) \cdot \sin(3x) = \cos(3x)\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -3A - 15B = 1 \\ 15A - 3B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{78} \\ B = -\dfrac{5}{78} \end{cases}$$

Dann ist

$$y_1^*(x) = -\frac{1}{78} \cdot \cos(3x) - \frac{5}{78} \cdot \sin(3x)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.11a) auf $\mathbb{R}$.

3) Nach Bemerkung 3.7.2 suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x \cdot \mathrm{e}^{3x} \tag{3.7.11b}$$

in der Form

$$y_2^*(x) = x \cdot (Ax + B) \cdot \mathrm{e}^{3x} = (Ax^2 + Bx) \cdot \mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} (y_2^*)'(x) &= (2Ax + B) \cdot \mathrm{e}^{3x} + (Ax^2 + Bx) \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot 3 \\ &= (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B) \cdot \mathrm{e}^{3x}\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (y_2^*)''(x) &= (6Ax + (2A + 3B)) \cdot \mathrm{e}^{3x} + (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B) \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot 3 \\ &= (9Ax^2 + (12A + 9B)x + (2A + 6B) \cdot \mathrm{e}^{3x}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (3.7.11b) ergibt

$$\begin{aligned} &(9Ax^2 + (12A + 9B)x + (2A + 6B)) \cdot \mathrm{e}^{3x} \\ &\qquad -5 \cdot (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B) \cdot \mathrm{e}^{3x} \\ &\qquad\qquad +6 \cdot (Ax^2 + Bx) \cdot \mathrm{e}^{3x} = x \cdot \mathrm{e}^{3x} \\ \xLeftrightarrow[\mathrm{e}^{3x} \neq 0]{} &\qquad\qquad 2Ax + (2A + B) = x\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}$$

Dann ist

$$y_2^*(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.11b) auf $\mathbb{R}$.

4) Nach dem Superpositionsprinzip (Satz 3.6.6) ist

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.7.11) und

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{3x} + \left(-\frac{1}{78} \cdot \cos(3x) - \frac{5}{78} \cdot \sin(3x)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (3.7.11) auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.7.12 (Anfangswertproblem)

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = \dfrac{4}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\quad y(0) = 1 + 2\ln(2)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\quad y'(0) = 6\ln(2)\,. \end{cases} \tag{3.7.12}$$

1) $y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2 \text{ oder } \lambda = 4 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

Seien $\lambda_1 := 2$ und $\lambda_2 := 4$. Nach Folgerung 3.3.3 ist

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{4x}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$. Die Funktionen

$$y_1(x) := \mathrm{e}^{2x}, \quad y_2(x) := \mathrm{e}^{4x}$$

bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung auf $\mathbb{R}$.

2) Nach dem Verfahren der Variation der Konstanten (Bemerkung 3.6.4) suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

in der Form

$$y^*(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

Nach Bemerkung 3.6.4 folgt:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0\,, \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,. \end{cases}$$

Also gilt:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2'(x) \cdot \mathrm{e}^{4x} = 0\,, \\ 2c_1'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + 4c_2'(x) \cdot \mathrm{e}^{4x} = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,. \end{cases}$$

Mit Hilfe der CRAMER'schen Regel erhalten wir:

$$\triangle := \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = 2 \cdot \mathrm{e}^{6x} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$\triangle_1 := \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{4x} \\ \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-2x}} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = -\frac{4 \cdot \mathrm{e}^{4x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,,$$

sowie

$$\triangle_2 := \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-2x}} \end{vmatrix} = \frac{4 \cdot \mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,.$$

Weiter gilt:

$$c_1'(x) = \frac{\triangle_1}{\triangle} = -\frac{2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

und

$$c_2'(x) = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{-4x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}\,.$$

Dann sind

$$c_1(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + m$$

und

$$c_2(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + n$$

mit beliebigen $m, n \in \mathbb{R}$ entsprechende Stammfunktionen.

Mit $m = 0, n = 0$ bekommen wir folgende partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y^*(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) \\ &= \mathrm{e}^{2x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + (-\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{4x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}))\,. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + y^*(x) \\ &= \widetilde{c}_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + \widetilde{c}_2 \cdot \mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{2x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + (-\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{4x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x})) \end{aligned}$$

mit $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2 \in \mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) = 2\widetilde{c}_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 4\widetilde{c}_2 \cdot \mathrm{e}^{4x} + 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + \mathrm{e}^{2x} \cdot \frac{(-2) \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} \\ - 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 4 \cdot \mathrm{e}^{4x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + \mathrm{e}^{4x} \cdot \frac{(-2) \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} \\ = 2\widetilde{c}_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 4\widetilde{c}_2 \cdot \mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(2\ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + \frac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} - 2 \right) \\ + \mathrm{e}^{4x} \cdot \left(4\ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) + \frac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} \right)\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Anfangswerte können wir nun die Konstanten $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmen. Wir haben

$$\begin{cases} y(0) = 1 + 2\ln(2)\,, \\ y'(0) = 6\ln(2)\,, \end{cases}$$

und somit gilt

$$\begin{cases} \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 + \ln(2) + (-1 + \ln(2)) = 1 + 2\ln(2) \\ 2\widetilde{c}_1 + 4\widetilde{c}_2 + (2\ln(2) - 1 - 2) + (4\ln(2) - 1) = 6\ln(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 &= 2 \\ 2\widetilde{c}_1 + 4\widetilde{c}_2 &= 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{c}_1 = 2 \\ \widetilde{c}_2 = 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{4x} \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) \\ &= \mathrm{e}^{2x} + (\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{4x}) \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) \end{aligned}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.7.12).

4 Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung

4.1 Anfangswertproblem für lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

Vorbemerkung: Im Folgenden werden wir Differenzengleichungen auf der Menge $\mathbb{N}_0$ untersuchen. Analoge Betrachtungen lassen sich auf $\mathbb{Z}^{\geqslant n_0} := \{n_0, n_0+1, \ldots\}$ mit einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ oder auf der ganzen Menge $\mathbb{Z}$ durchführen.

Definition 4.1.1

Gegeben seien die Funktionen $p, q, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Gesucht ist eine Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f(n)\,. \tag{4.1.1}$$

Gleichung (4.1.1) *heißt lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung. Die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Gleichung* (4.1.1).

Satz und Definition 4.1.2

Gegeben seien die Funktionen $p, q, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann existiert für beliebige $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f(n)\,, \\ \hfill x(n_0) = \mu_0\,, \\ \hfill x(n_0+1) = \mu_1\,. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

BEWEIS:

Existenz:

Sind die Werte $x(n_0)$ und $x(n_0+1)$ gegeben, so ist auch der Wert an der Stelle (n_0+2) bereits bestimmt:

$$x(n_0+2) = f(n_0) - p(n_0) \cdot x(n_0+1) - q(n_0) \cdot x(n_0)\,.$$

Für $(n_0-1) \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir aus der Gültigkeit der Differenzengleichung

$$x(n_0-1) = \frac{f(n_0-1) - x(n_0+1) - p(n_0-1) \cdot x(n_0)}{q(n_0-1)}\,.$$

Sukzessive kann also jeder Wert von $x(.)$ auf $\mathbb{N}_0$ bestimmt werden und es existiert eine Lösung des Anfangswertproblems.

Eindeutigkeit:

Seien $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Dann gilt:

$$\begin{cases} x_1(n+2) + p(n) \cdot x_1(n+1) + q(n) \cdot x_1(n) = f(n)\,, \\ x_1(n_0) = \mu_0\,, \\ x_1(n_0+1) = \mu_1\,, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} x_2(n+2) + p(n) \cdot x_2(n+1) + q(n) \cdot x_2(n) = f(n)\,, \\ x_2(n_0) = \mu_0\,, \\ x_2(n_0+1) = \mu_1\,. \end{cases}$$

Für $\widetilde{x}(n) := x_1(n) - x_2(n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ folgt:

$$\begin{cases} \widetilde{x}(n+2) + p(n) \cdot \widetilde{x}(n+1) + q(n) \cdot \widetilde{x}(n) = 0\,, \\ \widetilde{x}(n_0) = 0\,, \\ \widetilde{x}(n_0+1) = 0\,. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Wir beweisen, dass (4.1.3) nur die triviale Lösung $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zulässt.

Wir zeigen zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant n_0$ bereits $\widetilde{x}(n) = 0$ gelten muss:

Mit den Anfangsbedingungen haben wir schon $\widetilde{x}(n_0) = \widetilde{x}(n_0 + 1) = 0$. Angenommen, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant (n_0 + 2)$, sodass $\widetilde{x}(n) \neq 0$ gilt. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant (n_0 + 2) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$ nichtleer.

Sei $s := \min\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant (n_0 + 2) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$.

Dann gilt $\widetilde{x}(s-1) = \widetilde{x}(s-2) = 0$ und nach (4.1.3) folgt:

$$\widetilde{x}(s) = -p(s-2) \cdot \underbrace{\widetilde{x}(s-1)}_{=0} - q(s-2) \cdot \underbrace{\widetilde{x}(s-2)}_{=0} = 0,$$

im Widerspruch zur Auswahl von s. Also ist $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geqslant n_0$.

Ist $n_0 = 0$, so folgt somit sofort $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Jetzt zeigen wir, dass auch für $n_0 \geqslant 1$ die Behauptung $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leqslant (n_0 - 1)$ folgt:

Andernfalls wäre die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leqslant (n_0 - 1) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$ nichtleer und es existierte $t := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leqslant (n_0 - 1) \text{ und } \widetilde{x}(n) \neq 0\}$. Dann gilt $\widetilde{x}(t+1) = \widetilde{x}(t+2) = 0$. Wegen

$$\underbrace{\widetilde{x}(t+2)}_{=0} + p(t) \cdot \underbrace{\widetilde{x}(t+1)}_{=0} + q(t) \cdot \widetilde{x}(t) = 0$$

und $q(t) \neq 0$ folgt $\widetilde{x}(t) = 0$, im Widerspruch zur Auswahl von t. Also ist auch $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leqslant (n_0 - 1)$.

Wir haben gezeigt, dass das Anfangswertproblem (4.1.3) nur die triviale Lösung $\widetilde{x}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt, d.h., es gilt $x_1(n) = x_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Lösung von (4.1.2) eindeutig bestimmt.

□

Bemerkung und Definition 4.1.3

Ist $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt die Gleichung (4.1.1) *lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung, ansonsten heißt diese lineare inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung.*

4.2 Lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

Wir untersuchen zuerst die homogene Gleichung

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0 \tag{4.2.1}$$

(dabei sind die Funktionen $p, q : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben).

Satz 4.2.1

Seien $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen von (4.2.1), *dann ist*

$$x(n) \coloneqq c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$$

ebenfalls eine Lösung von (4.2.1), *wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zwei beliebige Konstanten sind.*

Beweis:

Da x_1, x_2 zwei Lösungen von (4.2.1) sind, gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x_1(n+2) + p(n) \cdot x_1(n+1) + q(n) \cdot x_1(n) = 0 \tag{4.2.2a}$$

und

$$x_2(n+2) + p(n) \cdot x_2(n+1) + q(n) \cdot x_2(n) = 0. \tag{4.2.2b}$$

Dann folgt für $x(n) \coloneqq c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x(n+2) &+ p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) \\
&= [c_1 \cdot x_1(n+2) + c_2 \cdot x_2(n+2)] \\
&\qquad + p(n) \cdot [c_1 \cdot x_1(n+1) + c_2 \cdot x_2(n+1)] \\
&\qquad\quad + q(n) \cdot [c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)] \\
&= c_1 \cdot [x_1(n+2) + p(n) \cdot x_1(n+1) + q(n) \cdot x_1(n)] \\
&\qquad + c_2 \cdot [x_2(n+2) + p(n) \cdot x_2(n+1) + q(n) \cdot x_2(n)] \\
&\underset{(4.2.2b)}{\overset{(4.2.2a)}{=}} 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0 \,.
\end{aligned}$$

Nach Definition 4.1.2 ist

$$x(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$$

eine Lösung von (4.2.1) auf $\mathbb{N}_0$, für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Definition 4.2.2 (Komplexwertige Funktion der ganzzahligen Variablen)
Sei $\mathbb{I}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Eine Abbildung $w : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ heißt komplexwertige Funktion der ganzzahligen Variablen.

Bemerkung 4.2.3
Jede komplexwertige Funktion $w : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ der ganzzahligen Variablen lässt sich in der Form $w = u + \mathrm{i} \cdot v$ darstellen, wobei u, v zwei reellwertige Funktionen der ganzzahligen Variablen sind.

Beispiel 4.2.4
Seien $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$. Dann ist die Funktion $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit

$$w(n) := (r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)))^n$$

auf $\mathbb{Z}$ wohldefiniert und es gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}(r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)))^n &= r^n \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))^n \\ &\overset{(*)}{=} r^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi)) \\ &= r^n \cdot \cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot r^n \cdot \sin(n\varphi)\,,\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ den Satz von Moivre[8] benutzt haben:

Satz von Moivre

$(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(n\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 4.2.5
Ist $x(n) := u(n) + \mathrm{i} \cdot v(n)$ mit reellwertigen Funktionen $u, v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine komplexwertige Lösung von (4.2.1)*, dann lösen diese beiden Funktionen ebenfalls diese Differenzengleichung.*

[8] Abraham de Moivre, 1667-1754

Beweis:
Da die Funktion $x = u + \mathrm{i} \cdot v$ eine komplexwertige Lösung der Gleichung (4.2.1) ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (nach Definition 4.1.1):

$$\begin{aligned}
0 &= x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) \\
&= [u(n+2) + \mathrm{i} \cdot v(n+2)] \\
&\qquad + p(n) \cdot [u(n+1) + \mathrm{i} \cdot v(n+1)] \\
&\qquad\quad + q(n) \cdot [u(n) + \mathrm{i} \cdot v(n)] \\
&= [u(n+2) + p(n) \cdot u(n+1) + q(n) \cdot u(n)] \\
&\qquad + \mathrm{i} \cdot [v(n+2) + p(n) \cdot v(n+1) + q(n) \cdot v(n)] \,.
\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ liefert der Vergleich zweier komplexen Zahlen:

$$\begin{cases} u(n+2) + p(n) \cdot u(n+1) + q(n) \cdot u(n) = 0 \,, \\ v(n+2) + p(n) \cdot v(n+1) + q(n) \cdot v(n) = 0 \,. \end{cases}$$

Nach Definition 4.1.1 sind also die Funktionen u, v Lösungen der homogenen Gleichung (4.2.1) auf $\mathbb{N}_0$. □

Beispiel 4.2.6
Die komplexwertige Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ mit $x(n) := (2 \cdot \mathrm{i})^n$ ist eine Lösung der Gleichung

$$x(n+2) + 4x(n) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{N}_0.$$

In der Tat

$$\begin{aligned}
x(n+2) + 4x(n) &= (2 \cdot \mathrm{i})^{n+2} + 4 \cdot (2 \cdot \mathrm{i})^n \\
&= (2 \cdot \mathrm{i})^n \cdot ((2 \cdot \mathrm{i})^2 + 4) \\
&= (2 \cdot \mathrm{i})^n \cdot (-4 + 4) = 0
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter gilt

$$2 \cdot \mathrm{i} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

und nach dem Satz von Moivre

$$\begin{aligned}
(2 \cdot \mathrm{i})^n &= 2^n \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n \\
&= 2^n \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \,.
\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien $u(n) := 2^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ und $v(n) := 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$. Dann gilt auf $\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
u(n+2) + 4u(n) &= 2^{n+2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+2)\right) + 4 \cdot 2^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\
&= 2^{n+2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \\
&= 2^{n+2} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
v(n+2) + 4v(n) &= 2^{n+2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+2)\right) + 4 \cdot 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\
&= 2^{n+2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + \pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \\
&= 2^{n+2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

D.h., die Funktionen u, v sind reellwertige Lösungen von $x(n+2) + 4x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$.

Definition 4.2.7

Gegeben seien die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Determinante

$$D(n) := \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix}$$

<u>CASORATI-Determinante</u>[9] dieser Funktionen.

Definition 4.2.8

Seien x_1 und x_2 zwei verschiedene Lösungen von (4.2.1). *Dann heißt $\{x_1, x_2\}$ heißt <u>Fundamentalsystem</u> von* (4.2.1) *auf $\mathbb{N}_0$, falls für die CASORATI-Determinante dieser Funktionen stets $D(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.*

Beispiel 4.2.9

$$x(n+2) - x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

1) $x_1(n) := 1^n = 1$ und $x_2(n) := (-1)^n$ sind Lösungen dieser Gleichung auf $\mathbb{N}_0$. In der Tat gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x_1(n+2) = 1^{n+2} = 1, \qquad x_1(n+2) - x_1(n) = 1^{n+2} - 1^n = 0$$

[9] Felice Casorati, 1835-1890

sowie

$$x_2(n+2) = (-1)^{n+2}, \qquad x_2(n+2) - x_2(n) = (-1)^{n+2} - (-1)^n$$
$$= (-1)^n \cdot (1-1) = 0\,.$$

2) Nach Definition 4.2.7 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$D(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (-1)^n \\ 1 & (-1)^{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} - (-1)^n$$
$$= 2 \cdot (-1)^{n+1} \neq 0\,.$$

Nach Definition 4.2.8 ist $\{1, (-1)^n\}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $x(n+2) - x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$.

Satz 4.2.10

Seien x_1 und x_2 zwei verschiedene Lösungen von (4.2.1). *Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $D(n_0) \neq 0$, so gilt $D(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis:

Da die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (4.2.1) sind, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $k \in \{1, 2\}$:

$$x_k(n+2) + p(n) \cdot x_k(n+1) + q(n) \cdot x_k(n) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad x_k(n+2) = -p(n) \cdot x_k(n+1) - q(n) \cdot x_k(n)\,.$$

Wir untersuchen die Funktion $D : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei

$$D(n) := \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = x_1(n) \cdot x_2(n+1) - x_1(n+1) \cdot x_2(n)$$

Casorati-Determinante der Funktionen x_1, x_2 ist.

Weiter gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$D(n+1) = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) \end{vmatrix}$$
$$= x_1(n+1) \cdot x_2(n+2) - x_1(n+2) \cdot x_2(n+1)$$
$$\overset{\text{s.o.}}{=} x_1(n+1) \cdot [-p(n) \cdot x_2(n+1) - q(n) \cdot x_2(n)]$$
$$- [-p(n) \cdot x_1(n+1) - q(n) \cdot x_1(n)] \cdot x_2(n+1)$$
$$= q(n) \cdot [x_1(n) \cdot x_2(n+1) - x_1(n+1) \cdot x_2(n)]$$
$$= q(n) \cdot D(n)\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} D(n+1) = q(n) \cdot D(n)\,, \\ \quad D(n_0) = D_0 \quad (\text{mit } D_0 \in \mathbb{R})\,. \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{N}_0$ eindeutig lösbar (vgl. Folgerung 2.2.5) und es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$D(n) = D(n_0) \cdot \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} q(n)}{\prod\limits_{k=0}^{n_0-1} q(n)}\,,$$

wobei wir stets $q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ haben.
Somit folgt: Ist $D(n_0) \neq 0$, so gilt auch $D(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Satz und Definition 4.2.11

Allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung.

Sei $\{x_1, x_2\}$ *ein Fundamentalsystem von* (4.2.1) *auf* $\mathbb{N}_0$*, dann lässt sich jede Lösung* $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *von* (4.2.1) *in der Form*

$$x(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$$

darstellen, wobei die Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *eindeutig bestimmt sind.*

Lässt man in $c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ *die Koeffizienten* c_1, c_2 *unabhängig von einander die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man alle Lösungen der Gleichung* (4.2.1)*. Man sagt: Durch* $x(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ *ist die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0$$

auf $\mathbb{N}_0$ *gegeben.*

Beweis:

Da $\{x_1, x_2\}$ ein Fundamentalsystem von (4.2.1) ist, ist nach Definition 4.2.8 und Satz 4.2.1 jede Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) := c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$$

immer eine Lösung von (4.2.1) für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Sei $\widetilde{x} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung von (4.2.1). Wir zeigen: Es existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass auf $\mathbb{N}_0$ gilt:

$$\widetilde{x}(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$$

In der Tat: Wir nehmen ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und bestimmen die Werte $\widetilde{x}(n_0)$ und $\widetilde{x}(n_0 + 1)$. Wir suchen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{cases} c_1 \cdot x_1(n_0) + c_2 \cdot x_2(n_0) = \widetilde{x}(n_0)\,, \\ c_1 \cdot x_1(n_0+1) + c_2 \cdot x_2(n_0+1) = \widetilde{x}(n_0+1)\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

Weiter gilt

$$\triangle := \begin{vmatrix} x_1(n_0) & x_2(n_0) \\ x_1(n_0+1) & x_2(n_0+1) \end{vmatrix} = D(n_0) \neq 0,$$

da $\{x_1, x_2\}$ ein Fundamentalsystem von (4.2.1) ist. Dann ist das LGS ($*$) eindeutig für c_1, c_2 lösbar. Sei $\{\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}\}$ diese eindeutige Lösung des LGS ($*$). Wir untersuchen die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x(n) := \widetilde{c_1} \cdot x_1(n) + \widetilde{c_2} \cdot x_2(n).$$

Nach Satz 4.2.1 ist x eine Lösung von (4.2.1) auf $\mathbb{N}_0$ und

$$x(n_0) = \widetilde{c_1} \cdot x_1(n_0) + \widetilde{c_2} \cdot x_2(n_0) = \widetilde{x}(n_0)\,,$$

sowie

$$x(n_0+1) = \widetilde{c_1} \cdot x_1(n_0+1) + \widetilde{c_2} \cdot x_2(n_0+1) = \widetilde{x}(n_0+1)\,.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (Satz 4.1.2) gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x(n) = \widetilde{x}(n)$$

und

$$\widetilde{x}(n) = \widetilde{c_1} \cdot x_1(n) + \widetilde{c_2} \cdot x_2(n)$$

Dann ist jede Lösung von (4.2.1) in der Form $c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ darstellbar.

$\square$

Beispiel 4.2.12

$$x(n+2) + x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

1) $x_1(n) := \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ und $x_2(n) := \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ sind die Lösungen der Gleichung auf $\mathbb{N}_0$. In der Tat gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} x_1(n+2) + x_1(n) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+2)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = 0 , \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_2(n+2) + x_2(n) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+2)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + \pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = 0 . \end{aligned}$$

2) Nach Definition 4.2.7 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} D(n) &= \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right) \end{vmatrix} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0 . \end{aligned}$$

Nach Definition 4.2.8 ist somit $\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right\}$ ein Fundamentalsystem von $x(n+2) + x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$.

3) Die allgemeine Lösung der Gleichung $x(n+2) + x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$ lautet also nach Satz 4.2.11:

$$x(n) = c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Satz 4.2.13

Sei x_1 eine Lösung von (4.2.1), *sodass $x_1(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann kann man eine zweite Lösung x_2 der Gleichung* (4.2.1) *bestimmen, sodass $\{x_1, x_2\}$ ein Fundamentalsystem von* (4.2.1) *bildet.*

Beweis:

Wir suchen die Lösung x_2 in der Form $x_2(n) = x_1(n) \cdot u(n)$, wobei $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion ist. In die Differenzengleichung (4.2.1) eingesetzt ergibt:

$$x_1(n+2) \cdot u(n+2) + \underbrace{p(n) \cdot x_1(n+1)} \cdot u(n+1) + q(n) \cdot x_1(n) \cdot u(n) = 0.$$

Da x_1 eine Lösung von (4.2.1) ist, gilt $p(n) \cdot x_1(n+1) = -x_1(n+2) - q(n) \cdot x_1(n)$ und wir erhalten

$$x_1(n+2) \cdot u(n+2) + \underbrace{(-x_1(n+2) - q(n) \cdot x_1(n))} \cdot u(n+1) + q(n) \cdot x_1(n) \cdot u(n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1(n+2) \cdot (u(n+2) - u(n+1)) + q(n) \cdot x_1(n) \cdot (u(n) - u(n+1)) = 0$$

$$\underset{x_1(n+2)\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad (u(n+2) - u(n+1)) - q(n) \cdot \frac{x_1(n)}{x_1(n+2)} \cdot (u(n+1) - u(n)) = 0.$$

M.a.W. genügt die Funktion $w : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $w(n) := u(n+1) - u(n)$ der folgenden linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung auf $\mathbb{N}_0$:

$$w(n+1) - q(n) \cdot \frac{x_1(n)}{x_1(n+2)} \cdot w(n) = 0. \tag{4.2.3}$$

Nach Bemerkung 2.2.2 ist dann

$$w(n) := \prod_{k=0}^{n-1} q(k) \cdot \frac{x_1(k)}{x_1(k+2)} = \frac{x_1(0) \cdot x_1(1)}{x_1(n) \cdot x_1(n+1)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} q(k)$$

eine Lösung von (4.2.3) auf $\mathbb{N}_0$. Weiterhin bekommt man u als eine Lösung der Gleichung $u(n+1) - u(n) = w(n)$ durch $u(n) := \sum_{k=0}^{n-1} w(k)$. Mit dieser Funktion u ist also $x_2(n) = x_1(n) \cdot u(n)$ eine (weitere) Lösung der Gleichung (4.2.1) auf $\mathbb{N}_0$.

Nach Definition 4.2.7 erhalten wir ferner für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
D(n) &= \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_1(n) \cdot u(n) \\ x_1(n+1) & x_1(n+1) \cdot u(n+1) \end{vmatrix} \\
&= x_1(n) \cdot x_1(n+1) \cdot (u(n+1) - u(n)) = x_1(n) \cdot x_1(n+1) \cdot w(n) \\
&= x_1(0) \cdot x_1(1) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} q(k) \neq 0.
\end{aligned}$$

Somit ist $\{x_1, x_2\}$ nach Definition 4.2.8 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (4.2.1) auf $\mathbb{N}_0$. □

Beispiel 4.2.14

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{4.2.4}$$

1) Wir suchen zunächst eine komplexwertige Lösung x_1 in der Form $x_1(n) := \lambda^n$ mit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dann gilt:

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{n+2} - 4\lambda^{n+1} + 4\lambda^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^n \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \quad \underset{\lambda \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2\,.$$

Also ist $x_1(n) = 2^n$ eine reellwertige Lösung der Gleichung (4.2.4) auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir suchen eine weitere Lösung x_2 in der Form $x_2(n) := x_1(n) \cdot u(n)$, wobei $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine neue unbekannte Funktion ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x_2(n+2) - 4x_2(n+1) + 4x_2(n) = 0$$

und eingesetzt

$$x_1(n+2) \cdot u(n+2) - 4x_1(n+1) \cdot u(n+1) + 4x_1(n) \cdot u(n) = 0\,.$$

Da x_1 eine Lösung ist, gilt $4x_1(n+1) = x_1(n+2) + 4x_1(n)$, sodass wir erhalten

$$\begin{aligned}
& x_1(n+2) \cdot u(n+2) - (x_1(n+2) + 4x_1(n)) \cdot u(n+1) + 4x_1(n) \cdot u(n) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1(n+2) \cdot (u(n+2) - u(n+1)) - 4x_1(n) \cdot (u(n+1) - u(n)) = 0
\end{aligned}$$

M.a.W. genügt die Funktion $w : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $w(n) := u(n+1) - u(n)$ der Differenzengleichung

$$x_1(n+2) \cdot w(n+1) - 4x_1(n) \cdot w(n) = 0$$

und wir erhalten mit $x_1(n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} & 2^{n+2} \cdot w(n+1) - 4 \cdot 2^n \cdot w(n) = 0 \\ \underset{2^{n+2} \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & w(n+1) - w(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(n+1) = w(n). \end{aligned}$$

Wir wählen (z.B.) $w(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$u(n+1) - u(n) = 1$$

Wir nehmen (z.B.) $u(n) = n$, woraus $x_2(n) = 2^n \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. $x_2(n) = 2^n \cdot n$ ist auch eine Lösung der Gleichung (4.2.4) auf $\mathbb{N}_0$.

3) Nach Definition 4.2.7 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} D(n) &= \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^n & 2^n \cdot n \\ 2^{n+1} & 2^{n+1} \cdot (n+1) \end{vmatrix} \\ &= 2^{2n+1} \neq 0\,. \end{aligned}$$

Nach Definition 4.2.8 ist somit $\{2^n, 2^n \cdot n\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (4.2.4) auf $\mathbb{N}_0$.

4) Die allgemeine Lösung der Gleichung (4.2.4) auf $\mathbb{N}_0$ lautet nach Satz 4.2.11:

$$x(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n = 2^n \cdot (c_1 + c_2 \cdot n)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Satz 4.2.15

Gegeben seien die Funktionen $p, q : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, *wobei* $q(n) \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist. Dann besitzt die lineare homogene Differenzengleichung 2. Ordnung*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0$$

ein Fundamentalsystem auf $\mathbb{N}_0$.

Beweis:
Wir finden zwei (spezielle) Lösungen x_1 und x_2 der homogenen Differenzengleichung (4.2.1) mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_1(1) = 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ x_2(1) = 1 \end{cases}$$

Nach Satz 4.1.2 sind die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. An der Stelle 0 erhalten wir für die Casorati-Determinante dieser Funktionen:

$$D(0) := \begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(1) & x_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Nach Satz 4.2.10 ist $D(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und nach Definition 4.2.8 ist $\{x_1, x_2\}$ ein Fundamentalsystem von (4.2.1) auf $\mathbb{N}_0$.

□

4.3 Lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition 4.3.1
Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 0$. Gesucht ist eine Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x(n+2) + p \cdot x(n+1) + q \cdot x(n) = 0\,. \tag{4.3.1}$$

Die Gleichung (4.3.1) *heißt lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Gleichung* (4.3.1) *auf $\mathbb{N}_0$.*

Eine Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, die (4.3.1) *erfüllt, heißt komplexwertige Lösung der Gleichung* (4.3.1) *auf $\mathbb{N}_0$.*

Bemerkung 4.3.2

Wir suchen Lösungen der Gleichung (4.3.1) *in der Form*

$$x_1(n) := \lambda^n$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *In Gleichung* (4.3.1) *eingesetzt:*

$$\lambda^{n+2} + p \cdot \lambda^{n+1} + q \cdot \lambda^n = 0,$$

liefert unter Berücksichtigung, dass $\lambda \neq 0$ *ist:*

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0\,, \tag{4.3.1c}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beachte: Da $q \neq 0$ *ist, ist* $\lambda = 0$ *keine Lösung von* (4.3.1c).
Gleichung (4.3.1c) *heißt* *<u>charakteristische Gleichung</u>* *der Differenzengleichung* (4.3.1) *und* $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ *die* *<u>Diskriminante</u>* *der charakteristischen Gleichung* (4.3.1c).

Es gilt: Die (komplexwertige) Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ *mit* $x(n) := \lambda^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *ist genau dann eine (komplexwertige) Lösung von* (4.3.1) *auf* $\mathbb{N}_0$*, wenn* λ *eine (komplexe) Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung* (4.3.1c) *ist.*

<u>I. Fall</u> $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

Seien $\lambda_1 := -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \lambda_2 := -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

Dann sind $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ zwei verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung (4.3.1c).

Die reellwertigen Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x_1(n) := \lambda_1^n$ und $x_2(n) := \lambda_2^n$ bilden ein Fundamentalsystem von (4.3.1) auf $\mathbb{N}_0$. In der Tat:

Die Funktionen x_1, x_2 sind Lösungen von (4.3.1) und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$D(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda_1 \cdot \lambda_2)^n \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

denn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda = 0$ ist keine Lösung von (4.3.1c).

Folgerung 4.3.3

Nach Satz 4.2.11 ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$x(n) := c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$$

und beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung von* (4.3.1) *im Fall* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0.$

Beispiel 4.3.4

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 3x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 3\,.$$

Seien $\lambda_1 := -1$ und $\lambda_2 := 3$. Dann bilden die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x_1(n) := (-1)^n \quad \text{und} \quad x_2(n) := 3^n$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung $x(n+2) - 2x(n+1) - 3x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$. Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$x(n) = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

II. Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

Die reelle Zahl $\lambda := -\frac{p}{2}$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung (4.3.1c) (mit Vielfachheit $r = 2$). Beachte: da $q \neq 0$ ist, ist hier $p \neq 0$.

Die reellwertige Funktion $x_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x_1(n) := \lambda^n$ und $\lambda = -\frac{p}{2}$ ist eine Lösung von (4.3.1). Wir suchen eine weitere Lösung $x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ in der Form

$$x_2(n) := \lambda^n \cdot u(n),$$

wobei $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine neue unbekannte Funktion ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& x_2(n+2) + p \cdot x_2(n+1) + q \cdot x_2(n) = 0 \\
\iff \quad & \lambda^{n+2} \cdot u(n+2) + p \cdot \lambda^{n+1} \cdot u(n+1) + q \cdot \lambda^n \cdot u(n) = 0 \\
\underset{\lambda \neq 0}{\iff} \quad & \lambda^2 \cdot u(n+2) + p \cdot \lambda \cdot u(n+1) + q \cdot u(n) = 0\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Da λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, gilt auch

$$\lambda^2 \cdot u(n) + p \cdot \lambda \cdot u(n) + q \cdot u(n) = 0\,. \tag{$**$}$$

Eine Subtraktion der Gleichungen $(*)$ und $(**)$ liefert:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \cdot (u(n+2) - u(n)) + p \cdot \lambda \cdot (u(n+1) - u(n)) = 0 \\ \underset{\lambda=-\frac{p}{2}}{\Longleftrightarrow} \quad & \frac{p^2}{4} \cdot (u(n+2) - u(n)) - \frac{p^2}{2} \cdot (u(n+1) - u(n)) = 0 \\ \underset{p\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad & (u(n+2) - u(n)) - 2 \cdot (u(n+1) - u(n)) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (u(n+2) - u(n+1)) - (u(n+1) - u(n)) = 0\,. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei weiter $w(n) := u(n+1) - u(n)$.

Dann gilt $w(n+1) = u(n+2) - u(n+1)$ und

$$(u(n+2) - u(n+1)) - (u(n+1) - u(n)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(n+1) - w(n) = 0\,.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nehmen wir $w(n) = 1$.

Dann ist

$$u(n+1) - u(n) = 1.$$

Wir nehmen $u(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, woraus

$$x_2(n) := \lambda^n \cdot n$$

folgt.

Die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x_1(n) := \lambda^n$ und $x_2(n) := n \cdot \lambda^n$ (wobei $\lambda = -\dfrac{p}{2}$ ist) bilden ein Fundamentalsystem von (4.3.1) auf $\mathbb{N}_0$. In der Tat gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} D(n) &= \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^n \\ \lambda^{n+1} & (n+1) \cdot \lambda^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^{2 \cdot n+1} \neq 0, \end{aligned}$$

da $\lambda \neq 0$ ist.

Folgerung 4.3.5

Nach Satz 4.2.11 ist die Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$x(n) := c_1 \cdot \lambda^n + c_2 \cdot n \cdot \lambda^n = \lambda^n \cdot (c_1 + c_2 \cdot n)$$

und beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung von* (4.3.1) *im Fall* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

Beispiel 4.3.6

$$x(n+2) + 6x(n+1) + 9x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -3 \quad \text{(mit Vielfachheit } r = 2\text{)}.$$

Dann bilden die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$x_1 := (-3)^n \quad \text{und} \quad x_2 := n \cdot (-3)^n$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung $x(n+2) + 6x(n+1) + 9x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$. Nach Folgerung 4.3.5 ist

$$x(n) = (-3)^n \cdot (c_1 + c_2 \cdot n)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

<u>**III. Fall**</u> $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$

Beachte: Hier ist $q > 0$.

Wegen

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-\left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)} \\ &= -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

sind $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i} \cdot \beta$ mit $\alpha := -\frac{p}{2}$ und $\beta := \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ zwei verschiedene komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung (4.3.1c). Die komplexwertigen Funktionen $x_1^\star, x_2^\star : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ mit

$$x_1^\star(n) := (\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta)^n \quad \text{und} \quad x_2^\star(n) := (\alpha - \mathrm{i} \cdot \beta)^n$$

sind Lösungen der Gleichung (4.3.1).

Weiter gilt

$$\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta \underset{\beta \neq 0}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \mathrm{i} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Mit $\alpha^2 + \beta^2 = q > 0$ folgt:

$$\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta = \sqrt{q} \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)),$$

wobei das Argument φ durch die Bedingungen

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \varphi \in [0; 2\pi) \end{cases}$$

eindeutig bestimmt ist. Da bei uns $\beta > 0$ ist, gilt daher

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) = \arccos\left(-\frac{p}{2\sqrt{q}} \right) \in (0; \pi)\,.$$

Nach dem Satz von Moivre bekommt man für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$(\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta)^n = (q)^{\frac{n}{2}} \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

und

$$\begin{aligned} (\alpha - \mathrm{i} \cdot \beta)^n &= \left(\overline{\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta}\right)^n = \overline{(\alpha + \mathrm{i} \cdot \beta)^n} \\ &= (q)^{\frac{n}{2}} \cdot (\cos(n \cdot \varphi) - \mathrm{i} \cdot \sin(n \cdot \varphi))\,. \end{aligned}$$

Also haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x_1^\star(n) = (q)^{\frac{n}{2}} \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

sowie

$$x_2^\star(n) = (q)^{\frac{n}{2}} \cdot (\cos(n \cdot \varphi) - \mathrm{i} \cdot \sin(n \cdot \varphi))\,.$$

Nach Satz 4.2.5 sind somit auch $\mathrm{Re}(x_1^\star(n))$, $\mathrm{Im}(x_1^\star(n))$, $\mathrm{Re}(x_2^\star(n))$ und $\mathrm{Im}(x_2^\star(n))$ Lösungen der Gleichung (4.3.1).

Wir wählen (z.B.)

$$x_1(n) := \operatorname{Re}(x_1^\star(n)) = (q)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos(n \cdot \varphi)$$

und

$$x_2(n) := \operatorname{Im}(x_1^\star(n)) = (q)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin(n \cdot \varphi).$$

Dann bilden die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von (4.3.1) auf $\mathbb{N}_0$. In der Tat gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
D(n) &= \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (q)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos(n \cdot \varphi) & (q)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin(n \cdot \varphi) \\ (q)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos((n+1) \cdot \varphi) & (q)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sin((n+1) \cdot \varphi) \end{vmatrix} \\
&= (q)^{\frac{n}{2}} \cdot (q)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \Big(\sin((n+1) \cdot \varphi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) \\
&\qquad\qquad - \cos((n+1) \cdot \varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) \Big) \\
&= (q)^n \cdot (q)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\varphi) \neq 0\,,
\end{aligned}$$

denn $q \neq 0$ und $\sin(\varphi) = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \neq 0.$

Folgerung 4.3.7

Nach Satz 4.2.11 ist im Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ *die Funktion* $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\begin{aligned}
x(n) &= c_1 \cdot (q)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot (q)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin(n \cdot \varphi) \\
&= (q)^{\frac{n}{2}} \cdot (c_1 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot \sin(n \cdot \varphi))
\end{aligned}$$

und beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *die allgemeine Lösung von* (4.3.1) *auf* $\mathbb{N}_0$.
Dabei ist $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{p}{2\sqrt{q}}\right)$.

Beispiel 4.3.8

i) $x(n+2) + 9x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$

Die entsprechende charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm \mathrm{i} \cdot 3.$$

Es gilt $\alpha = 0$, $\beta = 3$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann bilden die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x_1(n) := 3^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ und $x_2(n) := 3^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $x(n+2) + 9x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$.

Nach Folgerung 4.3.7 ist

$$x(n) = 3^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

ii) $x(n+2) + 2x(n+1) + 5x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$

Die entsprechende charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \pm \mathrm{i} \cdot 2.$$

Es gilt $\alpha = -1$, $\beta = 2$ und $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Dann bilden die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $x_1(n) := (\sqrt{5})^n \cdot \cos(n \cdot \varphi)$ und $x_2(n) := (\sqrt{5})^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $x(n+2) + 2x(n+1) + 5x(n) = 0$ auf $\mathbb{N}_0$.

Nach Folgerung 4.3.7 ist

$$x(n) = 5^{\frac{n}{2}} \cdot (c_1 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{N}_0$. Dabei ist $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Beispiel 4.3.9 (Fibonacci-Zahlen[10])

Definition: Die unendliche Folge $\langle F_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_0}$ der natürlichen Zahlen, die rekursiv durch

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$$

für $n \geqslant 2$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ definiert ist, heißt Fibonacci- Folge. Die darin enthaltenen Zahlen heißen Fibonacci-Zahlen. Wir können diese als folgendes Anfangswertproblem auffassen:

$$\begin{cases} x(n+2) - x(n+1) - x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ \hfill x(0) = 0\,, \\ \hfill x(1) = 1\,. \end{cases}$$

[10] Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt, ca. 1170-1240

Die charakteristische Gleichung der homogenen Differenzengleichung lautet

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Nach Folgerung 4.3.3 ist mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$x(n) = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung. Wir suchen spezielle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, mit:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right),$$

welche Formel von Binet[11] genannt wird.

Übung

Weisen Sie nach: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich dem Goldenen Schnitt. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Beispiel 4.3.10

Für $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\begin{cases} x(n+2) - (a+b)\cdot x(n+1) + a\cdot b \cdot x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \\ x(0) = \mu_0\,, \\ x(1) = \mu_1\,. \end{cases}$$

[11] Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856

Die charakteristische Gleichung der homogenen Differenzengleichung lautet

$$\lambda^2 - (a+b) \cdot \lambda + a \cdot b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\,.$$

<u>I. Fall</u> $a \neq b$ Dann besitzt die charakteristische Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen. Seien $\lambda_1 := a$, $\lambda_2 := b$. Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$x(n) = c_1 \cdot a^n + c_2 \cdot b^n$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung auf $\mathbb{N}_0$. Wir suchen spezielle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, mit:

$$\begin{cases} x(0) = \mu_0 \\ x(1) = \mu_1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = \mu_0 \\ c_1 \cdot a + c_2 \cdot b = \mu_1 \end{cases}$$

Es gilt:

$$\triangle := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0, \quad \text{denn} \quad a \neq b$$

sowie

$$\triangle_1 := \begin{vmatrix} \mu_0 & 1 \\ \mu_1 & b \end{vmatrix} = b \cdot \mu_0 - \mu_1 \quad \text{und} \qquad \triangle_2 := \begin{vmatrix} 1 & \mu_0 \\ a & \mu_1 \end{vmatrix} = \mu_1 - a \cdot \mu_0$$

Nach der CRAMER'schen Regel folgt:

$$c_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{b \cdot \mu_0 - \mu_1}{b-a}, \qquad c_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{\mu_1 - a \cdot \mu_0}{b-a}.$$

Dann ist

$$x(n) = \frac{(b \cdot \mu_0 - \mu_1) \cdot a^n + (\mu_1 - a \cdot \mu_0) \cdot b^n}{b-a}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems 4.3.10 im Fall $a \neq b$.

<u>II. Fall</u> $a = b$ Dann besitzt die charakteristische Gleichung eine reelle Lösung $\lambda = a$ (mit Vielfachheit $r = 2$). Nach Folgerung 4.3.5 ist

$$x(n) = a^n \cdot (c_1 + c_2 \cdot n)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung auf $\mathbb{N}_0$.

Wir suchen spezielle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, mit:

$$\begin{cases} x(0) = \mu_0 \\ x(1) = \mu_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \mu_0 \\ a \cdot (c_1 + c_2) = \mu_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \mu_0 \\ c_2 = \dfrac{\mu_1 - a \cdot \mu_0}{a} \end{cases}$$

Dann ist

$$x(n) = \mu_0 \cdot a^n + (\mu_1 - a \cdot \mu_0) \cdot n \cdot a^{n-1}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems 4.3.10 im Fall $a = b$.

Übung

Weisen Sie nach: Fall I verhält sich wie Fall II, wenn $b \to a$ läuft.

4.4 Lineare inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung

Satz 4.4.1

Gegeben seien die Funktionen $p, q, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wobei $q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann lässt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der inhomogenen Differenzengleichung 2. Ordnung

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f(n) \tag{4.4.1}$$

auf $\mathbb{N}_0$ schreiben als: $\mathbb{L} = x^* + \mathbb{L}_0$, wobei $\mathbb{L}_0$ die Lösungsmenge der entsprechenden homogenen Gleichung

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0 \tag{4.4.1h}$$

und $x^*(n)$ eine (sog. partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

BEWEIS:
Wir haben bereits in Satz 4.2.15 gesehen, dass $\mathbb{L}_0$ nichtleer ist. Wir werden in Bemerkung 4.4.4 zeigen, dass auch $\mathbb{L} \neq \varnothing$, mit anderen Worten existiert eine partikuläre Lösung $x^*(n)$ von (4.4.1) und es gilt auf $\mathbb{N}_0$

$$x^*(n+2) + p(n) \cdot x^*(n+1) + q(n) \cdot x^*(n) = f(n)\,.$$

1. Sei $x_L(n) \in \mathbb{L}$ eine beliebige Lösung von (4.4.1). Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

   $$x_L(n+2) + p(n) \cdot x_L(n+1) + q(n) \cdot x_L(n) = f(n)\,,$$

   und somit

   $$\begin{aligned}(x_L(n+2) - x^*(n+2)) + p(n) \cdot (x_L(n+1) - x^*(n+1))& \\ +q(n) \cdot (x_L(n) - x^*(n)) &= 0\,.\end{aligned}$$

   D.h., $\widetilde{x}(n) := x_L(n) - x^*(n)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung

   $$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0$$

   auf $\mathbb{N}_0$. Also gilt für jedes $x_L(n) \in \mathbb{L}$:

   $$x_L(n) = x^*(n) + \widetilde{x}(n) \in x^*(n) + \mathbb{L}_0 \quad \text{und} \quad \mathbb{L} \subseteq x^*(n) + \mathbb{L}_0.$$

2. Sei nun $\widetilde{x}(n) \in \mathbb{L}_0$ eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

   $$\widetilde{x}(n+2) + p(n) \cdot \widetilde{x}(n+1) + q(n) \cdot \widetilde{x}(n) = 0$$

   Da $x^*(n)$ eine (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4.1) ist, folgt

   $$\begin{aligned}(\widetilde{x}(n+2) + x^*(n+2)) + p(n) \cdot (\widetilde{x}(n+1) + x^*(n+1))& \\ +q(n) \cdot (\widetilde{x}(n) + x^*(n)) &= f(n)\end{aligned}$$

   D. h., $x(n) := \widetilde{x}(n) + x^*(n)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4.1). Also gilt für jedes $\widetilde{x}(n) \in \mathbb{L}_0$

   $$x^*(n) + \widetilde{x}(n) \in \mathbb{L} \quad \text{und} \quad x^*(n) + \mathbb{L}_0 \subseteq \mathbb{L}.$$

Insgesamt haben wir $\mathbb{L} = x^*(n) + \mathbb{L}_0$ gezeigt. □

Folgerung 4.4.2

Sei $\{x_1, x_2\}$ *ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzengleichung*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0 \tag{4.4.1h}$$

auf $\mathbb{N}_0$. *Lässt man in* $c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ *die Koeffizienten* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *unabhängig voneinander die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man* *alle* *Lösungen der homogenen Gleichung* (4.4.1h).

Also gilt für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_0 = \{c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n) : \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

dabei heißt $c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)$ *allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Ist jetzt* $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung* (4.4.1), *dann gilt nach Satz 4.4.1 für die Lösungsmenge:*

$$\mathbb{L} = \{c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n) + x^*(n) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Man sagt: Durch $x(n) = c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n) + x^*(n)$ *ist die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung 2. Ordnung* (4.4.1) *gegeben.*

Oder auch: Die allgemeine Lösung der linearen *inhomogenen* *Differenzengleichung 2. Ordnung hat die Form*

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n), \tag{4.4.2}$$

wobei $\widetilde{x}(n)$ *die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen* *homogenen* *Gleichung und* $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.*

Beispiel 4.4.3

$$x(n+2) - 9x(n) = n, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.4.3}$$

1) Die entsprechende homogene Gleichung lautet

$$x(n+2) - 9x(n) = 0 \tag{4.4.3h}$$

und die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 9 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm 3.$$

Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$\widetilde{x}(n) := c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-3)^n \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (4.4.3h).

2) Wie ist nun $x^*(n)$ zu wählen?

Dazu betrachten wir den Ansatz $x^*(n) := A \cdot n + B$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x^*(n+2) - 9x^*(n) = n, \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot (n+2) + B - 9 \cdot (A \cdot n + B) = n\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 8B = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} \\ B = -\dfrac{1}{32} \end{cases}$$

Dann ist $x^*(n) := -\frac{1}{8} \cdot n - \frac{1}{32}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4.3). Nach Satz 4.4.1 und Folgerung 4.4.2 ist

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-3)^n + \left(-\frac{1}{8} \cdot n - \frac{1}{32}\right)$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (4.4.3) auf $\mathbb{N}_0$.

Bemerkung 4.4.4 (Variation der Konstanten)
Gegeben seien die Funktionen $p, q, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*, wobei* $q(n) \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist. Sei weiter* $\{x_1, x_2\}$ *ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = 0\,.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f(n)$$

findet man nach dem Verfahren der Variation der Konstanten:

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form:

$$x^*(n) = c_1(n) \cdot x_1(n) + c_2(n) \cdot x_2(n),$$

wobei $c_1, c_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *unbekannte Funktionen sind. Dann gilt (nach Einsetzung in* (4.4.1)*):*

$$\begin{aligned} &c_1(n+2) \cdot x_1(n+2) + c_2(n+2) \cdot x_2(n+2) \\ &\quad +p(n) \cdot (c_1(n+1) \cdot x_1(n+1) + c_2(n+1) \cdot x_2(n+1)) \\ &\qquad +q(n) \cdot (c_1(n) \cdot x_1(n) + c_2(n) \cdot x_2(n)) = f(n)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Da die Funktionen x_1, x_2 *die Lösungen der homogenen Gleichung sind gilt:*

$$\begin{aligned} &c_1(n) \cdot x_1(n+2) + c_1(n) \cdot p(n) \cdot x_1(n+1) \\ &\qquad +c_1(n) \cdot q(n) \cdot x_1(n) = 0\,, \end{aligned} \tag{$**$}$$

$$\begin{aligned} &c_2(n) \cdot x_2(n+2) + c_2(n) \cdot p(n) \cdot x_2(n+1) \\ &\qquad +c_2(n) \cdot q(n) \cdot x_2(n) = 0\,. \end{aligned} \tag{$***$}$$

Dann liefert $(*) - (**) - (***)$*:*

$$\begin{aligned} &(c_1(n+2) - c_1(n)) \cdot x_1(n+2) \\ &\quad +(c_2(n+2) - c_2(n)) \cdot x_2(n+2) \\ &\qquad +p(n) \cdot \Big((c_1(n+1) - c_1(n)) \cdot x_1(n+1) \\ &\qquad\qquad +(c_2(n+1) - c_2(n)) \cdot x_2(n+1)\Big) = f(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad &((c_1(n+2) - c_1(n+1)) + (c_1(n+1) - c_1(n))) \cdot x_1(n+2) \\ &\quad +((c_2(n+2) - c_2(n+1)) + (c_2(n+1) - c_2(n))) \cdot x_2(n+2) \\ &\qquad +p(n) \cdot \Big((c_1(n+1) - c_1(n)) \cdot x_1(n+1) \\ &\qquad\qquad +(c_2(n+1) - c_2(n)) \cdot x_2(n+1)\Big) = f(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & (c_1(n+2)-c_1(n+1))\cdot x_1(n+2)\\ & +(c_2(n+2)-c_2(n+1))\cdot x_2(n+2)\\ & +(c_1(n+1)-c_1(n))\cdot x_1(n+2)\\ & +(c_2(n+1)-c_2(n))\cdot x_2(n+2)\\ & +p(n)\cdot\Big((c_1(n+1)-c_1(n))\cdot x_1(n+1)\\ & +(c_2(n+1)-c_2(n)\Big)\cdot x_2(n+1))=f(n)\,. \end{aligned} \tag{$****$}$$

Als zusätzliche Bedingung auf $\mathbb{N}_0$ *nehmen wir an:*

$$\begin{aligned}&(c_1(n+1)-c_1(n))\cdot x_1(n+1)\\ &+(c_2(n+1)-c_2(n))\cdot x_2(n+1)=0\,. \end{aligned}\tag{+}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}&(c_1(n+2)-c_1(n+1))\cdot x_1(n+2)\\ &+(c_2(n+2)-c_2(n+1))\cdot x_2(n+2)=0\,. \end{aligned}$$

Und eingesetzt in $(****)$*:*

$$\begin{aligned}&(c_1(n+1)-c_1(n))\cdot x_1(n+2)\\ &+(c_2(n+1)-c_2(n))\cdot x_2(n+2)=f(n)\,. \end{aligned}\tag{++}$$

Wir setzten

$$w_1(n) \coloneqq c_1(n+1)-c_1(n) \quad \textit{und} \quad w_2(n) \coloneqq c_2(n+1)-c_2(n).$$

Mit Hilfe von $(+)$ *und* $(++)$ *erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Funktionen* $w_1(n), w_2(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*, nämlich:*

$$\begin{cases} w_1(n)\cdot x_1(n+1)+w_2(n)\cdot x_2(n+1)=0\\ w_1(n)\cdot x_1(n+2)+w_2(n)\cdot x_2(n+2)=f(n)\end{cases}$$

mit der Hauptdeterminante

$$\triangle \coloneqq \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1)\\ x_1(n+2) & x_2(n+2)\end{vmatrix}\,.$$

Nach Definition 4.2.7 ist $\triangle = D(n+1)$ *die* CASORATI*-Determinante der Funktionen* x_1, x_2*. Da* $\{x_1, x_2\}$ *ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist, gilt* $D(n+1) \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*. Dann ist das lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten* $w_1(n), w_2(n)$ *eindeutig lösbar. Mit der* CRAMER*'schen Regel erhalten wir*

$$\triangle_1 := \begin{vmatrix} 0 & x_2(n+1) \\ f(n) & x_2(n+2) \end{vmatrix}, \qquad \triangle_2 = \begin{vmatrix} x_1(n+1) & 0 \\ x_1(n+2) & f(n) \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} w_1(n) &= \frac{\triangle_1}{\triangle} = -\frac{x_2(n+1) \cdot f(n)}{D(n+1)}, \\ w_2(n) &= \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{x_1(n+1) \cdot f(n)}{D(n+1)}. \end{aligned}$$

Da wir

$$w_1(n) := c_1(n+1) - c_1(n)$$

und

$$w_2(n) := c_2(n+1) - c_2(n).$$

gesetzt haben, folgt

$$c_1(n+1) = \sum_{k=0}^{n} w_1(k) + c_1(0) \quad \textit{bzw.} \quad c_2(n+1) = \sum_{k=0}^{n} w_2(k) + c_2(0)\,,$$

wobei $c_1(0), c_2(0) \in \mathbb{R}$ *beliebig gewählt werden können. Also gilt für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

$$c_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} w_1(k) + c_1(0) \quad \textit{bzw.} \quad c_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} w_2(k) + c_2(0). \tag{4.4.4}$$

Wir erhalten die Funktionen $c_1, c_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *und somit eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung in der Form*

$$x^*(n) = c_1(n) \cdot x_1(n) + c_2(n) \cdot x_2(n).$$

Beispiel 4.4.5

$$x(n+2) - x(n) = \frac{2}{n^2+4n+3}, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.4.5}$$

1) Die entsprechende homogene Gleichung lautet

$$x(n+2) - x(n) = 0 \tag{4.4.5h}$$

und die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1\,.$$

Seien $\lambda_1 \coloneqq 1$ und $\lambda_2 \coloneqq -1$. Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 + c_2 \cdot (-1)^n$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (4.4.5h). Die Funktionen $x_1(n) \coloneqq 1$ und $x_2(n) \coloneqq (-1)^n$ bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir suchen nun x^* mit dem Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 4.4.4 erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{cases} w_1(n) \cdot 1 + w_2(n) \cdot (-1)^{n+1} = 0 \\[1ex] w_1(n) \cdot 1 + w_2(n) \cdot (-1)^{n+2} = \dfrac{2}{n^2+4n+3} \end{cases}$$

mit der Hauptdeterminante

$$\begin{aligned} \triangle \coloneqq D(n+1) &= \begin{vmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (-1)^{n+1} \\ 1 & (-1)^{n+2} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+2} - (-1)^{n+1} = 2 \cdot (-1)^n\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\triangle_1 \coloneqq \begin{vmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \\ \dfrac{2}{n^2+4n+3} & (-1)^{n+2} \end{vmatrix} = \frac{-2 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2+4n+3} = \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2+4n+3}\,,$$

und

$$\triangle_2 := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{2}{n^2+4n+3} \end{vmatrix} = \frac{2}{n^2+4n+3}\,.$$

Nach der Cramer'schen Regel gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$w_1(n) = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right]$$

und

$$\begin{aligned} w_2(n) &= \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{1}{(-1)^n \cdot (n^2+4n+3)} = \frac{(-1)^n}{n^2+4n+3} \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \cdot \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right]\,. \end{aligned}$$

Weiter gilt nach Bemerkung 4.4.4:

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} w_1(k) + c_1(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) + c_1(0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] + c_1(0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_2(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} w_2(k) + c_2(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2} \cdot \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) + c_2(0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right] + c_2(0). \end{aligned}$$

Mit $c_1(0) = -\frac{3}{4}$ und $c_2(0) = -\frac{1}{4}$ bekommen wir folgende partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (4.4.5):

$$\begin{aligned} x^*(n) &= c_1(n) \cdot x_1(n) + c_2(n) \cdot x_2(n) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] - \frac{(-1)^n}{2} \cdot \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \cdot (-1)^n \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = -\frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4.5) auf $\mathbb{N}_0$ ist somit

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c_1 + c_2 \cdot (-1)^n - \frac{1}{n+1}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Satz 4.4.6 (Superpositionsprinzip)
Gegeben seien die Funktionen $p, q, f_1, f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*, wobei* $q(n) \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist. Seien weiter* $x_1^*(n)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f_1(n) \tag{4.4.6a}$$

und $x_2^*(n)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f_2(n). \tag{4.4.6b}$$

Dann ist $x^*(n) := x_1^*(n) + x_2^*(n)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$x(n+2) + p(n) \cdot x(n+1) + q(n) \cdot x(n) = f_1(n) + f_2(n). \tag{4.4.7}$$

BEWEIS:
Einsetzen von $x^*(n)$ in (4.4.7) liefert die Behauptung, weil $x_1^*(n)$ und $x_2^*(n)$ partikuläre Lösungen der entsprechenden Gleichungen sind.

$\square$

4.5 Lineare inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition 4.5.1
Gegeben seien eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *und reelle Zahlen* $p, q \in \mathbb{R}$ *mit* $q \neq 0$.

Gesucht ist eine Funktion $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*, sodass für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$x(n+2) + p \cdot x(n+1) + q \cdot x(n) = f(n)\,. \tag{4.5.1}$$

Die Gleichung (4.5.1) *heißt lineare inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Funktion* $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *heißt Lösung der Gleichung* (4.5.1) *auf* $\mathbb{N}_0$*. (Vgl. Definition 4.1.1, Bemerkung 4.1.3, Definition 4.3.1).*

Bemerkung 4.5.2

Nach Folgerung 4.4.2 hat die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung (4.5.1) *die Form*

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n), \tag{4.5.2}$$

wobei $\widetilde{x}(n)$ *die allgemeine Lösung der entsprechenden linearen homogenen Differenzengleichung*

$$x(n+2) + p \cdot x(n+1) + q \cdot x(n) = 0 \tag{4.5.1h}$$

und $x^*(n)$ *eine partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung* (4.5.1) *ist. Die allgemeine Lösung* $\widetilde{x}(n)$ *von* (4.5.1h) *bekommt man, wenn man die charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0 \tag{4.5.1c}$$

untersucht (s. Folgerungen 4.3.3, 4.3.5 , 4.3.7).

Wir betrachten nun die Form partikulärer Lösungen $x^*(n)$ *von* (4.5.1) *für einige Sonderfälle der rechten Seite* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$*:*

i) $f(n) := P_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* $m \in \mathbb{N}_0$*.*

a) $\lambda = 1$ *ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = Q_m(n),$$

wobei $Q_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* m *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 4.5.4: $\quad x(n+2) - x(n+1) + x(n) = n^3 + 6$*)*

b) $\lambda = 1$ *ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c) *(mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = n^r \cdot Q_m(n),$$

wobei $Q_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* m *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 4.5.5: $\quad x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 2$*)*

ii) $f(n) := \gamma^n \cdot P_m(n)$, *wobei* $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ *und* $P_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* $m \in \mathbb{N}_0$ *ist.*

a) $\lambda = \gamma$ *ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = \gamma^n \cdot Q_m(n),$$

wobei $Q_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* m *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 4.5.6: $x(n+2) - 3x(n+1) - 4x(n) = (6n-8) \cdot 2^n$*)*

b) $\lambda = \gamma$ *ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c) *(mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = n^r \cdot \gamma^n \cdot Q_m(n),$$

wobei $Q_m(n)$ *ein Polynom vom Grad* m *mit unbekannten Koeffizienten ist.*

(s. Beispiel 4.5.7: $x(n+2) + 5x(n+1) + 6x(n) = (8n-2) \cdot (-2)^n$*)*

iii) $f(n) := P_m(n) \cdot \cos(n\psi) + Q_l(n) \cdot \sin(n\psi)$, *wobei* $\psi \in \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$. *Dabei sind* $P_m(n), Q_l(n)$ *Polynome vom Grad* $m, l \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom.*

a) $\lambda = \cos(\psi) \pm \mathrm{i} \cdot \sin(\psi)$ *sind keine Lösungen der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = S_N(n) \cdot \cos(n\psi) + T_N(n) \cdot \sin(n\psi),$$

wobei $S_N(n), T_N(n)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{m, l\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

$\Big($*s. Beispiel 4.5.8:* $x(n+2) + 4x(n) = 17n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)\Big)$

b) $\lambda = \cos(\psi) \pm \mathrm{i} \cdot \sin(\psi)$ *sind Lösungen der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c) *(mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = n^r \cdot (S_N(n) \cdot \cos(n\psi) + T_N(n) \cdot \sin(n\psi)),$$

wobei $S_N(n), T_N(n)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{m, l\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

$\Big($*s. Beispiel 4.5.9:* $\quad x(n+2) + x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\Big)$

iv) $f(n) := \rho^n \cdot (P_m(n) \cdot \cos(n\psi) + Q_l(n) \cdot \sin(n\psi))$*, wobei* $\rho \in \mathbb{R}$ *mit* $\rho > 0$ *und* $\rho \neq 1$, $\psi \in \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$*. Dabei sind* $P_m(n), Q_l(n)$ *Polynome vom Grad* $m, l \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom.*

a) $\lambda = \rho \cdot (\cos(\psi) \pm \mathrm{i} \cdot \sin(\psi))$ *sind keine Lösungen der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c).

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = \rho^n \cdot (S_N(n) \cdot \cos(n\psi) + T_N(n) \cdot \sin(n\psi)),$$

wobei $S_N(n), T_N(n)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{m, l\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

$\Big($*s. Beispiel 4.5.10:* $\quad x(n+2) + 2x(n+1) + 4x(n) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\Big)$

b) $\lambda = \rho \cdot (\cos(\psi) \pm \mathrm{i} \cdot \sin(\psi))$ *sind Lösungen der charakteristischen Gleichung* (4.5.1c) *(mit Vielfachheit* $r \in \mathbb{N}$*).*

Wir suchen eine partikuläre Lösung in der Form

$$x^*(n) = n^r \cdot \rho^n \cdot (S_N(n) \cdot \cos(n\psi) + T_N(n) \cdot \sin(n\psi)),$$

wobei $S_N(n), T_N(n)$ *Polynome vom Grad nicht mehr als* $N := \max\{m, l\}$ *mit unbekannten Koeffizienten sind.*

$\Big($*s. Beispiel 4.5.11:* $\quad x(n+2) + 9x(n) = 3^{n+2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\Big)$

Bemerkung 4.5.3 (zu den Teilen iii und iv)

Für alle $\psi \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\cos(n \cdot (\psi + \pi)) = \cos(n\psi) \cdot (-1)^n, \quad \sin(n \cdot (\psi + \pi)) = \sin(n\psi) \cdot (-1)^n. \tag{4.5.3}$$

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit*

$$f(n) := (-1)^n \cdot [P_m(n) \cdot \cos(n\psi) + Q_l(n) \cdot \sin(n\psi)]$$

bzw.

$$f(n) := (-1)^n \cdot \rho^n \cdot [P_m(n) \cdot \cos(n\psi) + Q_l(n) \cdot \sin(n\psi)],$$

wobei $\rho \in \mathbb{R}$ *mit* $\rho > 0$ *und* $\rho \neq 1$, $\psi \in \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$. *Ferner sind* $P_m(n), Q_l(n)$ *Polynome vom Grad* $m, l \in \mathbb{N}_0$ *oder genau ein Polynom ist das Nullpolynom. Dann gilt*

$$f(n) = P_m(n) \cdot \cos(n(\psi + \pi)) + Q_l(n) \cdot \sin(n(\psi + \pi))$$

bzw.

$$f(n) = \rho^n \cdot [P_m(n) \cdot \cos(n(\psi + \pi)) + Q_l(n) \cdot \sin(n(\psi + \pi))] .$$

Wir setzen nun $\theta := \psi + \pi$ *und suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung* (4.4.1) *wie in iii) bzw. iv). Wie oben, ist es entscheidend, ob* $\lambda = \cos(\theta) \pm \mathrm{i} \cdot \sin(\theta)$ *bzw.* $\lambda = \rho \cdot (\cos(\theta) \pm \mathrm{i} \cdot \sin(\theta))$ *keine Lösungen oder sehr wohl Lösungen (jeweils mit Vielfachheit* r*) der charakteristischen Gleichung* (4.3.1c) *sind.*

$\Bigl($*s. Beispiel 4.5.12:* $\quad x(n+2) + \sqrt{3} \cdot x(n+1) + x(n) = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)\Bigr)$

Beispiel 4.5.4

$$x(n+2) - x(n+1) + x(n) = n^3 + 6, \quad n \in \mathbb{N}_0 . \tag{4.5.4}$$

1) $x(n+2) - x(n+1) + x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1) .$$

Hier gilt $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $q = 1$, und nach Folgerung 4.3.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $P_3(n) = n^3 + 6$. Da 1 keine Lösung unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = A \cdot n^3 + B \cdot n^2 + C \cdot n + D \quad \text{mit } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.4) ergibt:

$$\begin{aligned}
&(A \cdot (n+2)^3 + B \cdot (n+2)^2 + C \cdot (n+2) + D) \\
&\quad -(A \cdot (n+1)^3 + B \cdot (n+1)^2 + C \cdot (n+1) + D) \\
&\qquad +C \cdot (n+1) + D) + (A \cdot n^3 + B \cdot n^2 + C \cdot n + D) = n^3 + 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad & A \cdot n^3 + (3A + B) \cdot n^2 + (9A + 2B + C) \cdot n \\
&\qquad +(7A + 3B + C + D) = n^3 + 6\,.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A + B = 0 \\ 9A + 2B + C = 0 \\ 7A + 3B + C + D = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = -3 \\ D = 11 \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = n^3 - 3n^2 - 3n + 11$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned}
x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\
&= c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + n^3 - 3n^2 - 3n + 11
\end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.4) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.5

$$x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 2, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{4.5.5}$$

1) $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \text{ (mit Vielfachheit } r = 2).$$

Nach Folgerung 4.3.5 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 + c_2 \cdot n \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $P_0(n) = 2$. Da $\lambda = 1$ eine Lösung mit Vielfachheit $r = 2$ unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = n^2 \cdot A = An^2 \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.5) ergibt:

$$A \cdot (n+2)^2 - 2 \cdot A \cdot (n+1)^2 + A \cdot n^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1\,.$$

Dann ist

$$x^*(n) = n^2$$

eine partikuläre Lösung und

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c_1 + c_2 \cdot n + n^2$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.5) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.6

$$x(n+2) - 3x(n+1) - 4x(n) = (6n-8) \cdot 2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.5.6}$$

1) $x(n+2) - 3x(n+1) - 4x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 4 \text{ oder } \lambda = -1 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1\text{)}$$

Seien $\lambda_1 := 4$ und $\lambda_2 := -1$. Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = 2$ und $P_1(n) = 6n - 8$. Da 2 keine Lösung unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = 2^n \cdot (An + B) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.6) ergibt:

$$\begin{aligned}
& 2^{n+2} \cdot (A(n+2) + B) \\
& \quad -3 \cdot 2^{n+1} \cdot (A(n+1) + B) - 4 \cdot 2^n \cdot (An + B) = (6 \cdot n - 8) \cdot 2^n \\
\underset{2^n \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad & 4 \cdot (A(n+2) + B) \\
& \quad -3 \cdot 2 \cdot (A(n+1) + B) - 4 \cdot (An + B) = 6n - 8 \\
\Longleftrightarrow \quad & (-6A \cdot n) + (2A - 6B) = 6n - 8\,.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -6A = 6 \\ 2A - 6B = -8 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = (-n + 1) \cdot 2^n$$

eine partikuläre Lösung und

$$x(n) = \widetilde{x}(n) + x^*(n) = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n + (-n+1) \cdot 2^n$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.6) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.7

$$x(n+2) + 5x(n+1) + 6x(n) = (8n-2) \cdot (-2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.5.7}$$

1) $x(n+2)+5x(n+1)+6x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -2 \text{ oder } \lambda = -3 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

Seien $\lambda_1 := -2$ und $\lambda_2 := -3$. Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot (-3)^n \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\gamma = -2$ und $P_1(n) = 8n - 2$. Da $\lambda = -2$ eine Lösung mit Vielfachheit $r = 1$ unserer charakteristischen Gleichung ist, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = n^1 \cdot (-2)^n \cdot (An + B) = (-2)^n \cdot (An^2 + Bn) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.7) ergibt:

$$\begin{aligned}
&(-2)^{n+2} \cdot (A(n+2)^2 + B(n+2)) \\
&\quad +5 \cdot (-2)^{n+1} \cdot (A(n+1)^2 + B(n+1)) \\
&\qquad +6 \cdot (-2)^n \cdot (An^2 + Bn) = (8n-2) \cdot (-2)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{(-2)^n \neq 0}{\Longleftrightarrow}\quad & 4 \cdot (A(n+2)^2 + B(n+2)) \\
&\quad -5 \cdot 2 \cdot (A(n+1)^2 + B(n+1)) \\
&\qquad +6 \cdot (An^2 + Bn) = 8n - 2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (-4A) \cdot n + (6A - 2B) = 8n - 2\,.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ 6A - 2B = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = -5 \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = (-2n^2 - 5n) \cdot (-2)^n$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned} x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\ &= c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot (-3)^n + (-2n^2 - 5n) \cdot (-2)^n \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.7) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.8

$$x(n+2) + 4x(n) = 17n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.5.8}$$

1) $x(n+2) + 4x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \pm\mathrm{i} \cdot 2 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

Hier gilt $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\varphi = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $q = 4$ und nach Folgerung 4.3.7 ist

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(n) &= (4)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \\ &= 2^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \end{aligned}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\psi = \dfrac{\pi}{4}$, $P(n) \equiv 0$ (Nullpolynom) und $Q_1(n) = 17n$.

Da $\cos\dfrac{\pi}{4} \pm \mathrm{i} \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ keine Lösungen unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = (An + B) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) + (Cn + D) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.8) ergibt:

$$\begin{aligned}
&(A(n+2)+B)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(n+2)\right)\\
&\quad+(C(n+2)+D)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(n+2)\right)\\
&\qquad+4\cdot\Bigg((An+B)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\\
&\qquad\quad+(Cn+D)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\Bigg)=17n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad &(A(n+2)+B)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\right)\\
&\quad+(C(n+2)+D)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\\
&\qquad+4\cdot\Bigg((An+B)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\\
&\qquad\quad+(Cn+D)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\Bigg)=17n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad &(4An+4B+C(n+2)+D)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\\
&\quad+(4Cn+4D-A(n+2)-B)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)=17n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\ .
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases}4A+C=0\\ 4B+2C+D=0\\ -A+4C=17\\ -2A-B+4D=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}A=-1\\ B=-\dfrac{30}{17}\\ C=4\\ D=-\dfrac{16}{17}\end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n)=\left(-n-\frac{30}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)+\left(4n-\frac{16}{17}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned}
x(n)&=\widetilde{x}(n)+x^*(n)\\
&=2^n\cdot\left(c_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+c_2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\\
&\quad+\left(-n-\frac{30}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)+\left(4n-\frac{16}{17}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)
\end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.8) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.9

$$x(n+2)+x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right),\quad n\in\mathbb{N}_0\,. \tag{4.5.9}$$

1) $x(n+2)+x(n)=0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2+1=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda=\pm\mathrm{i} \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r=1).$$

Hier gilt $\alpha=0$, $\beta=1$, $\varphi=\arccos(0)=\dfrac{\pi}{2}$, $q=1$ und nach Folgerung 4.3.7 ist

$$\widetilde{x}(n)=c_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+c_2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

mit beliebigen $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\psi=\dfrac{\pi}{2}$, $P_0(n)=1$ und $Q(n)\equiv 0$ (Nullpolynom).
Da $\lambda=\cos\dfrac{\pi}{2}\pm\mathrm{i}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}=\pm\mathrm{i}$ Lösungen (jeweils mit Vielfachheit $r=1$) unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n)=n^1\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\quad\text{mit } A,B\in\mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.9) ergibt:

$$\begin{aligned}
&(n+2)\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(n+2)\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(n+2)\right)\right)\\
&\qquad+n\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\\
\Leftrightarrow\quad&(n+2)\cdot\left(-A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)-B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\\
&\qquad+n\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\\
\Leftrightarrow\quad&-2A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)-2B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right).
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases}-2A=1\\ -2B=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\ B=0\end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = -\frac{n}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned} x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\ &= c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) - \frac{n}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.9) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.10

$$x(n+2) + 2x(n+1) + 4x(n) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 . \tag{4.5.10}$$

1) $x(n+2)+2x(n+1)+4x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -1 \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{3} \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

Hier gilt $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{3}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, $q = 4$ und nach Folgerung 4.3.7 ist

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(n) &= 4^{\frac{n}{2}} \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right)\right) \\ &= 2^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right)\right) \end{aligned}$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\rho = 2$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $P(n) \equiv 0$ (Nullpolynom) und $Q_0(n) = 1$. Da $2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) = \pm \mathrm{i} \cdot 2$ keine Lösungen unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n) = 2^n \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.10) ergibt:

$$
\begin{aligned}
&2^{(n+2)} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+2)\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+2)\right)\right) \\
&\quad +2 \cdot 2^{n+1} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)\right)\right) \\
&\qquad +4 \cdot 2^{n} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{2^n \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad & 2^2 \cdot \left(-A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) - B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \\
&\quad +2 \cdot 2 \cdot \left(-A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) \\
&\qquad +4 \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & 4B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) - 4A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right).
\end{aligned}
$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$
\begin{cases} 4B = 0 \\ -4A = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = 0 \end{cases}
$$

Dann ist

$$
x^*(n) = -\frac{2^n}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = -2^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)
$$

eine partikuläre Lösung und

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\
&= 2^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right)\right) - 2^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)
\end{aligned}
$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.10) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.11

$$x(n+2)+9x(n)=3^{n+2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right),\quad n\in\mathbb{N}_0$$
$$\Longleftrightarrow\qquad x(n+2)+9x(n)=3^{n}\cdot 9\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right),\quad n\in\mathbb{N}_0\,. \tag{4.5.11}$$

1) $x(n+2)+9x(n)=0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2+9=0\ \Leftrightarrow\ \lambda=\pm\mathrm{i}\cdot 3 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r=1).$$

Hier gilt $\alpha=0$, $\beta=3$, $\varphi=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$, $q=9$ und nach Folgerung 4.3.7 ist

$$\begin{aligned}\widetilde{x}(n)&=9^{\frac{n}{2}}\cdot\left(c_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+c_2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\\&=3^n\cdot\left(c_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+c_2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\end{aligned}$$

mit beliebigen $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Wir haben $\rho=3$, $\psi=\frac{\pi}{2}$, $P_0(n)=9$ und $Q(n)\equiv 0$ (Nullpolynom).

Da $\lambda=3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}\pm\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)=\pm\mathrm{i}\cdot 3$ Lösungen (jeweils mit Vielfachheit $r=1$) unserer charakteristischen Gleichung sind, suchen wir nach Bemerkung 4.5.2 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n)=n^1\cdot 3^n\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\quad\text{mit } A,B\in\mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.11) ergibt:

$$\begin{aligned}(n+2)\cdot 3^{(n+2)}\cdot&\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(n+2)\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(n+2)\right)\right)\\&+9\cdot n\cdot 3^n\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\\&\qquad=3^2\cdot 3^n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{3^{n+2}\neq 0}{\Longleftrightarrow}\quad&(n+2)\cdot\left(-A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)-B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)\\&+n\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\\\Longleftrightarrow\quad&-2A\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)-2B\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = -\frac{n}{2} \cdot 3^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned} x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\ &= 3^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right) - \frac{n}{2} \cdot 3^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.11) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.12

$$x(n+2) + \sqrt{3} \cdot x(n+1) + x(n) = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \quad (4.5.12)$$

1) $x(n+2)+\sqrt{3}\cdot x(n+1)+x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \sqrt{3} \cdot \lambda + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

Hier gilt $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$, $q = 1$ und nach Folgerung 4.3.7 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6} \cdot n\right)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Weiter gilt:

$$(-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \cdot n\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6} \cdot n\right),$$

somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & x(n+2)+\sqrt{3}\cdot x(n+1)+x(n)=(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot n\right) \\ \iff\quad & x(n+2)+\sqrt{3}\cdot x(n+1)+x(n)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right). \qquad (4.5.12i) \end{aligned}$$

Für $\theta := \dfrac{7\pi}{6}$ gilt:

$$\cos(\theta)\pm\mathrm{i}\cdot\sin(\theta)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\pm\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mp\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}$$

sind Lösungen (jeweils mit Vielfachheit $r=1$) der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2+\sqrt{3}\cdot\lambda+1=0\,.$$

Nach den Bemerkungen 4.5.2 und 4.5.3 suchen wir somit eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x^*(n)=n^1\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\right)\qquad\text{mit } A,B\in\mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.12i) ergibt:

$$\begin{aligned} &(n+2)\cdot\Bigg(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot(n+2)\right) \\ &\qquad\qquad +B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot(n+2)\right)\Bigg) \\ &\quad+\sqrt{3}\cdot(n+1)\cdot\Bigg(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot(n+1)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot(n+1)\right)\Bigg) \\ &\quad+n\cdot\Bigg(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right) \\ &\qquad\qquad +B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\Bigg)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right) \end{aligned}$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
(n+2)\cdot\Bigg(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n+\frac{7\pi}{3}\right)&\\
+B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n+\frac{7\pi}{3}\right)\Bigg)&\\
+\sqrt{3}\cdot(n+1)\cdot\Bigg(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n+\frac{7\pi}{6}\right)&\\
+B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n+\frac{7\pi}{6}\right)\Bigg)&\\
+n\cdot\Bigg(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)&\\
+B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\Bigg)&=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)
\end{aligned}$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
&(n+2)\cdot A\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&+(n+2)\cdot B\cdot\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&+\sqrt{3}\cdot(n+1)\cdot A\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&+\sqrt{3}\cdot(n+1)\cdot B\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&+n\cdot\left(A\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)+B\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)
\end{aligned}$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2}\cdot A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B\right)\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)&\\
+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot A-\frac{1}{2}\cdot B\right)\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)&=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\cdot n\right)
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}A - \frac{1}{2}B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dann ist

$$x^*(n) = n \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6} \cdot n\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6} \cdot n\right)\right)$$

eine partikuläre Lösung und

$$\begin{aligned} x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\ &= c_1 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6} \cdot n\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6} \cdot n\right) \\ &\qquad + n \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6} \cdot n\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6} \cdot n\right)\right) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.12) auf $\mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.5.13

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + n \cdot 3^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 . \tag{4.5.13}$$

1) $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0$ ist die entsprechende homogene Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2 \text{ oder } \lambda = 3 \text{ (jeweils mit Vielfachheit } r = 1).$$

Seien $\lambda_1 := 2$, $\lambda_2 := 3$. Nach Folgerung 4.3.3 ist

$$\widetilde{x}(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n \quad \text{mit beliebigen} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung auf $\mathbb{N}_0$.

2) Nach Bemerkung 4.5.2 suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \tag{4.5.13a}$$

in der Form

$$x_1^*(n) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.13a) ergibt:

$$\begin{aligned} &A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (n+2)\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (n+2)\right) \\ &\quad -5 \cdot \left(A \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot (n+1)\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (n+1)\right)\right)\right) \\ &\qquad +6 \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad &A \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\quad +B \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\quad -5 \cdot \left(A \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right. \\ &\qquad \left. +B \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &\qquad +6 \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad &\left(3A - 2B \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \\ &\qquad + \left(2A \cdot \sqrt{3} + 3B\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 3A - 2B \cdot \sqrt{3} = 1 \\ 2A \cdot \sqrt{3} + 3B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{7} \\ B = -\dfrac{2\sqrt{3}}{21} \end{cases}$$

Dann ist

$$x_1^*(n) = \frac{1}{7} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) - \frac{2\sqrt{3}}{21} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.13a).

3) Nach Bemerkung 4.5.2 suchen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = n \cdot 3^n. \tag{4.5.13b}$$

in der Form

$$x_2^*(n) = n^1 \cdot (An + B) \cdot 3^n = (An^2 + Bn) \cdot 3^n, \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung (4.5.13b) ergibt:

$$\begin{aligned}
&(A(n+2)^2 + B(n+2)) \cdot 3^{n+2} \\
&\quad -5 \cdot (A(n+1)^2 + B(n+1)) \cdot 3^{n+1} + 6 \cdot (An^2 + Bn) \cdot 3^n = n \cdot 3^n \\
\underset{3^n \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad & 9 \cdot (A(n^2 + 4n + 4) + B(n+2) \\
&\quad -15 \cdot (A(n^2 + 2n + 1) + B(n+1)) + 6 \cdot (An^2 + Bn) = n \\
\Longleftrightarrow \quad & 6An + (21A + 3B) = n.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 21A + 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

Dann ist

$$x_2^*(n) = \left(\frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6}\right) \cdot 3^n$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.13b).

4) Nach dem Superpositionsprinzip (Satz 4.4.6) ist

$$x^*(n) = x_1^*(n) + x_2^*(n)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.5.13) und

$$\begin{aligned} x(n) &= \widetilde{x}(n) + x^*(n) \\ &= c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n \\ &\qquad + \frac{1}{7} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) - \frac{2\sqrt{3}}{21} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) + \left(\frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6}\right) \cdot 3^n \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (4.5.13) auf $\mathbb{N}_0$.

Schlusswort

Wir haben in diesem Lehrbuch lineare Differential- und lineare Differenzengleichungen erster und zweiter Ordnung betrachtet. Gleichungen n-ter Ordnung, mit $n = 3, 4, 5, \ldots$, lassen sich in analoger Weise zu den Betrachtungen der Gleichungen zweiter Ordnung untersuchen.

Anhang

Das Griechische Alphabet

Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ
α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ
Iota	**Kappa**	**Lambda**	**My**	**Ny**	**Xi**	**Omikron**	**Pi**
I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π
Rho	**Sigma**	**Tau**	**Ypsilon**	**Phi**	**Chi**	**Psi**	**Omega**
P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
ρ	σ	τ	u	φ	χ	ψ	ω

Trigonometrische Formeln

1. Additionstheoreme

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

2. Umformungen von Summen in Produkte

(1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

(3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

3. Umformungen von Produkten in Summen

(1) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

(2) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

(3) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

Die einfachsten trigonometrischen Gleichungen

(1) $\sin x = a \iff x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$,

wenn $|a| \leqslant 1$ gilt

(2) $\cos x = a \iff x = \pm \arccos a + 2\pi l$ mit $l \in \mathbb{Z}$,

wenn $|a| \leqslant 1$ gilt

(3) $\tan x = a \iff x = \arctan a + \pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$

(4) $\cot x = a \iff x = \operatorname{arccot} a + \pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Literaturverzeichnis

[1] H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, 2009.

Stichwortverzeichnis

In einer stärker computerisierten Welt finden Differential- und Differenzengleichungen immer mehr Anwendung. Das vorliegende Lehrbuch ist insbesondere für Studierende der ingenieurwissenschaftlichen, der informatikorientierten und der ökonomischen Studiengänge geeignet. Ausgewählte Kapitel sind auch für Schülerinnen und Schüler aus der Oberstufe mit den Leistungskursen Mathematik / Physik / Informatik interessant.

Der präsentierte Stoff entspricht einer zweistündigen Vorlesung im Grundlagenbereich, wobei Basis-Kenntnisse aus der Analysis und der Linearen Algebra vorausgesetzt sind. Die Autoren zeigen Parallelen bei den Untersuchungen von linearen Differential- und linearen Differenzengleichungen auf, wobei die Vorgehensweisen anhand von vielen Beispielen ausführlich illustriert werden. Es werden lineare Differential- und lineare Differenzengleichungen erster und zweiter Ordnung betrachtet, sowie den Leserinnen und Leser alle Werkzeuge für die Betrachtungen von Gleichungen höherer Ordnung zur Verfügung gestellt.

Logos Verlag Berlin

ISBN 978-3-8325-5448-4