

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ДЛЯ ГИДРОАКУСТИКИ

Аронов Борис
Самуилович



Часть II

Подсистемы электроакустических
преобразователей

Пьезоэлектрические
электрохимические
преобразователи в
гидроакустике

Аронов Борис Самуилович

This book is subject to a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International Public License (CC BY-NC 4.0). To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>. Other than as provided by these licenses, no part of this book may be reproduced, transmitted, or displayed by any electronic or mechanical means without permission from the publisher or as permitted by law.



Copyright © Boris Aronov, author, 2022, 2024 (Russian version)

ISBN 9798887195759 (hardback)

ISBN 9798887195766 (Open Access)

Published by Academic Studies Press

1577 Beacon Street

Brookline, MA 02446, USA

press@academicstudiespress.com

www.academicstudiespress.com

*В память о
моем наставнике, Льве Яковлевиче Гутине,
и о моих друзьях и коллегах, выдающихся российских электроакустиках,
Льве Давидовиче Любавине и Владимире Игоревиче Позерне.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги лег опыт работы автора в качестве инженера. На протяжении многих лет автор сталкивался с проблемами, хорошо известными разработчикам электроакустических преобразователей. По существу, сложность проектирования электроакустических преобразователей проистекает из многопрофильной природы предмета. Для успешной работы проектировщики преобразователей должны обладать знанием таких теоретических дисциплин, как колебания механических систем, электромеханическое преобразование деформируемыми пьезоэлектрическими телами и акустическое излучение, и должны быть в состоянии активно использовать эти знания для получения уравнений, описывающих работу преобразователей. Кроме того, создание практических конструкций преобразователей, удовлетворяющих определенным требованиям и способных работать в реальных условиях окружающей среды, требует знания свойств используемых материалов и предполагает определенный уровень технической интуиции, которая не может быть развита без ясного понимания физики, лежащей в основе работы преобразователей. Едва ли возможно обладать всеми этими навыками, не получив специальное образования, которое, насколько известно автору, современные учебные заведения не обеспечивают. Обычно, необходимые навыки приходится вырабатывать путем самообразования, что и имело место в случае автора. Основные возникающие при этом трудности состоят не в отсутствии доступной информации. Наоборот, упомянутые выше теоретические дисциплины хорошо разработаны и представлены в литературе. Однако все эти дисциплины используют разные методы для решения своих задач, и полученные результаты обычно представляются в формах, которые сложно напрямую использовать для синтеза уравнений, описывающих работу преобразователя. В итоге эти результаты необходимо адаптировать некоторым образом.

Сталкиваясь с вышеупомянутыми трудностями, автор постепенно разработал специальный подход к решению проблем, связанных с проектированием преобразователей, который позволяет многие из них преодолевать. Существо этого подхода состоит в последовательном применении для решения задач, возникающих в ходе разработки электромеханических и электроакустических преобразователей, энергетического метода,

имеющего ясные физические основания. Первая попытка изложить эту концепцию была предпринята в книге «Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики», изданной в 1990 году в России. В настоящей книге эта версия обновлена и расширена до такой степени, что ее следует рассматривать, как совершенно самостоятельную работу.

Эта книга предназначена для студентов, ученых-практиков и инженеров в том смысле, что она может оказаться полезной и для тех, кто только начал свою карьеру в электроакустике, и для тех, кто уже достиг определенного уровня. Содержание книги разделено на четыре части.

Часть 1 озаглавлена “Введение в энергетический метод анализа преобразователей”. В ней рассматриваются основные концепции метода (Глава 1); использование метода для анализа свойств преобразователей с одной степенью свободы (Глава 2); и исследование проблем, возникающих при проектировании преобразователей как части канала приема/передачи (Глава 3).

В Главе 1 основными являются понятия энергии и ее преобразования. Энергии разных видов, вовлеченные в электромеханическое и механоакустическое преобразование в ходе работы преобразователя, представлены в обобщенных координатах. Все управляющие уравнения получены из энергетических принципов, именно из закона сохранения энергии для преобразователей с одной механической степенью свободы, и из принципа наименьшего действия для преобразователей со многим степенями свободы. Уравнения, описывающие электромеханическое преобразование, интерпретированы как уравнения Кирхгоффа для соответствующих эквивалентных электромеханических схем.

В Главе 2 общий подход применен к рассмотрению свойств преобразователей широко используемых типов в виде сфер, цилиндров и стержней, совершающие продольные колебания, и в виде круглых и прямоугольных пластин, совершающих изгибные колебания. В этой главе предположено, что механические системы имеют соотношения размеров, при которых их можно рассматривать, как имеющие одну степень свободы.

В Главе 3 рассмотрены характеристики преобразователей как части канала приема/передачи, а также представлены некоторые рекомендации по рациональному проектированию преобразователей.

Учитывая, что приближение одной механической степени свободы покрывает многие используемые на практике конструкции преобразователей, Часть 1 можно рассматривать независимо от остальной части книги как самостоятельное исследование подводных электроакустических преобразователей на базовом уровне.

Для рассмотрения электроакустических преобразователей в общем случае требуется более детальные знания о колебаниях механических систем, электромеханическом преобразовании в деформируемых пьезокерамических телах и об излучении звука.

В Части II под заголовком “Подсистемы электроакустических преобразователей” в Главах 4–6 приведены сведения об этих предметах, необходимые для рассмотрения практически всех типов применяемых преобразователей. Все исходные уравнения в этих главах выведены из принципа наименьшего действия как уравнения Эйлера в обобщенных координатах. Полученные результаты представлены в форме импедансов, (включая импедансы излучения), электромеханических коэффициентов трансформации и обобщённых действующих сил (включая акустические), которые могут быть непосредственно включены в эквивалентные электромеханические схемы, описывающие работу преобразователей (в общем случае многоконтурные). Также представлены коэффициенты дифракции и направленности для различных типов преобразователей, которые характеризуют взаимодействие электромеханического преобразователя с акустическим полем.

В Главе 4 особое внимание обращено на анализ колебаний в двумерных механических системах. Результаты анализа позволяют определять диапазон соотношения сторон при котором систему можно приблизительно рассматривать как одномерную, и тем самым свести ее к одному из вариантов, рассмотренных в Главе 2.

В Главе 5 важное значение имеет теорема, устанавливающая условия, при которых электромеханическое преобразование при продольном и поперечном пьезоэффектах происходят качественно однообразно. Это позволяет рассматривать преобразователи, использующие эти типы поляризации керамики, единым образом. Другим важным результатом является общий анализ оптимизации эффективных коэффициентов электро-механической связи в неоднородно деформированных пьезокерамических телах.

В Главе 6, помимо решения общих проблем излучения, подробно рассмотрено

влияние экранирования частей поверхностей цилиндрических и сферических преобразователей, обеспечивающего их однонаправленность. Также проанализированы методы экспериментального исследования акустического взаимодействия между преобразователями. Это важно потому, что для многих практических конфигураций преобразователей эти взаимодействия трудно определить аналитически, особенно при наличии экранирующих элементов, которые оказывают влияние на акустическое ближнее поле преобразователя. В этих условиях более точно определять характеристики взаимодействия экспериментально.

Результаты, полученные в Части II, использованы в Части III, названной “Анализ преобразователей различных типов”. В ней приведен синтез уравнений, описывающих работу преобразователей различных конфигураций: цилиндрических (Глава 7), сферических (Глава 8), в виде пластин и стержней, совершающих изгибные колебания (Глава 9), и в виде стержней, совершающих продольные колебания (Глава 10).

В Главе 7 представлено исследование цилиндрических преобразователей, которые реализуют различные формы продольных колебаний замкнутых и незамкнутых круговых колец, а также изгибные колебания колец, в том числе с разрезом по образующей. Рассмотрены параметры преобразователей при различных вариантах поляризации колец, включая тангенциальную поляризацию с помощью электродов в виде полосок, нанесенных на их поверхности. Произведено исследование влияния на электромеханические и акустические характеристики преобразователей связанных колебаний в составляющих кольцах (цилиндрах) в зависимости от отношения их высоты к диаметру.

В Главе 8 речь идет о преобразователях, использующих общие многомодовые продольные колебания полных и неполных пьезокерамических сферических оболочек, (в частности, полусферической). Также рассмотрено экранирование частей поверхности, что позволяет использовать несколько форм колебаний для однонаправленного излучения преобразователя.

В Главе 9 представлен общий анализ преобразователей, реализующих изгибные колебания круглых и прямоугольных пьезокерамических пластин, включая пластины с неравномерной толщиной и радиусом (длиной). Рассмотрены возможности оптимизации эффективных коэффициентов связи преобразователей путем использования

неоднородности распределения деформаций в объеме пластин. Произведена оценка влияния конечности отношения толщины к радиусу (длине) пластин на параметры преобразователей.

Глава 10 посвящена анализу стержневых преобразователей, колеблющихся по длине. Подробно рассмотрены результаты влияния на параметры преобразователей связанных колебаний в стержнях при конечных отношениях их длины к толщине (радиусу). Приведены зависимости эффективных коэффициентов связи преобразователей от относительных размеров стержней при различных видах их поляризации. Относительно мало внимания уделено широко используемым преобразователям типа Tonpilz, поскольку они подробно описаны в доступной литературе.

Часть IV (Главы 11–15) названа: “Некоторые аспекты проектирования преобразователей”. В Главе 11 представлен анализ существующих данных и некоторые новые результаты относительно влияния условий окружающей среды, таких как гидростатическое давление, температура и напряжённость электрического поля, на параметры пьезокерамики в составе преобразователей. Подчеркнуто, что при этих условиях параметры керамики могут значительно отклоняться от данных, приведенных в спецификациях для нормальных условий. Кроме того, они могут отличаться для образцов керамики, поставляемой разными (и даже одним и тем же) производителями. Это следует учитывать при расчете рабочих параметров преобразователей и в оценке разумной точности определения параметров.

Изменения параметров преобразователей, предназначенных для работы на больших глубинах, можно избежать путем использования компенсации гидростатического давления в их конструкциях. Проблемы, связанные с практическим применением компенсации давления, рассмотрены в Главе 12 (общие соображения), в Главе 13 (применительно к цилиндрическим излучателям, заполненным жидкостью), и в Главе 14 (применительно к гидрофонам).

В Главе 13 представлены некоторые соображения относительно практических проблем проектирования излучателей. Рассмотрено использование концепции запасов прочности для улучшения параметров преобразователей разных типов путем оптимизации их согласования с акустическим полем. Проанализированы возможности увеличения

динамической и статической механической прочности излучателей.

Глава 14 посвящена проблемам проектирования гидрофонов – приемников давления и градиента давления. Рассмотрены их свойства как источников энергии сигнала и собственного шума для приемного канала. Особое внимание обращено на чувствительность гидрофонов и акселерометров к нежелательным воздействиям (помехам) и на меры, направленные на увеличение их помехоустойчивости.

Важное значение для структуры книги имеет Глава 15, в которой рассмотрена возможность объединения анализа преобразователей методом конечных элементов (FEA или МКЭ в русской интерпретации) с аналитическим энергетическим методом. Эта возможность проиллюстрирована на примерах продольно-изгибных и арочных преобразователей. Объединение мощных компьютерных возможностей FEA для определения форм колебаний сложных механических систем с последующим применением энергетического метода для определения параметров преобразователей может оказаться весьма плодотворным. С одной стороны, такой комплексный подход позволяет решить задачу расчета преобразователей в тех случаях, когда это не удастся сделать чисто аналитически. С другой стороны, он позволяет получить физически ясное решение в отличие от того случая, когда сквозной анализ производится с помощью МКЭ.

В совокупности сведения, приведенные в книге, позволяют анализировать преобразователи практически любого типа. Тем не менее, когда дело доходит до выбора и проектирования преобразователя для конкретного применения в соответствии с жесткими эксплуатационными требованиями — это остается своего рода искусством. Таким образом, теоретические рекомендации следует рассматривать как руководство к действию, но не как гарантию успеха.

Книга снабжена Приложениями, которые содержат сведения о свойствах пьезокерамики и пассивных материалов, применяемых в конструкциях преобразователей, и о свойствах специальных функций, использованных в тексте.

Этой книги не было бы, если бы не определенные обстоятельства и встречи с людьми, которые оказали большое влияние на мою профессиональную деятельность.

Во-первых, я благодарен своему наставнику, выдающемуся акустику Льву Яковлевичу Гутину, который был моим научным руководителем. Он учил, что даже сложные

проблемы могут быть решены простым и физически понятным способом, и демонстрировал это результатами всей своей научной деятельности. По его совету я начал заниматься внедрением энергетического подхода к решению задач электроакустики.

В начале моей карьеры мне посчастливилось много лет работать в акустическом отделе ЦНИИ Морфизприбор в Санкт-Петербурге (тогда Ленинграде), который возглавляли Роберт Ефимович Пасынков и Ольга Алексеевна Кудашева. В отделе царил творческая и дружеская атмосфера, результатом которой стали многие плодотворные научные исследования. Беседы с моими друзьями и коллегами Л. Д. Любавиным, В. И. Позерном, М. Д. Смаришевым, Е. Л. Шендеровым, В. Е. Глазановым и с моими коллегами и аспирантами Г. К. Скребневым, Н. М. Грибакиной, Л. Б. Никитиным дали ценный опыт, который повлиял на направление моей работы. Значительным образом повлияли на определение структуры и содержания этой книги мои докторская диссертация (1974) и предыдущий текст *«Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики»* (1990), которые были в значительной степени основаны на результатах “Морфизовского” периода моей деятельности.

Следующий этап моей профессиональной жизни происходил в Соединенных Штатах Америки, где я начал работать с доктором David A. Brown’ом, профессором Университета Массачусетса в Дартмуте (UMassD) и президентом VTech Acoustics LLC. Более 20 лет мы сотрудничали с ним во многих исследовательских проектах, журнальных статьях и в совместном консультировании студентов и аспирантов в области электроакустики. Я благодарен Дэвиду за предоставленную мне беспрецедентную возможность преподавать и консультировать студентов в Университете и одновременно работать над практической реализацией научно-исследовательских и опытно-конструкторских проектов в VTech Acoustics. Результаты этого сотрудничества внесли большой вклад в содержание книги.

Кроме того, я хотел бы поблагодарить многих наших студентов и аспирантов (ныне PhD), которые стремились учиться и помогать в применении теории на практике, часто посвящая долгие часы экспериментам и вычислениям. Это в частности, Sundar Regmi, участвовавший в исследованиях связанных колебаний; д-р Corey Bachand, соавтор многих журнальных публикаций, осуществлявший моделирование подсистем

преобразователей и многочисленные лабораторные проекты; д-р Sairayan Saragapani, участвовавший в исследовании тангенциальной поляризации пьезоэлементов; д-р Tetsuro Oishi, производивший моделирование экранированных многорезонансных цилиндрических преобразователей и их взаимных сопротивлений; д-р Yan Xiang, обеспечившая расчеты характеристик излучения экранированных цилиндрических и сферических преобразователей и применение FEA. Работа VTech Acoustics LLC не могла бы быть успешной без участия многих студентов и техников, которые заслуживают благодарности, но чьи имена здесь невозможно перечислить.

Я безмерно благодарен д-ру Corey Vachand'у и особенно моему российскому коллеге Алексею Лезникову за их поистине гигантскую работу по подготовке рукописи книги к изданию, которая включала в себя форматирование и изготовление рисунков.

Я сердечно признателен моим сыновьям, Игорю и Виталию, за их моральную и финансовую поддержку на протяжении всей этой многолетней работы.

Б. С. Аронов

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Перевод книги произведен благодаря инициативе научного руководителя концерна «Океанприбор», Игоря Александровича Селезнева.

Перевод выполнен Алексеем Лезниковым и Татьяной Загородневой с участием автора.

К особенностям перевода относится то, что в нем сохранены те же нижние индексы у обозначений величин и надписи на рисунках, что и в оригинале. В оригинале они как правило соответствуют первым буквам в названиях принадлежности величин, например: *r* от *radiation* (излучение), *s* от *support* (опора), *dif* от *diffraction* (дифракция), *eqv* от *equivalent* (эквивалентный) и т. п. Кроме того, в тексте сохранены ссылки на главы, находящиеся в других частях книги. Это сделано с той целью, чтобы читатель при необходимости мог обратиться к оригиналам соответствующих глав, которые имеются в интернете в Свободном Доступе.

Б. С. Аронов

Часть II

Подсистемы электроакустических преобразователей

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	1
ГЛАВА 4	6
Колебания упругих тел.....	6
4.1 Введение	6
4.2 Сведения из теории упругости	7
4.2.1 Тензоры деформаций и напряжений.....	7
4.2.2 Плотность энергии в конкретных механических системах	11
4.3 Уравнения колебаний упругих тел в прямоугольных координатах	18
4.3.1 Решение уравнений методом разделения переменных, нормальные формы колебаний	22
4.3.2 Переходные колебания.....	24
4.3.3 Эквивалентная Т-образная схема стержня, колеблющегося в продольном направлении	28
4.3.4 Нормальные формы колебаний изгиба прямоугольных стержней	31
4.3.5 Поправки, обусловленные конечной толщиной стержней.....	37
4.4 Уравнения колебаний в криволинейных координатах.....	40
4.4.1 Криволинейные координаты.....	40
4.4.2 Колебания в плоскости круглых дисков малой высоты	42
4.4.2.1 Вывод уравнения движения.....	43
4.4.2.2 Сплошной диск	45
4.4.2.3 Кольцо конечной толщины.....	46
4.4.3 Осесимметричные колебания изгиба тонкой круглой пластины	50
4.4.3.1 Поправки к плотности энергий для пластин, обусловленные конечной толщиной.....	53
4.4.4 Колебания круглых колец в их плоскости.....	55
4.5 Уравнения колебаний в обобщенных координатах	60
4.5.1 Общее описание решения задач колебаний в обобщенных координатах	60
4.5.2 Продольные колебания полных колец.....	66
4.5.3 Продольные колебания неполных колец	69
4.5.4 Колебания изгиба полных колец.....	71
4.5.5 Колебания сферических оболочек	73
4.5.5.1 Введение.....	73
4.5.5.2 Полные сферические оболочки.....	76
4.5.5.3 Неполные сферические оболочки.....	80
4.5.6 Колебания изгиба неоднородных стержней	84
4.5.6.1 Трехслойный стержень однородный по длине.....	86
4.5.6.2 Трехслойный стержень неоднородный по длине	88
4.5.6.3 Двухслойные стержни однородные по длине.....	94

4.5.6.4	Двухслойные стержни неоднородные по длине.....	97
4.5.7	Колебания изгиба неоднородных круглых пластин	101
4.5.7.1	Колебания однородных в радиальном направлении пластин	102
4.5.7.2	Колебания изгиба круглых пластин неоднородных в радиальном направлении	105
4.5.7.3	Эквивалентные параметры двухслойных пластин неоднородных в радиальном направлении в первом приближении.....	106
4.5.7.4	Эквивалентные параметры двухслойных пластин неоднородных в радиальном направлении во втором приближении.....	108
4.5.7.5	Свободные колебания неоднородной в радиальном направлении пластины как системы с двумя степенями свободы.....	109
4.5.8	Приближенные методы решения задач колебаний	113
4.5.8.1	Колебания изгиба круглой пластины опертой в центре.....	114
4.5.8.2	Колебания изгиба круглой пластины на центральной опоре, имеющей конечный радиус.....	117
4.5.8.3	Применение метода последовательных приближений Рунге.....	124
4.5.9	Применение статических приближений к первой форме колебаний.....	126
4.5.10	Колебания изгиба кольца с разрезом.....	131
4.6	Связанные колебания в механических системах	135
4.6.1	Общие положения теории связанных колебаний	136
4.6.1.1	Свободные колебания в связанных системах.....	138
4.6.1.2	Вынужденные колебания в связанных системах.....	141
4.6.2	Примеры связанных колебаний в механических системах.....	143
4.6.2.1	Симметричная механическая система из двух пластин	143
4.6.2.2	Связанные колебания в прямоугольных пластинах и стержнях	146
4.6.2.3	Связанные колебания сплошных цилиндрических стержней.....	155
4.6.2.4	Связанные колебания тонкостенных цилиндров.....	163
4.7	Входные импедансы механических систем	175
4.7.1	Входное сопротивление однородного стержня.....	175
4.7.2	Входные сопротивления круглого диска.....	177
4.7.2.1	Входное сопротивление круглого диска в радиальном направлении	178
4.7.2.2	Входное сопротивление на краю диска в поперечном направлении	179
4.7.2.3	Входное сопротивление свободного диска на окружности радиусом $b < a$	181
4.8	Литература.....	185
ГЛАВА 5		188
Электромеханическое преобразование		188
5.1	Уравнения состояния пьезокерамической среды.....	188
5.2	Энергетическое состояние элемента объема	196
5.3	Выражения для плотностей энергии при различных граничных условиях.....	203
5.4	Коэффициенты связи.....	212

5.4.1	Об определениях коэффициентов электромеханической связи	212
5.4.2	Коэффициенты связи пьезокерамического материала	214
5.4.3	Циклы преобразования энергии пьезоэлементом.....	217
5.4.4	К сравнению определений коэффициентов связи	221
5.5	Внутренняя энергия пьезокерамического тела	223
5.5.1	Основные положения	223
5.5.2	О физическом смысле величины ΔW	230
5.5.2.1	Стержни, колеблющиеся в продольном направлении.....	231
5.5.2.2	Прямоугольный стержень, совершающий колебания изгиба	237
5.6	Эффективные коэффициенты связи	239
5.6.1	Оптимизация эффективных коэффициентов связи	239
5.6.2	Примеры оптимизации эффективных коэффициентов связи.....	242
5.6.2.1	Стержень, колеблющийся по длине, поперечный пьезоэффект.....	242
5.6.2.2	Стержни и круглые пластины при деформации изгиба	248
5.6.3	Влияние электромеханически пассивных элементов на эффективный коэффициент связи.....	251
5.7	Уравнения колебаний пьезокерамических тел в обобщенных координатах.....	253
5.7.1	Выражения для входящих энергий.	253
5.7.2	Вывод уравнений колебаний.....	257
5.7.3	Эквивалентные электромеханические схемы.....	260
5.7.4	Примеры применения уравнений колебаний в обобщенных координатах.....	262
5.7.4.1	Уравнения колебаний пьезокерамических стержней	262
5.7.4.2	Уравнения колебаний в плоскости круглого диска, поляризованного по толщине.....	271
5.7.4.3	Электро-механо-электрические преобразователи	279
5.8	Уравнения колебаний пьезоэлементов в геометрических координатах.....	294
5.8.1	Продольные и крутильные колебания пьезокерамических стержней.....	295
5.8.1.1	Уравнения движения.....	295
5.8.1.2	Граничные условия	297
5.8.2	Уравнения изгибных колебаний и радиальных колебаний круглого диска.....	302
5.8.2.1	Механические граничные условия	303
5.8.2.2	Электрические граничные условия.....	305
5.8.3	Эквивалентная шестиполосная схема стержневого преобразователя.....	306
5.9	Литература.....	312
ГЛАВА 6.....		313
Акустическое излучение		313
6.1	Введение	313
6.1.1	О содержании главы.....	313
6.1.2	Геометрия и волновые размеры излучающих поверхностей	314
6.1.3	Параметры преобразователей, связанные с акустическим полем.....	316

6.1.4	Преобразователи, имеющие одну механическую степень свободы.....	316
6.1.4.1	Звуковое давление и коэффициент дифракции	317
6.1.4.2	Комплексная величина сопротивления излучения.....	318
6.1.4.3	Коэффициент концентрации преобразователя.....	319
6.1.4.4	Эквивалентная сила и коэффициент дифракции в режиме приема	321
6.1.4.5	Преобразователи с механическими системами, имеющими несколько степеней свободы.....	324
6.2	Постановка задачи излучения	325
6.2.1	Акустическое волновое уравнение	325
6.2.2	Источники акустического излучения, граничные условия	330
6.2.3	Условие излучения Зоммерфельда	332
6.2.4	Решение задач излучения методом разделения переменных	333
6.3	Излучение цилиндрических преобразователей.....	336
6.3.1	Излучение цилиндрической оболочки без экрана.....	340
6.3.2	Излучение цилиндрической оболочки с жестким экраном при $\alpha = \pi / 2$	346
6.3.3	Излучение бесконечной цилиндрической оболочки с акустически мягким экраном.....	351
6.3.4	Излучение цилиндра конечного размера в бесконечно длинном жестком цилиндрическом экране	356
6.3.4.1	Ближнее поле цилиндра и сопротивления излучения	361
6.3.4.2	Дальнее поле цилиндра и характеристики направленности	364
6.3.5	Излучение цилиндра с конечными размерами в свободном пространстве.....	368
6.4	Излучение сферических преобразователей.....	374
6.4.1	Общий случай	374
6.4.2	Излучение сферических преобразователей без экранов	378
6.4.2.1	Преобразователи с униполярными электродами на всей поверхности	378
6.4.2.2	Преобразователи с биполярными электродами.....	379
6.4.3	Излучение сферических преобразователей с экранами	381
6.5	Излучение преобразователей, имеющих плоские поверхности	387
6.5.1	Общие положения.....	387
6.5.2	Излучение круглого пульсирующего поршня.....	389
6.5.3	Излучение тонкого кольца, пульсирующего в направлении оси	394
6.5.4	Излучение бесконечно длинной пульсирующей полосы	396
6.5.5	Излучение прямоугольных пульсирующих поршней	400
6.5.6	Излучение осциллирующего диска.....	402
6.5.7	Излучение диска, колеблющегося одной стороной (принцип суперпозиции Гутина)	407
6.5.8	Излучение дисков, встроенных в экраны конечного размера.....	411
6.5.8.1	Введение.....	411
6.5.8.2	Излучение осциллирующего диска, встроенного в жесткий экран конечного размера.....	413

6.5.8.3	Односторонний диск в жестком экране конечного размера.....	419
6.5.8.4	Излучение дисков конечной толщины.....	420
6.6	Акустическое взаимодействие между преобразователями.....	422
6.6.1	Введение.....	422
6.6.2	Общие сведения и определения.....	424
6.6.3	Взаимодействие между простыми источниками.....	428
6.6.4	Взаимодействие между преобразователями конечного размера.....	432
6.6.4.1	Взаимодействие между круглыми дисками.....	432
6.6.4.2	Взаимодействие между бесконечно длинными полосами.....	433
6.6.4.3	Взаимодействие между квадратными поршнями.....	434
6.6.4.4	Взаимодействие между цилиндрами, встроенными в жесткий цилиндрический экран.....	436
6.6.5	Методы измерения взаимных сопротивлений.....	438
6.6.5.1	Измерение взаимного сопротивления между двумя преобразователями в свободном поле Z методом.....	438
6.6.5.2	Измерение взаимных сопротивлений V методом.....	448
6.6.5.3	Определение взаимных сопротивлений между преобразователями в антенне.....	450
6.7	Литература.....	458
	Список символов.....	461
	ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свойства пассивных материалов.....	467
	ПРИЛОЖЕНИЕ В. Свойства пьезоэлектрической керамики.....	469
	ПРИЛОЖЕНИЕ С. Специальные функции.....	471

ГЛАВА 4

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

4.1 Введение

Уравнения движения упругих тел в этой работе будут выведены из Принципа *Наименьшего Действия* вне зависимости от используемой системы координат, как соответствующие уравнения Эйлера. Формы уравнений Эйлера, которые зависят от типа функций, описывающих энергетическое состояние колеблющейся системы, были приведены в Разделе 1.6.2.1. Так, в случае если кинетическая энергия, потенциальная энергия и энергии внешних воздействий на тело (W_{kin} , W_{pot} и W_e) зависят от обобщенных скоростей $\dot{\xi}_i$ и обобщенных координат (смещений) ξ_i , соответственно, то колебания тела описываются системой уравнений Эйлера-Лагранжа (1.93)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial W_e}{\partial \xi_i} = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

Если рассматривать колебания элемента объема упругого тела в геометрических координатах, то энергии элемента объема (кинетическая w_{kin} , потенциальная w_{pot} и энергия w_e внешних воздействий) зависят от скорости $\dot{\xi}$, смещения ξ и его производной $\dot{\xi}'_x$, как функций геометрических координат. В этом случае уравнения Эйлера приобретают вид (1.95)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w_{kin}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{pot}}{\partial \dot{\xi}'_x} \right) = \frac{\partial w_e}{\partial \xi}. \quad (4.2)$$

Для дальнейшей конкретизации уравнений Эйлера необходимо выбрать подходящую для рассматриваемого случая систему координат и получить выражения для энергий, входящих в эти уравнения, в явном виде. Вначале рассмотрим задачи колебаний в геометрических координатах.

4.2 Сведения из теории упругости

4.2.1 Тензоры деформаций и напряжений

Внешние воздействия могут приводить к определенным изменениям формы и объема упругого тела. Эти изменения характеризуются деформациями упругого тела. Элемент объема тела будем рассматривать в ортогональной прямоугольной системе координат с координатами x_1, x_2, x_3 (Рис. 4.1 (a)). Математически деформации выражаются через смещения точек тела $\xi(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{i}\xi_1 + \mathbf{j}\xi_2 + \mathbf{k}\xi_3$, где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы системы координат. Выражения для компонентов тензора деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} S_{11} &= \partial\xi_1/\partial x_1, & S_{22} &= \partial\xi_2/\partial x_2, & S_{33} &= \partial\xi_3/\partial x_3, \\ S_{23} = S_{32} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\right), & S_{13} = S_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\right) \\ S_{12} = S_{21} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Деформации S_{11}, S_{22}, S_{33} характеризуют удлинение в направлениях координатных осей (Рис. 4.1 (b)); S_{23}, S_{13}, S_{12} характеризуют изменение углов между линейными элементами, которые были параллельны соответствующим осям до деформаций. Как видно из Рис. 4.1 (c), $S_{13} = (\varphi_{13} + \varphi_{31})/2$. Если деформированный элемент объема повернуть под углом φ_{31} , то получим деформацию за счет простого смещения, при котором плоскости поперечного сечения движутся параллельно одной из координатных плоскостей. Таким образом, угол смещения равен $\varphi = (\varphi_{13} + \varphi_{31}) = 2S_{13}$.

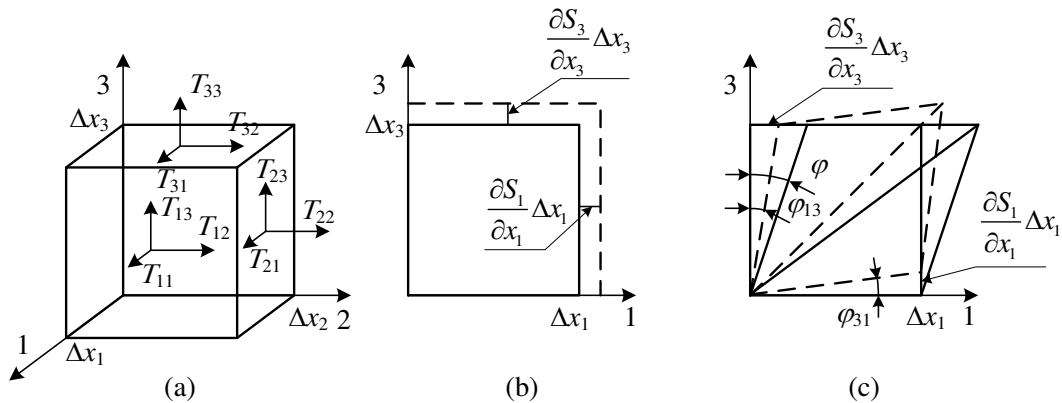


Рисунок 4.1: Компоненты тензоров напряжений и деформаций в прямоугольных координатах.

Далее, наряду с обозначениями деформаций и напряжений с двумя индексами будем также для краткости использовать обозначения с одним индексом, которые соотносятся следующим образом: $S_{11} = S_1$, $S_{22} = S_2$, $S_{33} = S_3$, $2S_{23} = S_4$, $2S_{13} = S_5$, $2S_{12} = S_6$. В этих обозначениях S_4 , S_5 , S_6 представляют собой изменения углов между соответствующими сторонами элемента объема при деформации.

Потенциальная энергия упругого тела является функцией его деформации, а процесс деформации при колебаниях считаем адиабатическим. Изменение потенциальной энергии элемента объема при деформации представим в виде

$$\delta w_{pot} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial w_{pot}}{\partial S_i} \delta S_i = T_i \delta S_i, \quad (4.4)$$

где $T_i = \partial w_{pot} / \partial S_i$ — механические напряжения. В соотношении (4.4) применено правило, согласно которому в произведениях компонентов векторов и тензоров предполагается суммирование по повторяющимся индексам без применения знака суммирования, то есть

$$T_i \delta S_i = \sum_{i=1}^6 T_i \delta S_i. \quad (4.5)$$

Механические напряжения представляют собой силы, действующие на грани элемента объема и приведенные к единице их площади. Напряжения $T_1 = T_{11}$, $T_2 = T_{22}$, $T_3 = T_{33}$ действуют по нормали к сторонам элемента объема в направлении координатной оси, которая соответствует индексу напряжения. Напряжения $T_4 = T_{23}$, $T_5 = T_{13}$, $T_6 = T_{12}$ действуют касательно к сторонам, которые перпендикулярны оси, соответствующей первому индексу, и идут в направлении оси, соответствующей второму индексу.

Экспериментально установлено, что при малых деформациях механические напряжения зависят от деформаций линейно, то есть

$$T_i = (\partial T_i / \partial S_j) S_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (4.6)$$

где $\partial T_i / \partial S_j = \partial^2 w_{pot} / \partial S_i \partial S_j = c_{ij}$ — модули упругости.

Уравнения (4.6) представляют собой выражение закона Гука — уравнения состояния для упругого тела (в нашем случае в адиабатических условиях). Модули упругости определяют экспериментально. Количество независимых модулей упругости, описывающих

состояние тела, зависит от симметрии структуры его материала. Так для изотропного тела все модули упругости могут быть выражены через две независимые постоянные λ и μ , которые называются постоянными Ламе. В общем случае, когда отсутствуют какие-либо дополнительные предположения о соотношении между деформациями и напряжениями, уравнения (4.6) для изотропного тела имеют следующий вид

$$\begin{aligned} T_{11} = T_1 &= (\lambda + 2\mu)S_1 + \lambda S_2 + \lambda S_3, \\ T_{22} = T_2 &= \lambda S_1 + (\lambda + 2\mu)S_2 + \lambda S_3, \\ T_{33} = T_3 &= \lambda S_1 + \lambda S_2 + (\lambda + 2\mu)S_3, \\ T_{23} = T_4 = \mu S_4, \quad T_{13} = T_5 = \mu S_5, \quad T_{12} = T_6 = \mu S_6. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для частных условий деформации упругих тел, имеющих разную геометрию, связь между компонентами тензоров напряжений и деформации упрощается. Примеры геометрий тел, широко применяемых в качестве колебательных механических систем преобразователей, представлены на Рис. 4.2.

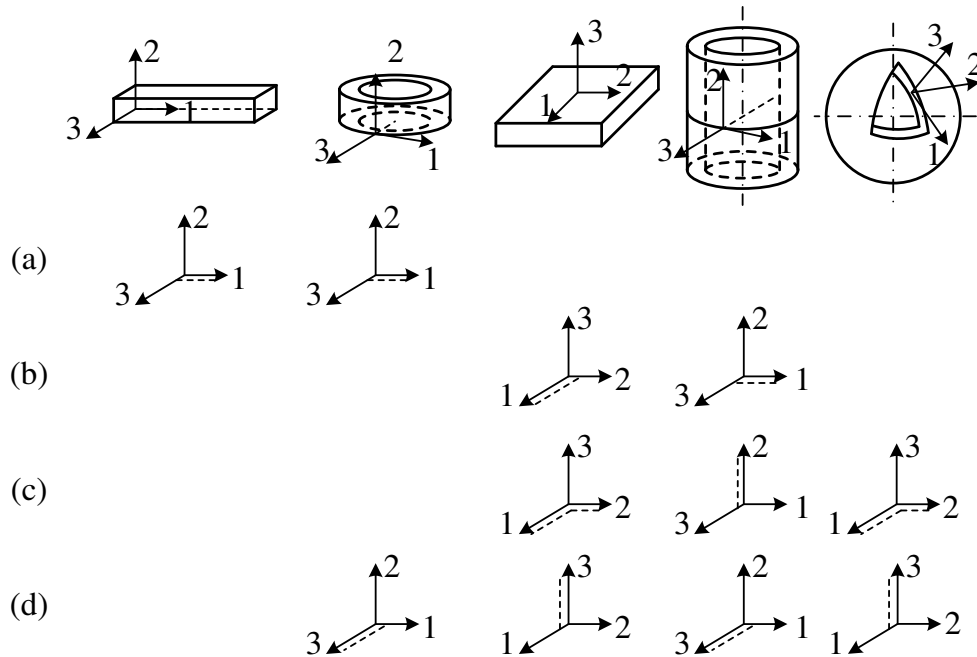


Рисунок 4.2: Изображения типичных механических систем преобразователей. Пунктирные линии в системах координат под изображениями показывают направления рабочей деформации в механических системах

Рассмотрим деформацию вдоль оси тонкого стержня (вдоль средней окружности тонкого кольца небольшой высоты). (Рис. 4.2 (a)). Поскольку боковые поверхности

стержня свободны от напряжений ($T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$), ввиду малых поперечных размеров стержня эти напряжения близки к нулю внутри его объема. При этих условиях из системы (4.6) получаем

$$\begin{aligned} S_2 = S_3 &= -\lambda S_1 / 2(\lambda + \mu) = -\sigma S_1, \\ T_1 &= [\mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)] S_1 = Y S_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $\sigma = \lambda / 2(\lambda + \mu)$ — коэффициент Пуассона, т. е. отношение поперечного относительного сжатия (имеющего знак минус согласно правилу знаков) к продольному удлинению; $Y = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$ — модуль Юнга, т. е. отношение продольного напряжения к продольной деформации. Можно показать, что $\lambda = Y\sigma / (1 + \sigma)(1 - 2\sigma)$ и $\mu = Y / 2(1 + \sigma)$.

Поскольку модуль Юнга и коэффициент Пуассона легко определять экспериментально, эти постоянные широко используются для описания состояния упругих тел наряду со второй постоянной Ламэ μ , которая является модулем сдвига (обычно термин «модуль» относится к отношению напряжения к деформации).

Заметим, что значения постоянных упругости можно определить экспериментально с точностью не более чем до 3 знака (см. таблицу А1 постоянных упругости в приложении А). Поэтому рассчитывать параметры преобразователей с большей точностью не имеет смысла.

Используя постоянные Y и σ , уравнение (4.7) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} [(1 - \sigma) S_1 + \sigma(S_2 + S_3)], \\ T_2 &= \frac{Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} [(1 - \sigma) S_2 + \sigma(S_1 + S_3)], \\ T_3 &= \frac{Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} [(1 - \sigma) S_3 + \sigma(S_1 + S_2)], \\ T_i &= Y S_i / 2(1 + \sigma) = \mu S_i \quad (i = 4, 5, 6). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Иногда и, в частности, в рассматриваемом случае, когда одно или два напряжения равны нулю, удобнее использовать уравнения между напряжениями и деформациями, в которых напряжения являются независимыми переменными, а именно:

$$\begin{aligned}
S_1 &= [T_1 - \sigma(T_2 + T_3)] / Y, \\
S_2 &= [T_2 - \sigma(T_1 + T_3)] / Y, \\
S_3 &= [T_3 - \sigma(T_1 + T_2)] / Y, \\
S_i &= T_i / \mu \quad (i = 4, 5, 6).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2.2 Плотность энергии в конкретных механических системах

Пример 1: Деформации стержня.

При деформации растяжения стержня вдоль оси 1 (Рис. 4.2 (а)), потенциальная энергия единицы объема (плотность потенциальной энергии), как энергия, накопленная при изменении деформации от нуля до значения S_1 , равна

$$w_{pot} = \int_0^{S_1} Y S_1 dS_1 = \frac{T_1 S_1}{2} = \frac{Y S_1^2}{2} = \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2. \tag{4.11}$$

Кинетическую энергию стержня на единицу длины можно определить в первом приближении следующим образом

$$w_{kin} = \rho S_{cs} \dot{\xi}_1^2 / 2, \tag{4.12}$$

где S_{cs} — площадь поперечного сечения стержня.

Более точное значение w_{kin} можно получить, если учесть поперечное движение, сопровождающее удлинение стержня. Из уравнений (4.8) и (4.3) для смещений в плоскости поперечного сечения стержня получим

$$\xi_2 = -\sigma x_2 (\partial \xi_1 / \partial x_1), \quad \xi_3 = -\sigma x_3 (\partial \xi_1 / \partial x_1). \tag{4.13}$$

С учетом этого движения поправка к кинетической энергии на единицу длины стержня составляет

$$\Delta w_{kin} = \frac{\rho}{2} \int \int_{S_{cs}} (\dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2) dx_2 dx_3 = \frac{\rho \sigma^2 J_p}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial t} \right)^2, \quad J_p = \int \int_{S_{cs}} (x_2^2 + x_3^2) dx_2 dx_3, \tag{4.14}$$

где J_p — полярный момент инерции для поперечного сечения стержня. Такие же условия существуют в тонком кольце, имеющем малую высоту, при деформации в окружном направлении.

Пример 2: Одноосная деформация в плоскости тонкой пластины.

Одноосная деформация имеет место в плоскости тонкой пластины, размер которой в перпендикулярном направлении настолько велик, что из-за симметрии деформация в этом направлении не происходит (Рис. 4.2 (b)). В этом случае $T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$. Аналогичные условия существуют также при деформации в направлении касательной к средней окружности тонкого цилиндра большой высоты. Из уравнения (4.10) следует, что $T_2 = \sigma T_1$, $S_3 = -\sigma S_1 / (1 - \sigma)$ и $T_1 = Y S_1 / (1 - \sigma^2)$. Соответственно,

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \frac{Y}{1 - \sigma^2} S_1^2 = \frac{1}{2} \frac{Y}{1 - \sigma^2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2. \quad (4.15)$$

Пример 3: Деформация в плоскости тонкой пластины в двух перпендикулярных направлениях.

В случае деформации в плоскости тонкой пластины в двух взаимно перпендикулярных направлениях (Рис. 4.2 (c)), $T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$,

$$\begin{aligned} S_3 &= -\sigma(T_1 + T_2) / Y = -\sigma(S_1 + S_2) / (1 - \sigma), \\ T_1 &= Y(S_1 + S_2) / (1 - \sigma^2), \\ T_2 &= Y(S_2 + S_3) / (1 - \sigma^2), \\ w_{pot} &= \frac{T_1 S_1 + T_2 S_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Y}{1 - \sigma^2} (S_1^2 + 2\sigma S_1 S_2 + S_2^2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Аналогичные условия имеют место в случае напряжения в тонком цилиндре (кольце) в направлении его оси, принятой за ось 1.

Если $S_1 = S_2 = S$, как, например, в случае сферической оболочки, то

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \frac{2Y}{1 - \sigma} S^2. \quad (4.17)$$

Пример 4: Деформация по толщине пластины с большими поперечными размерами.

В случае деформации в направлении толщины пластины с большими поперечными размерами (Рис. 4.2 (d)), благодаря симметрии можно предположить, что $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Следовательно, $S_1 = S_2 = 0$, $S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$. Из уравнения (4.9) следует, что

$$T_3 = Y(1 - \sigma)S_3 / (1 + \sigma)(1 - 2\sigma), \quad T_1 = T_2 = -Y\sigma S_3 / (1 + \sigma)(1 - 2\sigma), \quad (4.18)$$

откуда

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \frac{(1-\sigma)Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} S_3^2. \quad (4.19)$$

Пример 5: Деформация в направлении толщины высокого цилиндра, короткого кольца и сферической оболочки.

При деформации в направлении толщины высокого цилиндра, короткого кольца и сферической оболочки (Рис. 4.2 (d)) смещение ξ_1 в направлении средней окружности и смещения $\xi_1 = \xi_2$ по касательной к средней поверхности сферической оболочки равны нулю, что обусловлено симметрией. Однако из выражений для деформации в криволинейных координатах (см. Раздел 4.4.1) следует, что деформации S_1 и $S_1 = S_2$ имеют в этих случаях конечные значения. Можно показать, что для вышеуказанных тел действительны следующие выражения:

для высокого цилиндра

$$S_2 = 0, \quad T_1 = \frac{Y[(1-\sigma)S_1 + \sigma S_3]}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad T_3 = \frac{Y[(1-\sigma)S_3 + \sigma S_1]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad (4.20)$$

$$w_{pot} = \frac{Y(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[S_1^2 + \frac{2\sigma}{1-\sigma} S_1 S_3 + S_3^2 \right];$$

для короткого кольца

$$T_2 = 0, \quad T_1 = \frac{Y(S_1 + \sigma S_2)}{1-\sigma^2}, \quad T_3 = \frac{Y(S_2 + \sigma S_1)}{1-\sigma^2}, \quad (4.21)$$

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \frac{Y}{1-\sigma^2} (S_1^2 + 2\sigma S_1 S_3 + S_3^2);$$

для сферической оболочки

$$S_1 = S_2, \quad T_1 = T_2 = \frac{Y(S_1 + \sigma S_3)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad T_3 = \frac{Y[(1-\sigma)S_3 + 2\sigma S_1]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad (4.22)$$

$$w_{pot} = \frac{2Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[2S_1^2 + 4\sigma S_1 S_3 + (1-\sigma)S_3^2 \right].$$

Пример 6: Деформация кручения стержня.

При этой деформации поперечные сечения поворачиваются на некоторый угол

$\partial\varphi = \tau \partial x_3$ относительно оси инерции стержня (Рис. 4.3). В этом случае $\xi_1 = \tau x_2 x_3$, $\xi_2 = -\tau x_1 x_3$. Кроме того, при деформации кручения в поверхности поперечного сечения возникают искажения, то есть ее точки смещаются в направлении оси 3, и $\xi_3 = \tau\psi(x_1, x_2)$. Функция $\psi(x_1, x_2)$ зависит от конфигурации поперечного сечения и ее необходимо определять для каждого конкретного случая.

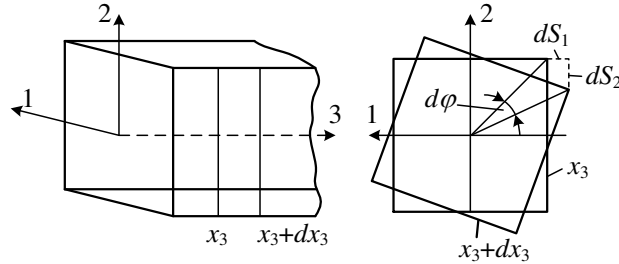


Рисунок 4.3: Деформация кручения.

Используя определения (4.3), получим следующие выражения для деформаций

$$\begin{aligned}
 S_1 = S_2 = S_3 = S_6 &= 0, \\
 S_4 = 2S_{23} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_1 \right), \\
 S_5 = 2S_{13} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_2 \right).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Отличны от нуля напряжения $T_4 = \mu S_4$ и $T_5 = \mu S_5$.

Из работы [1] известно, что для круглых и квадратных поперечных сечений $\psi \approx 0$.

В этих случаях

$$S_4 = -x_1 \tau = -x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad S_5 = x_2 \tau = x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \tag{4.24}$$

Силы, действующие в поперечном сечении стержня, эквивалентны паре с моментом $M_f = G\tau$ крутящим вокруг оси x_3 , где G — постоянная, называемая жесткостью при кручении. Для поперечных сечений в виде круга и квадрата $G = \mu J_p$. (Для круга радиусом a $J_p = \pi a^4 / 2$, для квадрата со стороной w $J_p = w^4 / 6$.) Для прямоугольного поперечного сечения с не слишком большим соотношением сторон $G \approx \mu S_{cs}^4 / 4\pi^2 J_p$. Потенциальная и кинетическая энергии на единицу длины стержня составляют, соответственно,

$$w_{pot} = \frac{1}{2} M_f \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{1}{2} G \tau^2 = \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2, \quad (4.25)$$

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho J_p \dot{\varphi}^2. \quad (4.26)$$

Пример 7: Изгиб стержня или тонкой пластины малой ширины (Рис. 4.4)

Изгиб тонкой пластины малой ширины (при $t/l \ll 1$ и $w/l < 1$) был рассмотрен в Разделе 2.6, но здесь наша цель состоит в том, чтобы получить в явном виде выражения для плотностей потенциальной и кинетической энергии при изгибе, которые необходимы для получения уравнений движения. (Заметим, что стержень прямоугольного сечения и тонкая пластина малой ширины в теоретическом отношении объекты взаимозаменяемые. В конструкциях пьезокерамических преобразователей чаще применяются пластины.)

При деформации изгиба в прямоугольной пластине существует нейтральная поверхность, которая не испытывает ни растяжения, ни сжатия, тогда как слои, расположенные по обе стороны нейтральной поверхности, испытывают деформации противоположных знаков. Деформация слоя, расположенного на расстоянии x_3 от нейтральной поверхности, равна

$$S_1 = \frac{(R + x_3)\Delta\varphi - R\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{x_3}{R}, \quad (4.27)$$

где R — радиус кривизны нейтральной поверхности пластины. Как следует из Рис. 4.4,

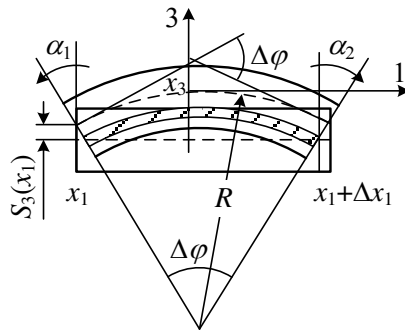


Рисунок 4.4: К изгибу пластины

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x_1}{R} = \alpha_1 + \alpha_2 = - \left. \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right|_{x_1 + \Delta x_1} + \left. \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right|_{x_1} = - \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_1^2} \Delta x_1, \quad (4.28)$$

откуда $1/R = -\partial^2 \xi_3 / \partial x_1^2$, где $\xi_3(x)$ — нормальное смещение нейтральной поверхности.

Учитывая, что изгиб и смещение нейтральной поверхности малы (т.е. $t/2R \ll 1$ и $\xi_3 \ll t$), можно предположить, что поперечные сечения пластины остаются плоскими и смещаются по нормали к ее нейтральной плоскости [2]. Так как боковые поверхности пластины свободны от напряжений, то во всем ее объеме $T_2 \approx T_3 \approx 0$, $T_4 \approx T_5 \approx T_6 \approx 0$ и

$$T_1 = YS_1 = -Yx_3 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_1^2}. \quad (4.29)$$

Потенциальная энергия на единицу длины пластины

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-t/2}^{t/2} T_1 S_1 dx_3 dx_2 = \frac{1}{2} Y \frac{wt^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_1^2} \right)^2, \quad (4.30)$$

где $(wt^3/12) = J_2$ — момент инерции сечения пластины относительно оси x_2 . В случае если поперечное сечение стержня имеет другую конфигурацию с моментом инерции J , то

$$w_{pot} = \frac{1}{2} YJ \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_1^2} \right)^2. \quad (4.31)$$

Так, например, для поперечного сечения в виде круга с радиусом a момент инерции равен $J = \pi a^4 / 4$.

Кинетическая энергия на единицу длины (без учета инерции вращения поперечного сечения) равна

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho wt \dot{\xi}_3^2 = \frac{1}{2} \rho S_{cs} \dot{\xi}_3^2. \quad (4.32)$$

С увеличением относительной толщины t/l пластины значения напряжений сдвига, а также инерция вращения ее поперечных сечений при изгибе, могут стать настолько значительными, что потребуются внести поправки к энергиям, определяемым формулами (4.30) и (4.32).

Кинетическая энергия на единицу длины пластины, вызванная поворотом сечений на угол $\alpha = (\partial \xi_3 / \partial x_1)$ относительно оси 2 (Рис. 4.4)

$$\Delta w_{kin} = \frac{1}{2} \rho J_2 \alpha^2 = \frac{1}{2} \rho J_2 \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x \partial t} \right)^2. \quad (4.33)$$

Другая поправка связана с дополнительным прогибом (смещением) из-за сдвиговых деформаций, которые возникают в пластине при ее изгибе, но пренебрежимо малы при малых t/l . Если рассмотреть баланс сил, действующих на заштрихованный элемент объема на Рис. 4.5,

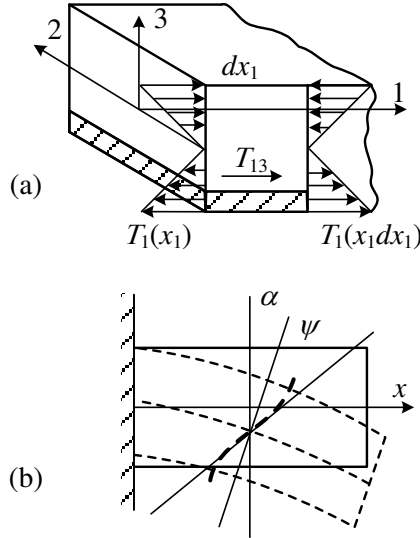


Рисунок 4.5: К деформации сдвига в пластине при изгибе

в проекции на ось 1, то напряжения сдвига $T_{13} = T_5$ можно определить по формуле

$$T_5 = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} dx_3 = \frac{Y}{2} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x_1^3}. \quad (4.34)$$

При сдвиге происходит искажение поперечного сечения пластины (Рис. 4.5 (b)). Деформации сдвига равны углу наклона ψ элемента сечения относительно его плоскости. Они имеют максимальное значение на нейтральной поверхности при $x_3 = 0$, которое равно

$$S_5 = \frac{T_5}{\mu} = \frac{Y t^2}{8\mu} \frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x_1^3} = \psi. \quad (4.35)$$

Такому углу поворота можно сопоставить дополнительное смещение ξ_{ad} нейтральной поверхности, которое связано с ним соотношением $\psi = -(\partial \xi_{ad} / \partial x_1)$. Таким образом,

$$\xi_{ad} = -\frac{Yt^2}{8\mu} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_1^2} \quad (4.36)$$

и полное смещение нейтральной плоскости становится $\xi = \xi_3 + \xi_{ad}$. Так как в этом приближении $T_3 \neq 0$, следует применить поправку к значению w_{pot} , выраженному формулой (4.30), которое было несколько преувеличено (увеличение смещения при неизменном воздействии свидетельствует об уменьшении жесткости и приводит к уменьшению потенциальной энергии). Используя выражение (4.35), получаем

$$\Delta w_{pot} = -\frac{w}{2\mu} \int_{-t/2}^{t/2} T_3^2 dx_3 = -\frac{wY^2 t^5}{240\mu} \left(\frac{\partial^3 \xi_3}{\partial x_1^3} \right)^2. \quad (4.37)$$

4.3 Уравнения колебаний упругих тел в прямоугольных координатах

Уравнения, которые описывают движение упругих тел, можно вывести как уравнения Эйлера (4.2) в результате подстановки в них соответствующих выражений для составляющих плотностей энергии. Таким образом, в примерах 1, 2, 4, 6 с одномерными деформациями плотность потенциальной энергии можно представить как

$$w_{pot} = K_{\Delta} (\xi'_x)^2 / 2, \quad (4.38)$$

где K_{Δ} — удельная жесткость элемента объема (в примерах 1, 2, 4 она равна Y , $Y/(1-\sigma^2)$, и $Y(1-\sigma)/(1+\sigma)(1-2\sigma)$, соответственно). А при деформации кручения (пример 6) $\xi = \varphi$, $K_{\Delta} = G$ — жесткость при кручении. Плотность кинетической энергии можно также выразить в обобщенном виде как

$$w_{kin} = m_{\Delta} \dot{\xi}^2 / 2, \quad (4.39)$$

где m_{Δ} — удельная масса элемента объема, которая равна ρ в примерах 1, 2, 4 и ρJ_p в примере 6 (тело подвергается кручению).

Если сила или момент воздействуют на поперечное сечение тела с координатой x , то энергию, сообщаемую телу, можно представить в виде

$$w_e = f(x, t) \xi, \quad (4.40)$$

где при кручении $f(x, t)$ надо заменить на момент $M_f(x, t)$, а ξ — на угол поворота φ .

После подстановки w_{pot} , w_{kin} и w_e из уравнений (4.38), (4.39) и (4.40) в уравнение (4.2), для рассматриваемых случаев получим

$$c^2 \xi'' - \ddot{\xi} = f(x, t) m_\Delta, \quad (4.41)$$

где $c = \sqrt{K_\Delta / m_\Delta}$ это скорость распространения деформации. В примерах 1, 2, 4, $c = \sqrt{Y / \rho}$, $\sqrt{Y / \rho(1 - \sigma^2)}$, $\sqrt{Y(1 - \sigma) / \rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$, соответственно. В примере 6 (кручение) $c = \sqrt{G / \rho J_p}$ (для стержней круглого и квадратного сечения $c = \sqrt{\mu / \rho}$). Для того, чтобы получить определенное решение уравнения (4.41), необходимо учесть граничные условия на торцевых поверхностях (при $x = 0$ и $x = l$) и начальные условия при $t = 0$. А именно, значения $\xi(x, t)_{x=0, l}$ и/или $\xi'_x(x, t)_{x=0, l}$ для продольных колебаний и $\varphi(x, t)_{x=0, l}$ и/или $\varphi'(x, t)_{x=0, l}$ для кручения, а также $\xi(x, 0)$, $\dot{\xi}(x, 0)$ и $\varphi(x, 0)$, $\dot{\varphi}(x, 0)$, соответственно.

Уравнение Эйлера (4.2) нельзя применять для решения задачи изгибных колебаний (пример 7), так как w_{pot} зависит от ξ_x'' , как это следует из выражения (4.31). В этом случае уравнение колебаний можно получить непосредственно из вариационного принципа в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (w_{kin} - w_{pot} + w_e) dt dx = 0, \quad (4.42)$$

или, после подстановки выражений (4.31), (4.32) и (4.40) для входящих в (4.42) энергий

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\dot{\xi}^2 - \alpha^2 (\xi_x'')^2 + f_m \xi \right] dt dx = \delta J = 0, \quad (4.43)$$

где $\alpha^2 = Y t^2 / 12\rho$, $f_m = f / \rho S_{c.s.}$.

Уравнение движения в этом случае можно вывести следующим образом. Предположим, что функция $\xi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.43). Пусть $\eta(x, t)$ — некая функция, имеющая первую и вторую непрерывные производные, и равная нулю вместе со своей первой производной при значениях t_1 , x_1 и t_2 , x_2 . Рассмотрим функцию $\xi(x, t) + \beta \eta(x, t)$. Эта функция удовлетворяет тем же условиям на границах интервалов интегрирования, что и $\xi(x, t)$. После подстановки этой функции вместо $\xi(x, t)$ в интеграл (4.43), значение интеграла при любом малом значении β должно быть больше, чем при $\beta = 0$, т.е. интеграл имеет минимум в этой точке. Таким образом, $J'_\beta(\xi + \beta\eta) = 0$. Из

этого условия можно найти уравнение движения. Такой же результат можно получить, если заменить ξ на $\xi + \eta$ в интеграле и, сохранив члены первого порядка по отношению к η и его производным, приравнять интеграл к нулю. В последнем случае получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (\dot{\xi} \dot{\eta} - \alpha^2 \xi_x'' \eta_x'' + f_m \eta) dx dt = 0. \quad (4.44)$$

Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi} \dot{\eta} dt = \dot{\xi} \eta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\xi} \eta dt, \quad (4.45)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \xi_x'' \eta_x'' dx = \xi_x'' \eta_x' \Big|_{x_1}^{x_2} - \xi_x'' \eta \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \xi_x^{IV} \eta dx, \quad (4.46)$$

и принимая во внимание, что $\eta \Big|_{t_1}^{t_2} = \eta \Big|_{x_1}^{x_2} = \eta' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$, интеграл (4.44) приобретает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (\ddot{\xi} + \alpha^2 \xi_x^{IV} - f_m) \eta dx dt = 0. \quad (4.47)$$

Поскольку функция η произвольна в пределах интервала интегрирования, выражение в скобках должно быть равно нулю, т. е. для функции $\xi(x, t)$ должно удовлетворяться уравнение

$$\alpha^2 \xi_x^{IV} + \ddot{\xi} = f_m = f / \rho S_{c.s.}, \quad (4.48)$$

которое представляет собой уравнение изгибных колебаний стержня (прямоугольной пластины, имеющей малую ширину).

Чтобы сделать решение задачи о колебаниях определенным, необходимо задать граничные условия на концах стержня (граничные условия на других поверхностях были учтены ранее при выводе w_{pot}). Для формулирования граничных условий воспользуемся Законом Сохранения Энергии в виде

$$\frac{d}{dt} (W_{kin} + W_{pot}) = \dot{W}_e, \quad (4.49)$$

где \dot{W}_e — поток энергии через концы стержня. После подстановки выражений для энергий и ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} [\dot{\xi}^2 + \alpha^2 (\xi'')^2] dx &= \int_{x_1}^{x_2} (\ddot{\xi} \dot{\xi} + \alpha^2 \xi'' \dot{\xi}'') dx = \\ &= \alpha^2 \xi'' \dot{\xi}' \Big|_{x_1}^{x_2} - \alpha^2 \xi''' \dot{\xi} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \dot{\xi} (\ddot{\xi} + \alpha^2 \xi'''') dx = \dot{W}_e / \rho S_{cs}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

(В процессе получения этого результата второй член в исходном интеграле был дважды проинтегрирован по частям.) Так как $\xi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.48) при $f_m = 0$,

$$\alpha^2 \xi'' \dot{\xi}' \Big|_{x_1}^{x_2} - \alpha^2 \xi''' \dot{\xi} \Big|_{x_1}^{x_2} = W_e / \rho S_{c.s.}. \quad (4.51)$$

В этом выражении $\dot{\xi}$ представляет собой скорость колебаний, а $\alpha^2 \xi''' = Q$ это перерезывающая сила, действующая на поперечное сечение в направлении, перпендикулярном средней поверхности стержня, $\dot{\xi}'$ — скорость поворота концевое сечения, $\alpha^2 \xi'' = M_f$ — изгибающий момент.

Если поток энергии через концы стержня отсутствует, т. е. $\dot{W}_e = 0$, получаем идеальные граничные условия, при которых

$$\xi'' \dot{\xi}' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \quad \xi''' \dot{\xi} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (4.52)$$

Идеальные граничные условия реализуются:

на свободно опертом конце, где смещение и изгибающий момент равны нулю (концевое сечение может свободно поворачиваться),

$$\xi = 0, \quad \xi'' = 0; \quad (4.53)$$

на жестко заделанном (далее для краткости просто «заделанном») конце, где смещение и угол поворота сечения равны нулю,

$$\xi = 0, \quad \dot{\xi}' = 0; \quad (4.54)$$

на свободном конце, где изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю,

$$\xi'' = 0, \quad \xi''' = 0. \quad (4.55)$$

В случае, если поток энергии через концы не равен нулю и определяется действием внешних изгибающих моментов M_{fe} и/или сил Q_e , то

$$\alpha^2 \xi'' = M_{fe}, \quad \alpha^2 \xi''' = Q_e. \quad (4.56)$$

Это означает, что не идеальные граничные условия для любой колеблющейся механической системы обусловлены утечкой или поступлением энергии через ее границы.

Рассмотрим наиболее распространенный метод решения уравнений колебаний, основанный на разделении переменных в уравнениях (4.41) и (4.48).

4.3.1 Решение уравнений методом разделения переменных, нормальные формы колебаний

Рассмотрим уравнение (4.41) при заданных граничных и начальных условиях, например, при

$$\xi'_x(x,t)|_{x=0} = \xi''_x(x,t)|_{x=l} = 0, \quad (4.57)$$

$$\xi(x,0) = a(x), \quad \dot{\xi}(x,0) = b(x) \quad (4.58)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Вначале рассмотрим решение вспомогательной задачи, а именно уравнения свободных колебаний,

$$c^2 \xi'' - \ddot{\xi} = 0, \quad (4.59)$$

которое удовлетворяет граничным условиям (4.57). Представим предполагаемое решение в виде произведения двух функций

$$\xi(x,t) = X(x)T(t), \quad (4.60)$$

где $X(x)$ — функция только x , а $T(t)$ — функция только t . Подставив $\xi(x,t)$ в уравнение (4.59) и разделив результат на произведение $X(x)T(t)$, получим тождество

$$X''(x)/X(x) = \ddot{T}(t)/c^2T(t) = -\lambda. \quad (4.61)$$

Здесь λ некоторая постоянная величина, поскольку левая часть тождества зависит только от x , а правая — только от t .

Таким образом, для определения функций $X(x)$ и $T(t)$ получаем уравнения

$$\ddot{T}(t) + \lambda c^2 T(t) = 0, \quad (4.62)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (4.63)$$

Функция $X(x)$ должна удовлетворять граничным условиям (4.57), поэтому

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (4.64)$$

Значения постоянной $\lambda = \lambda_i$ и соответствующие им функции $X_i(x)$, удовлетворяющие одновременно уравнению (4.63) и условиям (4.64), называются собственными значениями и собственными функциями или нормальными (резонансными) формами колебаний задачи, соответственно. Ненулевые решения уравнения (4.63) при условиях (4.64) существуют только при положительных значениях λ_i . В этом случае уравнение (4.63) имеет решения

$$X(x) = A_1 \cos \sqrt{\lambda_i} x + A_2 \sin \sqrt{\lambda_i} x. \quad (4.65)$$

Для удовлетворения граничных условий (4.64) должно быть $A_2 = X'(0) = 0$ и $A_1 \sqrt{\lambda_i} \sin \sqrt{\lambda_i} l = X'(l) = 0$. Чтобы получить ненулевые решения, необходимо, чтобы выполнялось $A_1 \neq 0$, в результате чего $\sin \sqrt{\lambda_i} l = 0$ и $\sqrt{\lambda_i} = i\pi / l$. Таким образом, в рассматриваемом случае собственные значения и соответствующие нормальные (резонансные) формы колебаний

$$\lambda_i = (i\pi)^2 / l^2, \quad X_i(x) = A_{1i} \cos(i\pi x / l). \quad (4.66)$$

Решения уравнения (4.62), соответствующие собственным значениям λ_i , имеют вид

$$T_i(t) = B_{1i} \cos(i\pi ct / l) + B_{2i} \sin(i\pi ct / l). \quad (4.67)$$

Здесь $(i\pi ct / l) = \omega_i t$ — собственные частоты колебаний. Возвращаясь к выражению (4.60), убеждаемся в том, что функции

$$\xi_i(x, t) = (B_{1i} \cos \omega_i t + B_{2i} \sin \omega_i t) \cos(i\pi x / l) \quad (4.68)$$

являются частными решениями уравнения (4.59) при граничных условиях (4.64). В силу линейности уравнения (4.59), сумма частных решений вида (4.68)

$$\xi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (B_{1i} \cos \omega_i t + B_{2i} \sin \omega_i t) \cos(i\pi x / l) \quad (4.69)$$

также является решением, удовлетворяющим тем же граничным условиям. Это общее решение для уравнения (4.59), которое при правильном выборе постоянных B_{1i} и B_{2i} может удовлетворить и начальным условиям (4.58). Применяя эти условия, получим

$$\xi(x, 0) = a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{1i} \cos(i\pi x / l), \quad (4.70)$$

$$\dot{\xi}(x, 0) = b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} \omega_i \cos(i\pi x / l), \quad (4.71)$$

откуда B_{1i} и B_{2i} найдем как коэффициенты разложения функций $a(x)$ и $b(x)$ в ряды Фурье по собственным функциям (по нормальным формам колебаний) $X_i(x) = \cos(i\pi x / l)$, а именно:

$$B_{1i} = a_i(x) = \frac{2}{l} \int_0^l a(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx \text{ и } B_{2i} \omega_i = b_i(x) = \frac{2}{l} \int_0^l b(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx .. \quad (4.72)$$

Таким образом, смещения в упругом теле, которое совершает свободные колебания при заданных граничных и начальных условиях, оказались выраженными в виде суперпозиции

$$\xi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos \omega_i t + \frac{b_i}{\omega_i} \sin \omega_i t \right) \cos \frac{i\pi x}{l} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{1i}(t) \theta_i(x) \quad (4.73)$$

стоячих волн, которые изменяются по гармоническому закону с амплитудой $\xi_i(t)$ и имеют независимые от времени формы $\theta_i(x)$, представляющие собой собственные функции (нормальные формы колебаний) $\theta_i(x) = X_i(x)$. Будем предполагать, что их максимальные значения нормированы к единице. В рассматриваемом конкретном случае это выполняется автоматически.

Выражения для смещений (4.73) при $\theta_i = \cos(i\pi x / l)$, $\omega_i = i\pi c / l$ определяют колебания при граничных условиях (4.57), но в общем виде они также справедливы для нормальных форм колебаний и собственных частот, соответствующих любому другому набору идеальных граничных условий. Так, если оба конца стержня закреплены, $\xi(0) = \xi(l) = 0$, $\theta_i = \sin(i\pi x / l)$ и $\omega_i = i\pi c / l$. Если один конец закреплен, а другой свободен, $\xi(0) = 0$, $\xi'(l) = 0$, $\theta_i(x) = \sin[(2i - 1)\pi x / l]$ и $\omega_i = (2i - 1)\pi c / l$.

4.3.2 Переходные колебания

Вернемся к решению неоднородного уравнения (4.41) при граничных условиях (4.57), предполагая, что в момент приложения силы $f(x, t)$ выполнены условия (4.58). Как было отмечено ранее, предполагаем, что сила изменяется по гармоническому закону

$$f(x, t) = f(x) \cos \omega t. \quad (4.74)$$

Представим решение уравнения (4.41) как сумму общего решения однородного уравнения (4.73), удовлетворяющего начальным и граничным условиям (обозначим его $\xi_I(x, t)$), и частного решения $\xi_{II}(x, t)$ неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях (4.58).

$$\xi(x, t) = \xi_I(x, t) + \xi_{II}(x, t), \quad (4.75)$$

$$\xi_{II}(x, t) = \xi_{II}(x) \cos \omega t. \quad (4.76)$$

После подстановки смещений из уравнений (4.75) и (4.76) в уравнение (4.41) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для частного решения $\xi_{II}(x, t)$

$$c^2 \xi_{II}''(x) + \omega^2 \xi_{II}(x) = f(x) / m_{\Delta}. \quad (4.77)$$

Решение уравнения (4.77) будем искать в виде разложения в ряд Фурье по нормальным формам колебаний $\theta_i(x) = \cos(i\pi x / l)$, а именно, как

$$\xi_{II}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{IIi} \theta_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{IIi} \cos(i\pi x / l). \quad (4.78)$$

Представим действующую силу в виде разложения в ряд Фурье по тем же нормальным формам колебаний,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \theta_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos(i\pi x / l), \quad (4.79)$$

где

$$f_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx. \quad (4.80)$$

После подстановки предполагаемого решения (4.78) и $f(x)$ из (4.79) в уравнение (4.77) получим

$$\xi_{IIi} (\omega_i^2 - \omega^2) = f_i / m_{\Delta} = f_{ieqv} / M_i, \quad (4.81)$$

где

$$f_{ieqv} = \int_0^l f(x) \theta_i(x) dx, \quad M_i = m_{\Delta} \int_0^l \theta_i^2(x) dx. \quad (4.82)$$

Таким образом, частное решение уравнения (4.41) равно

$$\xi_{IIi}(x, t) = \frac{f_{ieqv}}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (4.83)$$

и общее решение (4.75) получим в виде

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_{Ii} + \xi_{IIi}) \cos(i\pi x / l) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[a_i \cos \omega_i t + \frac{b_i}{\omega_i} \sin \omega_i t \right] + \frac{f_{ieqv} \sin \omega t}{M_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \right\} \cos \frac{i\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Здесь член в квадратных скобках описывает свободные колебания, а второй член — вынужденные колебания тела под действием приложенной силы.

Следует отметить, что полученное решение не соответствует практике. Из решения следует, что свободные колебания начавшись могут длиться бесконечно долго, и что амплитуда вынужденных колебаний увеличивается бесконечно, если частота действующей силы приближается к одной из собственных частот. В реальности свободные колебания затухают экспоненциально, а амплитуда вынужденных колебаний остается ограниченной при $\omega = \omega_i$. Причина такого несоответствия состоит в том, что до сих пор не были приняты во внимание внутренние потери энергии, происходящие в процессе колебаний. Эти потери достаточно малы для того, чтобы рассматривать механические системы как абсолютно упругие, но их следует учитывать в общем балансе энергий, как это было сделано в предыдущих главах.

Легко убедиться, что коэффициенты разложения в формуле (4.84) для $\xi_i(x, t) = \xi_{Ii}(x, t) + \xi_{IIi}(x, t)$, которые были получены в результате решения уравнений (4.59) и (4.41) для $\xi_{Ii}(x, t)$ и $\xi_{IIi}(x, t)$, соответственно, могут быть найдены из следующих уравнений, которые описывают эти системы, как системы с одной степенью свободы, соответствующей одной из нормальных форм колебаний

$$M_i \ddot{\xi}_i + K_i \xi_i = f_{ieqv} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.85)$$

Здесь $K_i = \omega_i^2 M_i$, $\xi_i(0) = a_i$, $\dot{\xi}_i(0) = b_i$ и a_i , b_i определены по формулам (4.72). После добавления в уравнение (4.85) дополнительного члена $r_i \dot{\xi}_i$, который учитывает потери энергии, получим

$$M_i \ddot{\xi}_i + r_i \dot{\xi}_i + K_i \xi_i = f_{ieqv}. \quad (4.86)$$

В уравнении (4.86) первый член представляет собой силу инерции, второй член — силу трения, а третий — силу упругости. Решение уравнения (4.86) для свободных колебаний (при $f_{ieqv} = 0$) при начальных условиях (4.58) можно принять в виде $\xi_i = Ae^{pt}$. Подставив это выражение в (4.86), получим уравнение для нахождения коэффициента p

$$p^2 + 2a_i p + \omega_i^2 = 0, \quad (4.87)$$

где $2a_i = r_i / M_i$ и $\omega_i^2 = K_i / M_i$. Решение уравнения (4.87) имеет вид $p = -\alpha_i \pm j\sqrt{\omega_i^2 - \alpha_i^2}$. При небольших потерях $\omega_i^2 \gg \alpha_i^2 = r_i^2 / 4M_i^2$ и значение $\omega_{li}^2 = \omega_i^2 - \alpha_i^2$ положительно. В результате общее решение для однородного уравнения (4.86), удовлетворяющее начальным условиям, будет (см. формулу(4.73))

$$\xi_i = e^{-\alpha_i t} \left[a_i \cos \omega_{li} t + \left(\frac{b_i + \alpha_i a_i}{\omega_{li}} \right) \sin \omega_{li} t \right] = C e^{-\alpha_i t} \cos(\omega_{li} t + \varphi), \quad (4.88)$$

где C и φ — начальные амплитуда и фаза колебаний. Таким образом, если принять во внимание потери энергии, свободные колебания затухают, что и наблюдается экспериментально. Кроме того, частоты свободных колебаний несколько изменились по сравнению с частотами ω_i в уравнении (4.84), а именно $\omega_{li} = \omega_i \sqrt{1 - \alpha_i^2 / \omega_i^2}$. Так как обычно $\alpha_i^2 \ll \omega_i^2$ этими изменениями обычно можно пренебречь.

Для анализа вынужденных колебаний перейдем к комплексной форме записи величин по схеме $f_i(x, t) \rightarrow F_i(x, t) = F_i(x) e^{j\omega t}$, $\dot{\xi}_i(x, t) \rightarrow U_i(x, t) = U_i(x) e^{j\omega t}$. После подстановки этих выражений в уравнение (4.86) получим

$$U_i [r_i + j(\omega M_i - K_i / \omega)] = F_i. \quad (4.89)$$

На частотах далеких от собственных частот ω_i значением r_i можно пренебречь и $U_i = F_i / M_i (\omega_i^2 - \omega^2)$, как и было в формуле (4.83) без учета потерь. При $\omega \rightarrow \omega_i$ амплитуда колебаний ограничена значением $U_i = F_i / r_i$.

Стадия движения, на которой одновременно существуют как затухающие свободные колебания, так и вынужденные колебания, является переходным процессом. После того, как становится возможным пренебречь свободными колебаниями, наступает режим установившихся вынужденных колебаний. Как в переходном, так и в установившемся режиме колебаний смещения в колеблющемся теле можно представить в виде

разложения (4.84) по нормальным формам колебаний. Поскольку при фиксированном распределении смещений механическая система имеет одну степень свободы (такие системы рассмотрены в Главе 2), это означает, что любые сложные колебания упругого тела можно представить как суперпозицию простых колебаний тела, каждое из которых имеет одну степень свободы и может быть рассмотрено независимо.

Далее мы будем рассматривать только установившиеся колебания.

4.3.3 Эквивалентная Т-образная схема стержня, колеблющегося в продольном направлении

При установившихся колебаниях решение уравнения (4.59) можно представить в комплексной форме. Комплексная величина смещения обозначена $\xi(x, t) \rightarrow \bar{\xi}(x)e^{j\omega t}$.

Подставив эту функцию в (4.59), получим уравнение

$$\bar{\xi}''(x) + k^2 \bar{\xi}(x) = 0, \quad (4.90)$$

где $k^2 = \omega^2 / c^2$. Это одномерное волновое уравнение. Он совпадает по форме с уравнением (4.63) при $\lambda = k^2$, и его решение в виде разложения по нормальным формам колебаний рассмотрено ранее. Возможна другая форма решения уравнения (4.90). При этом решении произвольные постоянные в выражении для $\bar{\xi}(x)$,

$$\bar{\xi}(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx, \quad (4.91)$$

можно определить непосредственно исходя из условий на торцах стержня. Задавая условия на торцах, мы должны следовать принятому правилу знаков, действие которого было проиллюстрировано на Рис. 1.11 (а). Поскольку мы рассматриваем деформации растяжения и порождающие их смещения, как условно положительные, то смещения на правом торце $x = l$ следует рассматривать с их знаками, в то время как смещения на левом торце $x = 0$ - с противоположными знаками (положительные направления смещения и оси x на левом торце противоположны). Силы F_0 и F_1 , показанные на Рис. 4.6 (с), являются положительными, поскольку они совпадают по направлению со смещениями. Поскольку силы сжатия должны приводить к отрицательным значениям напряжения, условия на торцах стержня имеют вид

$$YS_{cx} \bar{\xi}' \Big|_{x=0} = -F_0, \quad YS_{cx} \bar{\xi}' \Big|_{x=l} = -F_1. \quad (4.92)$$

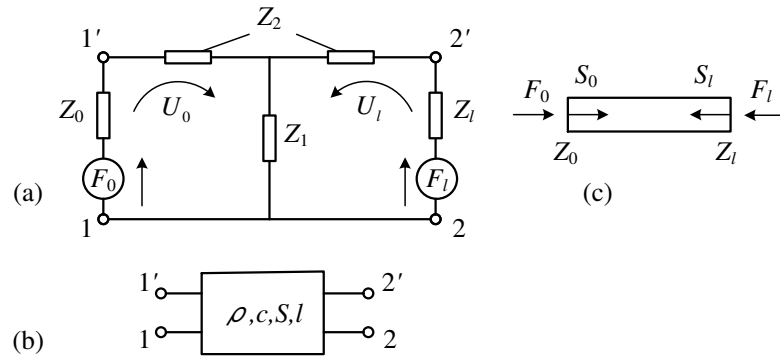


Рисунок 4.6: Эквивалентная схема стержня, колеблющегося в продольном направлении, нагруженного на торцах: (а) представление в виде Т-образной схемы, (б) представление в виде эквивалентного двухполюсника, (с) иллюстрация правила знаков.

Если торцы стержня нагружены механическими импедансами Z_0 и Z_l , то силы реакции, приложенные к торцам — $F = -Z\dot{\xi} = -ZU$. Если смещения направлены внутрь стержня, как показано на Рис. 4.6 (с), $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}_l$ отрицательны, поэтому силы реакции — растягивающие и должны приводить к положительному напряжению на торцах. Следовательно, условия на торцах следует записать следующим образом:

$$YS_{cs}\bar{\xi}'|_{x=0} = -Z_0U_0, \quad YS_{cs}\bar{\xi}'|_{x=l} = -Z_lU_l. \quad (4.93)$$

Если рассматривать смещения $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}_l$ как заданные, то подставив в формулу (4.91) $\bar{\xi}(0) = -\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}(l) = -\bar{\xi}_l$, получим

$$A_2 = -\bar{\xi}_0, \quad A_1 = (\bar{\xi}_l + \bar{\xi}_0 \cos kl) / \sin kl \quad (4.94)$$

и

$$\bar{\xi}(x) = (\bar{\xi}_l + \bar{\xi}_0 \cos kl) \sin kx / \sin kl - \bar{\xi}_0 \cos kl. \quad (4.95)$$

Таким образом, смещения в стержне полностью определены, если заданы значения $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}_l$. Поэтому стержень, колеблющийся в продольном направлении, можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы с обобщенными координатами $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}_l$. В этой системе потери могут быть учтены, если предположить, что скорость звука и волновое число являются комплексными величинами. А именно, $\bar{c} = c(1 + j/2Q_m)$ и $\bar{k} = \omega/\bar{c} = k(1 - j/2Q_m)$, где Q_m — добротность материала стержня.

Если силы F_0 , F_l и импедансы Z_0 и Z_l приложены к торцам стержня

одновременно, то с учетом выражений (4.92) и (4.93) должны быть удовлетворены следующие условия:

$$YS_{c.s} \bar{\xi}' \Big|_{x=0} = -Z_0 U_0 - F_0, \quad (4.96)$$

$$YS_{c.s} \bar{\xi}' \Big|_{x=l} = -Z_l U_l - F_l. \quad (4.97)$$

После подстановки в эти уравнения выражения для $\bar{\xi}(x)$ из (4.95) и $Y = \rho c^2$ получим

$$\frac{\rho c S_{c.s} (U_0 + U_l)}{j \sin kl} + j \rho c S_{c.s} U_0 \tan \frac{kl}{2} + Z_0 U_0 + F_0 = 0, \quad (4.98)$$

$$\frac{\rho c S_{c.s} (U_0 + U_l)}{j \sin kl} + j \rho c S_{c.s} U_l \tan \frac{kl}{2} + Z_l U_l + F_l = 0. \quad (4.99)$$

Легко проверить, что уравнения (4.98) и (4.99) представляют собой уравнения Кирхгофа для «токов» U_0 и U_l в схеме на Рис. 4.6 (а), где стержень представлен Т-образной схемой (четыреполюсником) между точками 1, 1' и 2, 2' с импедансами

$$Z_1 = -j \rho c S_{c.s} \sin kl, \quad Z_2 = Z_3 = j \rho c S_{c.s} \tan(kl/2). \quad (4.100)$$

Для краткости эту схему можно представить в виде эквивалентного четырехполюсника, приведенного на Рис. 4.6 (b).

Значения скоростей торцов можно определить с помощью схемы на Рис. 4.6 (а). После этого распределение колебаний в стержне при различных комбинациях нагрузок и действующих сил на торцах можно найти по формуле (4.95). Если необходимо определить скорость колебаний какого-либо сечения внутри стержня, его схему можно представить в виде каскадного соединения двух Т-образных схем, соответствующих частям стержня с левой и правой стороны от этого сечения.

Т-образную схему на Рис. 4.6 (а) можно использовать для определения величины механического входного импеданса стержня Z_{in} . При импедансе нагрузки Z_L на противоположном конце

$$Z_{in} = \frac{j \rho c S_{c.s} \tan kl + Z_L}{1 + j(Z_L / \rho c S_{c.s}) \tan kl}. \quad (4.101)$$

В тех случаях, если $Z_L = 0$ (противоположный торец свободен, механически

«коротко замкнут»),

$$Z_m = j\rho c S_{c.s.} \tan kl . \quad (4.102)$$

Если $Z_L \rightarrow \infty$ (противоположный торец закреплен, механически «разомкнут»),

$$Z_m = j\rho c S_{c.s.} / \tan kl . \quad (4.103)$$

Так как уравнение (4.90) получено из уравнения (4.59), которое относится к общему случаю одномерных продольных и крутильных колебаний, его решение в виде уравнения (4.95), где $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}_l$ определяются выражениями (4.98) и (4.99), и эквивалентная схема на Рис. 4.6 (а) справедливы для всех рассмотренных выше конкретных случаев одномерных колебаний. Достаточно только в случае продольных колебаний использовать в конечном результате $c = \sqrt{Y / \rho(1 - \sigma^2)}$ для колебаний по ширине длинной полосы (см. Рис. 4.2 (b)) и $c = \sqrt{Y(1 - \sigma) / \rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$ для колебаний по толщине пластины с большими поперечными размерами (см. Рис. 4.6 (d)). В случае крутильных колебаний (см. Рис. 4.5) ρS_{cs} необходимо заменить на ρJ_p и скорость звука следует рассчитывать по формуле $c = \sqrt{G / \rho J_p}$ ($c = \sqrt{\mu / \rho}$ для стержней круглого и квадратного сечения). В случае кручения обобщенные действующие силы представляют собой моменты, а обобщенные смещения - углы поворота.

Представление решения задач колебаний механической системы преобразователей в виде уравнения (4.95) особенно выгодно, если они значительно нагружены на торцах и/или когда речь идет об относительно широком рабочем частотном диапазоне. Для анализа преобразователей, работающих с малой нагрузкой и в относительно узких диапазонах частот вокруг резонансов, гораздо удобнее использовать решение в виде разложения по нормальным формам колебаний.

4.3.4 Нормальные формы колебаний изгиба прямоугольных стержней

Для решения уравнения поперечных колебаний изгиба прямоугольных стержней (4.48) при граничных условиях (4.53)–(4.55) в режиме установившихся гармонических колебаний применим метод разложения решения по нормальным формам колебаний. Это уравнение воспроизведено здесь.

$$\alpha^2 \xi_x^{IV} + \ddot{\xi} = f(x, t) / \rho S_{cs} , \quad (4.48)$$

где $\alpha^2 = EYJ / \rho S_{c.s.}$, $f(x, t) = f(x) \cos \omega t$.

Уравнение свободных колебаний, соответствующее уравнению (4.48) в комплексной форме, в котором подставлены $\xi(x, t) = X(x)e^{j\omega t}$ и $\omega^2 / \alpha^2 = k^4$, получим в виде

$$X^{IV} - k^4 X = 0. \quad (4.104)$$

Предположив решение в виде $X(x) = e^{\lambda x}$, из этого уравнения найдем четыре значения λ : $\pm jk$ и $\pm k$. Таким образом, общее решение уравнения (4.104) можно представить в виде

$$X(x) = A_1 e^{jkx} + A_2 e^{-jkx} + A_3 e^{kx} + A_4 e^{-kx} \quad (4.105)$$

или

$$X(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx. \quad (4.106)$$

Воспользовавшись граничными условиями, найдем соотношения между произвольными постоянными, а также уравнения для определения собственных частот и выражения для нормальных форм колебаний. Рассмотрим следующие варианты идеальных граничных условий. В варианте со свободно опертыми концами граничные условия имеют вид (4.53)

$$X(0) = X(l) = 0, \quad X' \Big|_{x=0, x=l} = 0. \quad (4.53)$$

Уравнение для определения собственных частот $\sin k_i l = 0$, откуда $k_i l = \pi i$ и $\omega_i = \alpha k_i^2 = \alpha (\pi i / l)^2$. Нормальные формы колебаний

$$X_i(x) = \sin(i\pi x / l). \quad (4.107)$$

В варианте со свободными концами из (4.55) следует, что

$$X'' \Big|_{x=0, l} = 0, \quad X''' \Big|_{x=0, l} = 0. \quad (4.55)$$

Из уравнения (4.104) получим

$$\cos k_i l \cdot \cosh k_i l = 1. \quad (4.108)$$

Этому уравнению удовлетворяют последовательные значения $k_i l$: 0, 4.73, 7.85 и, соответственно,

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \alpha (4.73/l)^2, \quad \omega_2 = \alpha (7.85/l)^2. \quad (4.109)$$

Наличие «собственной частоты» $\omega_0 = 0$ означает, что стержень может перемещаться под действием приложенных сил как твердое тело (без деформаций).

Для стержня с одним концом (при $x = 0$) заделанным и другим (при $x = l$) свободным граничные условия

$$X(0) = 0, \quad X'(x)_{x=0} = 0, \quad X''(x)_{x=l} = 0, \quad X'''(x)_{x=l} = 0. \quad (4.110)$$

Частотное уравнение имеет вид

$$\cos k_i l \cdot \cosh k_i l = -1. \quad (4.111)$$

Последовательные корни этого уравнения

$$k_i l = 1.87, 4.69. \quad (4.112)$$

При $i > 2$ они имеют такие же значения, что и для стержня со свободными концами. Первая собственная частота

$$\omega_1 = \alpha (1.87 / l)^2. \quad (4.113)$$

Для стержней, у которых оба конца заделаны, граничные условия имеют вид

$$X(x)|_{x=0,l} = 0, \quad X'(x)|_{x=0,l} = 0. \quad (4.114)$$

В этом случае частотное уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (4.108) для стержней со свободными концами. Это приводит к тем же значениям собственных частот (4.109) за исключением того, что отсутствует собственная частота $\omega_0 = 0$, поскольку в этом случае движение стержня как твердого тела невозможно.

Прямоугольные стержни (пластины имеющие малую ширину) при условиях закрепления, которые можно аппроксимировать рассмотренными выше идеальными условиями, часто применяют в качестве элементов механических систем преобразователей, которые работают в диапазоне частот ниже их первой резонансной частоты. В этом диапазоне частот доминирует первая форма колебаний. Для решения задач колебаний в таком частотном диапазоне методом Рэлея с очень хорошим приближением вместо нормальных форм колебаний можно использовать формы статического прогиба стержней при равномерно распределенных нагрузках. Формы статического прогиба стержней при различных условиях закрепления концов приведены в работе [2].

Так, для прямоугольных стержней:

со свободно опертыми концами

$$\theta(x) = (16/5l)(x - 2x^3/l^2 + x^4/l^3); \quad (4.115)$$

с заделанными концами

$$\theta(x) = (16x^2/l^2)(1 - 2x/l + x^2/l^2); \quad (4.116)$$

с одним заделанным, а другим свободным концом

$$\theta(x) = 2(x/l)^2(1 - 2x/3l + x^2/6l^2). \quad (4.117)$$

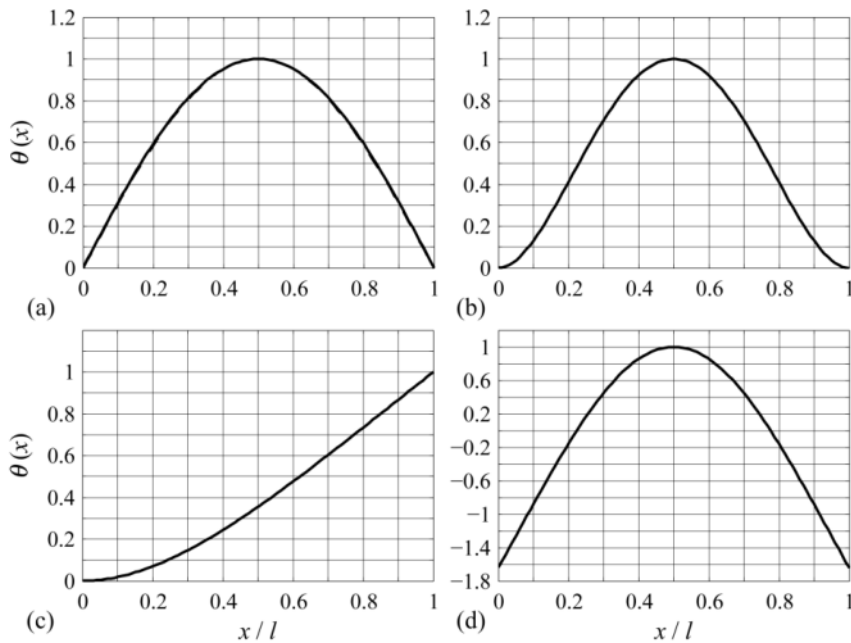


Рисунок 4.7: Формы статических прогибов для прямоугольных стержней: (а) со свободно опертыми концами, (б) с заделанными концами, (с) с одним заделанным и другим свободным концами, (d) нормальная форма колебаний стержня со свободными концами. Нормальная форма для просто опертой стержня $\theta(x) = \sin(\pi x/l)$ совпадает со статическим прогибом (а) с точностью до толщины линии.

На Рис. 4.7 представлены формы статического прогиба для прямоугольных стержней. На этом же рисунке для сравнения представлена нормальная форма для свободно опертого стержня и нормальная форма для стержня со свободными концами. Координаты важных точек на кривых форм колебаний: точки перегиба, в которых знаки кривизны

изменяются, для стержня с заделанными концами это $x_1 = 0.24l$ и $x_2 = 0.76l$; узловые точки, в которых смещения стержня со свободными концами равны нулю, $x_1 = 0.22l$ и $x_2 = 0.78l$.

Отметим, что стержень (пластина) со свободными концами под действием сил приложенных в узловых точках (на узловых линиях) может двигаться на низких частотах преимущественно как твердое тело (поршнеобразно), поскольку при таком приложении сил колебания в первой форме не возникают. Это обстоятельство в ряде случаев может оказаться полезным при использовании стержней в конструкциях электромеханических преобразователей.

Прежде чем приступить к представлению решения задачи колебаний в виде разложения по нормальным формам, необходимо отметить некоторые общие свойства нормальных форм колебаний. Их можно вывести с помощью уравнений разделения (4.63) и (4.104). Рассмотрим, например, уравнения (4.104) после подстановки нормальных форм X_n и X_m с соответствующими собственными значениями k_n и k_m

$$X_n^{IV} - k_n^4 X_n = 0, \quad (4.118)$$

$$X_m^{IV} - k_m^4 X_m = 0. \quad (4.119)$$

Умножим первое уравнение на X_m и второе на X_n , вычтем уравнения и результат проинтегрируем в интервале $[0, l]$. В итоге получим

$$(k_n^4 - k_m^4) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \int_0^l (X_m X_n^{IV} - X_n X_m^{IV}) dx. \quad (4.120)$$

После интегрирования правого интеграла по частям и применения идеальных граничных условий приходим к выводу, что во всех случаях нормальные формы колебаний ортогональны, т. е.

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (4.121)$$

Произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $g(x)$, удовлетворяющую граничным условиям задачи, можно разложить по нормальным формам $X_i(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i X_i(x), \text{ где } g_i = \frac{1}{N_i} \int_0^l g(x) X_i(x) dx \text{ и } N_i = \int_0^l X_i^2(x) dx. \quad (4.122)$$

Вернемся к уравнению (4.48). В режиме установившихся колебаний его можно записать в комплексном виде. При этом $\xi(x, t) \rightarrow \bar{\xi}(x, t) = \bar{\xi}(x) e^{j\omega t}$ и $f(x, t) \rightarrow F(x) e^{j\omega t}$. Представим предполагаемое решение и действующую силу в виде разложения в ряд по нормальным формам колебаний, соответствующим определенному типу граничных условий,

$$\bar{\xi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\xi}_i X_i(x) \quad (4.123)$$

и

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i X_i(x) \quad (4.124)$$

После подстановки этих выражений в уравнение (4.48) и некоторых преобразований получим решение в виде

$$\bar{\xi}_i = \frac{F_i}{\rho S_{c.s.} (\omega_i^2 - \omega^2)} = \frac{F_{eqvi}}{\rho S_{c.s.} N_i (\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (4.125)$$

В ходе преобразований было учтено, что согласно уравнению (4.106)

$$X^{IV} = k^4 X = (\omega_i^2 / \alpha^2) X \quad (4.126)$$

и в соответствии с соотношением (4.122)

$$F_{eqvi} = \int_0^l F(x) X_i(x) dx. \quad (4.127)$$

Выражение (4.125) для коэффициентов в разложении по нормальной формам X_i решения задачи о поперечных колебаниях стержней аналогично выражению (4.83) для стержней, колеблющихся в продольном направлении, так что те же соображения относительно учета потерь энергии в реальной ситуации можно применить и в этом случае.

Соотношение между амплитудами форм колебаний и количеством членов в ряду (4.123), которые необходимо учитывать, зависит от распределения действующей силы $F(x)$. Если сосредоточенная сила $F(x) = F(x_0)$ приложена в точке x_0 на боковой поверхности стержня, то по формуле (4.127) $F_{eqvi} = F(x_0) \cdot X_i(x_0)$, и формы колебаний, для

которых сила приложена к узлам, не возбуждаются. Если распределение сил совпадает с одной из нормальных форм колебаний $f(x) \sim X_m(x)$, то в ряду (4.123) останется только член, соответствующий этой форме колебаний, поскольку распределение силы в этом случае ортогонально всем остальным формам колебаний и $f_{ieqv} = 0$ при $i \neq m$. В реальности для представления распределения активных сил достаточно лишь несколько членов разложения, поэтому ряд (4.123) оказывается ограниченным.

4.3.5 Поправки, обусловленные конечной толщиной стержней.

В том случае, если размеры сечений стержней и прямоугольных пластин не слишком малы по сравнению с их длиной, при выводе уравнений движения необходимо учитывать поправки (4.14), (4.33) и (4.37) к плотностям энергий их колебаний. Вначале рассмотрим кинетическую и потенциальную энергии колеблющихся стержней с малой относительной толщиной, предполагая, что распределение смещений представлено рядом (4.123).

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \rho S_{c.s} \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i X_i \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i^2 M_{eqvi}, \quad (4.128)$$

где

$$M_{eqvi} = \rho S_{c.s} \int_0^l X_i^2 dx. \quad (4.129)$$

Потенциальная энергия деформации стержня

$$W_{pot} = \frac{1}{2} YJ \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i X_i'' \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 YJ \left(\frac{\omega_i}{\alpha} \right)^2 \int_0^l X_i^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} K_{eqvi} \xi_i^2, \quad (4.130)$$

где

$$K_{eqvi} = YJ \left(\frac{\omega_i}{\alpha} \right)^2 \int_0^l X_i^2 dx. \quad (4.131)$$

В выражениях для энергий M_{eqvi} и K_{eqvi} представляют собой эквивалентную массу и эквивалентную жесткость, которые соответствуют нормальной форме X_i . В процессе преобразований использовалось свойство ортогональности нормальных форм колебаний и выражение

$$\int_0^l (X_i'')^2 dx = \left(\frac{\omega_i}{\alpha} \right)^2 \int_0^l X_i^2 dx, \quad (4.132)$$

которое можно получить путем умножения обеих частей уравнения (4.122) на X_i , интегрирования по частям по длине стержня и применения идеальных граничных условий.

Выражения (4.128) и (4.130) для кинетической и потенциальной энергий являются общими для стержней при всех идеальных граничных условиях. Значения же M_{eqvi} , K_{eqvi} и ω_i зависят от конкретных условий на концах.

Для стержня со свободными торцами, колеблющегося в продольном направлении, $X_i = \cos(i\pi x/l)$ и из выражений для кинетической и потенциальной энергии получим

$$M_{eqvi} = \rho S_{cs} l / 2 = M / 2, \quad K_{eqvi} = (i\pi)^2 Y S_{cs} / 2l, \quad \omega_i^2 = (i\pi)^2 Y / l^2 \rho. \quad (4.133)$$

Для стержня со свободно опертыми концами, колеблющегося в поперечном направлении, $X_i = \sin(i\pi x/l)$ и

$$M_{eqvi} = M / 2, \quad K_{eqvi} = \frac{(i\pi)^4 w t^3 Y}{12l^3}, \quad \omega_i^2 = (i\pi)^4 Y J / (\rho S_{cs} l^4). \quad (4.134)$$

Рассмотрим теперь влияние поправки к кинетической энергии по формуле (4.14), учитывающей энергию поперечного движения при продольных колебаниях стержня со свободными торцами (поправка Рэлея). При подстановке смещения в виде разложения по нормальным формам в выражение (4.14) и интегрировании по длине стержня получим

$$\Delta W_{kin} = \frac{\rho \sigma^2 J_p}{2} \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i \frac{i\pi}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i^2 \rho \sigma^2 J_p \frac{(i\pi)^2}{2l}. \quad (4.135)$$

Добавление ΔW_{kin} к кинетической энергии (4.128) для стержня, колеблющегося в продольном направлении, не изменяет форму ряда, представляющего $W'_{kin} = W_{kin} + \Delta W_{kin}$. Изменяются только эквивалентные массы, соответствующие формам колебаний, и это приводит к изменению собственных частот. Новые выражения для масс и резонансных частот приобретают вид

$$M'_{eqvi} = M_{eqvi} \left[1 + (i\pi\sigma)^2 J_p / l^2 S_{cs} \right], \quad (4.136)$$

$$\omega'_i = \omega_i / \sqrt{1 + (i\pi\sigma)^2 J_p / l^2 S_{cs}} \approx \omega_i \left[1 - (i\pi\sigma)^2 J_p / 2l^2 S_{cs} \right]. \quad (4.137)$$

Для стержней круглого и прямоугольного сечений $J_p = \pi a^4 / 2$ и $J_p = w t^3 / 6$,

соответственно. Поправка увеличивается с увеличением отношения размеров поперечного сечения к полуволне деформации ($\lambda \sim 2l/i$). Для стержня с квадратным сечением это отношение равно $(i\pi\sigma w)^2/12l^2$, и при $w/l < 1/3$ поправка в выражении (4.137) меньше 0.01 для первой формы колебаний.

Для стержней, колеблющихся в поперечном направлении, следует учитывать влияние деформации сдвига и инерции вращения, которые приводят к изменению плотности кинетической и потенциальной энергий. В разложении (4.123) будем полагать $X_i = \theta_i(x)$ в отличие от случая продольных колебаний. После подстановки смещения $\xi(x, t) = \xi_1(t)\theta_1(x)$ в выражения (4.33) для ΔW_{kin} и (4.37) для ΔW_{pot} и интегрирования по длине стержня получим

$$\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} \xi_1^2 \rho J_2 \int_0^l \left(\frac{d\theta_1}{dx} \right)^2 dx, \quad (4.138)$$

$$\Delta W_{pot} = -\frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{wY^2 t^5}{120\mu} \int_0^l \left(\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x^3} \right)^2 dx. \quad (4.139)$$

Для прямоугольных стержней со свободно опертыми концами получим следующие поправки к параметрам M_{eqv} и K_{eqv} , первоначально определенным по формулам (4.134), для первой формы колебаний, которая наиболее часто применяется на практике,

$$M'_{eqv} = M_{eqv} \left(1 + \frac{\pi^2 t^2}{12 l^2} \right), \quad K'_{eqv} = K_{eqv} \left[1 - \frac{(\pi t)^2 Y}{20 \mu l^2} \right]. \quad (4.140)$$

До сих пор мы рассматривали уравнения колебаний прямоугольных стержней или пластин малой ширины. Прямоугольные пластины с боковыми размерами соизмеримыми с длиной редко используются в конструкциях преобразователей. При необходимости прямоугольную поверхность можно собрать из стержней или полос. Колеблющиеся же системы в виде круглых пластин, напротив, используются широко. Решение задач колебаний круглых пластин и других тел с криволинейными поверхностями (цилиндрическими и сферическими) требует применения криволинейных координат, для того чтобы иметь возможность согласовать координатные поверхности с поверхностями, на которых заданы граничные условия.

4.4 Уравнения колебаний в криволинейных координатах

4.4.1 Криволинейные координаты

Рассмотрим элемент объема в криволинейной ортогональной системе координат q_1, q_2, q_3 с координатными поверхностями $q_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$, $q_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$, $q_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$, который образован пересечением пар поверхностей, соответствующих значениям q_i и $q_i + dq_i$ (Рис. 4.8 (а)). Единичные векторы $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ направлены по касательным к координатным линиям (линиям пересечения координатных поверхностей), которые сходятся в одной точке. Положение координатных векторов относительно прежних прямоугольных координат с единичными векторами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ определяется косинусами углов между направлениями векторов и x_1 , направляющими косинусами $\cos(q_1, x_1)$. Предположим, что прямоугольные координаты x_1, x_2, x_3 выражены через криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 следующим образом: $x_1 = \varphi_1(q_1, q_2, q_3)$, $x_2 = \varphi_2(q_1, q_2, q_3)$, $x_3 = \varphi_3(q_1, q_2, q_3)$. Тогда элементы длины вдоль прямоугольных координатных линий равны

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_3} dq_3 \quad (4.141)$$

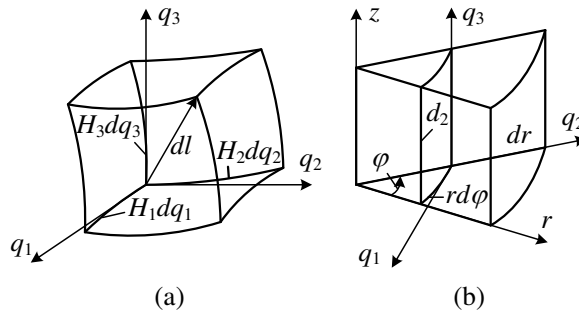


Рисунок 4.8: Криволинейные системы координат: (а) общего вида, (б) цилиндрическая.

и направляющие косинусы $\cos(q_l, x_i)$ пропорциональны $\partial \varphi_i / \partial q_l$. Таким образом, условия ортогональности криволинейной системы координат имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_l} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_l} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k} = 0, \quad l \neq k. \quad (4.142)$$

Элемент длины в криволинейной системе координат (см. Рис. 4.8) с учетом

уравнений (4.141) и (4.142) определим как

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} \right)^2 dq_1^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} \right)^2 dq_2^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_3} \right)^2 dq_3^2 \right] \\
 &= H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.
 \end{aligned} \tag{4.143}$$

Здесь H_i — постоянные Ламе криволинейной системы координат,

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2. \tag{4.144}$$

Из формулы (4.143) следует, что элементарные длины по осям криволинейной системы координат равны $dl_1 = H_1 dq_1$, $dl_2 = H_2 dq_2$, $dl_3 = H_3 dq_3$.

При использовании криволинейных координат необходимо определить правило обозначений осей координат, компонентов смещений и компонентов тензоров деформаций и напряжений. В случае прямоугольных координат элементарные длины по осям равны ($H_1 = H_2 = H_3 = 1$), поэтому можно ввести числовые обозначения для всех перечисленных выше компонентов. Особенность механических систем, изготовленных из пьезоэлектрической керамики, состоит в том, что ось 3 принято направлять вдоль вектора поляризации, т. е. ее направление заранее определено способом поляризации пьезоэлемента, а не его геометрией.

В дальнейшем будем преимущественно применять цилиндрические координаты r , φ , z (Рис. 4.8 (b)). В этом случае $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $x_3 = z$. Как следует из выражений (4.144), постоянные Ламе равны $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_z = 1$. Выражения для компонентов тензора деформации:

$$S_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_r}{r}, \quad S_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z}, \tag{4.145}$$

$$S_{\varphi z} = \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi}, \quad S_{rz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial z}, \quad S_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi_\varphi}{r} \right). \tag{4.146}$$

Механические системы преобразователей, как правило, обладают осевой симметрией. В этом случае $\xi_\varphi = 0$, $\partial \xi_r / \partial \varphi = 0$, $\partial \xi_z / \partial \varphi = 0$, и

$$S_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{\xi_r}{r}, \quad S_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z}, \quad (4.147)$$

$$S_{\varphi z} = S_{r\varphi} = 0, \quad S_{rz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial z}. \quad (4.148)$$

В случае сферических координат r, φ, θ , $x_1 = r \sin \varphi \cos \theta$, $x_2 = r \sin \varphi \sin \theta$, $x_3 = r \cos \varphi$. Постоянные Ламе для сферических координат согласно выражениям (4.144) равны: $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_\theta = r \sin \varphi$. Выражения для компонентов тензора деформаций в осесимметричном случае

$$S_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r}, \quad S_{\theta\theta} = \frac{\xi_r}{r}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\theta}{r} \cot \theta + \frac{\xi_r}{r}, \quad (4.149)$$

$$2S_{\theta\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\xi_\varphi}{r} \cot \theta, \quad 2S_{r\theta} = \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r}, \quad (4.150)$$

$$2S_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} - \frac{\xi_\varphi}{r}. \quad (4.151)$$

При условии, что рассматриваются изотропные тела, все соотношения между напряжениями и деформациями, выраженные в прямоугольных координатах, будут справедливы, если координатам r, φ, z (r, φ, θ для сферической системы координат) присвоить обозначения 1, 2, 3, соответственно. В случае если тело выполнено из пьезокерамики, элементы его объема относят к кристаллографической системе координат, в которой направление оси 3 (единичный вектор \mathbf{q}_3) совпадает с направлением вектора поляризации \mathbf{P} . Направления единичных векторов \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 могут быть произвольными, но принято, что единичные векторы образуют правую систему (т. е. вращение \mathbf{q}_1 до совпадения с \mathbf{q}_2 должно происходить против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{q}_3).

4.4.2 Колебания в плоскости круглых дисков малой высоты

В этом разделе рассмотрены колебания в плоскости круглых дисков, сплошных и с отверстием (колец большой толщины) (Рис. 4.9). Предположено, что высота диска представляет собой размер диска в направлении, перпендикулярном его плоскости, а толщина кольца равна $(a-b)$, где a - внешний, а b - внутренний радиус кольца.

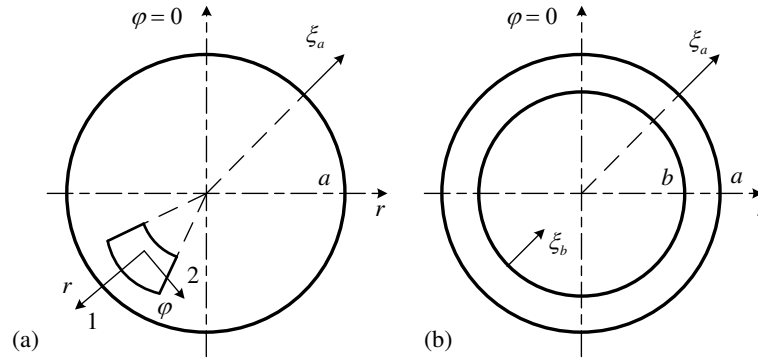


Рисунок 4.9: Круглые диски: (а) сплошной диск, (б) кольцо конечной толщины (а-б).

4.4.2.1 Вывод уравнения движения

Рассмотрим колебания в плоскости круглых дисков (пьезоэлементы такой конфигурации широко применяют при проектировании преобразователей). Соотношения между напряжениями и деформациями, а также формулу (4.16) для w_{pot} , в этом случае представим в цилиндрических координатах, подставив в них выражения для деформаций из (4.147)

$$S_1 = S_{rr} = \partial \xi_r / \partial r, \quad S_2 = S_{\varphi\varphi} = \xi_r / r. \quad (4.152)$$

В результате получим

$$T_1 = T_{rr} = \frac{Y}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \sigma \frac{\xi_r}{r} \right), \quad T_2 = T_{\varphi\varphi} = \frac{Y}{1-\sigma^2} \left(\frac{\xi_r}{r} + \sigma \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right), \quad (4.153)$$

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \frac{Y}{1-\sigma^2} \left[\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right)^2 + 2\sigma \frac{\xi_r}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \left(\frac{\xi_r}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.154)$$

Плотность кинетической энергии

$$w_{kin} = \rho \dot{\xi}_r^2 / 2. \quad (4.155)$$

Обратите внимание, что w_{kin} и w_{pot} относятся к элементу объема $d\tilde{V}$. В данном случае $d\tilde{V} = r dr d\varphi dz$. Для вывода уравнения колебаний используем ту же процедуру, что была применена в случае поперечных колебаний стержней. Следуя вариационному принципу, получим

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tilde{V}} (w_{kin} - w_{pot}) d\tilde{V} dt = \\ & = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left\{ \rho \dot{\xi}_r^2 - \frac{Y}{1-\sigma^2} \left[\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right)^2 + 2\sigma \frac{\xi_r}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \left(\frac{\xi_r}{r} \right)^2 \right] \right\} r dr dt = 0. \end{aligned} \quad (4.156)$$

При подстановке под интеграл функции $\xi_r + \eta(r, t)$ для ξ_r , где $\eta(r, t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, которая принимает нулевые значения на границах интервала интегрирования. Смещение ξ_r внутри диска должно удовлетворять условию

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left\{ \dot{\xi}_r \dot{\eta} - c^2 \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \sigma \left(\frac{\eta}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\xi_r}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) + \frac{\xi_r}{r^2} \eta \right] \right\} r dr dt = 0, \quad (4.157)$$

где

$$c^2 = Y / \rho(1 - \sigma^2). \quad (4.158)$$

После интегрирования по частям членов, содержащих $\dot{\eta}$ и η' , получим выражение

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left\{ c^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right) - \frac{\xi_r}{r} \right] - \ddot{\xi}_r r \right\} \eta dr dt = 0. \quad (4.159)$$

Поскольку функция η произвольна, это условие может выполняться только в том случае, если ξ_r удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right) - \frac{\xi_r}{r^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{\xi}_r = 0. \quad (4.160)$$

Кроме того, на краю диска должны быть выполнены граничные условия. При идеальных граничных условиях, т. е. при отсутствии потока энергии через контур диска, $T_1 \cdot \xi_r|_{r=a} = 0$. Таким образом, в варианте сплошного диска либо $\xi_r(a) = 0$, если край диска заделан, либо

$$T_1|_{r=a} = \frac{Y}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \sigma \frac{\xi_r}{r} \right)_{r=a} = 0, \quad (4.161)$$

если он свободен.

При установившихся гармонических колебаниях уравнение (4.160) переходит в уравнение Бесселя первого порядка

$$\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\xi = 0, \quad (4.162)$$

где $k^2 = \omega^2 / c^2$ и $c^2 = Y / \rho(1 - \sigma^2)$ (нижний индекс r у ξ , опущен для краткости). Общее решение этого уравнения

$$\xi = AJ_1(kr) + BN_1(kr), \quad (4.163)$$

где $J_1(kr)$ и $N_1(kr)$ — функции Бесселя и Неймана первого порядка. Описание функций Бесселя можно найти, например, в работе [3]. Некоторые свойства этих функций приведены в Приложении С.1. Коэффициенты A и B представляют собой произвольные постоянные, которые следует определить, применив граничные условия.

4.4.2.2 Сплошной диск

Из условия нулевого радиального смещения в центре диска должно быть $B = 0$. Таким образом, нормальные формы в данной задаче будут $X_i(r) = J_1(k_i r)$. Собственные значения $\lambda_i = k_i a$, и соответствующие собственные частоты

$$\omega_i = (\lambda_i / a) \sqrt{Y / \rho(1 - \sigma^2)}. \quad (4.164)$$

Применив граничное условие (4.162) для свободного края, получим уравнение

$$\left. \frac{dJ_1(k_i r)}{dr} \right|_{r=a} + \sigma \frac{J_1(k_i a)}{a} = 0. \quad (4.165)$$

Известны следующие соотношения для функций Бесселя (см. Приложение С.1)

$$J_1'(x) = J_0(x) - J_1(x)/x, \quad N_1'(x) = N_0(x) - N_1(x)/x. \quad (4.166)$$

Если учесть первое из них, уравнение (4.165) становится

$$J_0(k_i a) = (1 - \sigma) \frac{J_1(k_i a)}{k_i a}. \quad (4.167)$$

Решения этого уравнения при $\sigma = 0.3$ равны

$$k_i a = \lambda_i = 2,05, 5,38, 8,57 \text{ и } \lambda_i \approx i\pi - 0.9 \text{ при } i > 3. \quad (4.168)$$

Резонансные частоты, соответствующие формам колебаний $X_i(r) = J_1(k_i r)$, можно получить по формуле (4.164).

Из уравнения (4.167) следует, что собственные значения и нормальные формы в

некоторой степени зависят от коэффициента Пуассона σ . В случае, если диски изготовлены из пьезокерамики, Y и σ следует заменить на $Y_1^E = 1/s_{11}^E$ и $\sigma_1^E = -s_{12}^E/s_{11}^E$. Хотя для различных пьезокерамических материалов $\sigma_1^E \neq 0.3$, в пределах изменения значений σ_1^E для наиболее часто используемых PZT композиций (σ_1^E находятся примерно между 0.27 и 0.35) значения λ_i изменяются менее чем на 1% от их значений при $\sigma = 0.3$. Это легко проверить с помощью уравнения (4.167). Таким образом, формула для резонансных частот (4.168) остается справедливой для пьезокерамических дисков.

Уравнение (4.162) описывает также радиальные колебания бесконечно длинного цилиндра. Разница лишь в том, что в этом случае надо использовать выражение для скорости звука $c = \sqrt{Y(1-\sigma)/\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}$. Поэтому формула для собственных частот будет

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi a} \sqrt{\frac{Y(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \quad (4.169)$$

с теми же значениями λ_i , что и в случае диска.

4.4.2.3 Кольцо конечной толщины

Предположение об изотропных свойствах кольца, строго говоря, в точности применимо к пьезоэлементам такой конфигурации поляризованным вдоль оси. Особенности, возникающие при других направлениях поляризации, будут рассмотрены в Главе 7.

Для случая свободных колебаний мы предполагаем, что внешняя и внутренняя боковые поверхности кольца свободны от напряжения, т. е.

$$T_1 = \frac{Y}{1-\sigma^2} \left(\frac{d\xi}{dr} + \sigma \frac{\xi}{r} \right) = 0 \quad \text{при } r = a \text{ и при } r = b. \quad (4.170)$$

После применения этих граничных условий к общему решению (4.163), частотное уравнение и форму колебаний $\theta(r) = \xi(r)/\xi(a)$ можно получить следующим образом.

Система уравнений, соответствующих граничным условиям, имеет вид

$$A[ka J_0(ka) - (1-\sigma)J_1(ka)] + B[ka N_0(ka) - (1-\sigma)N_1(ka)] = 0, \quad (4.171)$$

$$A[kb J_0(kb) - (1-\sigma)J_1(kb)] + B[kb N_0(kb) - (1-\sigma)N_1(kb)] = 0. \quad (4.172)$$

Частотное уравнение для этой системы представляет собой выражение

$$\frac{ka J_0(ka) - (1 - \sigma) J_1(ka)}{ka N_0(ka) - (1 - \sigma) N_1(ka)} = \frac{kb J_0(kb) - (1 - \sigma) J_1(kb)}{kb N_0(kb) - (1 - \sigma) N_1(kb)}. \quad (4.173)$$

Из этого выражения можно найти спектр волновых чисел k_i для разных значений

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{w}{a}, \quad (4.174)$$

где $w = a - b$ — толщина кольца. Для определения представляющих наибольший интерес низших резонансных частот и форм колебаний кольца в зависимости от его относительной толщины в работе [4] была предложена оригинальная процедура. Она состоит в следующем.

Рассмотрим функцию

$$\psi(kr) = \frac{kr J_0(kr) - (1 - \sigma) J_1(kr)}{kr N_0(kr) - (1 - \sigma) N_1(kr)}. \quad (4.175)$$

График этой функции для $\sigma = 0.3$ до ее первого нуля при $kr = 2.05$ представлен на Рис. 4.10.

Можно показать, что функция $\psi(kr)$ имеет максимум при $kr = \sqrt{1 - \sigma^2}$. В непосредственной близости от этой точки $r \approx b \approx a$ и $r = (a + b)/2$, что соответствует случаю тонкого кольца. Учитывая, что для диска

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho(1 - \sigma^2)}}, \quad (4.176)$$

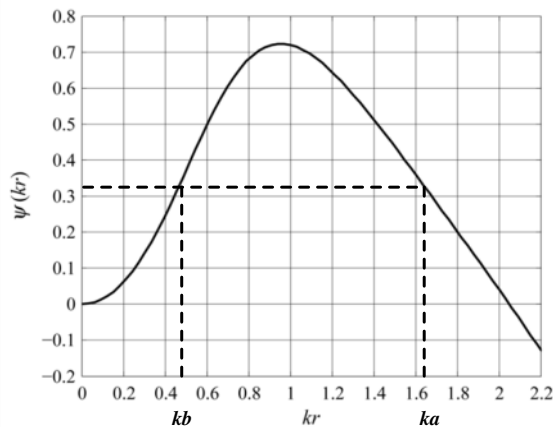


Рисунок 4.10: График функции $\psi(kr)$.

для резонансной частоты в области $(b/a) \approx 1$ получаем выражение

$$\omega_{r_t} = kr \cdot c \frac{2}{a+b} = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad (4.177)$$

что представляет собой формулу резонансной частоты тонкого кольца. Отношение значений ka и kb в точках на оси kr , соответствующих абсциссе $\psi(ka) = \psi(kb)$, определяет отношение внутреннего радиуса к внешнему b/a , и их разность равна $k(a-b) = kw$, или

$$ka \left(1 - \frac{b}{a}\right) = k \frac{w}{a}. \quad (4.178)$$

Отношение b/a известно из графика на Рис. 4.10. Таким образом, для кольца, имеющего внешний радиус a , с помощью этого отношения можно найти соответствующую резонансную частоту. Представим выражение для резонансной частоты толстого кольца в виде

$$\omega_r(b/a) = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} F(b/a) = \omega_{r_t}(r_{av}) F(b/a). \quad (4.179)$$

Здесь $\omega_{r_t}(r_{av})$ — резонансная частота тонкого кольца, имеющего радиус, равный среднему радиусу рассматриваемого толстого кольца, и $F(b/a)$ — поправочный коэффициент. В предельных случаях отношения b/a $F(1) = 1$ и $F(0) = 1.025 / \sqrt{1 - \sigma^2} = 1.07$. Последнее является следствием того, что резонансная частота при $b = 0$ должна быть равна резонансной частоте сплошного диска круглого диска согласно формуле (4.164) при $\lambda = 2.05$. График поправочного коэффициента в зависимости от отношения внутреннего и внешнего радиусов представлен на Рис. 4.11. Как видно из Рис. 4.11, резонансную частоту толстого кольца до отношения $b/a \approx 0.5$ можно рассчитать по формуле для тонкого кольца, имеющего тот же средний радиус, с точностью более 5%.

После того, как определено волновое число $k_{b/a} = \omega_r(b/a) / c$, можно найти отношение произвольных постоянных B/A из любого из уравнений (4.172) или (4.173) в виде

$$\frac{B}{A} = \frac{k_{b/a} a J_0(k_{b/a} a) - (1 - \sigma) J_1(k_{b/a} a)}{k_{b/a} a N_0(k_{b/a} a) - (1 - \sigma) N_1(k_{b/a} a)} = - \frac{k_{b/a} b J_0(k_{b/a} b) - (1 - \sigma) J_1(k_{b/a} b)}{k_{b/a} b N_0(k_{b/a} b) - (1 - \sigma) N_1(k_{b/a} b)}. \quad (4.180)$$

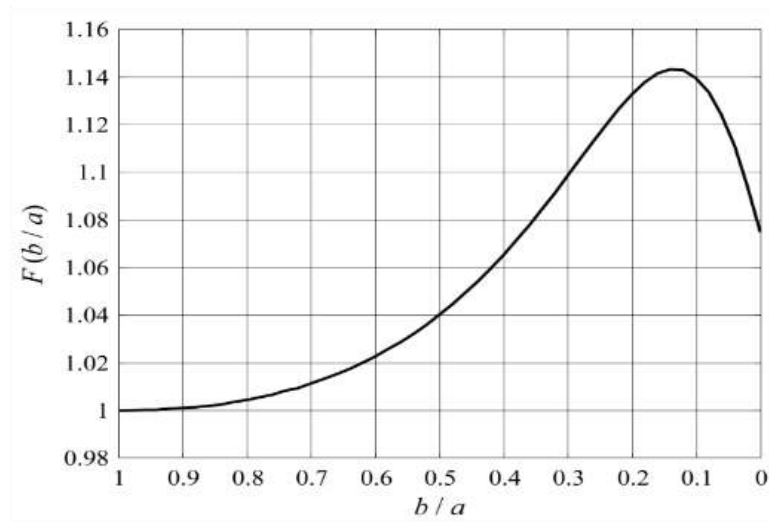


Рисунок 4.11: Поправочный коэффициент, который связывает резонансную частоту толстого кольца с частотой тонкого кольца, имеющего тот же средний радиус.

Форму колебаний можно найти, используя общее выражение (4.163) для радиального смещения, как

$$\theta(r) = \frac{\xi(r)}{\xi(a)} = \frac{J_1(k_{b/a}r) + (B/A)N_1(k_{b/a}r)}{J_1(k_{b/a}a) + (B/A)N_1(k_{b/a}a)}. \quad (4.181)$$

Формы колебаний для колец, имеющих разную толщину, представлены на Рис. 4.12.

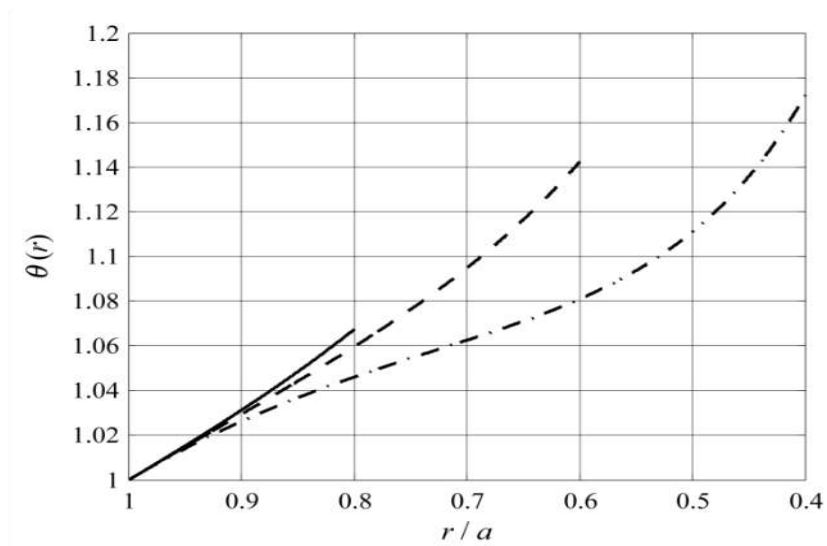


Рисунок 4.12: Формы колебаний колец, имеющих разную толщину: сплошная линия – $b/a=0.8$; штриховая линия – $b/a = 0.6$; штрихпунктирная линия – $b/a = 0.4$.

Следует отметить, что формы колебаний, определенные для изотропного кольца, справедливы не только для аналогичных пьезоэлементов, поляризованных по высоте, но остаются неизменными с большой точностью и для пьезоэлементов, поляризованных в радиальном и окружном направлениях. Поэтому их можно использовать для расчета эквивалентных параметров соответствующих преобразователей независимо от способа поляризации колец. Такой вывод и результаты расчета эквивалентных параметров при различных способах поляризации будут приведены в Разделе 7.2.2.1.

4.4.3 Осесимметричные колебания изгиба тонкой круглой пластины

При тех же допущениях, что и в случае колебаний изгиба стержня в Разделе 4.3.4, получаем

$$S_{rr} = -z \partial^2 \xi_z / \partial r^2. \quad (4.182)$$

Поскольку в то же время $S_{rr} = \partial \xi_r / \partial r$ из этого следует, что $\xi_r = -z \partial \xi_z / \partial r$ и

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\xi_r}{r} = -\frac{z}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r}. \quad (4.183)$$

В силу условия, что в тонкой пластине $T_z \approx 0$, можно использовать соотношения (4.16) для напряжений, деформаций и плотности потенциальной энергии, если изменить наименования координатных осей 1 и 2 на rr и $\varphi\varphi$, соответственно. Таким образом,

$$T_{rr} = \frac{Y}{1-\sigma^2} (S_{rr} + \sigma S_{\varphi\varphi}) = -\frac{zY}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right), \quad (4.184)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} (S_{\varphi\varphi} + \sigma S_{rr}) = -\frac{zY}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} + \sigma \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} \right), \quad (4.185)$$

$$w_{pot} = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right)^2 - 2(1-\sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} \right]. \quad (4.186)$$

Здесь $D = Yt^3 / 12(1-\sigma^2)$ — жесткость пластины при изгибе. Используя выражения для w_{pot} и w_{kin} ,

$$w_{kin} = \rho \dot{\xi}_z^2 / 2, \quad (4.187)$$

и следуя вариационному принципу, можно получить следующее уравнение колебаний

изгиба круглой пластины способом, полностью аналогичным тому, который применен в случае колебаний изгиба стержней,

$$\nabla^4 \xi_z + (\rho t a^4 / D) \ddot{\xi}_z = 0, \quad (4.188)$$

Здесь $\nabla^4 = \left[\partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r \right]^2$ — дифференциальный оператор, который следует применить к смещению ξ_z . Идеальные граничные условия на единицу длины края пластины аналогичны тем, которые выражены отношениями (4.53) - (4.55). В рассматриваемом случае они выглядят следующим образом:

для свободно опертого края

$$\xi_z(a) = 0, \quad M_r = -D \left(\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right)_{r=a} = 0; \quad (4.189)$$

для заделанного края

$$\xi_z(a) = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0; \quad (4.190)$$

для свободного края

$$M_r|_{r=a} = 0, \quad Q = \frac{\partial M_r}{\partial r} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right)_{r=a} = 0. \quad (4.191)$$

При установившихся гармонических колебаниях уравнение разделения имеет вид

$$(\nabla^4 - \lambda_i^4) \xi_z = 0, \quad (4.192)$$

где

$$\lambda_i^2 = \omega_i a^2 / \sqrt{D / \rho t}. \quad (4.193)$$

Уравнения для определения нормальных форм колебаний рассматриваемой задачи будут получены из уравнения. (4.192) в осесимметричных цилиндрических координатах в следующих формах

$$(\nabla^2 + \lambda_i^2) \theta_i(r) = \frac{d^2 \theta_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \theta_i}{dr} + \lambda_i^2 \theta_i = 0, \quad (4.194)$$

$$(\nabla^2 - \lambda_i^2) \theta_i(r) = \frac{d^2 \theta_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \theta_i}{dr} - \lambda_i^2 \theta_i = 0. \quad (4.195)$$

Решениями этих уравнений являются цилиндрические функции $J_0(\lambda_i r/a)$ и $I_0(\lambda_i r/a)$ вещественного и мнимого аргументов, соответственно. Их линейные комбинации представляют собой нормальные формы колебаний для рассматриваемой граничной задачи

$$\theta_i(r) = AJ_0(\lambda_i r/a) + BI_0(\lambda_i r/a). \quad (4.196)$$

Собственные значения λ_i^2 и соотношения между коэффициентами A и B следует найти, применив граничные условия (4.173) — (4.177). Информацию об этих значениях можно найти в работе [6]. Воспроизведем некоторые из них при $\sigma = 0.3$.

Пластина, свободно опертая по контуру:

$$\theta_i(r) = \frac{J_0(k_i r)I_0(k_i a) - J_0(k_i a)I_0(k_i r)}{I_0(k_i a) - J_0(k_i a)}, \quad (4.197)$$

$$\lambda_i = k_i a = 2.23, 5.45, 8.61, \quad (4.198)$$

$$\omega_1 = (2.23/a)^2 \sqrt{D/\rho t}. \quad (4.199)$$

На поверхности пластины есть i узловых окружностей, на которых $\theta_i(r) = 0$. При $i = 1$ узловая окружность находится на контуре ($r_1 = a$), при $i = 2$ $r_1 = a$ и $r_2 = 0.44a$.

Пластина со свободным контуром:

$$\theta_i(r) = \frac{I_1(k_i a)J_0(k_i r) - J_1(k_i a)I_0(k_i r)}{I_1(k_i a) - J_1(k_i a)}. \quad (4.200)$$

При $\lambda_0 = 0$ существует нормальная форма колебаний $\theta_0(r) = 1$. Это означает, что возможно движение пластины без деформации. В остальном $\lambda_i = 3.01, 6.2, 9.3, \dots$ Радиусы узловых окружностей: при $i = 1$ $r_1 = 0.68a$; при $i = 2$ $r_1 = 0.84a$ и $r_2 = 0.39a$.

Пластина с заделанным контуром:

В этом случае выражение для нормальных форм колебаний такое же, как по формуле (4.197), но собственные значения равны

$$\lambda_i = k_i a = 3.2, 6.3, 9.4, \dots, \quad (4.201)$$

$$\omega_1 = (10.2/a^2)\sqrt{D/\rho t}, \quad \omega_2 = (39.6/a^2)\sqrt{D/\rho t}. \quad (4.202)$$

Радиусы узловых окружностей при $i = 2$ равны $r_1 = a$ и $r_2 = 0.38a$.

4.4.3.1 Поправки к плотности энергий для пластин, обусловленные конечной толщиной

С увеличением относительной толщины t/a круглых пластин значения напряжений сдвига, а также инерция вращения поперечных сечений при изгибе могут стать значительными, и может потребоваться внести поправки к энергиям, определяемым формулами (4.30) и (4.32), аналогичные тем, что были сделаны для стержней в Разделе 4.3.5. С этой целью выражения для плотностей энергий, сформулированные в Разделе 4.3 для элемента объема в прямоугольных координатах, необходимо записать для элемента объема в осесимметричных полярных координатах.

Дополнительная кинетическая энергия на единицу объема вдоль радиуса пластины связана с поворотом поперечных сечений под углом $\alpha = (\partial \xi_z / \partial r)$ по отношению к оси z на Рис. 4.9. В соответствии с выражением (4.33)

$$\Delta w_{kin} = \frac{1}{2} \rho J_2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \rho J_2 \left(\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r \partial t} \right)^2, \quad (4.203)$$

где

$$J_2 = rd\varphi t^3 / 12. \quad (4.204)$$

Здесь J_2 это момент инерции сечения относительно оси 2 (φ) на Рис. 4.9.

Другая поправка связана с дополнительными смещениями, сопровождающими деформации сдвига, которые возникают в пластине при изгибе. Этим эффектом можно пренебречь при малых t/a . Если рассматривать баланс сил, действующих на заштрихованный элемент объема на Рис. 4.5 (а), в проекции на ось 1, то напряжения сдвига $T_{13} = T_5$ в соответствии с формулой (4.34) получим в виде

$$T_5 = \int_{t/2}^z \frac{\partial T_1}{\partial r} dz = \frac{Y}{2(1-\sigma^2)} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial^3 \xi_z}{\partial r^3}. \quad (4.205)$$

Поперечное сечение пластины, перпендикулярное радиусу, искажается в результате сдвига. Деформации сдвига, равные углу наклона элемента сечения относительно исходной плоскости (см. Рис. 4.5 (b))

$$\psi_s = S_5 = T_5 / \mu, \quad (4.206)$$

имеют максимальное значение на нейтральной поверхности при $z = 0$

$$\psi_s(0, r) = S_5 = T_5 / \mu = \frac{Yt^2}{8\mu(1-\sigma^2)} \frac{\partial^3 \xi_z}{\partial r^3}. \quad (4.207)$$

Дополнительное смещение нейтральной поверхности ξ_{ad} соответствует этому углу поворота. Его можно определить с помощью соотношения $\psi_s = -(\partial \xi_{ad} / \partial r)$. Таким образом, полное отклонение нейтральной плоскости становится $\xi = \xi_z + \xi_{ad}$. Так как в этом приближении $T_5 \neq 0$, то к значению w_{pot} , выраженному формулой (4.186), необходимо применить поправку. Используя выражение (4.205), получаем

$$\Delta W_{pot} = -\frac{rd\varphi}{2\mu} \int_{-t/2}^{t/2} T_5^2 dz = -\frac{rd\varphi Y^2 t^5}{240\mu(1-\sigma^2)^2} \left(\frac{\partial^3 \xi_z}{\partial r^3} \right)^2. \quad (4.208)$$

Знак минус объясняется тем, что значение потенциальной энергии было несколько преувеличено. Увеличение смещения при неизменном воздействии свидетельствует об уменьшении жесткости и приводит к уменьшению потенциальной энергии.

В результате сдвига происходит искажение поперечного сечения, что связано с дополнительными смещениями в радиальном направлении;

$$\xi_{r,s}(z, r) = \psi_s(z, r)z. \quad (4.209)$$

Соответствующие деформации в этом направлении равны

$$S_{r,s}(z, r) = d\xi_{r,s}(z, r) / dr. \quad (4.210)$$

Воспользовавшись выражениями (4.206) и (4.205), получим

$$\xi_{r,s}(z, r) = \psi_s(z, r)z = \xi_o \frac{Y}{2(1-\sigma^2)\mu} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) z \frac{d^3 \theta}{dr^3} \quad (4.211)$$

и, следовательно,

$$S_{r,s}(z, r) = \frac{d\xi_{r,s}}{dr} = \xi_o \frac{Y}{2(1-\sigma^2)\mu} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) z \frac{d^4 \theta}{dr^4}. \quad (4.212)$$

Из этого выражения следует, что $S_{r,s}(z = \pm t/2) = S_{r,s}(0) = 0$ и максимальное значение деформации имеют при $z \approx \pm 0.3t$

Поправки к плотностям энергий не влияют на формы колебаний. Их надо учитывать

при расчете резонансных частот и эквивалентных параметров механических систем преобразователей, в которых применены круглые пластины. Дополнительные радиальные деформации, выраженные формулой (4.212), приводят к изменению электромеханического преобразования. Все эти эффекты применительно к соответствующим типам преобразователей будут рассмотрены в Части III.

4.4.4 Колебания круглых колец в их плоскости.

Оссимметричные радиальные колебания тонкого круглого кольца как системы с одной степенью свободы были описаны в Разделе 2.3. Здесь рассмотрим колебания общего типа в плоскости кольца. Геометрия тонкого круглого кольца представлена на Рис. 4.13.

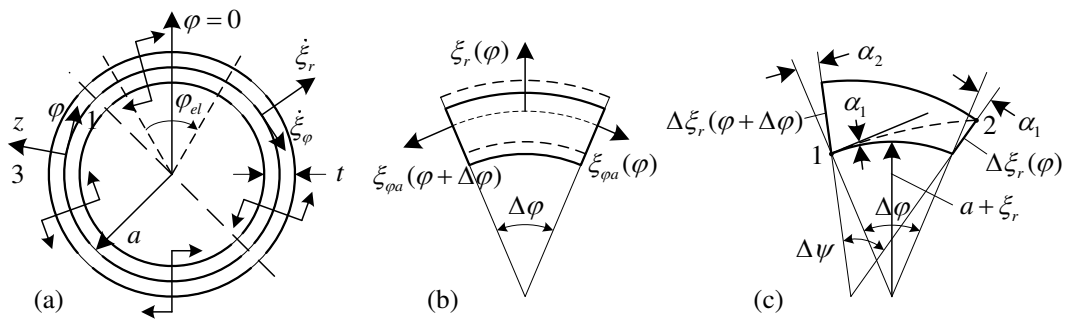


Рисунок 4.13: (а) Геометрия кольца при деформации, показано распределение моментов, которое может произвести деформации изгиба кольца в низшей форме; (б) радиальное смещение сегмента кольца, вызывающее его удлинение; (с) повороты поперечных сечений сегмента, вызывающие изменение кривизны.

Будем считать, что толщина (t) и высота (h) кольца малы по сравнению с радиусом (a) средней поверхности. Поскольку поверхности кольца свободны от напряжений, можно предположить, что в объеме кольца отсутствуют все напряжения кроме продольных напряжений вдоль окружности. В общем случае поперечные сечения колеблющегося кольца могут смещаться вдоль окружности и в радиальном направлении. Это может вызвать как продольные деформации в кольце, так и изгиб его средней поверхности. Смещение поперечного сечения в радиальном направлении обозначим $\xi_r(\varphi)$. Поскольку предположено, что кольцо тонкое, применима элементарная теория изгиба, в соответствии с которой при изгибе поперечные сечения кольца остаются неискаженными и

перпендикулярными к нейтральной поверхности при повороте на некоторый угол. Смещения в направлении нормали к поперечному сечению будут обозначаться $\xi_\varphi(\varphi)$. Их можно представить в виде

$$\xi_\varphi(r, \varphi) = \xi_{\varphi a}(\varphi) + \xi_{\varphi b}(r, \varphi), \quad (4.213)$$

где $\xi_{\varphi a}$ — усредненное по поперечному сечению смещение, а $\xi_{\varphi b}$ — смещение, обусловленное поворотом поперечного сечения при изгибе средней (нейтральной) поверхности. Это смещение изменяется по толщине, и $\xi_{\varphi b}(a, \varphi) = 0$. На Рис. 4.13 (b) представлены смещения, происходящие в малом элементе кольца.

Выражение для деформаций в направлении вдоль окружности в полярных координатах имеет вид

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \xi_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\xi_r}{a} = \frac{\partial \xi_{\varphi a}}{a \partial \varphi} + \frac{\xi_r}{a} + \frac{\partial \xi_{\varphi b}}{a \partial \varphi}, \quad (4.214)$$

где учтено, что $1/r \approx 1/a$ при $t \ll a$.

Сумма первых двух членов в выражении (4.214) представляет собой относительное удлинение элементов кольца. Обозначим его S_φ . В нем член ξ_r/a обусловлен изменением среднего радиуса при смещении в радиальном направлении (смещение ξ_r положительно, если оно приводит к растяжению средней окружности, т. е. происходит в направлении от центра). Член $\partial \xi_{\varphi a} / a \partial \varphi$ представляет собой продольную деформацию элемента кольца как стержня.

Последнее слагаемое, $\partial \xi_{\varphi b} / a \partial \varphi$, обусловлено изменением кривизны элемента дуги кольца, как показано на Рис. 4.13 (c). Чтобы определить его величину рассмотрим переход элемента дуги средней (нейтральной при изгибе) поверхности в искривленное состояние как результат двух последовательных смещений в радиальном направлении концов дуги, имеющих координаты φ и $\varphi + \Delta\varphi$, а именно $\Delta \xi_r(\varphi)$ и $\Delta \xi_r(\varphi + \Delta\varphi)$ (смещение в направлении вдоль окружности не приводит к изменению кривизны). При смещении $\Delta \xi_r(\varphi)$ дуга поворачивается вокруг точки $\varphi + \Delta\varphi$ на угол $\alpha_1 = \Delta \xi_r(\varphi) / (a + \xi_r) \Delta\varphi \approx \Delta \xi_r(\varphi) / a \Delta\varphi$ в положительном (против часовой стрелки) направлении. Это угол, при котором нормаль к дуге поворачивается в точке φ . При смещении $\Delta \xi_r(\varphi + \Delta\varphi)$ дуга поворачивается относительно положения φ на угол

$\alpha_2 = \Delta\xi_r(\varphi + \Delta\varphi) / a\Delta\varphi$ в отрицательном (по часовой стрелке) направлении, и нормаль к дуге в точке $\varphi + \Delta\varphi$ поворачивается под этим же углом. Таким образом, изменение угла между нормальными к изогнутому элементу дуги в крайних точках, другими словами, изменение угла $\Delta\psi$ между новыми радиусами кривизны R в этих точках по сравнению с углом $\Delta\varphi$, имеет величину

$$\Delta\psi - \Delta\varphi = \alpha_1 - \alpha_2 = - \left[\frac{\Delta\xi_r(\varphi + \Delta\varphi)}{a\Delta\varphi} - \frac{\Delta\xi_r(\varphi)}{a\Delta\varphi} \right] = - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} \Delta\varphi. \quad (4.215)$$

Поскольку длина элемента дуги нейтральной поверхности при изгибе не изменяется, $R\Delta\psi = (a + \xi_r)\Delta\varphi$, и кривизна элемента дуги после изгиба будет

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\psi}{(a + \xi_r)\Delta\varphi} = \frac{1}{a + \xi_r} \left(1 - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} \right) \approx \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right). \quad (4.216)$$

При преобразованиях в выражении (4.216) произведена замена $1/(a + \xi_r) \approx (a - \xi_r)/a^2$ и опущен член второго порядка $(\xi_r/a^2)(\partial^2 \xi_r/\partial \varphi^2)$. Из выражения (4.216) определим изменение кривизны элемента дуги при изгибе как

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{a} = \chi_\varphi = - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right). \quad (4.217)$$

Деформацию слоя радиуса r при изменении кривизны определим, сравнив его длины l_2 и l_1 , после и до изгиба, соответственно. Это проиллюстрировано на Рис. 4.14. Обозначим расстояние от рассматриваемого слоя до средней (нейтральной) поверхности как $r - a = z$. Это расстояние не изменяется при изгибе.

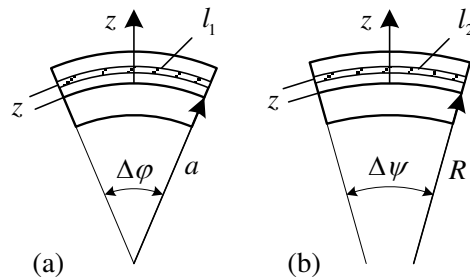


Рисунок 4.14: Сегмент кольца а) до и б) после изгиба.

Длина дуги средней окружности также не меняется, из чего следует

$$R \cdot \Delta\psi = a \cdot \Delta\varphi. \quad (4.218)$$

Таким образом, деформация слоя при изгибе равна

$$S_{\varphi b}(r) = \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{(R+z)\Delta\psi - (a+z)\Delta\varphi}{(a+z)\Delta\varphi}. \quad (4.219)$$

После некоторых преобразований выражения (4.219) с учетом соотношения (4.218), для тонких колец ($t \ll a$, а значит $a+z \approx a$ в знаменателе) получим

$$S_{\varphi b} = -\frac{r-a}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right). \quad (4.220)$$

Таким образом, известны обе составляющие деформаций (продольной и изгибной) в выражении (4.214), где продольная деформация представлена в виде

$$S_{\varphi} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \xi_{\varphi}}{\partial \varphi} + \xi_r \right) \quad (4.221)$$

Эти деформации можно рассматривать как независимые. Как будет показано далее, собственные частоты колебаний, связанные с этими двумя видами деформации, сильно различаются. Кроме того, при использовании в конструкциях преобразователей для этих двух видов колебаний требуются разные условия возбуждения. Поэтому в качестве приближения можно рассматривать эти колебания по отдельности, либо пренебрегая энергией изгибной деформации, либо рассматривая изгиб, происходящий без растяжения средней поверхности кольца.

После того как известны выражения для деформаций в колеблющемся кольце, потенциальную энергию элемента объема кольца получим в виде

$$\begin{aligned} w_{pot} &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} Y(S_{\varphi}^2 + S_{\varphi b}^2) d\tilde{V} = \frac{1}{2} Y a h \int_{-t/2}^{t/2} (S_{\varphi}^2 + S_{\varphi b}^2) dz d\varphi = \\ &= \frac{Y t h}{2 a^2} \left[\left(\frac{\partial \xi_{\varphi}}{\partial \varphi} + \xi_r \right)^2 + \frac{t^2}{12 a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.222)$$

Здесь \tilde{V} обозначает элемент объема кольца ($\tilde{V} = a h \cdot dz d\varphi$) и принята система координат, которая представлена на Рис. 4.13, и в которой $z = r - a$. Первый член в правой части соответствует энергии продольных колебаний. Они имеют место при условии, что

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r = 0. \quad (4.223)$$

Второй член соответствует энергии изгибных колебаний кольца, которые происходят при условии, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \xi_r = 0 \quad (4.224)$$

Дифференциальные уравнения продольных колебаний кольца по окружности можно вывести как уравнения Эйлера (4.2) при условии (4.200), используя выражения для потенциальной и кинетической энергии на элемент объема кольца

$$w_{pot} = \frac{Yth}{2a^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \xi_r \right)^2, \quad (4.225)$$

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho (\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_\varphi^2) d\tilde{V} = \frac{1}{2} \rho S_{cs} \left[\dot{\xi}_\varphi^2 + \left(\partial \dot{\xi}_\varphi / \partial \varphi \right)^2 \right]. \quad (4.226)$$

Таким образом, получим уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w_{kin}}{\partial \dot{\xi}_r} \right) + \frac{\partial w_{pot}}{\partial \xi_r} = \rho S_{cs} \ddot{\xi}_r + \frac{YS_{cs}}{a^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \xi_r \right) = 0, \quad (4.227)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w_{kin}}{\partial \dot{\xi}_\varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w_{pot}}{\partial \xi'_\varphi} \right) = \rho S_{c.s} \ddot{\xi}_\varphi + \frac{YS_{c.s}}{a^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \xi_r \right) = 0. \quad (4.228)$$

Продифференцировав первое уравнение относительно φ и добавив его ко второму, мы обнаружим, что в этом случае

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \xi_r = 0. \quad (4.229)$$

При этом условии уравнение для ξ_r будет

$$\ddot{\xi}_r - \frac{Y}{\rho a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} - \xi_r \right) = 0. \quad (4.230)$$

Граничное условие для уравнения (4.230) — 2π периодичность функции $\xi_r(\varphi)$.

Вывод уравнения изгибных колебаний кольца и анализ решений как для продольных, так и для изгибных колебаний колец легче выполнить в обобщенных координатах. Это будет сделано в Разделах 4.5.2 и 4.5.4.

4.5 Уравнения колебаний в обобщенных координатах

4.5.1 Общее описание решения задач колебаний в обобщенных координатах

Решение задач колебаний механических систем преобразователей в обобщенных координатах во многих случаях оказывается предпочтительным. Краткое описание такого подхода приведено в Разделе 1.6. Уравнения движения в этом случае имеют вид уравнений Эйлера-Лагранжа (4.1). Процедура решения задач колебаний с использованием обобщенных координат может быть сформулирована следующим образом.

Предположим, что $\theta_i(\mathbf{r})$ — это некоторая полная система функций, которые определены внутри колеблющегося тела и удовлетворяют граничным условиям. Будем называть ее опорной системой функций. Смещения в колеблющемся теле можно представить в виде разложения в ряд

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \theta_i(\mathbf{r}) \quad (4.231)$$

с неизвестными коэффициентами $\xi_i(t)$. Поскольку распределение смещений и, следовательно, состояние механической системы становится вполне определенным, если найдены значения коэффициентов ξ_i , их можно рассматривать как обобщенные координаты. Для определения введенных таким образом обобщенных координат воспользуемся вариационным принципом и вытекающими из него уравнениями Эйлера-Лагранжа (см. Раздел 4.1),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial W_e}{\partial \xi_i} = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

В общем случае выражения для кинетической и потенциальной энергии колеблющегося тела можно представить следующим образом:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M_{il} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_l, \quad (4.232)$$

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} K_{il} \xi_i \xi_l, \quad (4.233)$$

где

$$M_{il} = \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_l} \quad \text{и} \quad K_{il} = \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_l} \quad (4.234)$$

имеют размерности массы и жесткости.

Так, например, с учетом соотношений (4.38) и (4.39) выражения для энергий механических систем при одномерных продольных и крутильных колебаниях получим в виде

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} m_{\Delta} \dot{\xi}^2 d\tilde{V}, \quad W_{pot} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} K_{\Delta} (\xi')^2 d\tilde{V}. \quad (4.235)$$

После подстановки смещения $\xi(x, t)$ из уравнения (4.231)

$$M_{il} = \int_{\tilde{V}} m_{\Delta} \theta_i(x) \theta_l(x) d\tilde{V}, \quad K_{il} = \int_{\tilde{V}} K_{\Delta} \theta'_i(x) \theta'_l(x) d\tilde{V}. \quad (4.236)$$

Член W_e в уравнениях (4.1) представляет собой суммарную энергию внешних воздействий, которая включает в себя энергию, обусловленную действием внешнего механического источника W_m и реакцией механической нагрузки W_L , в которую поступает часть энергии. Поскольку энергия W_m втекает в тело, а W_L вытекает из него (см. Раздел 1.6), $W_e = W_m - W_L$. Если рассматривать внешние воздействия в самом общем случае как силы $f_m(\mathbf{r}_{\Sigma})$ и $f_L(\mathbf{r}_{\Sigma})$, распределенные по поверхности тела, то $W_e = \xi [f_m(\mathbf{r}_{\Sigma}) - f_L(\mathbf{r}_{\Sigma})]$. Применяв разложение (4.231) для $\xi(x, t)$, получим

$$W_e = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \int_{\Sigma} [f_m(\mathbf{r}_{\Sigma}) - f_L(\mathbf{r}_{\Sigma})] \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (f_{mi} - f_{Li}), \quad (4.237)$$

где f_{mi} и f_{Li} имеют значения эквивалентных сил (см. уравнение (4.82)), которые соответствуют формам колебаний θ_i . При переходе к комплексной форме и введении распределенного импеданса нагрузки $z_L(\mathbf{r}_{\Sigma})$, получим выражение для эквивалентной реакции нагрузки в виде

$$F_L(\mathbf{r}_{\Sigma}) = z_L(\mathbf{r}_{\Sigma}) \bar{\xi} = z_L(\mathbf{r}_{\Sigma}) \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\xi}_i \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}), \quad (4.238)$$

где $\bar{\xi}$ — комплексная величина, соответствующая мгновенному значению $\dot{\xi}$ в формуле (4.231). Из уравнения (4.237) найдем, что

$$\bar{W}_m = \sum_{i=1}^{\infty} F_{mi} \bar{\xi}_i^*, \quad F_{mi} = \int_{\Sigma} F_m(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma. \quad (4.239)$$

$$\bar{W}_L = \sum_{i=1}^{\infty} F_{Li} \bar{\xi}_i^*, \quad F_{Li} = \int_{\Sigma} F_L(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma. \quad (4.240)$$

Подстановка выражения (4.238) для $F_L(\mathbf{r}_{\Sigma})$ в интеграл (4.240) приводит к

$$F_{Li} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_n \int_{\Sigma} z_L(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta_n(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = Z_{Li} \bar{\xi}_i, \quad (4.241)$$

где

$$Z_{Li} = Z_{Lii} + \sum_{n \neq i} z_{Lni} (\bar{\xi}_n / \bar{\xi}_i) \quad (4.242)$$

это эквивалентное сопротивление нагрузки; Z_{Lii} — собственное сопротивление нагрузки для формы колебаний θ_i , z_{Lni} — взаимное сопротивление, соответствующее взаимодействию между формами колебаний θ_i и θ_n . Поток энергии (4.240), который течет в нагрузку, теперь можно представить в виде

$$\bar{W}_L = \sum_{i=1}^{\infty} Z_{Li} \left| \bar{\xi}_i \right|^2. \quad (4.243)$$

Рассмотрим несколько примеров внешних воздействий.

Действие сосредоточенной силы $F_m(\mathbf{r}_x) = T(\mathbf{r}_x) d\Sigma_x$ и нагрузки $Z_L(\mathbf{r}_x) = z_L(\mathbf{r}_x) d\Sigma_x$, где $T(\mathbf{r}_x)$ и $z_L(\mathbf{r}_x)$ — механическое напряжение и плотность нагрузки, которые равны нулю за пределами элемента площади $d\Sigma_x$. В этом случае

$$Z_{Lni} = \int_{\Sigma} z_L(\mathbf{r}_x) \theta_i(\mathbf{r}_x) \theta_n(\mathbf{r}_x) d\Sigma = z_L(\mathbf{r}_x) \theta_i(\mathbf{r}_x) \theta_n(\mathbf{r}_x) d\Sigma_x = Z_L(\mathbf{r}_x) \theta_i(\mathbf{r}_x) \theta_n(\mathbf{r}_x), \quad (4.244)$$

$$F_{mi} = \int_{\Sigma} T(\mathbf{r}_x) \theta_i(\mathbf{r}_x) d\Sigma = T(\mathbf{r}_x) \theta_i(\mathbf{r}_x) d\Sigma_x = F_m(\mathbf{r}_x) \theta_i(\mathbf{r}_x). \quad (4.245)$$

Если $\theta_i(\mathbf{r}_x) = 0$, то $F_{mi} = 0$ и $Z_{Li} = 0$, т. е. воздействия, прикладываемые к точкам на узловой линии, не влияют на форму колебаний $\theta_i(x)$. Следовательно, элементы крепления механической системы предпочтительно размещать ближе к узловым линиям.

Действие силы, распределенной равномерно с плотностью ΔF_m . Эквивалентная действующая сила

$$F_{mi} = \int_{\Sigma} \Delta F_m \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = \Delta F_m \int_{\Sigma} \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = \Delta F_m S_{avi}, \quad (4.246)$$

где

$$S_{avi} = \int_{\Sigma} \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma \quad (4.247)$$

это средняя площадь поверхности, колеблющейся в форме колебаний $\theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma})$. В частности, воздействие такого рода производит акустическое поле, если размеры преобразователя значительно меньше длины волны звука. В этом случае звуковое давление $P(t) \approx P_o$, где P_o — акустическое давление в свободном поле и $F_{mi} \approx P_o S_{avi}$. Объемная скорость $U_{\bar{v}}$, создаваемая колебаниями поверхности с распределением смещения $\bar{\xi}(\mathbf{r}) = \bar{\xi}_0 \theta_i(\mathbf{r})$, равна $U_{\bar{v}} = \bar{\xi}_0 S_{avi}$. Очевидно, что $S_{avi} \leq S_r$ (S_r — площадь колеблющейся поверхности), где равенство достигается при $\theta_i(\mathbf{r})=1$. Если некоторые участки поверхности колеблются в противофазе, значения S_{av} могут значительно уменьшиться и даже могут упасть до нуля. Таким образом, при поперечных колебаниях стержня (прямоугольной пластины) со свободно опертыми концами $\theta_i(x) = \sin(i\pi x/l)$, $S_{avi} = 2S_r/i\pi$ при нечетном i , и $S_{avi} = 0$ при четном i . Если $S_{avi} = 0$, соответствующая форма колебаний не может быть возбуждена при равномерном воздействии на поверхность (в этом случае $F_{mi} = 0$), и поверхность, колеблющаяся в такой форме, не производит объемной скорости ($U_{\bar{v}} = 0$) и не может служить излучающей. По этой причине нецелесообразно использовать механические системы с небольшими значениями средней площади для механоакустического преобразования, особенно если они имеют малый волновой размер. Величину средней площади можно значительно увеличить путем экранирования частей поверхности, колеблющихся в противофазе.

При необходимости возбудить колебания единственной формы распределение силы должно быть ортогонально всем остальным формам колебаний, как это следует из формулы (4.239). Действительно, если распределение действующей силы воспроизводит распределение смещений при требуемой форме колебаний $\theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma})$, т.е. $F_m(\mathbf{r}_{\Sigma}) = \Delta F_m \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma})$, где ΔF_m имеет постоянную величину, то из (4.239) следует

$$F_{mi} = \int_{\Sigma} \Delta F_m \theta_i^2(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = \Delta F_m S_{eff i} \quad (4.248)$$

и $F_{mn} = 0$ при $n \neq i$ из-за ортогональности форм колебаний θ_i и θ_n . Величина

$$S_{eff i} = \int_{\Sigma} \theta_i^2(\mathbf{r}) d\Sigma \quad (4.249)$$

это эффективной площадь поверхности при форме колебаний θ_i .

Таким образом, значения средней $S_{av i}$ и эффективной $S_{eff i}$ площадей поверхности, определяемых по формулам (4.247) и (4.249), а также расположение узловых линий форм колебаний являются важными свойствами механической системы преобразователя, наряду с другими эквивалентными параметрами.

После подстановки выражений (4.233) и (4.237) для энергий (на этом этапе без приложения механической нагрузки, т. е. при $f_L = 0$), система уравнений Эйлера (4.1) становится

$$M_{ii}\ddot{\xi}_i + K_{ii}\xi_i + \sum_{n \neq i}^{\infty} (M_{ni}\ddot{\xi}_n + K_{ni}\xi_n) = f_{mi}, \quad (i=1,2,\dots). \quad (4.250)$$

Если механическая система однородна (в выражениях (4.236) m_{Δ} и K_{Δ} постоянные) и в качестве опорных функций θ_i используются нормальные формы колебаний, то из ортогональности нормальных форм колебаний следует, что $M_{ni} = 0$ и $K_{ni} = 0$, и уравнения (4.250) становятся независимыми. В этом случае обобщенные координаты ξ_i называются нормальными координатами и уравнения (4.250) совпадают с уравнениями (4.85), которые были получены в результате решения задачи колебаний для механической системы методом разложения по нормальным формам колебаний. Рассматривая потери энергии, мы привели уравнения (4.85) к форме уравнения (4.86). Аналогичным образом мы будем учитывать потери энергии в уравнении (4.250), одновременно переходя на общий случай, в котором W_e определяется отношением (4.238). Тогда уравнения (4.250) становятся

$$M_{ii}\ddot{\xi}_i + r_i\dot{\xi}_i + K_{ii}\xi_i + \sum_{n \neq i}^{\infty} (M_{ni}\ddot{\xi}_n + K_{ni}\xi_n) = f_{mi} - f_{Li} \quad (i=1,2,\dots). \quad (4.251)$$

При гармонических колебаниях уравнения (4.251) представляют собой бесконечную систему алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно обобщенных координат ξ_i . Переходя в комплексную форму и принимая во внимание выражения (4.241) и (4.242) для F_{Li} и Z_{Li} , получим

$$\begin{aligned} & (j\omega M_{ii} + K_{ii} / j\omega + r_i)U_i + \sum_{n \neq i}^{\infty} (j\omega M_{ni} + K_{ni} / j\omega)U_n + \\ & + \left[Z_{Lii} + \sum_{n \neq i}^{\infty} z_{Lni}(U_n / U_i) \right] U_i = F_{mi}, \quad (i=1,2,3,\dots). \end{aligned} \quad (4.252)$$

Удобно для краткости обозначать

$$j\omega M_{ii} + K_{ii} / j\omega + r_i = Z_{mii}, \quad j\omega M_{ni} + K_{ni} / j\omega = z_{mni},$$

$$Z_{mii} + \sum_{n \neq i}^{\infty} z_{mni} (U_n / U_i) = Z_{mi}, \quad (4.253)$$

где Z_{mii} — собственный механический импеданс формы колебаний θ_i , z_{mni} — взаимный механический импеданс, характеризующий взаимодействие между формами колебаний θ_i и θ_n . Используя эти обозначения, уравнения (4.252) можно окончательно представить в виде

$$(Z_{mii} + Z_{Lii})U_i + \sum_{n \neq i}^{\infty} (z_{mni} + z_{Lni})U_n = F_{mi}. \quad (4.254)$$

В случае если эквивалентные силы F_{mi} имеют электромеханическое происхождение (например, силы, действующие на поверхность тела со стороны электродинамических, электромагнитных или других электромеханических генераторов), уравнения (4.254) описывают колебания механической системы соответствующих преобразователей в обобщенных координатах (скоростях). Процедура решения таких систем уравнений хорошо известна (например, см. работу [5]). Таким образом, задача, которую необходимо решить в каждом конкретном случае, заключается в определении импедансов, участвующих в уравнениях.

Решение бесконечных систем уравнений можно получить методом редукции, как показано в работе [5]. Но ту же задачу можно решить иначе, если заранее уменьшить число степеней свободы для рассматриваемой механической системы и представить смещения в виде конечного ряда

$$\xi_N(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i \theta_i(x). \quad (4.255)$$

После получения приближенного решения $\xi_N(x)$, его можно уточнить путем постепенного увеличения числа уравнений N . Такая методика решения задачи колебаний известна как метод Рица.

За исключением частного случая нормальных координат, уравнения системы (4.224) связаны. Степень связанности уравнений, трудности вычислений при решении задачи

колебаний и ясность физической интерпретации результатов в значительной степени зависят от выбора опорных функций. Решение системы уравнений достаточно просто, если в качестве опорных функций выбраны нормальные формы задачи колебаний для реального тела. Иногда оказывается возможным угадать нормальную форму колебаний на основе симметрии механической системы. Но в целом задача определения нормальных форм колебаний по сложности эквивалентна самой задаче определения колебаний механической системы.

Другой, более приемлемый для практического анализа реальных механических систем, способ состоит в том, чтобы в качестве опорных применить нормальные формы колебаний несущественно отличающейся от реальной идеализированной колебательной системы, для которой эти формы известны.

Оба упомянутых подхода проиллюстрируем с помощью примеров. В первую очередь рассмотрим примеры применения нормальных форм колебаний реальной механической системы.

4.5.2 Продольные колебания полных колец

В Разделе 2.3 рассмотрен преобразователь с механической системой в форме тонкого пьезокерамического кольца при условии равномерного возбуждения и равномерной акустической нагрузки, как типичный пример преобразователя с одной механической степенью свободы. Если отказаться от этих условий, то соображения симметрии отпадают, и кольцо может совершать продольные колебания общего вида со смещениями вдоль окружности и в радиальном направлении, как показано на Рис. 4.15. Общие выражения для смещений и деформации при продольных колебаниях кольца (4.221) представлены в Разделе 4.4.4.

Потенциальная и кинетическая энергии кольца, согласно выражениям (4.225) и (4.226),

$$W_{pot} = \frac{Yth}{2a^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \xi_r \right)^2 d\varphi, \quad (4.256)$$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \rho th a \int_0^{2\pi} \left[\dot{\xi}_\varphi^2 + \left(\partial \dot{\xi}_\varphi / \partial \varphi \right)^2 \right] d\varphi. \quad (4.257)$$

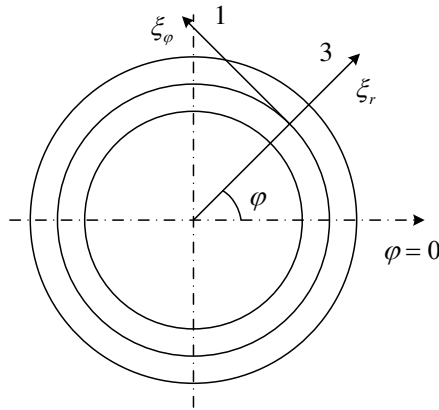


Рисунок 4.15: Продольные колебания общего типа в плоскости кольца: ξ_r и ξ_φ - смещения в радиальном направлении и вдоль окружности.

Принимая во внимание 2π периодичность функции $\xi_r(\varphi)$, произвольное распределение радиального смещения на поверхности кольца можно представить в виде ряда

$$\xi_r(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \cos i\varphi. \quad (4.258)$$

В соответствии с уравнением (4.223)

$$\xi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} i\xi_i \sin i\varphi. \quad (4.259)$$

После подстановки функций $\xi_r(\varphi)$ и $\xi_\varphi(\varphi)$ в выражения для энергий (4.256) и (4.257) получим:

$$\begin{aligned} W_{kin} &= \frac{\rho th a}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \dot{\xi}_i \cos i\varphi \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i \dot{\xi}_i \sin i\varphi \right)^2 \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} M \left[\dot{\xi}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i^2 (1+i^2) \right] = \frac{1}{2} M_{eqv0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} M_{eqvi} \dot{\xi}_i^2, \end{aligned} \quad (4.260)$$

где $M = 2\pi a t h \rho$ — масса кольца и M_{eqvi} — эквивалентная масса, соответствующая форме колебаний θ_i .

$$\begin{aligned} W_{pot} &= \frac{Y t h}{2a} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (1+i^2) \cos i\varphi \right]^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi t h Y}{a} \left[\xi_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 (1+i^2) \right] = \frac{1}{2} K_{eqv0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} K_{eqvi} \xi_i^2. \end{aligned} \quad (4.261)$$

Здесь K_{eqvi} — эквивалентная жесткость, которая соответствует форме колебаний θ_i . При

вычислении интегралов использовалась ортогональность функций $\cos i\varphi$ и $\sin i\varphi$ в интервале от 0 до 2π . Из уравнений (4.260) и (4.261) следует, что

$$M_{eqv0} = M, \quad M_{eqvi} = M(1+i^2)/2 \quad (4.262)$$

и

$$K_{eqv0} = \frac{2\pi thY}{a}, \quad K_{eqvi} = \frac{\pi thY}{a}(1+i^2)^2. \quad (4.263)$$

После подстановки параметров по формулам (4.262) и (4.263) в общее выражение для резонансных частот

$$\omega_i = \sqrt{K_{eqvi} / M_{eqvi}}, \quad (4.264)$$

получим формулу

$$\omega_i = \omega_0 \sqrt{1+i^2} \quad (4.265)$$

для резонансных частот продольных колебаний разного порядка, где $\omega_0 = (1/a)\sqrt{Y/\rho}$ — собственная частота нулевого порядка (при $i=0$), или пульсирующей формы колебаний. При продольных колебаниях различного порядка смещения поперечных сечений представляют собой вектор

$$\xi = \sqrt{\xi_{ri}^2 + \xi_{\varphi i}^2} \cdot e^{j\gamma} = \xi_i \sqrt{\cos^2 i\varphi + i^2 \sin^2 i\varphi} \cdot e^{j\gamma}, \quad (4.266)$$

где $\gamma = \arctan(i \tan i\varphi)$. При изменении угла φ вектор ξ поворачивается на угол γ относительно оси $\varphi=0$. Поперечные сечения кольца, которые не движутся в радиальном направлении, имеют максимальное смещение по касательной к окружности. По мере увеличения порядка формы колебаний собственные частоты становятся кратными i , а смещения все более касательными к окружности ($|\xi_{\varphi i}| = i|\xi_{ri}|$).

Величину механического напряжения в кольце с помощью выражения (4.221) получим в виде

$$T_\varphi = YS_\varphi = \frac{Y}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (1+i^2) \cos i\varphi. \quad (4.267)$$

4.5.3 Продольные колебания неполных колец

Рассмотрим продольные колебания неполного кольца со свободными концами. Геометрия кольца представлена на Рис. 4.16. Предположим, что кольцо тонкое и короткое, то есть $(t/a) \ll 1$ и $(h/a) \ll 1$. Поэтому единственным ненулевым напряжением в кольце является $T_\varphi = YS_\varphi$. Используя выражение для деформации S_φ из уравнения (4.221) и условие (4.223) существования только продольных колебаний, получим

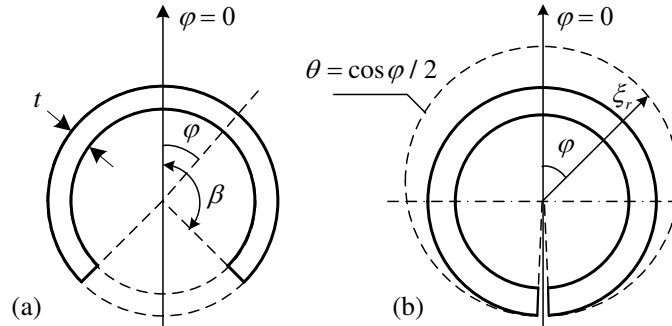


Рисунок 4.16: Геометрия неполного кольца с углом раскрытия β . Пунктирная линия представляет самую низкую форму колебаний кольца с разрезом - $\theta_0(\varphi, \pi) = \cos(\varphi/2)$.

$$S_\varphi = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + \xi_r \right) = \frac{1}{a} \left(\xi_r - \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} \right). \quad (4.268)$$

Условия на свободных концах:

$$T_\varphi = YS_\varphi \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0 \text{ т. е., } \left(\xi_r - \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\pm\beta} = 0. \quad (4.269)$$

Применительно к преобразователям интерес представляют симметричные колебания по отношению к оси $\varphi = 0$. Это условие вместе с условиями (4.269) удовлетворяется функциями

$$\theta_i(\varphi, \beta) = \cos(2i+1) \frac{\pi}{2\beta} \varphi \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.270)$$

Они образуют полное ортогональное множество функций в интервале $-\beta \leq \varphi \leq \beta$.

Действительно,

$$\int_{-\beta}^{\beta} \left[\cos(2i+1) \frac{\pi}{2\beta} \varphi \right] \left[\cos(2l+1) \frac{\pi}{2\beta} \varphi \right] d\varphi = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ \beta, & i = l \end{cases} \quad (4.271)$$

Функции (4.270) можно применить в качестве опорных функций. При этом общее решение задачи продольных колебаний, удовлетворяющее граничным условиям (4.269), получим в виде ряда

$$\xi_r(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \cos \left[(2i+1) \frac{\pi}{2\beta} \varphi \right], \quad (4.272)$$

$$\xi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \left[(2i+1) \frac{\pi}{2\beta} \right] \sin \left[(2i+1) \frac{\pi}{2\beta} \varphi \right]. \quad (4.273)$$

После подстановки этих выражений для смещений в формулы для потенциальной и кинетической энергий элемента кольца (4.225) и (4.226) и интегрирования по объему, получим:

$$W_{pot} = \frac{thY}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\pi}{2\beta} (2i+1) \right]^2 \right\}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^2 K_{eqvi}, \quad (4.274)$$

где

$$K_{eqvi} = \frac{thY}{a} \beta \left\{ 1 + \left[\frac{\pi}{2\beta} (2i+1) \right]^2 \right\}^2 \quad (4.275)$$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} tha\rho\beta \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\xi}_i^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\pi}{2\beta} (2i+1) \right]^2 \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\xi}_i^2 M_{eqvi}, \quad (4.276)$$

где

$$M_{eqvi} = tha\rho\beta \left\{ 1 + \left[\frac{\pi}{2\beta} (2i+1) \right]^2 \right\} \quad (4.277)$$

K_{eqvi} и M_{eqvi} это эквивалентные жесткость и масса, соответствующие форме колебаний θ_i .

Резонансные частоты колебаний равны $f_i = (1/2\pi)\sqrt{K_i/M_i}$, и после подстановки выражений (4.275) и (4.278) получим

$$f_i = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2\beta} (2i+1) \right]^2} = f_{r0} \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2\beta} (2i+1) \right]^2}, \quad (4.278)$$

где $f_{r0} = (1/2\pi a)\sqrt{Y/\rho}$ — низшая резонансная частота полного кольца радиусом a . Так,

например, резонансные частоты кольца с тонким разрезом или трещиной (в этом случае $\beta \approx \pi$) будут $f_0 = f_{r0} \sqrt{1.25}$, $f_1 = 1.8f_{r0}$, $f_2 = 2.7f_{r0}$ по сравнению с резонансными частотами полного кольца f_{r0} , $1.4f_{r0}$ и $2.2f_{r0}$, соответственно. На Рис. 4.16 представлена форма колебаний, соответствующая низшей резонансной частоте кольца с разрезом $\theta_0(\varphi, \pi) = \cos(\varphi/2)$.

Распределение напряжений в кольце, соответствующих формам колебаний θ_i ,

$$T_\varphi = \xi_{ri} \left[1 + (2i+1)^2 \left(\frac{\pi}{2\beta} \right)^2 \right] \left[\cos(2i+1) \frac{\pi}{2\beta} \varphi \right]. \quad (4.279)$$

4.5.4 Колебания изгиба полных колец.

Уравнение изгибных колебаний кольца получим, учитывая условие (4.260)

$$\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \xi_r = 0, \quad (4.280)$$

при котором средняя поверхность кольца не удлиняется. При этом условия выражения (4.225) и (4.226) для потенциальной и кинетической энергий элемента кольца приобретут вид

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho S_{cs} (\dot{s}_r^2 + \dot{s}_\varphi^2) = \frac{1}{2} \rho S_{cs} \left[\dot{\xi}_r^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \quad (4.281)$$

$$w_{pot} = \frac{1}{2} \frac{Yht^3}{12a^4} \left(\frac{\partial^3 \xi_\varphi}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi_r} \right)^2. \quad (4.282)$$

С учетом 2π периодичности решения для изгибных колебаний кольца примем ту же систему опорных функций $\theta_i(\varphi) = \cos i\varphi$, как и в случае продольных колебаний. Таким образом, смещения в радиальном направлении и вдоль окружности, отвечающие условию (4.280), будут выглядеть следующим образом:

$$\xi_r(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \cos i\varphi, \quad (4.283)$$

$$\xi_\varphi(\varphi) = -\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i / i) \sin i\varphi. \quad (4.284)$$

После подстановки выражений для смещений в формулы (4.281) и (4.282) и интегрирования по окружности, получим следующие представления потенциальной и кинетической энергий кольца:

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \frac{\pi Y t^3 h}{12 a^3} \sum_{i=2}^{\infty} (1-i^2)^2 \xi_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} K_{eqvi} \xi_i^2 \quad (4.285)$$

Поскольку при $i=1$ потенциальная энергия, а следовательно и колебания изгиба, существовать не могут, ряды (4.283) и (4.284) должны начинаться с $i=2$.

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \frac{M}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} M_{eqvi} \dot{\xi}_i^2. \quad (4.286)$$

Выражения для эквивалентных масс M_{eqvi} и жесткостей K_{eqvi} (податливостей $C_{eqvi} = 1/K_{eqvi}$), которые вытекают из отношений (4.285) и (4.286), имеют вид

$$M_{eqvi} = \frac{M(1+i^2)}{2i^2}, \quad K_{eqvi} = \frac{1}{C_{eqvi}} = \frac{\pi Y t^3 h (i^2 - 1)^2}{12 a^3} \quad (i = 2, 3, \dots). \quad (4.287)$$

Таким образом, резонансные частоты изгибных колебаний кольца

$$f_i = \frac{1}{2\pi \sqrt{M_{eqvi} C_{eqvi}}} = \frac{t}{2\pi \sqrt{12 a^2}} \sqrt{Y/\rho} \frac{i(i^2 - 1)}{\sqrt{i^2 + 1}}. \quad (4.288)$$

Низшая резонансная частота соответствует $i=2$ и составляет

$$f_2 = 0.12 \frac{t}{a^2} \sqrt{Y/\rho}. \quad (4.289)$$

Следующая резонансная частота $f_3 \approx 8f_2$, поэтому форму колебаний $\xi_r = \xi_{ro} \cos 2\varphi$ можно считать доминирующей в диапазоне частот ниже и вокруг частоты f_2 . Отношение низшей резонансной частоты продольных колебаний кольца $f_0 = (\sqrt{Y/\rho})/2\pi a$ к частоте f_2 — $(f_0/f_2) = 1.3 a/t$. Таким образом, изгибные и продольные колебания относительно тонких колец можно рассматривать, как независимые.

Отметим, что случай при $i=1$ формально соответствует перемещению кольца как твердого тела (без деформаций) в направлении $\varphi=0$ с массой $M_1 = M$ и «резонансной частотой» $\omega_1 = 0$.

Распределение механических напряжений в кольце получим с помощью выражения (4.220) для деформаций при изгибе, а именно:

$$S_\varphi = -\frac{r-a}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right), \quad (4.290)$$

$$T_\varphi = Y S_\varphi = \frac{Y(r-a)}{a^2} \sum_{i=2}^{\infty} \xi_i (i^2 - 1) \cos i\varphi. \quad (4.291)$$

4.5.5 Колебания сферических оболочек

4.5.5.1 Введение

Пьезокерамические сферические оболочки широко используются в гидроакустике, преимущественно как ненаправленные (нулевая форма колебаний) излучатели и гидрофоны. Пример преобразователя, который можно использовать в этом качестве, рассмотрен в Разделе 2.2. Сферические преобразователи также можно использовать в качестве направленных путем комбинирования разных форм их колебаний или экранирования части их поверхности. Такие варианты их применения будут рассмотрены в Главе 8. Для этого потребуются более общий анализ колебаний оболочек. Колебания пассивных сферических оболочек исследовались многими авторами. Обширная библиография по этому вопросу представлена в работе [7].

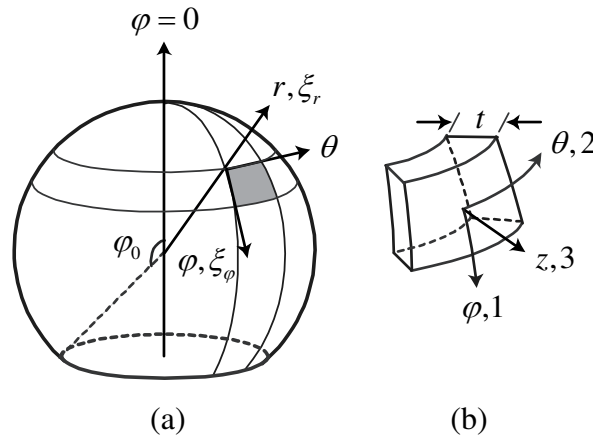


Рисунок 4.17: (а) Геометрия сферической оболочки, ее элемент (б) и используемые координаты.

Геометрия сферической оболочки в общем случае представлена на Рис. 4.17. Будем рассматривать только осесимметричные колебания тонких оболочек. Поэтому составляющими смещений являются радиальные смещения и смещения по касательной к средней

поверхности, ξ_r и ξ_φ , которые не зависят от азимутального угла θ . Угол раскрытия для неполной сферы обозначим φ_0 . Предполагаем, что толщина оболочки t достаточно мала и можно пренебречь радиальным напряжением ($T_z \approx 0$).

В ходе анализа сферической механической системы необходимо определить набор опорных функций, определяющих распределение радиальных смещений для нормальных форм колебаний, и ввести обобщенные координаты. После этого необходимо рассчитать эквивалентные параметры и резонансные частоты, соответствующие формам колебаний. Все поставленные цели будут достигнуты со ссылкой на работу [8], в которой рассмотрен общий случай осесимметричных колебаний сферических оболочек конечной толщины с отверстием на одном полюсе. В работе установлено, что частотный спектр колебаний полных оболочек соответствует двум связанным наборам форм колебаний, а именно «мембранным» формам колебаний, при которых происходят только растяжения и сжатия оболочки, и формам изгибных колебаний. Принадлежащие этим формам колебаний резонансные частоты образуют верхнюю и нижнюю ветви, соответственно. Исключения составляют колебания двух видов: нулевого порядка (пульсирующие колебания), при которых смещения являются чисто радиальными; и первого порядка, при которых распределение радиальных смещений имеет вид $\xi_r = \xi_0 \cos \varphi$. В обоих случаях существуют только продольные деформации и соответствующие им резонансные частоты. Кроме того, распределение смещений первого порядка может иметь место при перемещении оболочки как твердого тела в направлении $\varphi = 0$ без деформаций. Формально такому движению может быть приписана резонансная частота $f = 0$. Соответствующее смещение обозначим ξ_{1r} . Движению сферы как твердого тела соответствует кинетическая энергия $M_{sph} \dot{\xi}_{1r}^2 / 2$ (M_{sph} — масса сферы), которую следует учитывать в общей кинетической энергии колебаний оболочки. Резонансная частота, соответствующая нулевой форме колебаний, считается основной, хотя она и не является самой низкой резонансной частотой (самыми низкими являются резонансные частоты, соответствующие некоторым формам изгибных колебаний сферы).

Мембранные формы колебаний не зависят от толщины оболочки до тех пор, пока применима классическая теория тонких оболочек. Общее правило заключается в том, что это справедливо для диапазона относительной толщины (отношение толщины к радиусу)

$t/a \leq 0.05$. При этом условии членами порядка z/a можно пренебречь во всех выражениях для деформации S , и произвести в них замену $S/(1+z/a) \approx S$. Следует отметить, что сферические оболочки для преобразователей обычно имеют относительную толщину в диапазоне от $t/a = 0.05$ до 0.2. Множитель $1/(1+z/a) \approx 1-z/a$ можно было бы сохранить для повышения точности расчетов, но это неоправданно усложнило бы общий анализ. Позже путем сравнения результатов расчетов, выполненных с этим коэффициентом и без него, будет показано, что разница в оценке параметров преобразователя незначительна до $t/a=0.2$.

Формы изгибных колебаний изменяются в зависимости от толщины. Согласно мембранной теории (работа [7]), резонансные частоты, связанные с изгибной формой колебаний, ограничены конечным интервалом на низких частотах, тогда как теория изгиба предсказывает, что они могут быть и более высокими для всех значений толщины. Таким образом, резонансы изгибных форм колебаний могут появляться в рабочем диапазоне частот преобразователя и вызывать искажение его частотной характеристики и коэффициента направленности. Поэтому применительно к анализу работы многомодового сферического преобразователя в широкой полосе частот не достаточно воспользоваться более простой «мембранной» теорией колебаний оболочки, а следует использовать общий подход к решению задачи, который принят в работе [8].

В работе [8] также приведен наиболее полный анализ колебаний неполных сферических оболочек, особенно с большими углами раскрытия. Таким образом, все расчеты параметров сферической оболочки будут произведены ниже на основе форм колебаний, определенных по результатам, представленным в этой работе, без повторения их вывода. Приведем только краткую сводку используемых результатов.

Как показано в работе [8], выражения для деформаций растяжения средней поверхности оболочки имеют вид

$$S_\varphi = \frac{1}{a}[\xi'_\varphi(\varphi) + \xi_r(\varphi)], \quad S_\theta = \frac{1}{a}[\xi_\varphi(\varphi) \cot \varphi + \xi_r(\varphi)], \quad (4.292)$$

где штрих (') обозначает производную по углу φ . Изменения кривизны средней поверхности в направлениях меридиана и азимута

$$\chi_\varphi = \frac{1}{a^2} [\xi'_\varphi(\varphi) - \xi''_r(\varphi)], \quad \chi_\theta = \frac{1}{a^2} \cot \varphi [\xi_\varphi(\varphi) - \xi'_r(\varphi)]. \quad (4.293)$$

Общие деформации в сечениях по толщине

$$S_{\varphi\varphi} = S_\varphi + z\chi_\varphi, \quad S_{\theta\theta} = S_\theta + z\chi_\theta. \quad (4.294)$$

Выражения для напряжений

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{Y}{1-\sigma^2} (S_{\varphi\varphi} + \sigma S_{\theta\theta}), \quad T_{\theta\theta} = \frac{Y}{1-\sigma^2} (S_{\theta\theta} + \sigma S_{\varphi\varphi}). \quad (4.295)$$

Выражение для кинетической энергии колебаний сферы с углом раскрытия φ_0

$$W_{kin} = \pi a^2 t \rho \int_0^{\varphi_0} (\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_\varphi^2) \sin \varphi d\varphi. \quad (4.296)$$

Выражение для потенциальной энергии деформаций

$$\begin{aligned} W_{pot} &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} (T_{\varphi\varphi} S_{\varphi\varphi} + T_{\theta\theta} S_{\theta\theta}) d\tilde{V} = \\ &= \frac{Yt\pi a^2}{1-\sigma^2} \int_0^{\varphi_0} [(S_\varphi^2 + 2\sigma S_\varphi S_\theta + S_\theta^2) \sin \varphi d\varphi + \frac{t^2}{12} (\chi_\varphi^2 + 2\sigma\chi_\varphi\chi_\theta + \chi_\theta^2) \sin \varphi d\varphi]. \end{aligned} \quad (4.297)$$

Анализ колебаний полных и неполных сферических оболочек выполним отдельно.

4.5.5.2 Полные сферические оболочки

Смещения полных сферических оболочек, являющиеся периодическими функциями с периодом 2π , можно выразить с помощью полиномов Лежандра $P_i(\cos \varphi)$, которые представляют собой решения дифференциального уравнения

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 P_i(x)}{dx^2} + 2x \frac{dP_i(x)}{dx} - i(i+1)P_i(x) = 0 \quad (4.298)$$

при $x = \cos \varphi$ (см. Приложение С.3). Полиномы Лежандра ортогональны в интервале $[1, -1]$ и могут служить системой опорных функций для решения задачи колебаний полных сферических оболочек. Радиальные смещения и смещения по касательной к средней поверхности представим в виде

$$\xi_r(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_{ri} P_i(\cos \varphi), \quad \xi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{\varphi i} P'_i(\cos \varphi). \quad (4.299)$$

Смещения ξ_{r_i} и ξ_{φ_i} связаны следующим образом [7]

$$\xi_{r_i}(\varphi) = \xi_{r_i} P_i(\cos \varphi), \quad \xi_{\varphi_i}(\varphi) = -\xi_{r_i}(1 + \sigma) C_i P_i'(\cos \varphi) \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.300)$$

Здесь $\xi_{r_i} = \xi_{r_i}(\varphi)_{\varphi=0}$ и

$$C_i = \frac{(1 + \sigma)(1 + \delta) + \delta(\lambda_i - 2)}{(1 - \sigma - \lambda_i)(1 + \sigma)(1 + \delta) + \Omega_i^2(1 - \sigma^2)(1 + \sigma)}, \quad (4.301)$$

$$\lambda_i = i(i + 1), \quad \delta = \frac{t^2}{12a^2}, \quad \Omega_i^2 = \frac{2\rho\omega_i^2 a^2}{Y}. \quad (4.302)$$

Порядок последующих действий таков:

После определения из частотного уравнения резонансных частот для форм колебаний ω_i можно рассчитать безразмерные частотные параметры Ω_i^2 и коэффициенты C_i . При $i \geq 2$ параметры ω_i , Ω_i и C_i имеют два значения: высшее и низшее, которые соответствуют мембранной и изгибной формам колебаний, соответственно. Обозначим их ω_{im} , Ω_{im} , C_{im} и ω_{ib} , Ω_{ib} , C_{ib} . Подстановка смещений, определяемых формулами (4.300), в выражения (4.292) и (4.293) позволяет определить деформации и изменения кривизны. После этого могут быть определены кинетическая и потенциальная энергии, связанные с деформациями оболочки. Согласно соотношениям (4.300) все величины оказываются выраженными через смещения форм колебаний полюса оболочки (при $\varphi = 0$) ξ_{r_i} , которые можно принять в качестве обобщенных координат. Учитывая, что при $i \geq 2$ для каждого значения i существует две формы колебаний, необходимо ввести соответствующие обобщенные координаты $\xi_{r_{im}}$ и $\xi_{r_{ib}}$. Следует также отметить, что радиальная составляющая перемещения оболочки как твердого тела, которая обозначена ξ_{r1r} , имеет такую же зависимость от φ , как и радиальное смещение в первой форме колебаний. Поэтому общее радиальное смещение, связанное с формой колебаний при $i=1$, при рассмотрении задач излучения следует представить в виде $\xi_{r1\Sigma}(\varphi) = (\xi_{r1} + \xi_{1r}) \cos \varphi$.

Нижний индекс r далее опустим для краткости и будем использовать следующие обозначения обобщенных координат: ξ_0 ; ξ_1 , ξ_{1r} ; ξ_{im} , ξ_{ib} где $i = 2, 3, \dots$. Смещения и зависящие от смещения функции при $i \geq 2$ представим как

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_{im} + \xi_{ib}, & S_{\varphi_i} &= S_{\varphi_{im}} + S_{\varphi_{ib}}, & S_{\theta_i} &= S_{\theta_{im}} + S_{\theta_{ib}}; \\ \chi_{\varphi_i} &= \chi_{\varphi_{im}} + \chi_{\varphi_{ib}}, & \chi_{\theta_i} &= \chi_{\theta_{im}} + \chi_{\theta_{ib}}. \end{aligned} \quad (4.303)$$

Смещение при $i = 1$ равно $\xi_{1\Sigma} = \xi_1 + \xi_{1t}$, но нужно помнить, что с обобщенной координатой ξ_{1t} не связано деформаций и напряжений.

Принимая во внимание ортогональность полиномов Лежандра в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$, кинетическую и потенциальную энергии можно представить как суперпозицию энергий форм колебаний. Таким образом,

$$\begin{aligned} W_{kin} &= \sum_i W_{kini} = \frac{M_{sph}}{2} \dot{\xi}_{1t}^2 + \pi a^2 t \rho \sum_i \int_0^\pi [\dot{\xi}_{\varphi i}^2(\varphi) + \dot{\xi}_{\theta i}^2(\varphi)] \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} [M_{eqv0} \dot{\xi}_0^2 + M_{sph} \dot{\xi}_{1t}^2 + M_{eqv1} \dot{\xi}_1^2 + \sum_{i \geq 2} (M_{eqvim} \dot{\xi}_{im}^2 + M_{eqvib} \dot{\xi}_{ib}^2)]. \end{aligned} \quad (4.304)$$

$$\begin{aligned} W_{pot} &= \sum_i W_{poti} = \frac{Yt\pi a^2}{1-\sigma^2} \sum_i \int_0^\pi [(S_{\varphi i}^2 + 2\sigma S_{\varphi i} S_{\theta i} + S_{\theta i}^2) + \\ &+ \frac{t^2}{12} (\chi_{\varphi i}^2 + 2\sigma \chi_{\varphi i} \chi_{\theta i} + \chi_{\theta i}^2)] \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} [K_{eqv0} \xi_0^2 + K_{eqv1} \xi_1^2 + \sum_{i \geq 2} (K_{eqvim} \xi_{im}^2 + 2K_{imb} \xi_{im} \xi_{ib} + K_{eqvib} \xi_{ib}^2)]. \end{aligned} \quad (4.305)$$

В этих выражениях M_{eqvi} и K_{eqvi} (K_{eqvim} и K_{eqvib} при $i \geq 2$) — эквивалентные масса и жесткость, соответствующие формам колебаний. Параметры K_{imb} — взаимные жесткости, которые учитывают упругую связь между мембранной и изгибной формами колебаний при $i \geq 2$.

Выражения для безразмерных резонансных частот и для эквивалентных параметров представлены в Таблице 4.1.

Таблица 4.1: Эквивалентные параметры полных сферических оболочек.

Параметр	i	0	1	2 ²⁾	3 ²⁾	5 ²⁾
$\Omega_i^{1)}$	m	$\sqrt{2/(1-\sigma)}$	$\sqrt{3/(1-\sigma)}$	2.9	3.9	6.2
	b	-	-	0.75	0.92	1.24
$M_{eqvi},$ $\times 4\pi a^2 \rho t$	m	1	0.5	0.60	0.62	0.26
	b	-	-	0.29	0.17	0.10
$K_{eqvi}, \times \frac{2\pi Yt}{1-\sigma^2}$	m	$4(1+\sigma)$	$3(1+\sigma)$	8.9	16.3	14.3
	b	-	-	0.28	0.23	0.16

Параметр	i	0	1	2 ²⁾	3 ²⁾	5 ²⁾
K_{imb}		-	-	-0.01	0.0016	0.027
C_i	m	-	$1/2(1+\sigma)$	0.45	0.41	0.19
	b	-	-	-0.21	-0.1	-0.036

$$1) f_i = \Omega_i(1/2\pi a)\sqrt{Y/\rho} \quad f_i = \Omega_i(1/2\pi a)\sqrt{Y/\rho};$$

$$2) \sigma = 0.3, \quad t/a = 0.1.$$

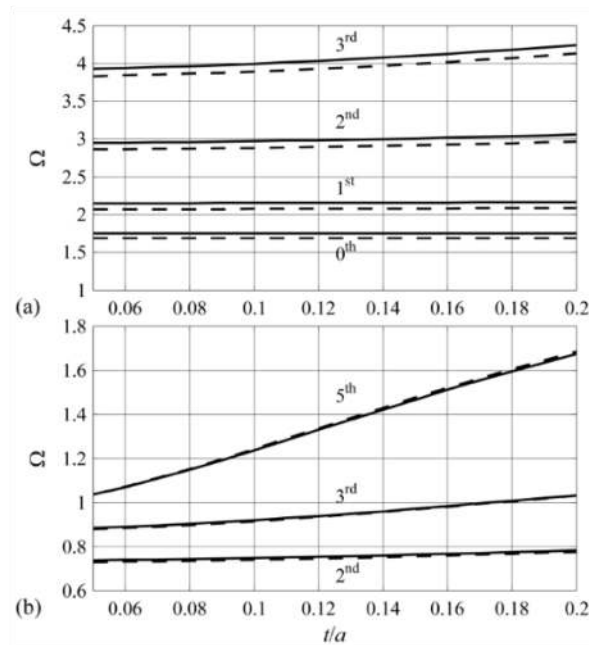


Рисунок 4.18: Зависимости нормированных резонансных частот Ω_i сферической оболочки как функций t/a и σ : (а) для мембранных форм колебаний и (б) для изгибных форм колебаний. Сплошные линии – $\sigma = 0.33$, пунктирные линии – $\sigma = 0.30$

Расчеты значений параметров для форм колебаний при $i \geq 2$ произведены для коэффициента Пуассона $\sigma = 0.3$ и $t/a = 0.1$. Зависимость резонансных частот от соотношения t/a при разных значениях σ представлена на Рис. 4.18. Как видно из Рис. 4.18 (а), резонансные частоты мембранных форм колебаний при $t/a < 0.2$ почти не зависят от t/a .

Кроме того, резонансные частоты изгибных форм колебаний практически не зависят от σ . Чтобы упростить общий анализ, мы намеренно пожертвуем некоторой точностью, выполнив вычисления при $\sigma = 0.3$ и $t/a = 0.1$, если нет необходимости рассматривать конкретные преобразователи. Точность расчетов можно, при необходимости, увеличить

за счет использования реальных свойств конкретной сферической оболочки.

На Рис. 4.19 представлены распределения форм колебаний радиального смещения в мембранных формах колебаний для полной оболочки при $i = 0, 1, 2, 3$ в сравнении с формами колебаний неполной (полусферической) оболочки, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

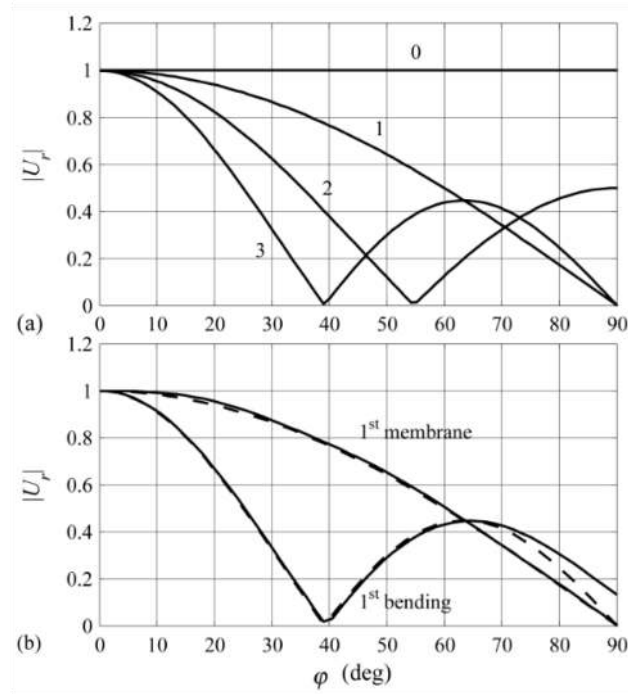


Рисунок 4.19: Формы колебаний в радиальном направлении: а) для полных сферических оболочек $P_n(\cos \varphi)$, $n = 0, 1, 2, 3$; б) для первой мембранной и первой изгибной форм колебаний полусфер. Сплошные линии – приближенное решение, пунктирные линии – точные решения.

4.5.5.3 Неполные сферические оболочки

Решение уравнения свободных колебаний сферической оболочки, раскрытой на одном полюсе, приводит к функциям Лежандра комплексного порядка, т. е. к коническим функциям первого рода $P_{m_i}(\cos \varphi)$, где $m_i = 0.5 + \sqrt{0.25 + \lambda_i}$, и λ_i может быть комплексной величиной. Смещения в этом случае можно представить (см. [8]) в виде

$$\xi_{rm}(\varphi) = \sum_{i=1,2,3} A_i P_{m_i} \cos \varphi, \quad \xi_{\varphi m}(\varphi) = -(1 + \sigma) \sum_{i=1,2,3} C_i A_i P'_{m_i}(\cos \varphi). \quad (4.306)$$

Частотные уравнения для определения нормированных резонансных частот Ω в

этом случае следует сформулировать учет граничных условий, существующих на краю оболочки, при $\varphi = \varphi_0$. Будем рассматривать только свободные граничные условия, потому что они наиболее применимы в практических конструкциях преобразователей. На свободной границе механические напряжения, моменты и перерезывающие силы должны отсутствовать.

После того, как определены резонансные частоты, необходимо вычислить значения λ_i путем решения, приведенного в работе [7] кубического уравнения, которое дает три значения λ (одно рациональное и два комплексно сопряженных) для каждой резонансной частоты. Затем можно определить коэффициенты C_i из уравнения (4.301), а коэффициенты формы колебаний A_i - следуя процедуре, описанной в той же работе. С учетом того, что $P_{m_i}(1) = 1$, радиальное смещение полюса можно представить в виде

$$\xi_r(0) = \xi_r = A_1 + A_2 + A_3 = A_1(1 + A_2 / A_1 + A_3 / A_1), \quad (4.307)$$

где можно предположить, что $A_1 = 1$.



Резонансные частоты Ω первых мембранных и изгибных формы колебаний для полусферы ($\varphi_0 = \pi / 2$) и для сферического сегмента с углом раскрытия $\varphi_0 = \pi / 3$, а также значения величин m_i , C_i , A_i , необходимых для определения соответствующих форм колебаний, вычислены в работе [8] и представлены в Таблице 4.2.

Из приведенных в Таблице данных видно, что резонансным частотам мембранных форм колебаний, которые могут быть использованы в преобразователях, предшествуют резонансные частоты изгибных форм колебаний.

Судя по сравнению форм колебаний радиальных смещений, представленных на Рис. 4.19, относительно заметный вклад в механоакустическое преобразование можно ожидать от самых низких изгибных форм колебаний. Далее рассмотрим только параметры мембранных форм колебаний и низших форм колебаний изгиба.

В работе [9] были введены и определены эквивалентные массы и жесткости, соответствующие формам колебаний сферических оболочек. Значения их получены из общих выражений для кинетической и потенциальной энергий (4.296) и (4.297). После подстановки соотношений (4.263) для смещений $\xi_r(\varphi)$ и $\xi_\varphi(\varphi)$, выполнения необходимых

Таблица 4.2: Коэффициенты, используемые для расчета параметров неполных сферических оболочек.

		Полусфера ($\varphi_0 = \pi/2$) 				$\varphi_0 = \pi/3$ 		
форма		1m	2m	1b	2b	1m	1b	2b
2)								
Ω		2.07	2.82	0.9	1.03	2.55	0.95	1.4
$A_i^{1)}$	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	11.7	-15.5	0.006	-0.01	-10.8	0.04	0.01
				-0.003i	-0.004i		-0.05i	
$m_i^{1)}$	3	10^{-5}	$-4 \cdot 10^{-8}$	0.006	-0.01	-14	0.04	0.01
				+0.003i	+0.004i		+0.05i	
	1	7.5	10.7	2.9	3.8	8.3	3.2	5.5
$C_i^{1)}$	2	1	3	2.1	1.3	1.7	1.8	-0.5
				-3.2i	-3.1i		+3.0i	-1.3i
	3	-0.5	-0.5	2.1	1.3	-0.5	1.8	-0.5
$C_i^{1)}$		-7.5i	-10.9i	+3.2i	+3.1i	+8.5i	-3.0i	+1.3i
	1	-0.02	-0.01	-0.1	-0.06	-0.015	-0.08	-0.03
	2	0.39	0.52	0.015	0.04	0.45	0.02	0.22
$C_i^{1)}$				-0.016i	-0.06i		+0.06i	
	3	0.02	0.01	0.015	0.04	0.012	0.02	0.03
				+0.016i	+0.06i		-0.06i	

¹⁾ Нумерация параметров соответствует их порядку в частотном спектре.

²⁾ Вычисления для изгибных форм колебаний произведены при $\sigma = 0.3$ и $t/a = 0.1$.

преобразований и с учетом того, что согласно выражению (4.307) $\xi_r(0) = 1 + A_2 + A_3$ потенциальную и кинетическую энергии, соответствующие формам колебаний, можно представить в форме

$$W_{kin} = \frac{1}{2} M_{eqv} \dot{\xi}_r^2(0), \quad W_{pot} = \frac{1}{2} K_{eqv} \xi_r^2(0). \quad (4.308)$$

В варианте полусферической оболочки ($\varphi_0 = \pi/2$) из Таблицы 4.2 следует, что члены в уравнении (4.306), соответствующие A_2 , являются доминирующими для мембранной формы колебаний. Таким образом, можно допустить, что

$$\xi_{rm}(\varphi) \cong \xi_r P_1(\cos \varphi), \quad \xi_{\varphi m}(\varphi) \cong -0.38(1 + \sigma) \xi_r P_1'(\cos \varphi). \quad (4.309)$$

Для первой изгибной формы колебаний доминируют члены, связанные с A_1 , и поэтому

$$\xi_{rb}(\varphi) \cong \xi_r P_3(\cos \varphi), \quad \xi_{\varphi b}(\varphi) \cong 0.1(1 + \sigma) \xi_r P_3'(\cos \varphi). \quad (4.310)$$

На Рис. 4.19 (b) представлены приближенные распределения смещений в соответствии с выражениями (4.309) и (4.310), а также точные результаты, которые учитывают все члены из Таблицы 4.2. Видно практически полное совпадение между ними.

Выражения (4.309) и (4.310) совпадают с выражениями (4.300) для смещений в одной половине полной сферы, колеблющейся в первой мембранной и первой изгибной (при $i = 3b$) формах колебаний, соответственно. Поэтому резонансные частоты полусферы и полной сферы для первой формы колебаний одинаковы, и все эквивалентные параметры для полусферы вдвое меньше аналогичных параметров полной сферы той же геометрии, колеблющейся в первой форме колебаний.

Примечательно, что эти результаты для полусферы можно было предсказать без расчетов благодаря тому, что граничные условия для полусферы со свободным краем (напряжение T_θ , момент M_θ и перерезывающая сила Q равны нулю) практически совпадают с аналогичными условиями в поперечном сечении $\varphi = \pi/2$ полной сферы, колеблющейся в первой форме колебаний. Различие состоит лишь в том, что в последнем случае перерезывающая сила (обусловленная сдвигом) существует. Однако, для тонких оболочек энергия, связанная со сдвигом, незначительна по сравнению с энергией «мембранных» деформаций и значительно меньше, чем энергия изгиба. Сравнение распределения колебаний для полусферы, представленное на Рис. 4.19 (b) показывает, что пренебрежение энергией изгиба не изменяет мембранной формы колебаний и лишь незначительно изменяет форму колебаний изгиба под углами, близкими к $\varphi = \pi/2$.

В случае угла раскрытия $\varphi_0 = \pi/3$, можно получить следующие упрощенные выражения для смещений:

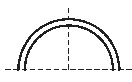

для мембранной формы колебаний

$$\xi_{rm}(\varphi) = \xi_r P_{1,6}(\cos \varphi), \quad \xi_{\varphi m}(\varphi) = -0.45(1 + \sigma) \xi_r P'_{1,6}(\cos \varphi); \quad (4.311)$$

для первой формы колебаний изгиба

$$\xi_{rb}(\varphi) = \xi_r P_{3,6}(\cos \varphi), \quad \xi_{\varphi b}(\varphi) = -0.07(1 + \sigma) \xi_r P'_{3,6}(\cos \varphi). \quad (4.312)$$

Таблица 4.3: Эквивалентные параметры неполных сферических оболочек.

Геометрия	Параметр	Изгиб		Мембрана	
		1	2	1	2
	Ω	0.90	1.03	2.07	3.82
	$M_{eqvi}, \times 4\pi a^2 \rho t$	0.12	0.11	0.21	0.51
	$K_{eqvi}, \times \frac{2\pi Yt}{1-\sigma^2}$	0.18	0.22	1.60	13.6
	Ω	0.95	1.40	2.55	-
	$M_{eqvi}, \times 4\pi a^2 \rho t$	0.09	0.03	0.24	-
	$K_{eqvi}, \times \frac{2\pi Yt}{1-\sigma^2}$	0.15	0.10	2.75	-

Эквивалентные параметры оболочек при углах раскрытия $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = \pi/3$, которые вычислены из формул (4.296), (4.297) для кинетической и потенциальной энергий с использованием вышеуказанных выражений для обобщенных смещений, приведены в Таблице 4.3.

Приведенные в этом разделе сведения о формах колебаний и эквивалентных параметрах сферических оболочек будут использованы в Главе 8 для анализа работы сферических общего вида и полусферических преобразователей.

4.5.6 Колебания изгиба неоднородных стержней

Колебания пьезокерамических однородных биморфных стержней (прямоугольных

пластин малой ширины) и круглых пластин были рассмотрены в Разделе 2.6. Как будет показано в Главе 9, те части активного материала пьезокерамических преобразователей, которые вносят наименьший вклад в электромеханическое преобразование, целесообразно заменять пассивным материалом (преимущественно металлом) для оптимизации рабочих свойств преобразователей. В связи с этого следует рассматривать особенности колебаний механических систем, свойства которых неравномерны по их объему (в случае пластин - по их толщине, длине или радиусу). Подход к расчету колебаний различных неоднородных механических систем остается практически одинаковым, но численно его проще всего проиллюстрировать на примере прямоугольных стержней (или, что практически одно и то же, пластин, имеющих малую ширину по сравнению с длиной). Их выбор в качестве примера обоснован еще и тем, что результаты оценки влияния неоднородности по толщине справедливы для всех механических систем, совершающих колебания изгиба.

Применяемые на практике модификации конструкций неоднородных прямоугольных стержней представлены на Рис. 4.20 и 4.21. Симметричный трехслойный стержень состоит из двух слоев пьезокерамики одинаковой толщины, сцементированных с центральным слоем из пассивного материала.

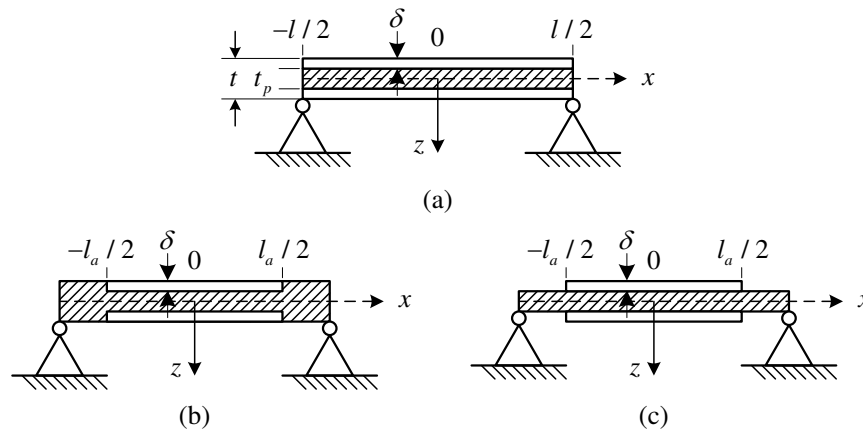


Рисунок 4.20: Модификации симметричных трехслойных стержней: (а) однородные по длине, (б) у которых часть активных слоев заменена пассивным материалом, (с) у которых часть активных слоев удалена. Пассивный материал заштрихован.

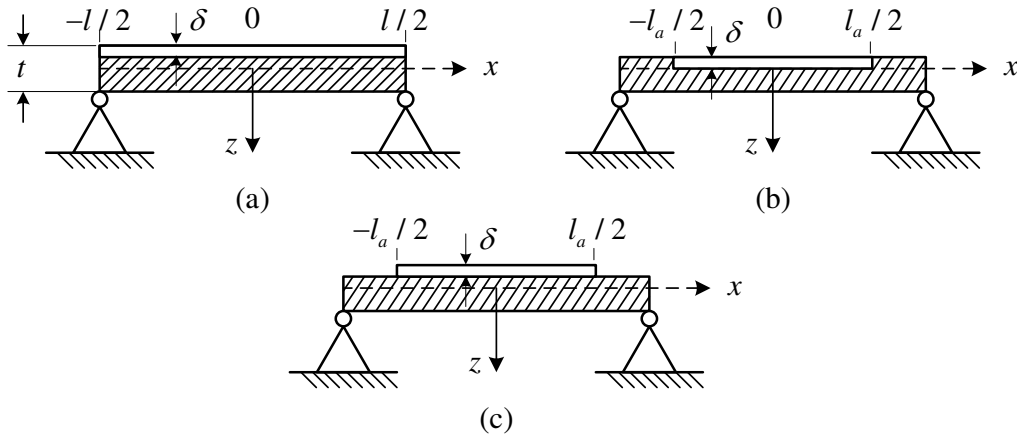


Рисунок 4.21: Модификации двухслойных стержней: (а) однородные по длине, (б) у которых часть активного слоя заменена пассивным материалом, (с) у которого часть активного слоя удалена. Пассивный материал заштрихован.

Двухслойные стержни состоят из активного и пассивного слоев, обладающих разными механическими свойствами.

Начнем расчет с симметричных трехслойных стержней. Положение нейтральной поверхности при изгибе в трехслойном стержне в силу симметрии остается таким же, как и для однородного стержня. Положение нейтральной поверхности в двухслойных стержнях зависит от соотношения между толщинами и упругими свойствами активного и пассивного слоев, и это усложняет задачу. Для того чтобы рассмотреть колебания неоднородных стержней, состоящих из материалов с разными свойствами, следует использовать выражения для потенциальной и кинетической энергий в следующих общих формах:

$$W_{pot} = \frac{1}{2} w \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 Y(x, z) \xi_z^2 dx dz, \quad (4.313)$$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} w \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-t/2}^{t/2} \rho(x, z) \xi_z^2 dx dz, \quad (4.314)$$

где плотность и модуль Юнга могут изменяться по объему.

4.5.6.1 Трехслойный стержень однородный по длине

Вариант стержня, представленный на Рис. 4.20 (а) можно считать однородным по длине из материала, имеющего некоторые эквивалентные параметры. Эти параметры могут быть определены путем усреднения параметров реальных материалов по сечению

стержня с использованием следующей процедуры.

Определим напряжения в поперечном сечении $T = YS_1$, где S_1 описывается уравнением (2.113), учитывая, что $\xi(x) = \xi_o \theta(x)$,

$$T_p = zY_p \xi \frac{d^2 \theta}{dx^2} \text{ at } |z| < \frac{t_p}{2}, \quad (4.315)$$

$$T_a = zY_a^E \xi \frac{d^2 \theta}{dx^2} \text{ at } |z| \geq \frac{t_p}{2}. \quad (4.316)$$

Здесь Y_p и Y_a^E — модули Юнга материала пассивного и активного слоев.

Обозначим плотности активного и пассивного слоев ρ_a и ρ_p . Для краткости при определении свойств трехслойных стержней будем пользоваться следующими обозначениями

$$\frac{Y_p}{Y_a^E} = \gamma_Y, \quad \frac{\rho_p}{\rho_a} = \gamma_\rho, \quad \frac{\delta}{t} = y. \quad (4.317)$$

Здесь $y = 0.5$ соответствует конструкции полностью активного биморфного стержня.

Далее рассмотрим энергетическое состояние колеблющегося стержня. Потенциальную энергию при $E = 0$ определим, подставив модули Юнга для его активной и пассивной частей в выражение (4.313). В результате интегрирования по толщине получим

$$W_{pot}^E = \frac{\xi_o^2}{2} \frac{wt^3}{12} Y_{eqvt} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (4.318)$$

где Y_{eqvt} — эквивалентный модуль Юнга трехслойного стержня, и

$$Y_{eqvt} = Y_a^E + (Y_p - Y_a^E) \left(1 - \frac{2\delta}{t} \right)^3 = Y_a^E [1 + (\gamma_Y - 1)(1 - 2y)^3]. \quad (4.319)$$

Кинетическую энергию стержня определим после подстановки плотностей для активной и пассивной его частей в выражение (4.314). В результате интегрирования по толщине получим

$$W_{kint} = \frac{\xi_o^2}{2} \rho_{eqvt} tw \int_{-1/2}^{1/2} \theta^2(x) dx, \quad (4.320)$$

где ρ_{eqvt} — эквивалентная плотность стержня

$$\rho_{eqvt} = \frac{\rho_a 2\delta + \rho_p t_p}{t} = \rho_a [\gamma_\rho - 2(\gamma_\rho - 1)y]. \quad (4.321)$$

Таким образом, трехслойный стержень можно рассматривать как однородный с эквивалентным модулем Юнга Y_{eqvt} и плотностью ρ_{eqvt} , которые представлены формулами (4.319) и (4.321). Далее будем рассматривать только стержни со свободно опертными концами. Нормальные формы колебаний в этом случае такие же, как и для любого однородного стержня, т. е. $\theta_i(x) = \cos(i\pi x/l)$. Поэтому выражения для эквивалентной массы и жесткости трехслойного стержня совпадают с аналогичными выражениями для биморфного стержня (см. Раздел 2.6.1), если ρ_a и $1/s_{11}^E$ заменить эквивалентной плотностью ρ_{eqvt} и эквивалентным модулем Юнга Y_{eqvt} , а именно для первой формы колебаний

$$K_{eqvt}^E = \frac{1}{C_{eqvt}^E} = \frac{\pi^4 w t^3 Y_{eqvt}}{24 l^3}, \quad M_{eqvt} = \frac{1}{2} w t l \rho_{eqvt}. \quad (4.322)$$

(Далее обозначения параметров сократим до K_{1t} и M_{1t} .)

Резонансная частота трехслойного стержня

$$f_t = 0.45 \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{Y_{eqvt}}{\rho_{eqvt}}}. \quad (4.323)$$

4.5.6.2 Трехслойный стержень неоднородный по длине

Варианты стержней, представленные на Рис. 4.20 (b) и (c), неоднородны по длине. Будем различать их по нижним индексам: A в случае, если часть керамики заменена пассивным материалом; B в случае, если часть керамики удалена. Длину и толщину слоев активного материала обозначим l_a и δ .

Неизвестное распределение смещения нейтральной поверхности в этих случаях представим в виде разложения в ряд по нормальным формам колебаний однородного стержня. Предполагая, что стержень свободно оперт,

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{2m+1} \xi_i \cos(i\pi x/l) = \sum_{i=1}^{2m+1} \xi_i \theta_i(x) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.324)$$

Применительно к расчету преобразователей наибольший интерес представляет

самая низкая форма колебаний. Логично предположить, что в первом приближении эта форма колебаний должна быть близка к первой форме колебаний однородного стержня. Кроме того, соотношение l_a / l не может быть слишком малым из практических соображений. Для того чтобы выяснить, приводит ли это предположение к достаточно точным результатам, или вклад более высоких форм колебаний значителен, рассмотрим в качестве второго приближения первые два члена ряда (4.324). Таким образом, предположим, что

$$\xi(x) = \xi_1 \cos(\pi x / l) + \xi_3 \cos(3\pi x / l). \quad (4.325)$$

После подстановки этого выражения для $\xi(x)$ в общие формулы (4.313) и (4.314) для потенциальной и кинетической энергии, получим следующие результаты.

Кинетическая энергия стержня в случае A приобретает вид

$$\begin{aligned} W_{kin \text{ т}A} = & \frac{1}{2} w l \rho_{equiv} \int_{-l/2}^{l/2} [\dot{\xi}_1 \cos(\pi x / l) + \dot{\xi}_3 \cos(3\pi x / l)]^2 dx + \\ & + 4w\delta(\rho_p - \rho_a) \int_{-l_a/2}^{l_a/2} [\dot{\xi}_1 \cos(\pi x / l) + \dot{\xi}_3 \cos(3\pi x / l)]^2 dx. \end{aligned} \quad (4.326)$$

После вычисления интегралов выражение для кинетической энергии представим в виде

$$W_{kin \text{ т}A} = \frac{1}{2} \left[\frac{w l}{2} \rho_{equiv} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_3^2) + w l \delta(\rho_p - \rho_a) (\dot{\xi}_1^2 F_1 + \dot{\xi}_3^2 F_3 - \frac{2}{\pi} \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_3 F_{13}) \right], \quad (4.327)$$

где

$$F_1(l_a / l) = 1 - (l_a / l) - (1 / \pi) \sin(\pi l_a / l), \quad (4.328)$$

$$F_3 = 1 - (l_a / l) - (1 / 3\pi) \sin(3\pi l_a / l), \quad (4.329)$$

$$F_{13} = \sin(\pi l_a / l) + (1 / 2) \sin(2\pi l_a / l). \quad (4.330)$$

В выражение (4.326) для кинетической энергии введем представления эквивалентных масс

$$W_{kin \text{ т}A} = \frac{1}{2} M_{1 \text{ т}A} \dot{\xi}_1^2 + M_{13 \text{ т}A} \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_3 + \frac{1}{2} M_{3 \text{ т}A} \dot{\xi}_3^2. \quad (4.331)$$

Здесь и далее для эквивалентных параметров трехслойных стержней введем следующие

обозначения: K_{1r}, M_{1r} и K_{3r}, M_{3r} — для первой и третьей форм колебаний однородного по длине стержня; K_{1rA}, M_{1rA} и K_{3rA}, M_{3rA} — для стержня модификации A ; K_{1rB}, M_{1rB} и K_{3rB}, M_{3rB} — для стержня модификации B . Обозначения с нижними индексами $13rA$ и $13rB$ используются для взаимных жесткости и массы между первой и третьей формами колебаний

С учетом этих обозначений, в выражении (4.331)

$$M_{1rA} = M_{1r} \left[1 + \frac{2(\gamma_\rho - 1)y}{\gamma_\rho - 2(\gamma_\rho - 1)y} F_1 \right], \quad (4.332)$$

$$M_{3rA} = M_{3r} \left[1 + \frac{2(\gamma_\rho - 1)y}{\gamma_\rho - 2(\gamma_\rho - 1)y} F_3 \right], \quad (4.333)$$

Напомним, что для однородного стержня с просто опертыми концами $M_{3r} = M_{1r}$.

$$M_{13rA} = -M_{1r} \frac{2y(\gamma_\rho - 1)}{\pi[\gamma_\rho - 2(\gamma_\rho - 1)y]} F_{13}. \quad (4.334)$$

В выражениях для масс в *варианте B* нижний индекс A следует заменить на B , а в уравнениях (4.331) - (4.334) γ_ρ в числителях следует приравнять к нулю.

Выражение для потенциальной энергии стержня в варианте A получим в виде

$$\begin{aligned} W_{potA} = & \frac{wt^3}{24} Y_{equiv} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\xi_1 (\pi/l)^2 \cos(\pi x/l) + \xi_3 (3\pi/l)^2 \cos(3\pi x/l) \right]^2 dx + \\ & + 4(Y_p - Y_a^E) \frac{wt^3}{24} [1 - (1 - 2y)^3] \times \\ & \times \int_{l_a/2}^{l/2} \left[\xi_1 (\pi/l)^2 \cos(\pi x/l) + \xi_3 (3\pi/l)^2 \cos(3\pi x/l) \right]^2 dx \end{aligned} \quad (4.335)$$

Это выражение после преобразований, аналогичных тем, которые произведены для кинетической энергии, приобретает форму

$$W_{potA} = \frac{1}{2} K_{1rA} \xi_1^2 + K_{13rA} \xi_1 \xi_3 + \frac{1}{2} K_{3rA} \xi_3^2, \quad (4.336)$$

где

$$K_{1rA} = K_{1r} \left[1 + \frac{(\gamma_Y - 1)[1 - (1 - 2y)^3]}{1 + (\gamma_Y - 1)(1 - 2y)^3} F_1 \right], \quad (4.337)$$

$$K_{3tA} = 81K_{1t} \left[1 + \frac{(\gamma_Y - 1)[1 - (1 - 2y)^3]}{1 + (\gamma_Y - 1)(1 - 2y)^3} F_3 \right], \quad (4.338)$$

$$K_{13tA} = -\frac{9}{\pi} K_{1t} \frac{(\gamma_Y - 1)[1 - (1 - 2y)^3]}{1 + (\gamma_Y - 1)(1 - 2y)^3} F_{13}. \quad (4.339)$$

В выражениях для жесткости в варианте B нижние индексы A следует заменить на B , а γ_Y в числителях формул (4.337)-(4.339) приравнять к нулю.

После того как определены кинетическая и потенциальная энергии неоднородных стержней, можно вывести уравнения Лагранжа свободных колебаний стержней, и затем определить нижнюю резонансную частоту и форму колебаний во втором приближении. А именно, из

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (4.340)$$

после подстановки выражений (4.331) и (4.336) для кинетической и потенциальной энергий получаем уравнения для варианта A

$$(K_{1tA} - \omega^2 M_{1tA}) \xi_1 + (K_{13tA} - \omega^2 M_{13tA}) \xi_3 = 0, \quad (4.341)$$

$$(K_{13tA} - \omega^2 M_{13tA}) \xi_1 + (K_{3tA} - \omega^2 M_{3tA}) \xi_3 = 0, \quad (4.342)$$

и аналогичный набор уравнений для варианта B с заменой нижнего индекса A на B .

Уравнение частот, из которого можно найти нижнюю резонансную частоту во втором приближении,

$$(\omega_{1tA}^2 - \omega^2)(\omega_{3tA}^2 - \omega^2) - \frac{1}{M_{1tA} M_{3tA}} (K_{13tA} - \omega^2 M_{13tA})^2 = 0. \quad (4.343)$$

Здесь

$$\omega_{1tA}^2 = K_{1tA} / M_{1tA} \quad \text{и} \quad \omega_{3tA}^2 = K_{3tA} / M_{3tA}. \quad (4.344)$$

После получения нижней резонансной частоты ω_l можно определить отношение смещений или коэффициент формы колебаний, ms (от mode shape), из одного из уравнений, (4.341) или (4.342) в виде

$$ms_l = \left. \frac{\xi_3}{\xi_1} \right|_{\omega=\omega_l} = -\frac{K_{1tA} - \omega_l^2 M_{1tA}}{K_{13tA} - \omega_l^2 M_{13tA}}. \quad (4.345)$$

Распределение колебаний на резонансной частоте ω_l теперь можно представить как

$$\xi(x) = \xi_1 [\cos(\pi x/l) + ms_l \cos(3\pi x/l)]. \quad (4.346)$$

Таким образом, форма колебаний во втором приближении

$$\theta(x) = \frac{\xi(x)}{\xi(0)} = \frac{1}{1 + ms_l} [\cos(\pi x/l) + ms_l \cos(3\pi x/l)]. \quad (4.347)$$

Аналогичные расчеты могут быть выполнены для варианта *B*.

Результаты расчетов параметров неоднородного трехслойного стержня, выполненных по описанной выше процедуре для первого и второго приближений, представлены на Рис. 4.22 и 4.23.

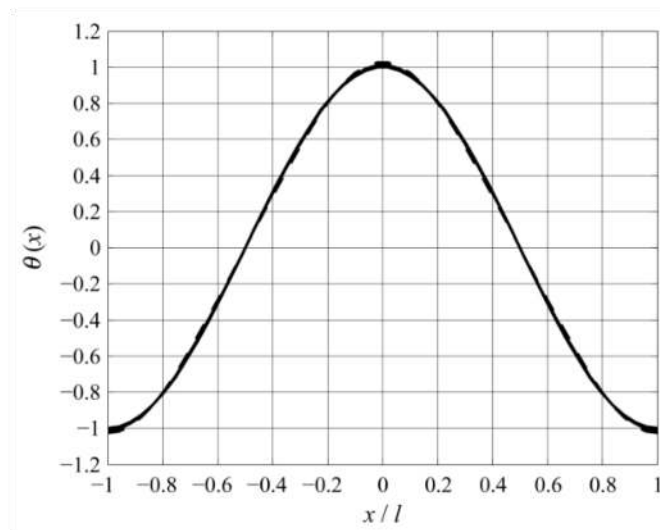


Рисунок 4.22: Распределение смещений (форм колебаний $\theta(x)$), определяемое во втором приближении при $l_a/l = 0.6$ по сравнению с $\theta(x) = \cos(\pi x/l)$ для первого приближения. Расчеты произведены для варианта *B* и комбинаций PZT-4 с алюминием и сталью. Отклонения результатов находятся в пределах утолщений линий.

Все расчеты выполнены для относительной толщины активного материала $y = \delta/t$, которая соответствует максимуму коэффициентов связи, как это будет показано в Главе 9 для разных используемых пассивных материалов. Это обусловлено тем, что уменьшение объема активного материала предполагает, что эти преобразователи не предназначены для излучения максимально возможной мощности в случае, если она ограничена напряженностью электрического поля. При этом условии оптимизация

коэффициента связи является разумным выбором.

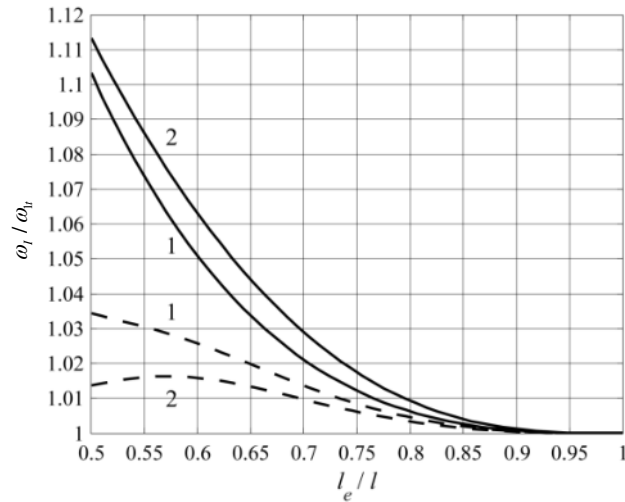


Рисунок 4.23: Отношение резонансных частот неравномерных по длине трехслойных стержней во втором (ω_I) и первом (ω_{I_1}) приближениях. Сплошные линии – $(\omega_I / \omega_{I_1})_A$, пунктирные линии – $(\omega_I / \omega_{I_1})_B$. 1-комбинация алюминий – PZT-4; 2 - комбинация сталь – PZT -4.

В зависимости от требований к работе преобразователя иногда может оказаться целесообразным и дальнейшее уменьшение толщины пьезоэлемента, но в этом случае влияние неоднородности на результаты расчета параметров, очевидно, будет меньше.

Из результатов, представленных на Рис. 4.22 и Рис. 4.23, можно сделать следующие выводы. Основным результатом является то, что форма колебаний трехслойного неоднородного стержня во втором приближении остается практически такой же как и для однородного стержня, по меньшей мере, до значений $l_a / l = 0.6$. Это видно из Рис. 4.22 при оптимальной с точки зрения эффективного коэффициента связи толщине активного слоя даже для самого критического случая, в котором часть активного материала удалена с концов стержня (вариант *B*). Этот вывод подтверждают зависимости коэффициентов формы колебаний по формуле (4.347), которые представлены на Рис. 4.22. Они показывают, что вклад третьей формы колебаний очень мал. В результате резонансная частота стержней, рассчитанная во втором приближении, отклоняется не более чем на 5% от определенной в первом приближении до значений $l_a / l \approx 0.6$. Следует отметить, что при $l_a / l < 0.6$ эффективные коэффициенты связи начинают уменьшаться, как это будет

показано в Главе 9, и дальнейшее уменьшение длины пьезоэлемента не имеет смысла. Таким образом, результаты расчета эквивалентных параметров M_{1A} , K_{1A} и M_{1B} , K_{1B} неоднородных стержней, полученные в первом приближении из формул (4.332) и (4.337), и резонансных частот, определенных с их применением, справедливы при расчете преобразователей во всех разумных с практической точки зрения диапазонах изменения длины активного элемента.

4.5.6.3 Двухслойные стержни однородные по длине

Особенность этого случая в том, что нейтральная плоскость при изгибе не совпадает со средней плоскостью, как это было в случае однородного стержня. Поэтому в качестве первого шага следует определить местоположение нейтральной плоскости (координату z_0). По определению нейтральная плоскость должна быть свободна от напряжений, и поэтому ее координату z_0 можно найти из условия, что

$$\int_0^{z_0} T_x dz + \int_{z_0}^t T_x dz = 0, \quad (4.348)$$

где

$$T_x = -(z - z_0) \xi_0 Y(z) \frac{d^2 \theta}{dx^2}. \quad (4.349)$$

Если δ — толщина активной части и Y_a^E and Y_p — модули активной и пассивной частей, то условие (4.348) эквивалентно

$$\int_0^{\delta} Y_a^E (z - z_0) dz + \int_{\delta}^t Y_p (z - z_0) dz = 0, \quad (4.350)$$

откуда

$$\frac{z_0}{t} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_Y + (1 - \gamma_Y) y^2}{\gamma_Y + (1 - \gamma_Y) y}. \quad (4.351)$$

Здесь $\gamma_Y = Y_p / Y_a^E$ и $y = \delta / t$ в соответствии с определениями (4.317).

В рациональной конструкции преобразователя z_0 должна быть больше δ (в противном случае электромеханические эффекты в пьезоэлектрическом элементе выше и ниже нейтральной плоскости были бы с противоположным знаком). Обозначим значение z_0

равное δ через z_{0m} . Очевидно, что $z_{0m} = \delta_{\max}$ это максимальная разумная толщина слоя пьезокерамики для заданной комбинации активного и пассивных материалов. Из уравнения (4.351) получим

$$\frac{z_{0m}}{t} = \frac{\sqrt{\gamma_Y}}{1 + \sqrt{\gamma_Y}}. \quad (4.352)$$

Соотношение z_{0m}/t для разных комбинаций активного (PZT-4) и пассивного материалов приведено в Таблице 4.4. Определив положение нейтральной плоскости, можно рассчитать эквивалентные параметры преобразователя с пьезоэлектрическим элементом разной относительной толщины.

Таблица 4.4: Соотношение $(z_{0m}/t) = y_{\max}$ для различных комбинаций материалов.

Пассивный материал	PZT-4				
	Алюминий	Сталь	Стекло	Г-10	Оксид алюминия
$Y_a^E, 10^9 \text{ N/m}^2$	Для PZT-4 — 81				
$Y_p, 10^9 \text{ N/m}^2$	70	210	62	24	300
$(z_{0m}/t) = y_{\max}$	0.48	0.62	0.47	0,35 чел.	0.66

Потенциальная энергия двухслойного стержня

$$\begin{aligned} W_{pot}^E &= \frac{1}{2} \xi_0^2 w \left[\int_0^\delta (z - z_0)^2 Y_a^E dz + \int_\delta^t (z - z_0)^2 Y_p dz \right] \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\xi_0^2}{2} \frac{w}{3} \left\{ \left[(\delta - z_0)^3 + z_0^3 \right] Y_a^E + \left[(t - z_0)^3 + (z_0 - \delta)^3 \right] Y_p \right\} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.353)$$

Обозначим эквивалентный модуль Юнга в виде

$$Y_{eqvb}(z_0) = 4 \left\{ \left[\left(\frac{\delta - z_0}{t} - \frac{z_0}{t} \right)^3 + \left(\frac{z_0}{t} \right)^3 \right] Y_a^E + \left[\left(1 - \frac{z_0}{t} \right)^3 + \left(\frac{z_0 - \delta}{t} \right)^3 \right] Y_p \right\}. \quad (4.354)$$

В конкретном случае, если $z_0 = z_{0m} = \delta_{\max}$

$$Y_{eqvb}(z_{0m}) = 4 \left[Y_a^E \left(\frac{z_{0m}}{t} \right)^3 + Y_p \left(1 - \frac{z_{0m}}{t} \right)^3 \right] = 4Y_a^E [y^3 + (1-y)^3 \gamma_Y]. \quad (4.355)$$

На Рис. 4.24 представлены зависимости $Y_{eqvb}(z_0/t)$ от δ/t для комбинаций активного и пассивных материалов, приведенных в Таблице 4.4. Выражение (4.322) для эквивалентной жесткости однородного по длине трехслойного стержня справедливо для двухслойного стержня, если заменить Y_{eqvt} на модуль Y_{eqvb} , определенный по формуле (4.354) (или (4.355) в том случае, если $z_0 = z_{0m}$).

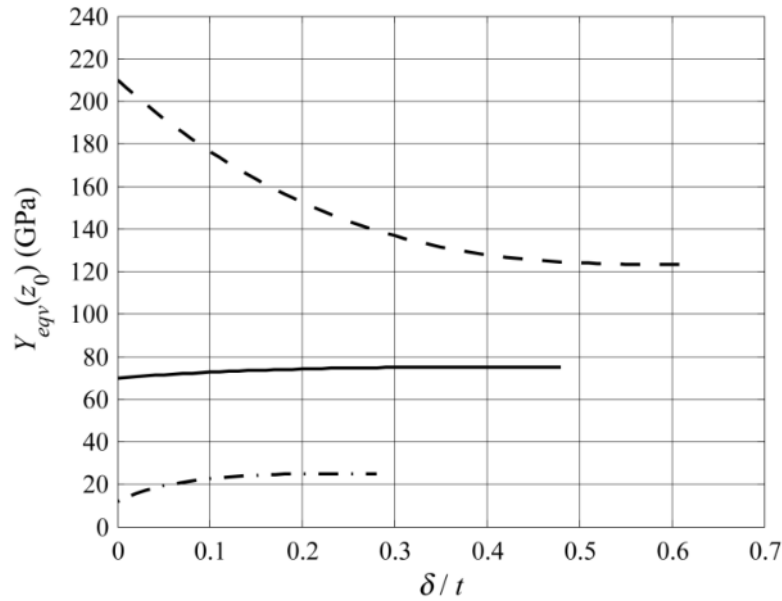


Рисунок 4.24: Эквивалентный модуль Юнга как функция от δ/t (до $\delta = z_{0m}$) для разных комбинаций керамики PZT-4 с алюминием (сплошная линия), сталью (штриховая линия) и G-10 (штрихпунктирная линия).

Кинетическая энергия двухслойного стержня равна

$$W_{kinb} = \frac{\dot{\xi}_0^2}{2} w \int_{-l/2}^{l/2} [\rho_a \delta + \rho_p (t - \delta)] \theta^2(x) dx = \frac{\dot{\xi}_0^2}{2} \rho_{eqvb} t S_{eff} = \frac{\dot{\xi}_0^2}{2} M_{eqv}, \quad (4.356)$$

где

$$\rho_{eqvb} = \frac{\rho_a \delta + \rho_p (t - \delta)}{t} = \rho_a [y + (1-y)\gamma_\rho] = \rho_a [\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y] \quad (4.357)$$

и S_{eff} определяется по формуле

$$S_{eff} = w \int_{-l/2}^{l/2} \theta^2(x) dx. \quad (4.358)$$

Для стержней со свободно опертыми концами при первой форме колебаний

$$[\theta(x) = \theta_1(x) = \cos(\pi x / l)] \text{ и } S_{eff} = S_{eff1} = 0.5wl. \quad (4.359)$$

Применив выражения (4.354) и (4.357) для эквивалентной жесткости и массы, получим общую формулу для резонансной частоты двухслойного стержня

$$f_b(z_0) = f_{ra} \sqrt{\frac{\rho_a}{Y_a^E}} \cdot \sqrt{\frac{Y_{eqvb}(z_0)}{\rho_{eqvb}(z_0)}}, \quad (4.360)$$

где f_{ra} — резонансная частота полностью активного стержня. В случае если $z_0 = z_{0m}$,

$$f_{rb}(z_{0m}) = f_{ra} \frac{2\sqrt{\gamma_Y}}{\sqrt{(1 + \sqrt{\gamma_Y})[\sqrt{\gamma_Y} + \gamma_\rho]}}. \quad (4.361)$$

4.5.6.4 Двухслойные стержни неоднородные по длине

В отношении конструкции неоднородного по длине двухслойного стержня справедливы те же соображения по оптимизации эффективного коэффициента связи, как и для неоднородного трехслойного стержня. Главная особенность этого варианта конструкции состоит в том, что точное положение нейтральной поверхности по всей длине стержня определить сложно. Предположим, что в двухслойной части нейтральная поверхность расположена так же, как в однородном двухслойном стержне, а на концах - как в случае однородного пассивного стержня. При этом предположении не приняты во внимание неоднородности, которые существуют на границах между частями и могут быть источником дополнительных ошибок. Предположение основано на том соображении, что влияние этих нарушений может быть заметно только в непосредственной близости от границ. Тем не менее, основанные на нем результаты следует рассматривать как приближенные и заслуживающие проверки расчетом по методу конечных элементов.

После того, как приняты предположения относительно положения нейтральных поверхностей в частях стержня, можно применить ту же процедуру последовательных приближений для вычисления механических параметров частично активного двухслойного стержня, что и для трехслойного стержня. Практический смысл имеют два варианта

неоднородной по длине конструкции, представленные на Рис. 4.21 (b) и (c). Обозначим их как варианты A и B .

Вначале рассмотрим первое приближение, предположив, что распределение смещения по длине стержня $\xi(x) = \xi_0 \cos(\pi x/l)$. Определим энергетическое состояние колеблющегося стержня при этой форме колебаний. Кинетическая энергия для варианта A (часть керамики заменена пассивным материалом) равна

$$W_{kinbA} = \frac{\xi_0^2}{2} w \left[t \rho_{eqvb} \int_{-l/2}^{l/2} \cos^2(\pi x/l) dx + 2\delta(\rho_p - \rho_a) \int_{l_a/2}^{l/2} \cos^2(\pi x/l) dx \right], \quad (4.362)$$

и для варианта B (часть керамики удалена)

$$W_{kinbB} = \frac{\xi_0^2}{2} w \left[t \rho_{eqvb} \int_{-l/2}^{l/2} \cos^2(\pi x/l) dx - 2\delta \rho_a \int_{l_a/2}^{l/2} \cos^2(\pi x/l) dx \right]. \quad (4.363)$$

После интегрирования и некоторых преобразований получим следующие выражения для эквивалентных масс:

$$M_{b1A} = M_{b1} \left[1 + 2y \frac{\gamma_p - 1}{\gamma_p - (\gamma_p - 1)y} F_1 \right], \quad (4.364)$$

$$M_{b1B} = M_{b1} \left[1 - \frac{2y}{\gamma_p - (\gamma_p - 1)y} F_1 \right], \quad (4.365)$$

где

$$M_{b1} = M_{eqv} = [\gamma_p - (\gamma_p - 1)y] t S_{eff1}. \quad (4.366)$$

Потенциальная энергия для варианта A равна

$$W_{potbA} = \frac{\xi_0^2}{2} w \left[\frac{\pi^4 t^3}{24l^3} Y_{eqvb} + 2(Y_p - Y_a^E) \int_0^\delta z^2 dz \int_{l_a/2}^{l/2} \frac{\pi^4}{l^4} \cos^2(\pi x/l) dx \right]. \quad (4.367)$$

В варианте B необходимо задать $Y_p = 0$ в выражении (4.367), где в общем случае Y_{eqvb} определяется формулой (4.354). В случае если $z_0 = z_{0m} = \delta$, выражение для Y_{eqvb} упрощается до формулы (4.355). Заметим, что этот вариант, в котором большая часть активного материала заменена пассивным, является наиболее показательным с точки зрения пределов точности первого приближения по сравнению со вторым приближением

к реальной форме колебаний.

После интегрирования и некоторых преобразований получим следующие выражения для эквивалентной жесткости: для варианта *A*

$$K_{b1A} = K_{b1} \left[1 + \frac{(\gamma_Y - 1)y^3}{y^3 + (1-y)^3 \gamma_Y} F_1 \right], \quad (4.368)$$

и для варианта *B*

$$K_{b1B} = K_{b1} \left[1 - \frac{y^3}{y^3 + (1-y)^3 \gamma_Y} F_1 \right], \quad (4.369)$$

где

$$K_{b1} = \frac{\pi^4 w t^3 Y_{eqvb}}{24l^3}. \quad (4.370)$$

Рассмотрим теперь второе приближение в предположении, что распределение смещения по поверхности колеблющегося стержня

$$\xi(x) = \xi_1 \cos(\pi x / l) + \xi_3 \cos(3\pi x / l). \quad (4.371)$$

Наиболее значительное изменение распределения смещений, и, следовательно, значений эквивалентных параметров, можно ожидать для конструкции, представленной на Рис. 4.21 (с) (вариант В), поскольку в этом случае неоднородность выражена наиболее сильно. Мы рассмотрим эту модификацию в первую очередь. Точно так же, как это было сделано для трехслойного стержня, после подстановки двучлена (4.371) для смещения в выражения для соответствующих энергий и некоторых преобразований, получим следующие соотношения для эквивалентных параметров стержня во втором приближении.

Для эквивалентных масс:

$$M_{b1B} = M_{b1} \left[1 - \frac{2y}{\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y} F_1 \right], \quad (4.372)$$

$$M_{b3B} = M_{b3} \left[1 - \frac{2y}{\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y} F_3 \right] \quad (4.373)$$

(обратите внимание, что в случае свободно опертого стержня $M_{b3} = M_{b1}$), и

$$M_{b13B} = M_{b1} \frac{2y}{\pi[\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y]} F_{13}. \quad (4.374)$$

Для эквивалентной жесткости:

$$K_{b1B} = K_{b1} \left[1 - \frac{y^3}{y^3 + (1-y)^3 \gamma_Y} F_1 \right], \quad (4.375)$$

$$K_{b3B} = 81K_{b1} \left[1 - \frac{y^3}{y^3 + (1-y)^3 \gamma_Y} F_3 \right], \quad (4.376)$$

$$K_{b13B} = \frac{9}{2\pi} K_{b1} \frac{y^3}{y^3 + (1-y)^3 \gamma_Y} F_{13}. \quad (4.377)$$

После того, как все эквивалентные параметры определены во втором приближении, аналогично тому, как это проделано для трехслойного стержня, получим частотное уравнение (4.343) и формулы для расчета коэффициентов формы колебаний и для форм колебаний во втором приближении (4.344) и (4.346). С помощью этих результатов произведены расчеты характеристик стержня во втором приближении и их сравнение со значениями аналогичных характеристик, определенных в первом приближении. Результаты вычислений представлены на Рис. 4.25 и Рис. 4.26 (Обратите внимание, что Рис. 4.25 — практически совпадает с Рис. 4.22 для трехслойного стержня).

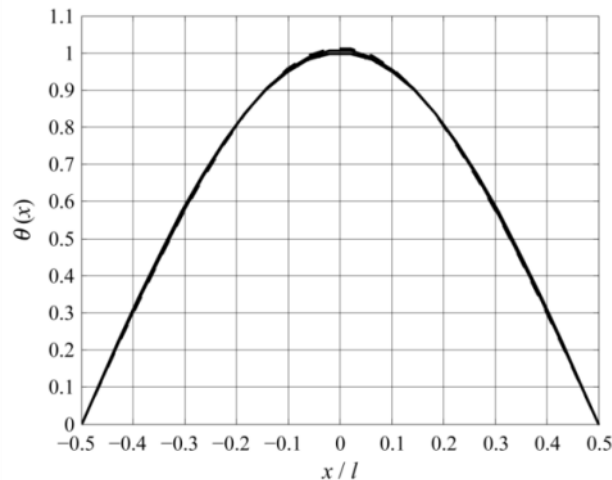


Рисунок 4.25: Распределение смещений (форм колебаний $\theta(x)$), определяемое во втором приближении при $l_a/l = 0.6$ в сравнении с $\theta(x) = \cos x$, используемым в первом приближении.

По результатам расчетов, представленных на рисунках, можно сделать тот же вывод, что и для неоднородных трехслойных стержней. Формы колебаний неоднородных стержней остаются такими же, как и у однородных. Этот вывод справедлив для всех разумных с практической точки зрения значений относительной толщины активного материала $y < z_{0m} / t$, даже для большего соотношения l_a / l , чем для неоднородных трехслойных стержней.

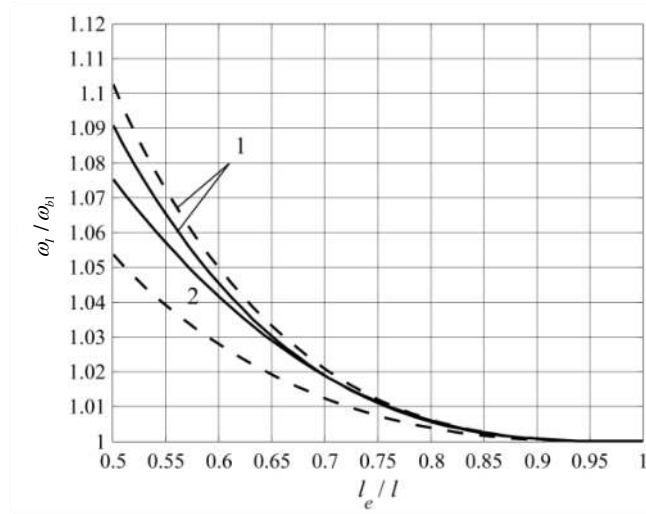


Рисунок 4.26: Отношения ω_1 / ω_{b1} резонансных частот неоднородных двухслойных стержней, рассчитанное во втором (ω_1) и первом (ω_{b1}) приближениях. Сплошные линии – $(\omega_1 / \omega_{b1})_A$, пунктирные линии – $(\omega_1 / \omega_{b1})_B$. (1) Комбинация алюминий – PZT-4. (2) комбинация сталь – PZT-4.

И все параметры преобразователей, в которых применены неоднородные двухслойные стержни, включая резонансные частоты и эффективные коэффициенты связи, можно рассчитывать с достаточной точностью, пользуясь эквивалентными параметрами, которые определены в первом приближении.

4.5.7 Колебания изгиба неоднородных круглых пластин

Общие выражения для кинетической и потенциальной энергий колеблющейся пластины, свойства которой неоднородны по объему, выглядят следующим образом.

Кинетическая энергия

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \rho \dot{\xi}(r)^2 d\tilde{V} = \frac{1}{2} \xi_0^2 2\pi \int_0^a \left[\int_0^t \rho(z, r) dz \right] \theta^2(r/a) r dr = \frac{1}{2} \xi_0^2 M_{eqv}, \quad (4.378)$$

где плотность материала $\rho(z, r) = \rho_a$ для активных частей и $\rho(z, r) = \rho_p$ для пассивных частей пластины.

Потенциальная энергия

$$W_{pot}^E = \frac{1}{2} \xi_0^2 2\pi \int_0^a \int_0^t (z - z_0)^2 Y_\sigma(z, r) \times \left[\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} \right)^2 + 2\sigma(z, r) \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] r dr dz, \quad (4.379)$$

где для краткости введен модифицированный модуль упругости

$$Y_\sigma = \frac{Y}{1 - \sigma^2}, \quad (4.380)$$

как комбинация модуля Юнга и коэффициента Пуассона для материала. Модифицированные модули упругости для пассивной и активной частей пластины обозначим

$$Y_{\sigma p} = \frac{Y_p}{1 - \sigma_p^2} \text{ и } Y_{\sigma a} = \frac{Y_1^E}{1 - \sigma_1^{E2}}, \quad (4.381)$$

Соответственно, интегралы (4.378) и (4.379) по объему \tilde{V} представляют собой общие выражения для энергий неоднородных круглых пластин. Далее будем рассматривать колебания в первой (низшей) форме, которая является наиболее употребительной для работы преобразователей. Смещение в первой форме обозначим $\xi(r) = \xi_0 \theta(r/a)$.

4.5.7.1 Колебания однородных в радиальном направлении пластин

В этом разделе будем рассматривать пластины неоднородные по толщине, но однородные в радиальном направлении. Таким образом, $Y_\sigma(z, r) = Y_\sigma(z)$, $\sigma(z, r) = \sigma(z)$ и $\rho(z, r) = \rho(z)$.

Особенность выражения для потенциальной энергии (4.379) заключается в том, что функция в скобках, строго говоря, зависит от того, каковы значения коэффициентов Пуассона пассивного и активного материалов, применяемых в механической системе. Покажем, однако, что эти выражения можно с большой точностью унифицировать для

современных составов пьезокерамики и для пассивных материалов, применяемых в конструкциях преобразователей, приняв значение коэффициента Пуассона $\sigma = 0.3$ при всех видах идеальных граничных условий. С этой целью рассмотрим интеграл

$$L(\sigma) = 2\pi \int_0^a \left[\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] r dr . \quad (4.382)$$

Обозначим для краткости

$$L_I = \int_0^a \left[\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] r dr , \quad (4.383)$$

$$L_{II} = \int_0^a \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2\theta}{dr^2} r dr = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 \Big|_0^a . \quad (4.384)$$

Очевидно, $L(\sigma) = L_I + 2\sigma L_{II}$. Таким образом, относительная погрешность из-за замены $L(\sigma)$ на $L(0.3)$ равна

$$\frac{L(\sigma) - L(0.3)}{L(0.3)} = 2(\sigma - 0.3) \frac{L_{II}}{L_I + 0.6L_{II}} . \quad (4.385)$$

Чтобы вычислить возможную ошибку в случае свободно опертой границы, воспользуемся выражением (2.150) для формы колебаний

$$\theta(r/a) = (1 - r^2/a^2)(1 - r^2/4a^2) . \quad (4.386)$$

Подстановка этой формы колебаний в формулы (4.383) и (4.384) приводит к значениям $L_I = 2.92/a^2$ и $L_{II} = 1.12/a^2$. Таким образом,

$$\frac{L(\sigma) - L(0.3)}{L(0.3)} \approx 0.6(\sigma - 0.3) \quad (4.387)$$

и для значений коэффициента Пуассона в диапазоне $0.25 < \sigma < 0.35$ изменения модуля этой величины составляет менее 0.03. В случае заземленной границы $L_{II} = 0$, таким образом, $L(\sigma) = L_I$ не зависит от σ .

При свободной границе подстановка формы колебаний по формуле (4.200) в интегралы (4.383) и (4.384) приводит к

$$\frac{L(\sigma) - L(0.3)}{L(0.3)} \approx 0.2(\sigma - 0.3) , \quad (4.388)$$

и ее изменение в диапазоне значений σ составляет менее 1%.

Теперь выражение (4.379) для потенциальной энергии круглой пластины однородной в радиальном направлении можно представить в виде

$$W_{pot}^E = \frac{1}{2} \xi_0^2 \left[\int_0^t Y_\sigma(z)(z - z_0)^2 dz \right] \cdot L(0.3)_{bc} = \frac{1}{2} \xi_0^2 \frac{t^3 Y_{\sigma eqv}}{12} \cdot L(0.3)_{bc} = \frac{1}{2} \xi_0^2 K_{eqv}^E, \quad (4.389)$$

где

$$Y_{\sigma eqv} = \frac{12}{t^3} \int_0^t Y_\sigma(z)(z - z_0)^2 dz \quad (4.390)$$

— эквивалент модуля Юнга пластины, упругие свойства которой неоднородны по толщине; и нижний индекс bc (от boundary conditions) указывает, что интеграл необходимо вычислять при форме колебаний, соответствующей конкретному граничному условию.

Таким образом, из соотношения (4.389) при определенной комбинации модулей упругости примененных материалов и при определенных граничных условиях, которым соответствует величина $L(0.3)_{bc}$, эквивалентную жесткость пластины определим в виде

$$K_{eqv}^E = \frac{t^3 Y_{\sigma eqv}}{12} \cdot L(0.3)_{bc}. \quad (4.391)$$

При свободно опертой границе $L(0.3)_{ss} = 7.2\pi / a^2$, при заземленной границе $L(0.3)_{cl} = 21.4\pi / a^2$ и для свободной границы $L(0.3)_{free} = 22\pi / a^2$.

Выражение (4.378) для кинетической энергии в случае однородной в радиальном направлении пластины можно представить в виде

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\xi}_0^2 S_{eff} t \rho_{eqv} = \frac{1}{2} \dot{\xi}_0^2 M_{eqv} \quad (4.392)$$

где

$$\rho_{eqv} = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(z) dz \quad (4.393)$$

эквивалентная плотность неоднородной по толщине пластины, и

$$S_{eff} = 2\pi \int_0^a \theta^2(r/a) r dr \quad (4.394)$$

эффективная площадь поверхности пластины. Таким образом, из (4.392)

$$M_{eqv} = \rho_{eqv} t S_{eff} . \quad (4.395)$$

Формулы для эквивалентного модуля Юнга и плотности круглых пластин неоднородных по толщине имеют такой же вид, что и представленные в Разделах 4.5.6.1 и 4.5.6.3 для стержней с аналогичной неоднородностью. Так, Y_{eqvt} и ρ_{eqvt} для трехслойных стержней определены выражениями (4.319) и (4.321), а $Y_{eqvb}(z_{0m})$ и ρ_{eqvb} для двухслойных выражениями (4.355) и (4.357).

4.5.7.2 Колебания изгиба круглых пластин неоднородных в радиальном направлении

С практической точки зрения интересны два варианта неоднородных в радиальном направлении пластин аналогичных рассмотренным для стержней: вариант А, в котором часть активного материала заменена пассивным, представлен на Рис. 4.21 (b) - (c), где координаты x , l и l_a следует заменить на r , a и r_a , соответственно; и вариант В, в котором часть активного материала удалена. Трехслойные пластины наиболее широко применимы в варианте А. Двухслойные пластины часто применяют и в варианте В.

Для демонстрации подхода к расчету параметров неоднородных в радиальном направлении пластин наиболее показательными являются двухслойные пластины варианта В, поскольку в этом случае неравномерность выражена наиболее сильно. Кроме того, конструкцию такого типа широко применяют в преобразователях, работающих в воздухе. Для краткости произведем подробный анализ колебаний пластин именно этого варианта. Тем более, что процедуры расчета для варианта А аналогичны, и можно ограничиться приведением окончательных результатов. Из тех же соображений краткости все расчеты в этом разделе произведены для наиболее важного вида граничных условий – со свободно опертым контуром, хотя выражения для всех параметров пластин являются общими для всех идеальных граничных условий.

Примем то же допущение относительно положения нейтральных плоскостей в двухслойной и пассивной частях пластины, что и в случае неоднородных стержней. А именно, определим их положение в пределах двухслойной и пассивной частей таким же образом, как и для соответствующих однородных в радиальном направлении пластин.

Наиболее выраженной неоднородностью обладает двухслойная пластина с

активным слоем, имеющим максимальную разумную толщину для заданной комбинации активного и пассивного материалов, т. е. в том случае если (см. Раздел 4.5.6.3) $\delta = z_{0m}$. Поэтому оценка самого сильного влияния неоднородности будет выполнена для значения $y = z_{0m} / t$. Поскольку вычисление эквивалентных параметров становится несложным после того, как известна форма колебаний, необходимо определить формы колебаний неоднородных в радиальном направлении двухслойных пластин. Сначала можно предположить, что форма колебаний остается такой же, как и для однородной в радиальном направлении пластины, т. е. что $\xi(r) = \xi_1 \theta_1$. Но это предположение можно считать справедливым только в первом приближении. Чтобы оценить пределы применимости первого приближения, следует рассмотреть второе приближение, представив распределение смещений по поверхности пластины как суперпозицию двух нормальных форм колебаний, а именно:

$$\xi(r) = \xi_1 \theta_1 + \xi_2 \theta_2, \quad (4.396)$$

где для краткости нормальные формы колебаний пластины при соответствующих граничных условиях обозначены $\theta_1 = \theta(k_1 r)$ и $\theta_2 = \theta(k_2 r)$. В результате следует определить относительный вклад второй формы в диапазоне разумных относительных размеров активной и пассивной частей механической системы.

4.5.7.3 Эквивалентные параметры двухслойных пластин неоднородных в радиальном направлении в первом приближении

Используя результаты, полученные в Разделе 4.5.6.4 для эквивалентного модуля Юнга двухслойных стержней (пластин), и предположив, что коэффициент Пуассона $\sigma(z, r)$ заменен на $\sigma = 0.3$ выражение для потенциальной энергии неоднородной в направлении радиуса двухслойной пластины можно представить в виде

$$W_{pot} = \frac{\xi_1^2}{2} 2\pi \left\{ \frac{t^3}{12} Y_{eqvb} \int_0^a F(\theta_1) r dr - \right. \\ \left. - \frac{t^3}{12} Y_{eqvb} \int_{r_a}^a F(\theta_1) r dr + \frac{t^3}{12} Y_{\sigma p} \int_{r_a}^a F(\theta_1) r dr \right\} = \frac{\xi_1^2}{2} K_{eqvb1}, \quad (4.397)$$

где

$$\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)^2 + 2 \cdot 0.3 \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr}\right)^2 = F(\theta). \quad (4.398)$$

Первый член в скобках в выражении (4.397) соответствует эквивалентной жесткости однородной двухслойной пластины K_{eqvb} . Второй член компенсирует добавку к энергии, которая сделана для «укомплектования» эквивалентной жесткости однородной пластины. Третий член соответствует эквивалентной жесткости пассивной части пластины, в варианте B имеющей толщину t_p . Далее в этом разделе мы для краткости опустим нижние индексы "eqv" в обозначениях эквивалентных жесткостей и масс. Таким образом, например, K_{eqvb} будет читаться как K_b . После очевидных преобразований получим выражение для эквивалентной жесткости неоднородной в радиальном направлении двухслойной пластины в виде

$$K_{b1} = K_b \left[1 - \left(1 - \frac{(1-y)^3 Y_{\sigma p}}{Y_{eqvb}(z_0)} \right) \frac{F_{r1}}{L_1(0.3)} \right], \quad (4.399)$$

где в общем случае $Y_{eqvb}(z_0)$ определяется по формуле (4.354). В случае если $\delta = z_{0m}$

$$K_{b1} = K_b \left[1 - \left(1 - \frac{\gamma_Y [1 - (z_{0m}/t)]^3}{4(z_{0m}/t)^2} \right) \frac{F_{r1}}{L_1(0.3)} \right]. \quad (4.400)$$

Здесь введены дополнительные к выражению (4.398) обозначения

$$F_{ri} = 2\pi \int_{r_a}^a F(\theta_i) r dr, \quad 2\pi \int_0^a F(\theta_i) r dr = L_i(\sigma) \quad (i=1,2,\dots). \quad (4.401)$$

Кинетическая энергия неоднородной пластины определяется выражением

$$W_{kin} = \frac{1}{2} 2\pi \left[t \rho_{eqvb} \int_0^a (\dot{\xi}_1 \theta_1)^2 r dr - \delta \rho_a \int_{r_a}^a (\dot{\xi}_1 \theta_1)^2 r dr \right] = \frac{1}{2} \dot{\xi}_1^2 M_{b1}, \quad (4.402)$$

где первый член соответствует эквивалентной массе однородной двухслойной пластины в первом приближении M_b , а второй член компенсирует сделанную в первом добавку энергии отсутствующего активного участка. Из этого выражения, после подстановки ρ_{eqvb} из соотношения (4.357), получим

$$M_{b1} = M_b \left[1 - \frac{y}{\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y} \frac{S_{eff\ r1}}{S_{eff\ 1}} \right]. \quad (4.403)$$

Здесь введены обозначения для эффективных площадей всей пластины и ее части при первой форме колебаний

$$S_{eff\ 1} = 2\pi \int_0^a \theta_1^2(r/a) r dr, \quad S_{eff\ r1} = 2\pi \int_{r_a}^a \theta_1^2(r/a) r dr. \quad (4.404)$$

4.5.7.4 Эквивалентные параметры двухслойных пластин неоднородных в радиальном направлении во втором приближении

Для того чтобы определить эквивалентные параметры пластины во втором приближении, следует подставить в выражения для потенциальной и кинетической энергий двухслойной пластины смещения $\xi(r)$ в соответствии с формулой (4.396). В результате получим

$$W_{pot} = \frac{1}{2} 2\pi \left\{ \frac{t^3}{12} Y_{eqvb} \int_0^a F(\xi_1 \theta_1 + \xi_2 \theta_2) r dr - \frac{t^3}{12} Y_{eqvb} \int_{r_a}^a F(\xi_1 \theta_1 + \xi_2 \theta_2) r dr - \frac{t^3}{12} Y_{\sigma p} \int_{r_a}^a F(\xi_1 \theta_1 + \xi_2 \theta_2) r dr \right\} = \frac{1}{2} (\xi_1^2 K_{b1} + 2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 K_{b2}). \quad (4.405)$$

При преобразованиях интегралов надо иметь в виду, что из выражения (4.398) следуют соотношения

$$F(\xi_1 \theta_1 + \xi_2 \theta_2) = \xi_1^2 F(\theta_1) + 2\xi_1 \xi_2 F(\theta_1, \theta_2) + \xi_2^2 F(\theta_2), \quad (4.406)$$

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{d^2 \theta_1}{dr^2} \frac{d^2 \theta_2}{dr^2} + 0.3 \frac{1}{r} \left(\frac{d\theta_1}{dr} \frac{d^2 \theta_2}{dr^2} + \frac{d\theta_2}{dr} \frac{d^2 \theta_1}{dr^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d\theta_1}{dr} \frac{d\theta_2}{dr}. \quad (4.407)$$

Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые производятся в первом приближении, в ходе которых учитывается, что функции θ_1 и θ_2 являются ортогональными в интервале $[0 \leq r \leq a]$, получим следующие результаты для жесткостей:

K_{b1} определяется по формуле (4.399),

$$K_{b2} = K_b \frac{L_2(0.3)}{L_1(0.3)} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\gamma_Y (1-y)^3}{4(z_{0m}/t)^2} \right] \frac{F_{r2}}{L_2(0.3)} \right\}, \quad (4.408)$$

$$K_{b12} = K_b \frac{F_{r12}}{L_1(0.3)} \frac{\gamma_Y (1-y)^3}{4(z_{0m}/t)^2}, \quad (4.409)$$

где

$$F_{r12} = 2\pi \int_{r_a}^a F(\theta_1, \theta_2) r dr . \quad (4.410)$$

Кинетическая энергия во втором приближении

$$\begin{aligned} W_{kin} &= \frac{1}{2} 2\pi \left[t \rho_{eqvb} \int_0^a (\dot{\xi}_1 \theta_1 + \dot{\xi}_2 \theta_2)^2 r dr - \delta \rho_a \int_{r_a}^a (\dot{\xi}_1 \theta_1 + \dot{\xi}_2 \theta_2)^2 r dr \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\xi_1^2 M_{b1} + 2\xi_1 \xi_2 M_{b12} + \xi_2^2 M_{b2}), \end{aligned} \quad (4.411)$$

откуда получаем выражения для эквивалентных масс:

Масса M_{b1} определяется по формуле (4.403)

$$M_{b2} = M_b \frac{S_{eff2}}{S_{eff1}} \left[1 - \frac{y}{\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y} \frac{S_{effr2}}{S_{eff2}} \right], \quad (4.412)$$

$$M_{b12} = -M_b \frac{y S_{effr12}}{[\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y] S_{eff1}}, \quad (4.413)$$

где

$$S_{effr12} = 2\pi \int_{r_a}^a \theta_1 \theta_2 r dr . \quad (4.414)$$

4.5.7.5 Свободные колебания неоднородной в радиальном направлении пластины как системы с двумя степенями свободы

Поскольку выражения для потенциальной и кинетической энергий неоднородной в радиальном направлении пластины известны, могут быть выведены уравнения Лагранжа свободных колебаний пластины и с их помощью определены низшая резонансная частота и форма колебаний пластины во втором приближении. Последовательность действий аналогична той, что была применена при рассмотрении стержней в Разделе 4.5.6.4. А именно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_i} = 0, \quad (i = 1, 2) . \quad (4.415)$$

После подстановки выражений (4.405) и (4.411) для потенциальной и кинетической

энергий эти уравнения переходят в

$$(K_{b1} - \omega^2 M_{b1})\xi_1 + (K_{b12} - \omega^2 M_{b12})\xi_2 = 0, \quad (4.416)$$

$$(K_{b12} - \omega^2 M_{b12})\xi_1 + (K_{b2} - \omega^2 M_{b2})\xi_2 = 0. \quad (4.417)$$

Частотное уравнение, из которого можно найти нижнюю резонансную частоту пластины во втором приближении

$$(1 - \Omega) \left[\left(\frac{\omega_{b2}^2}{\omega_{b1}^2} \right) - \Omega \right] - \left(\frac{M_{b12}^2}{M_{b1} M_{b2}} \right) \left[\left(\frac{K_{b12}}{M_{b12} \omega_{b1}^2} \right) - \Omega \right]^2 = 0, \quad (4.418)$$

где $\omega_{b1}^2 = (K_{b1} / M_{b1})$, $\omega_{b2}^2 = (K_{b2} / M_{b2})$ и $\Omega = (f / f_{b1})^2$. После того, как будет получено меньшее значение Ω (обозначим эту величину как $\Omega_l = (f_l / f_{b1})^2$, где f_l — нижняя резонансная частота пластины во втором приближении), отношение смещений ξ_2 и ξ_1 на этой частоте (или коэффициент формы колебаний ms_l) определим из уравнения (4.116) в виде

$$ms_l = \frac{\xi_2}{\xi_1} \Big|_{at f=f_l} = - \frac{M_{b1}}{M_{b12}} \frac{1 - \Omega_l}{(K_{b12} / K_{b1} \omega_{b1}^2) - \Omega_l}. \quad (4.419)$$

Распределение колебаний на первой резонансной частоте — $\xi(r) = \xi_1[\theta_1(r) + ms_l \theta_2(r)]$. Соответствующая форма колебаний во втором приближении

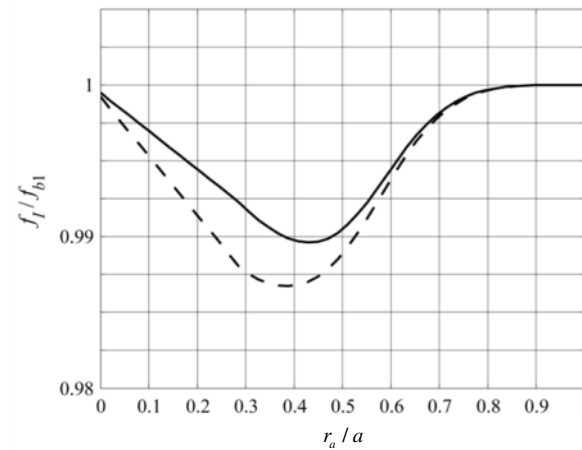


Рисунок 4.27: Отношение f_l / f_{b1} резонансных частот неоднородных двухслойных круглых пластин в зависимости от r_a / a вычисленных во втором (f_l) и в первом (f_{b1}) приближениях для комбинаций PZT-4 с алюминием (сплошная линия) и сталью (штриховая линия) при $y = z_{0m} / t$.

$$\theta(r) = \frac{\xi(r)}{\xi(0)} = \frac{1}{1 + ms_I} [\theta_1(r) + ms_I \theta_2(r)]. \quad (4.420)$$

На Рис. 4.27 и Рис. 4.28 представлены результаты расчета во втором приближении первых резонансных частот и коэффициентов формы колебаний в зависимости от отношения r_a / a для неоднородных пластин для разных сочетаний пассивных материалов с керамикой PZT-4. Расчеты произведены при условии $y = z_{0m} / t$, при котором эффект неоднородности наиболее выражен.

В крайних случаях при $r_a = a$ и $r_a = 0$ коэффициент формы колебаний $ms_I = 0$, так как пластины однородны в обоих этих случаях. Максимальное отклонение форм колебаний от таковых для однородной пластины можно ожидать при $r_a / a \approx 0.5$. На Рис. 4.29 представлены форм колебаний, рассчитанные для разных комбинаций применяемых материалов при соотношении $r_a / a = 0.6$. Из графиков следует, что даже в этом случае отклонение от формы колебаний для однородной пластины ничтожно мало. Вероятный разумный предел уменьшения радиуса слоев активных материалов можно оценить приблизительно как $r_a / a \geq 0.6$, даже при наиболее критичном варианте конструкции *B*, в котором часть активного материала удалена. В результате резонансные частоты пластин, рассчитанные во втором приближении, почти не отклоняются от определенных в первом приближении, как видно из Рис. 4.27.

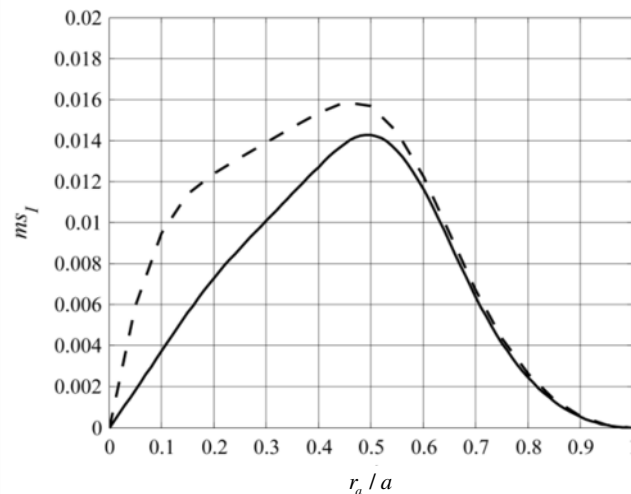


Рисунок 4.28: Коэффициенты формы колебаний $ms_I = \xi_2 / \xi_1$ в зависимости от r_a / a на низших резонансных частотах неоднородных двухслойных круглых пластин для комбинаций PZT-4 с алюминием (сплошная линия) и сталью (штриховая линия) при $y = z_{0m} / t$.

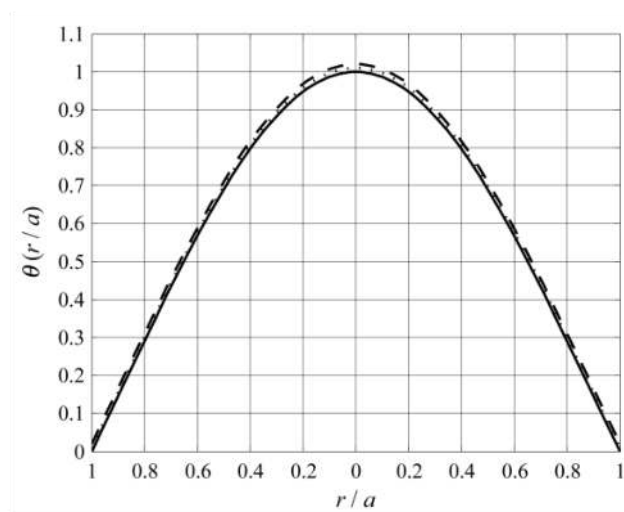


Рисунок 4.29: Формы колебаний $\theta(r/a)$, определенные во втором приближении при отношении $r_a/a = 0.5$ (сплошная линия - алюминий и PZ-4, штриховая линия - сталь и PZT-4) по сравнению с формой колебаний $\theta_1(r/a)$ для однородной пластины (штрихпунктирная линия), которая используется в расчетах в первом приближении.

Таким образом, можно сделать вывод, что параметры двухслойных пластин неоднородных вдоль радиуса можно рассчитывать с достаточной точностью, применяя формы колебаний однородных пластин, по меньшей мере, до отношений $r_a/a \geq 0.6$ даже для максимально разумных толщин активного материала.

Обратите внимание: из Рис. 4.28 следует, что максимальный вклад второй формы колебаний в фактическую форму колебаний имеет место при $r_a/a = 0.5$. Поэтому первая форма колебаний доминирует во всем диапазоне $0 \leq r_a/a \leq 1$, и можно рассчитывать эквивалентные параметры с использованием только первой моды с одинаковой степенью точности при всех значениях r_a/a . Но, как будет показано в Главе 9, эффективный коэффициент связи пластины падает при $(r_a/a) < 0.5$, и дальнейшее уменьшение относительных размеров активного слоя не имеет смысла.

После того, как будет доказано, что решение для первой формы колебаний является достаточно точным для расчета параметров конструкций с пластинами с наиболее выраженной неоднородностью (двухслойные модификации В), можно рассмотреть другие варианты преобразователей (двухслойные и трехслойные модификации А), применив те же приближения и аналогичные процедуры расчета. Так, например, эквивалентные

жесткости и массы для двухслойной конструкции модификации A можно получить из слегка измененных выражений (4.397) для потенциальной и (4.402) для кинетической энергий. А именно, в последнем члене в скобках в выражении (4.397) величину t_p надо заменить на полноразмерную толщину t . А в выражении (4.402) в последнем члене в скобках плотность ρ_a надо заменить на $(\rho_a - \rho_p)$. Это приведет к следующим выражениям для относительной жесткости и массы. Для жесткости

$$\frac{K_{b1}}{K_b} = 1 - \left(1 - \frac{Y_{\sigma p}}{Y_{eqvb}(z_0)} \right) \frac{F_{r1}}{L_1(0.3)} \quad (4.421)$$

в общем случае, и

$$\frac{K_{b1}}{K_b} = 1 - \left(1 - \frac{\gamma_Y}{4(z_{0m}/t)^2} \right) \frac{F_{r1}}{L_1(0.3)} \quad (4.422)$$

в случае если $\delta = z_{0m}$. А для массы

$$\frac{M_b}{M_{b1}} = 1 + \frac{y(\gamma_\rho - 1)}{\gamma_\rho - (\gamma_\rho - 1)y} \frac{S_{eff r1}}{S_{eff 1}}. \quad (4.423)$$

4.5.8 Приближенные методы решения задач колебаний

До сих пор опорные функции были представлены системой нормальных форм колебаний для рассматриваемого реального упругого тела или для тела той же конфигурации с близкими свойствами и при тех же граничных условиях. Но в общем случае для тел, не имеющих подходящую конфигурацию и/или колеблющихся при реальных граничных условиях, определение самих нормальных форм колебаний эквивалентно решению задачи колебаний, и не может быть выполнено аналитически. Можно предпринять попытку решить соответствующую задачу колебаний приближенно с помощью прямых методов, заранее ограничив число принимаемых во внимание степеней свободы, или с помощью анализа методом конечных элементов (МКЭ). Некоторые соображения о применении МКЭ к расчету механических систем преобразователей приведены в Главе 15. Здесь рассмотрим примеры применения наиболее часто употребляемых для расчета механических систем преобразователей прямых методов, в основе которых лежит анализ энергий систем, а именно: метод на основе применения принципа Рэля к анализу систем

с одной степенью свободы; и метод последовательных приближений Ритца, который может быть применен для расчета систем с несколькими степенями свободы.

4.5.8.1 Колебания изгиба круглой пластины опертой в центре

Колебания опертой в центре пластины со свободным контуром (Рис. 4.30), как потенциальной механической системы электромеханического преобразователя, были рассмотрены аналитически с использованием принципа Рэля в работе [11]. Распределение нормальных смещений $\xi(r)$ нейтральной поверхности пластины, опертой в центре, должно соответствовать следующим условиям: смещение и угол поворота в центре и момент на контуре пластины равны нулю. Так что, соответственно,

$$\xi(r)|_{r=0} = 0, \quad (4.424)$$

$$\left. \frac{d\xi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.425)$$

$$\left. \frac{d\xi^2}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\xi}{dr} \right|_{r=a} = 0. \quad (4.426)$$

Заметим, что такие же условия имеют место и для пластины, заторможенной в центре.

В результате решения этой задачи в работе [10] были определены волновое число для первой резонансной формы колебаний $ka = 1.94$ и соответствующая резонансная частота

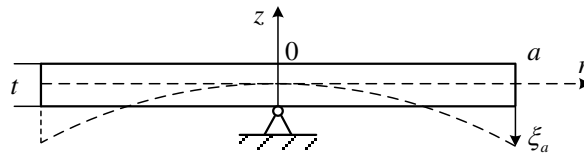


Рисунок 4.30: Схематичный вид пластины, опертой в центре.

$$f_{res1} = 0.172 \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (4.427)$$

Рассмотрим этот пример опертой в центре пластины подробно, поскольку он типичен и удобен для иллюстрации применения принципа Рэля в целом.

Коротко формулировка принципа Рэля гласит, что резонансная частота

предполагаемой формы колебаний системы не может быть ниже, чем первая резонансная частота ее реальной формы колебаний. Процедура применения принципа предусматривает следующие этапы.

Шаг 1: Определение предполагаемой формы колебаний (формы прогиба) системы.

Выражение для предполагаемой формы прогиба должно удовлетворять граничным условиям для системы и включать переменный параметр. В нашем случае это может быть степенной ряд

$$\xi(r/a) = c_0 + c_1 \frac{r}{a} + c_2 \frac{r^2}{a^2} + c_3 \frac{r^3}{a^3} + c_4 \frac{r^4}{a^4} + \dots \quad (4.428)$$

Чтобы удовлетворить условия (4.424) и (4.425) необходимо, чтобы $c_0 = c_1 = 0$. Из условия нормирования функции один из коэффициентов может быть единицей, пусть это будет $c_3 = 1$. Одно уравнение для определения соотношения между неизвестными коэффициентами можно получить с использованием граничного условия (4.426). Еще одно уравнение можно получить, применив принцип Рэлея. Таким образом, достаточно сохранить три члена в ряду (4.428) и представить предполагаемую форму прогиба в виде функции

$$\xi(r/a) = \frac{r^2}{a^2} + c_3 \frac{r^3}{a^3} + c_4 \frac{r^4}{a^4} \quad (4.429)$$

Используя условие (4.426) (приняв $\sigma = 0.3$, как достаточно точное значение для всех применяемых PZT композиций), получим

$$c_4 = -0.20 - 0.52c_3 \quad (4.430)$$

В результате выражение для предполагаемой формы прогиба (формы колебаний), удовлетворяющей всем граничным условиям,

$$\xi(r/a) = \frac{r^2}{a^2} + c_3 \frac{r^3}{a^3} - (0.20 + 0.52c_3) \frac{r^4}{a^4}, \quad (4.431)$$

имеет единственный параметр, который следует найти, применив принцип Рэлея.

Шаг 2: Определение кинетической и потенциальной энергий системы.

Общие выражения для кинетической и потенциальной энергий колеблющейся круглой пластины известны. Это

$$W_{kin} = \frac{1}{2} 2\pi\rho t \int_0^a \dot{\xi}(r/a)^2 r dr = \frac{1}{2} \dot{\xi}(1)^2 M_{eqv} = \frac{1}{2} \xi(1)^2 \omega^2 M_{eqv}, \quad (4.432)$$

$$W_{pot} = \pi D \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 - 2(1-0.3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right] r dr = \frac{1}{2} \xi(1)^2 K_{eqv}. \quad (4.433)$$

Здесь $\xi(1)$ смещение центра приведения на краю пластины.

После подстановки смещения $\xi(r/a)$ из (4.431) и интегрирования, получим следующие выражения для M_{eqv} и K_{eqv}

$$M_{eqv} = 7.5M \cdot (0.07c_3^2 + 0.26c_3 + 0.24), \quad (4.434)$$

$$K_{eqv} = \frac{132\pi t^3 Y}{12(1-\sigma^2)} \cdot (0.15c_3^2 + 0.40c_3 + 0.29). \quad (4.435)$$

Шаг 3: Применение принципа Рэлея.

Приравнявая максимальные значения кинетической и потенциальной энергий, получаем

$$\omega^2(c_3) = \frac{K_{eqv}}{M_{eqv}} = 1.47 \frac{t^2}{a^4} \frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)} \frac{0.15c_3^2 + 0.40c_3 + 0.29}{0.07c_3^2 + 0.26c_3 + 0.24}. \quad (4.436)$$

Согласно принципу Рэлея, ближайшее приближение к реальной нормальной форме колебаний будет достигнуто при значении коэффициента c_3 , дающего минимум частоте $\omega(c_3)$, которое получим из уравнения

$$[\omega^2(c_3)]' = 0. \quad (4.437)$$

Дифференцирование выражения (4.413) по c_3 приводит к уравнению

$$c_3^2 + 2.8c_3 + 1.7 = 0. \quad (4.438)$$

Корень уравнения $c_3 = -0.91$. Затем из уравнения (4.430) найдем $c_4 = 0.28$, и выражение для предполагаемой формы кривой прогиба (4.429) приобретет вид

$$\xi(r/a) = \frac{r^2}{a^2} - 0.91 \frac{r^3}{a^3} + 0.28 \frac{r^4}{a^4}. \quad (4.439)$$

Резонансная частота, определенная из уравнения (4.436) при $c_3 = 0.91$, равна

$$f_{res1} = 0.171 \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}}, \quad (4.440)$$

Эквивалентная масса и жесткость, вычисленные с помощью выражений (4.434) и (4.435)

$$M_{eqv} = 0.48\pi a^2 \rho t = 0.48M, \quad K_{eqv} = \frac{6.6\pi t^3 Y}{12a^2(1-\sigma^2)}. \quad (4.441)$$

4.5.8.2 Колебания изгиба круглой пластины на центральной опоре, имеющей конечный радиус

Опертая в центре пластина является идеальной моделью (Рис 4.31). В практических применениях, таких, например, как механическая система акселерометра, реальная опора имеет конечный радиус. Предположим, что пластина заделана на контуре опоры, имеющей радиус $r = b$, т. е. $[\partial \xi(r) / \partial r]_{r=b} = 0$.

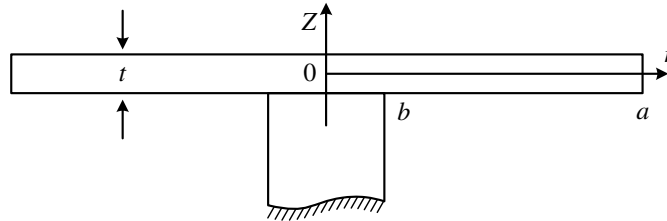


Рисунок 4.31: Схематичное представление диска с центральной опорой, имеющей конечный радиус.

Для решения задачи воспользуемся метод Рэлея-Рица, приняв в качестве допустимой функцию, полученную в работе [12] для кольцевой пластины, заделанной на внутренней и свободной на внешней границе. А именно:

$$\xi(r,t) = \xi_1(t) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \ln \frac{r}{b} + \xi_2(t) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2. \quad (4.442)$$

Для краткости введем обозначение

$$f(r/b) = 1 - \frac{r^2}{b^2}. \quad (4.443)$$

Таким образом,

$$\xi(r, t) = \xi_1(t) \cdot f(r/b) \cdot \ln \frac{r}{b} + \xi_2(t) \cdot f^2(r/b). \quad (4.444)$$

Это выражение содержит обобщенные смещения ξ_1 и ξ_2 . Чтобы определить форму смещений пластины, надо найти отношение ξ_2 / ξ_1 .

В качестве первого шага представим кинетическую и потенциальную энергии колебаний пластины. Кинетическая энергия

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \rho t \cdot 2\pi \int_b^a \dot{\xi}^2 r dr = \frac{1}{2} \left(\dot{\xi}_1^2 M_1 + 2\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 M_{12} + \dot{\xi}_2^2 M_2 \right), \quad (4.445)$$

где

$$M_1 = 2\pi \rho t \int_b^a [f(r/b) \cdot \ln(r/b)]^2 r dr, \quad (4.446)$$

$$M_2 = 2\pi \rho t \int_b^a f(r/b)^4 r dr, \quad (4.447)$$

$$M_{12} = 2\pi \rho t \int_b^a f(r/b)^3 \ln(r/b) r dr. \quad (4.448)$$

Потенциальная энергия

$$\begin{aligned} W_{pot} &= \frac{1}{2} \left\{ D \cdot 2\pi \int_b^a \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right] r dr \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 K_1 + 2\xi_1 \xi_2 K_{12} + \xi_2^2 K_2 \right), \end{aligned} \quad (4.449)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= 2\pi D \int_b^a \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} f \ln(r/b) \right]^2 + 2\sigma \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} f \ln(r/b) \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} f \ln(r/b) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f \ln(r/b) \right]^2 \right\} r dr, \end{aligned} \quad (4.450)$$

$$K_2 = 2\pi D \int_b^a \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} f^2 \right]^2 + 2\sigma \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} f^2 \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} f^2 \right] + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f^2 \right]^2 \right\} r dr, \quad (4.451)$$

$$K_{12} = 2\pi D \int_b^a \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} f \ln(r/b) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (f^2) \right] + \sigma \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} f \ln(r/b) \right] \frac{\partial}{\partial r} (f^2) \right\} r dr + \\ + 2\pi D \int_b^a \left\{ \sigma \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} f \ln(r/b) \right] \frac{\partial^2}{\partial r^2} (f^2) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} f \ln(r/b) \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} (f^2) \right] \right\} r dr. \quad (4.452)$$

Здесь

$$D = \frac{Yt^3}{12(1-\sigma^2)}. \quad (4.453)$$

Следующий шаг — получение уравнений Лагранжа относительно обобщенных смещений ξ_1 и ξ_2 .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_i} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (4.454)$$

или

$$(j\omega M_{11} + K_1 / j\omega) \dot{\xi}_1 + (j\omega M_{12} + K_{12} / j\omega) \dot{\xi}_2 = 0, \quad (4.455)$$

$$(j\omega M_{12} + K_{12} / j\omega) \dot{\xi}_1 + (j\omega M_2 + K_2 / j\omega) \dot{\xi}_2 = 0. \quad (4.456)$$

После очевидных преобразований получаем уравнения

$$(\omega^2 - \omega_1^2) \xi_1 + \frac{M_{12}}{M_1} (\omega^2 - \omega_{12}^2) \xi_2 = 0, \quad (4.457)$$

$$\frac{M_{12}}{M_2} (\omega^2 - \omega_{12}^2) \xi_1 + (\omega^2 - \omega_2^2) \xi_2 = 0. \quad (4.458)$$

где

$$\omega_1^2 = K_1 / M_1, \quad \omega_2^2 = K_2 / M_2, \quad \omega_{12}^2 = K_{12} / M_{12}. \quad (4.459)$$

Частотное уравнение этой системы уравнений

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) - \frac{M_{12}^2}{M_1 M_2} (\omega^2 - \omega_{12}^2)^2 = 0. \quad (4.460)$$

После введения обозначения

$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \Omega, \quad (4.461)$$

уравнение (4.460) приобретает вид

$$(\Omega - 1) \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \Omega - 1 \right) - \frac{K_{12}^2}{K_1 K_2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{12}^2} \Omega - 1 \right)^2 = 0. \quad (4.462)$$

Обозначим решения этого уравнения Ω_1 и Ω_2 , предположив, что $\Omega_1 < \Omega_2$. При известном значении Ω_1 нижнюю резонансную частоту пластины ω_r получим из соотношения (4.461) в виде

$$\omega_r^2 = \omega_1^2 \Omega_1. \quad (4.463)$$

При подстановке этого значения резонансной частоты в одно из уравнений (4.457) или (4.458) найдем отношение обобщенных смещений, которые мы обозначаем A , например,

$$A = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{M_{12}}{M_2} \frac{\omega_r^2 - \omega_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_r^2}. \quad (4.464)$$

Объединив выражения (4.442) и (4.464), получим форму смещения

$$\xi(r, t) = \xi_1(t) \left[\left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \ln \frac{r}{b} + A \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2 \right] \quad (4.465)$$

и резонансную форму колебаний пластины

$$\theta(r/b) = \frac{\xi(r, t)}{\xi(a, t)} = \left[\left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \ln \frac{r}{b} + A \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln \frac{a}{b} + A \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.466)$$

При известном выражении для формы колебаний могут быть определены все эквивалентные параметры пластины и соответствующего электромеханического преобразователя. Расчеты, выполненные для разных соотношений внутреннего и внешнего радиусов b/a , привели к следующим результатам.

Резонансные частоты.

Следуя обозначениям, принятым в работе [13], резонансную частоту представим в виде

$$\omega_{r_{b/a}} = \lambda^2 \frac{t}{a^2 \sqrt{12}} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (4.467)$$

Зависимость коэффициента λ от отношения b/a представлена на Рис. 4.32 и в Таблице 4.5.

Задача о колебаниях пластин с отверстием, заделанным по его контуру, была рассмотрена в нескольких работах (библиографию см. по ссылке [13]), включая работы [14] и [15]. Полученные в этих работах на основе аналитического решения значения коэффициентов λ также приведены на Рис. 4.32 и в Таблице 4.5 для сравнения.

Таблица 4.5: Параметры пластины при различных отношениях b/a

b/a	0.7	0.6	0.5	0.1	0.05	0 (опора по центру)
A	0.23	0.18	0.13	0.01	0.003	-
λ допустимая функция	6.13	4.59	3.68	2.25	2.18	1.95
λ Статическое прибр. "точное"	6.17	4.61	3.69	2.19	2.13	
λ значение из работ [14] и [15]	6.08	4.53	3.61	2.06		
$\frac{S_{eff\ b/a}}{S_{b/a}}$	0.28	0.28	0.30	0.36	0.37	0.48
статический $\frac{S_{av\ b/a}}{S_{b/a}}$	0.26	0.28	0.29	0.36	0.37	
	0.41	0.44	0.45	0.52	0.53	0.64
статический	0.41	0.42	0.44	0.52	0.53	
K	200	79	41	9.13	8.35	6.9

Заметим, что хорошее приближение к решению задачи для диапазона низких частот,

включая частоту первого резонанса, может быть получено, если в качестве формы колебаний применить форму статического прогиба пластины под действием сил, равномерно распределенных по ее поверхности. Такой подход будет детально рассмотрен в Разделе 4.5.9. В Таблице 4.5 приведены для сравнения результаты, полученные с применением форм статического прогиба (см. работу [2]), а на Рис. 4.33 представлена форма прогиба при отношении $b/a = 0.05$.

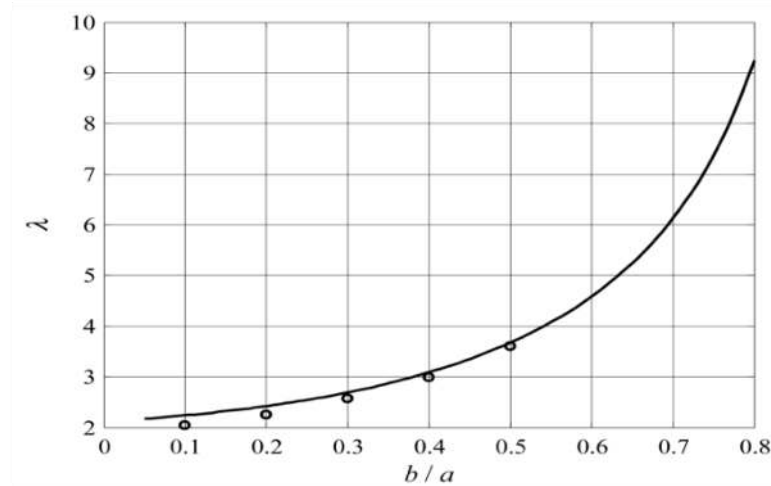


Рисунок 4.32: Зависимость коэффициента λ от отношения радиусов b/a . Результаты вычислений, приведенных в работах [14] и [15], представлены кружочками.

Формы колебаний.

Значения коэффициентов A , от которых зависят формы колебаний (см. (4.466)), приведены в Таблице 4.5 при различных отношениях b/a . Соответствующие им формы колебаний представлены на Рис. 4.33.

Эквивалентные параметры.

Эквивалентная масса пластины определяется по формуле

$$M_{eqv b/a} = \rho t S_{eff b/a}, \quad (4.468)$$

где

$$S_{eff} = 2\pi \int_b^a \theta^2(r) r dr. \quad (4.469)$$

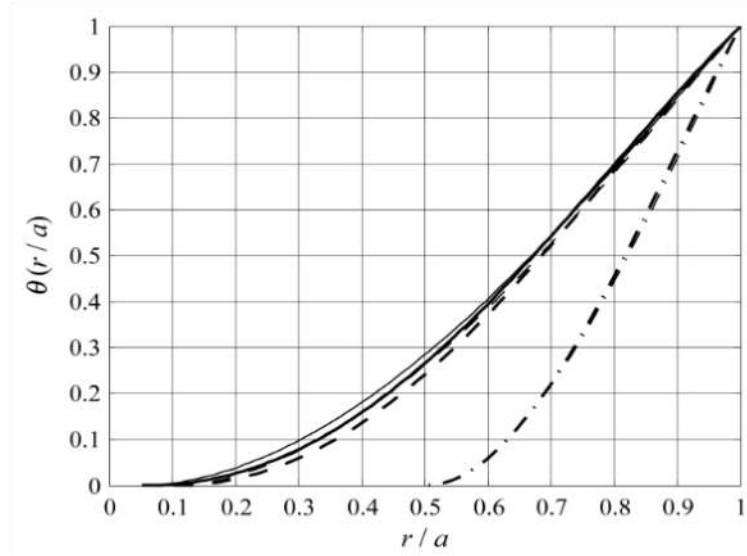


Рисунок 4.33: Формы колебаний пластины при различных отношениях b/a : 0.05 (сплошная линия), 0.1 (штриховая линия), 0.5 (штрихпунктирная линия). Статическое приближение при $b/a = 0.05$ показано тонкой сплошной линией.

Значения $S_{eff\ b/a}$, нормированные к $S_{b/a} = \pi a^2(1 - b^2/a^2)$, приведены в Таблице 4.5.

Эквивалентную жесткость $K_{eqv\ b/a}$ можно определить по формуле

$$K_{eqv\ b/a} = \omega_{r\ b/a}^2 M_{eqv\ b/a}. \quad (4.470)$$

Следуя формулам (4.467) и (4.468), получим

$$K_{eqv\ b/a} = \lambda^4 \frac{S_{eff\ b/a}(1 - b^2/a^2)}{S_{b/a}} \frac{\pi t^3}{12a^2} \frac{Y}{(1 - \sigma^2)}. \quad (4.471)$$

В Таблице 4.5 приведены так же коэффициенты

$$\kappa = \lambda^4 S_{eff\ b/a} (1 - b^2/a^2) / S_{b/a} \quad (4.472)$$

Статическая деформация пластины равномерно распределенной нагрузкой q (гидростатическое давление, звуковое давление на низких частотах, силы инерции под действием ускорения) пропорциональна эквивалентной силе $F_{eqv\ b/a}$, которая равна

$$F_{eqv\ b/a} = qS_{av\ b/a} \quad (4.473)$$

где

$$S_{av\ b/a} = 2\pi \int_b^a \theta(r) r dr. \quad (4.474)$$

Значения $S_{av\ b/a} / S_{b/a}$ при статической нагрузке приведены в Таблице 4.5.

Резонансные частоты колебаний ω_r пропорциональны λ^2 . Их приблизительные значения слегка выше, чем известные из классической теории тонких пластин и представленные в Таблице 4.5 согласно результатам, приведенным в работах [14] и [15].

Полученные в этом разделе результаты имеют практическое применение в двух областях. При малых отношениях b/a их можно использовать для расчета механических систем электромеханических преобразователей. В этом качестве они будут рассмотрены в Главе 9. При больших отношениях b/a круглые диски могут быть применены в качестве пассивных частей стержневых преобразователей в конструкциях типа Topriltz, в которых они служат для согласования с акустической нагрузкой. Такое их применение будет рассмотрено в Главе 10.

Необходимо помнить, что все результаты получены в предположении о применимости теории тонких пластин и идеальной заделки их внутреннего контура при всех отношениях b/a . В случае, если отношение толщины пластины к ее радиальному размеру становится значительным, необходимо внести поправки на инерцию вращения и деформацию сдвига поперечных сечений.

4.5.8.3 Применение метода последовательных приближений Рунге

Как уже отмечалось ранее, в качестве опорной можно принять любую полную систему функций, удовлетворяющую граничным условиям. В качестве примера рассмотрим задачу осесимметричных свободных колебаний изгиба круглой пластины с заделанным контуром. Точное аналитическое решение поставленной задачи приведено в Разделе 4.4.3 и может быть использовано для сравнения. Представим смещение $\xi_z(r, t)$ в виде ряда

$$\xi_z(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) (1 - r^2 / a^2)^{i+1}. \quad (4.475)$$

Легко проверить, что функции $\theta_i(r/a) = (1 - r^2 / a^2)^{i+1}$ удовлетворяют условиям (4.190) при $r = a$. Они формируют полную систему функций в интервале $[0, a]$ (доказательство этого приведено в работе [5]). Представим кинетическую и потенциальную энергии пластины, определив W_{pot} путем интегрирования выражения (4.186) для

плотности энергии w_{pot} по объему пластины

$$W_{kin} = \pi \rho t \int_0^a \dot{\xi}_z^2 r dr, \quad (4.476)$$

$$W_{pot} = \pi D \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right)^2 - 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right] r dr. \quad (4.477)$$

Коэффициенты M_{il} и K_{il} системы уравнений типа (4.250) получим после подстановки смещений $\xi_z(r, t)$ в виде ряда (4.475) в выражения (4.476) и (4.477). Следуя методу Рунге, в качестве первого шага подставим только один (первый) член ряда (4.475) в выражения для энергии. Уравнение Лагранжа в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$K_1 - \omega^2 M_1 = 0, \quad (4.478)$$

где

$$K_1 = 64\pi D / 3a^2, \quad M_1 = M / 5, \quad \omega_1^{(1)} = (10.33 / a^2) \sqrt{D / \rho t}. \quad (4.479)$$

Это решение необходимо рассматривать как первое приближение. Полученное значение собственной частоты несколько выше точного значения

$$\omega_1 = (10.2 / a^2) \sqrt{D / \rho t}, \quad (4.480)$$

определенного по формуле (4.202). Точная форма колебаний, которую представляет собой функция (4.197) при $k_1 a = 3.2$, и полученная форма колебаний в первом приближении

$$\theta_1(r/a) = (1 - r^2/a^2)^2, \quad (4.481)$$

представлены на Рис. 4.34.

Второе приближение получим, приняв во внимание два члена ряда (4.475). После подстановки их в выражения для энергий получим следующие уравнения Лагранжа

$$(64\pi D / 3a^2 - \omega^2 M / 5) \xi_1 + (16\pi D / a^2 - \omega^2 M / 6) \xi_2 = 0, \quad (4.482)$$

$$(16\pi D / a^2 - \omega^2 M / 6) \xi_1 + (96\pi D / 5a^2 - \omega^2 M / 7) \xi_2 = 0. \quad (4.483)$$

Полученные из этих уравнений выражения для первой резонансной частоты,

$$\omega_1^{(2)} = (10.21 / a^2) \sqrt{D / \rho t}, \quad (4.484)$$

и для формы колебаний во втором приближении практически совпадают с точными значениями (для формы колебаний этот вывод следует из Рис. 4.34). Одновременно получаем выражения для второй резонансной частоты

$$\omega_2^{(1)} = (43.04 / a^2) \sqrt{D / \rho t}, \quad (4.485)$$

и для второй формы колебаний. Резонансная частота представляет собой грубое приближение к ее точному значению

$$\omega_2 = (39.6 / a^2) \sqrt{D / \rho t}, \quad (4.486)$$

и сравнение форм колебаний на Рис. 4.34 показывает существенную разницу. Если необходимо получить более точные выражения для последующих значений резонансных частот и форм колебаний, следует продолжить процедуру последовательных приближений.

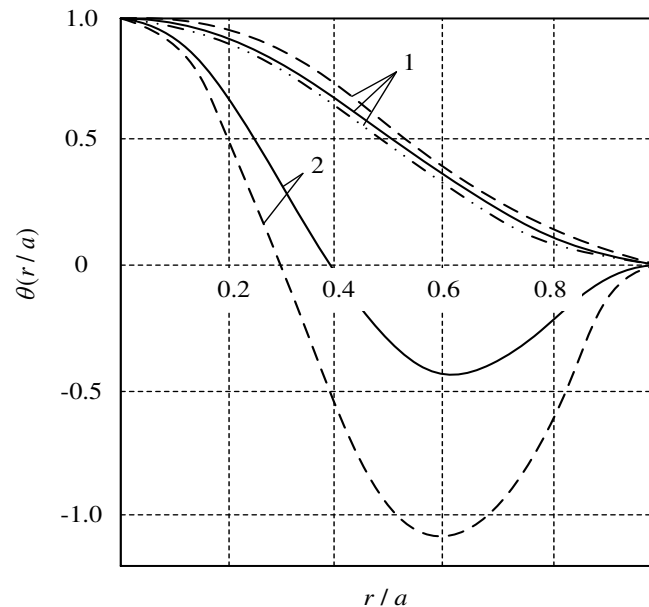


Рисунок 4.34: Последовательные приближения форм колебаний пластин. 1 – $\theta_1(r/a)$; 2 – $\theta_2(r/a)$. Сплошные линии – точные значения, штриховые линии – первое приближение, штрихпунктирные линии – второе приближение.

4.5.9 Применение статических приближений к первой форме колебаний

Выбор опорных функций и числа степеней свободы для практических расчетов,

которые всегда оказываются в определенной степени приближенными, в значительной степени зависит от целей расчетов. Если рассматривать преобразователи для подводных применений, то наиболее типичными являются задачи вычисления их характеристик либо для диапазона частот вокруг одной или двух смежных нижних резонансных частот (в основном, для преобразователей – излучателей), либо для диапазона частот ниже первого резонанса (в основном, для преобразователей – приемников).

Частотные характеристики смещений в упругих телах в обобщенных координатах можно представить в виде суперпозиции частотных характеристик частных систем, которые соответствуют выбранным степеням свободы тела. В случае, когда опорными функциями являются нормальные формы колебаний, это можно качественно проиллюстрировать с помощью Рис. 4.35, на котором представлены частотные характеристики модулей смещения $|\xi_i|$, соответствующие последовательным резонансным формам колебаний. Суммарное смещение на каждой частоте представляет собой сумму смещений во всех формах колебаний (при реальном суммировании следует учитывать фазы смещений). При рассмотрении характеристик в частотных диапазонах вокруг определенных резонансных частот на практике оказывается возможным пренебречь вкладом других форм колебаний и тем самым ограничить число рассматриваемых степеней свободы. Это помогает значительно упростить решение задачи. В отличие от этого, результаты решения этой же задачи в геометрических координатах содержат вклады всех резонансных форм колебаний, включая незначительные вклады форм колебаний, соответствующих частотам резонансов далеким от рассматриваемого диапазона. Как следствие, такое решение оказывается физически менее ясным, чем решение в виде разложения в ряд по нормальным формам колебаний.

При расчетах в диапазоне частот ниже первого резонанса форма колебаний, относящаяся к этой резонансной частоте, вносит наибольший вклад в общее смещение. Хотя в принципе существует также и суммарный вклад более высоких резонансных форм колебаний. В этом случае вместо того, чтобы брать в расчет множество резонансных форм колебаний, может оказаться целесообразным применить в качестве опорных функций статические (при $\omega \rightarrow 0$) формы смещения.

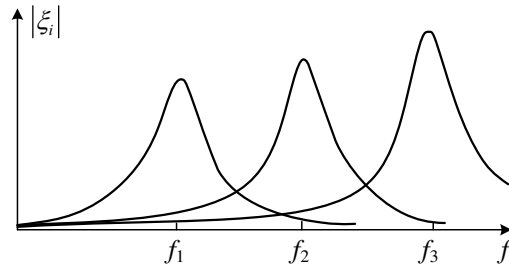


Рисунок 4.35: Частотные характеристики смещений при нормальных формах колебаний.

Качественное объяснение того, что статический прогиб под действием равномерно распределенной силы ΔF_m (например, при гидростатическом давлении) дает хорошее приближение к первой резонансной форме колебаний, можно привести на примере свободно опертой стержня. На Рис. 4.36 (а) представлены первая форма колебаний и равномерное распределение давления по поверхности стержня. Если бы действующие силы были распределены в соответствии с формой колебаний на резонансе, то это была бы единственная форма колебаний, вызываемая этой силой (см. формулу (4.239)). Кстати, если бы стержень колебался в первой форме колебаний, то силы инерции, действующие на него, были бы распределены в соответствии с этой формой колебаний. Хотя равномерное распределение силы отличается от нормальной формы колебаний, в соответствии с формулой (4.246) (повторена здесь как (4.487)) вклад в эквивалентную силу давления, действующего на участки поверхности вблизи от неподвижных концов невелик.

$$F_{mi} = \Delta F_m \int_{\Sigma} \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = \Delta F_m S_{avi}. \quad (4.487)$$

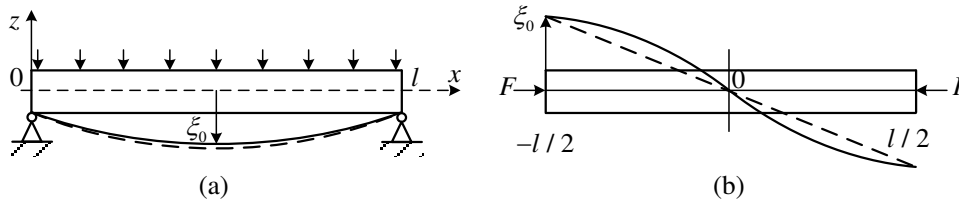


Рисунок 4.36: (а) Стержень при изгибе. Первая форма колебаний - сплошная линия, статический прогиб при равномерно распределенном давлении - штриховая линия; (б) продольная деформация стержня. Распределение деформации в первой резонансной форме колебаний – сплошная линия, статическая деформация – пунктирная линия.

Точность приближения статического прогиба можно качественно оценить на том же примере свободно опертого стержня, для которого нормальные формы колебаний

$\theta_i(x) = \cos i\pi x / l$. Колебания стержня можно рассматривать как контролируемые жесткостью во всех формах колебаний в диапазоне частот ниже первой резонансной частоты, т. е. можно считать, что $\omega M_{eqvi} \ll K_{eqvi} / \omega$. Выражение для жесткости представим в виде $K_{eqvi} = K_{eqv1} i^4$ (см. формулы (4.134)). Эквивалентные силы выразим в виде $F_{eqvi} = \Delta F_m S_{avi}$, где $S_{avi} = 2l / i\pi$ при $i = 2n-1$, $n = 1, 2, \dots$ и $S_{avi} = 0$ при $i = 2n$. Таким образом, величина смещения в форме колебаний θ_i

$$\bar{\xi}_i \approx j\omega \frac{2l\Delta F_{mm}}{K_{eqv1}(2n-1)^5} = \bar{\xi}_1 \frac{1}{2n-1}. \quad (4.488)$$

И величина суммарного смещения

$$\bar{\xi}(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\xi}_i = \bar{\xi}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5}. \quad (4.489)$$

Известно¹⁶, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \approx 1.01. \quad (4.490)$$

Очевидно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}. \quad (4.491)$$

Таким образом, вклад всех более высоких форм колебаний в общее статическое смещение по сравнению со смещением в первой форме составляет менее 1%. Аналогичные оценки можно произвести для круглых пластин, совершающих колебания изгиба.

Формы статического прогиба под действием сил, равномерно распределенных по поверхности стержней и круглых пластин, известны из работы [2].

Для стержней:

со свободно опертыми концами

$$\theta(x) = (16/5l)(x - 2x^3/l^2 + x^4/l^3); \quad (4.492)$$

с заделанными концами

$$\theta(x) = (16x^2/l^2)(1 - 2x/l + x^2/l^2); \quad (4.493)$$

с одним заделанным концом и с силой, действующей на свободный конец,

$$\theta(x) = (x^2 / 2l^2)(3 - x/l). \quad (4.494)$$

Для круглых пластин (при $\sigma = 0.3$):

со свободно опертым контуром

$$\theta(r/a) = (1 - r^2/a^2)(1 - r^2/4a^2); \quad (4.495)$$

с заделанным контуром

$$\theta(r/a) = (1 - r^2/a^2)^2. \quad (4.496)$$

Рассмотренная выше процедура приближений для определения смещений круглой пластины с заделанным контуром, результат которой представлен на Рис. 4.34, быстро сходится к точному решению (практически достаточно первого приближения), поскольку форма статического смещения $\theta(r/a) = (1 - r^2/a^2)^2$ близка к форме колебаний на первой резонансной частоте. И напротив, при расчетах в диапазоне высоких резонансных частот такой выбор опорных функций потребовал бы рассмотрения многих степеней свободы для получения приемлемого приближения (как видно из Рис. 4.34, второе приближение еще далеко от точной второй формы колебаний).

Полезно рассмотреть возможность применения статического смещения круглой пластины с центральной опорой, имеющей конечный радиус (Рис. 4.31), под действием равномерно распределенной статической нагрузки с плотностью q . Выражение для формы статического смещения получено в работе [2] в виде

$$\xi_{st}(r/b) = \frac{qb^4}{64D} \left[\left(\frac{r^2}{b^2} - 1 \right)^2 - 2A \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 - 2 \ln \frac{r}{b} \right) \right], \quad (4.497)$$

где

$$A = \frac{(3 + \sigma)(a/b)^4 - (1 + \sigma)(a/b)^2}{(1 + \sigma)(a/b)^2 + (1 - \sigma)}. \quad (4.498)$$

Для иллюстрации применения метода Рэлея-Рица к решению этой задачи на Рис. 4.33 приведена рассчитанная по этой формуле при отношении $b/a=0.05$ форма статического смещения $\theta_{st}(r/b) = \xi_{st}(r/b)/\xi_{st}(a/b)$ в сравнении с полученными с применением допустимых функций (4.442). Совпадение форм колебаний практически полное. Это приводит к результатам расчета эквивалентных параметров пластин, очень близким

к тем, что представлены в Таблице 4.5 и получены гораздо более сложным образом.

Стоит отметить, что для продольно колеблющихся механических систем статическое приближение к первой резонансной форме колебаний не дает таких хороших результатов. Это можно показать на примере колеблющегося в продольном направлении однородного стержня, который представлен на Рис. 4.36 (b), с помощью такой же процедуры, что и для стержня при изгибе. В этом случае $K_{eqvi} = K_{eqv1}i^2$ (см. формулу (4.133)) и аналогичное (4.489) выражение имеет вид

$$\bar{\xi}(l/2) \approx \bar{\xi}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.26. \quad (4.499)$$

Таким образом, вклад более высоких форм колебаний значителен.

Можно сделать общий вывод: статическое приближение к первой резонансной форме колебаний применимо к механическим системам, следующая активная резонансная частота которых далека от первой (прямоугольные стержни и пластины).

4.5.10 Колебания изгиба кольца с разрезом

Рассмотрим свободные колебания изгиба однородного кольца с разрезом как пример решения задачи колебаний для механической системы в статическом приближении относительно ее формы колебаний. Геометрия кольца с разрезом представлена на Рис. 4.37.

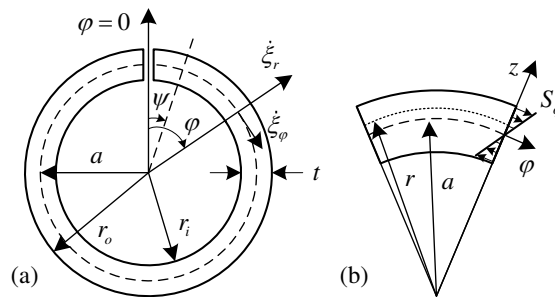


Рисунок 4.37: (a) Геометрия кольца с разрезом, (b) распределение деформации по толщине кольца.

Предполагается, что кольцо имеет малую высоту. Толщина и высота кольца обозначены t и h соответственно.

Полагаем, что выполнено условие (4.224) не растяжимости при изгибе нейтральной окружности в кольце, а именно

$$\frac{d\xi_\varphi}{d\varphi} + \xi_r = 0. \quad (4.500)$$

В тонком ($t \ll a$) и коротком ($h \ll a$) кольце единственным не нулевым напряжением является напряжение в окружном направлении $T_\varphi = YS_\varphi$, где деформация S_φ в окружном направлении в соответствии с формулой (4.220) равна

$$S_\varphi = -\frac{r-a}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right). \quad (4.501)$$

Знак минус означает, что положительный момент (действующий против часовой стрелки на правом конце сегмента и по часовой стрелке на левом конце) производит отрицательную деформацию (сжатие) в верхнем слое (при $r > a$). В низкочастотном приближении, т.е. на частотах около и ниже первой резонансной частоты, предполагаемую форму колебаний изгиба кольца в его плоскости примем в виде формы его статической деформации под действием гидростатического давления p равномерно распределенного по его поверхности. Согласно работе [17], уравнение статической деформации неполного тонкого кольца имеет вид

$$\xi_r + \xi_r'' = -\frac{Ma^2}{YJ}, \quad (4.502)$$

где $M(\varphi)$ — изгибающий момент, $J = t^3 h / 12$ — момент инерции прямоугольного сечения, верхний индекс (") обозначает вторую производную по координате φ . Из геометрических соображений

$$M(\varphi) = pha^2 \int_0^\varphi \sin(\varphi - \theta) d\theta = pha^2 (1 - \cos \varphi). \quad (4.503)$$

Дальнейшее изложение следует работе [18]. Подставив выражение для момента в уравнение (4.502) и обозначив $ha^2 p / YJ = N$, получим

$$\xi_r + \xi_r'' = -N(1 - \cos \varphi). \quad (4.504)$$

Представим решение уравнения (4.504) в виде

$$\xi_r = A \cos \varphi + B \sin \varphi + C \varphi \sin \varphi + D. \quad (4.505)$$

После подстановки ξ_r в уравнение (4.504), получим

$$D + 2C \cos \varphi = -N(1 - \cos \varphi) . \quad (4.506)$$

Чтобы удовлетворить это равенство при произвольном φ , необходимо, чтобы

$$D = -N, \quad C = N/2 . \quad (4.507)$$

Из соображений симметрии $\xi_r'|_{\varphi=\pi} = 0$. Таким образом, $B = -N\pi/2$ и выражение для радиального смещения приобретает вид

$$\xi_r = A \cos \varphi - \frac{N\pi}{2} \sin \varphi + \frac{N}{2} \varphi \sin \varphi - N . \quad (4.508)$$

Учитывая условие (4.500), получим

$$\xi_\varphi = -\left(A + \frac{N}{2}\right) \sin \varphi - \frac{N}{2} (\pi - \varphi) \cos \varphi - N(\pi - \varphi) . \quad (4.509)$$

В предположении, что форма статического смещения совпадает в первом приближении с резонансной формой колебаний, полное количество движения кольца должно быть равно нулю, т.е.

$$\rho \text{th} a \int_0^{2\pi} u_y d\varphi = \rho \text{th} a \int_0^{2\pi} (\dot{\xi}_r \cos \varphi - \dot{\xi}_\varphi \sin \varphi) d\varphi = 0 , \quad (4.510)$$

где $u_y = \dot{\xi}_r \cos \varphi - \dot{\xi}_\varphi \sin \varphi$ — проекция скорости колебаний на ось y . Интеграл по горизонтальной составляющей скорости u_x равен нулю в силу симметрии. Приняв во внимание условие (4.510), получим $A = -1.25N$.

Таким образом, распределения смещений по поверхности кольца приобретает вид

$$\xi_r = -1.25N \cos \varphi - \frac{N\pi}{2} \sin \varphi + \frac{N}{2} \varphi \sin \varphi - N , \quad (4.511)$$

$$\xi_\varphi = 0.75N \sin \varphi - \frac{N}{2} (\pi - \varphi) \cos \varphi - N(\pi - \varphi) . \quad (4.512)$$

Поместим центр приведения в точку $\varphi = 0$ (предполагаем, что ширина разреза мала). Радиальное смещение этой точки

$$\xi_r(0) = \xi_{r_o} = -2.25N . \quad (4.513)$$

Окончательно выражения для форм радиальных и тангенциальных (по касательной к средней окружности) смещений получим в нормированном виде

$$\frac{\xi_r(\varphi)}{\xi_{ro}} = \theta_r(\varphi) = 0.55 \cos \varphi + 0.70 \sin \varphi - 0.22 \varphi \sin \varphi + 0.44, \quad (4.514)$$

$$\frac{\xi_\tau(\varphi)}{\xi_{ro}} = \theta_\tau(\varphi) = -0.33 \sin \varphi + 0.22(\pi - \varphi) \cos \varphi + 0.44(\pi - \varphi). \quad (4.515)$$

Рассчитанные с помощью этих выражений формы смещений представлены на Рис. 4.38.

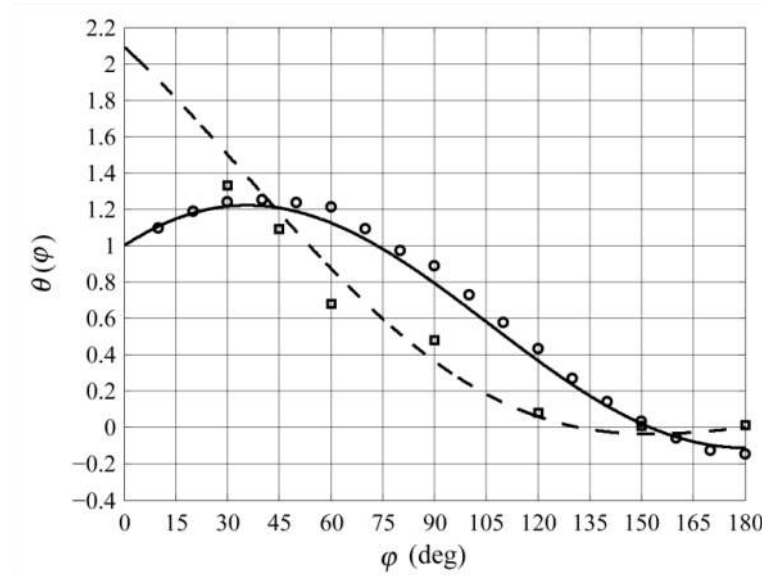


Рисунок 4.38: Радиальные смещения (сплошная линия) и смещения по касательной (штриховая линия), соответствующие формам колебаний. Экспериментальные данные представлены кружками и квадратами.

Там же приведены и результаты экспериментального исследования форм колебаний в динамическом режиме на резонансной частоте кольца [18]. Тот факт, что при углах $\varphi = \pm 150^\circ$ как радиальное, так и тангенциальное смещения по касательной близки к нулю, можно использовать для крепления колец к элементам конструкции преобразователя.

На Рис. 4.39 произведено качественное сравнение форм колебаний изгиба полного кольца, кольца с разрезом и стержней в конструкции камертона. Сравнение полезно с точки зрения качественного прогноза эффективности этих систем на низких частотах. В варианте (а) $S_{av} = 0$ и для эффективного излучения требуется экранировать части поверхности, колеблющиеся в противофазе. В вариантах (b) и (c), которые схожи между

собой, $S_{av} \neq 0$ и значение сопротивления излучения достаточно велико. После подстановки выражения для $\theta_r(\varphi)$ в формулу (4.247) получим, что для кольца с разрезом $S_{av} = 0.66S$, где S — общая площадь поверхности кольца.

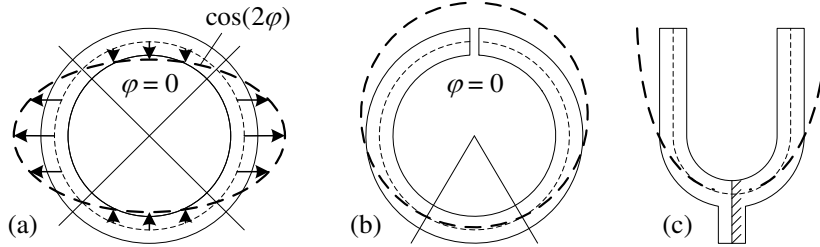


Рисунок 4.39: Сравнительные формы колебаний изгиба: (а) полное кольцо, (б) кольцо с разрезом, (с) стержни в конструкции камертона.

Для определения эквивалентных параметров кольца следует рассмотреть выражения для потенциальной и кинетической энергий. Для потенциальной энергии это

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} S_{\varphi} T_{\varphi} d\tilde{V} = \frac{1}{2} \frac{S_{cs} t^2 Y}{12a^4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial \varphi^2} + \xi_r \right)^2 a d\varphi = \frac{1}{2} K_{eqv} \xi_{ro}^2. \quad (4.516)$$

Для кинетической энергии

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \rho u^2 d\tilde{V} = \frac{1}{2} \rho S_{cs} \int_0^{2\pi} \left(\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_{\varphi}^2 \right) a d\varphi = \frac{1}{2} M_{eqv} \dot{\xi}_{ro}^2. \quad (4.517)$$

Здесь $S_{cs} = th$ — площадь поперечного сечения кольца, M_{eqv} и K_{eqv} — эквивалентная масса и жесткость кольца. После подстановки значений ξ_r и ξ_{φ} из формул (4.514) и (4.515) в выражения для энергий, получим

$$M_{eqv} = 1.57M, \quad K_{eqv} = \frac{1}{C_{eqv}} = \frac{20}{\pi} \frac{a^3}{t^3 h Y}. \quad (4.518)$$

Резонансная частота кольца

$$f_r = 1/2\pi \sqrt{M_{eqv} C_{eqvm}} = 0.02 \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \quad (4.519)$$

4.6 Связанные колебания в механических системах

До сих пор мы рассматривали одномерные колебания упругих тел. При этом степени

свободы тела были связаны с различным распределением колебаний в одном измерении. В большинстве случаев такой подход к анализу колебаний упругих тел, применяемых в конструкциях преобразователей, оправдан. Однако иногда приходится рассматривать колебания, происходящие одновременно в двух измерениях. Точное решение задач двумерных колебаний тел, имеющих соизмеримые размеры, представляет значительные трудности. В то же время достаточно хорошие для практических целей приближения могут быть получены, если рассматривать двумерные колебания как связанные колебания соответствующим образом выбранных одномерных упругих систем, называемых парциальными.

4.6.1 Общие положения теории связанных колебаний

Приведем некоторые общие сведения по теории связанных колебаний, предполагая, что колебания упругого тела происходят в двух измерениях, и что каждая парциальная система имеет одну степень свободы (т.е. имеет одну форму колебаний и, соответственно, одну резонансную частоту в рассматриваемом диапазоне частот). Так что состояние тела характеризуют две обобщенные координаты ξ_{1p} и ξ_{2p} , и распределение смещений в его объеме можно представить в виде

$$\xi(x, y) = \xi_{1p} \theta_1(x) + \xi_{2p} \theta_2(y). \quad (4.520)$$

Здесь $\theta_1(x)$ и $\theta_2(y)$ — формы колебаний парциальных систем. (Парциальная система это система, которая остается, если одну из обобщенных координат приравнять к нулю). В общем случае выражения для кинетической и потенциальной энергий системы имеют вид

$$W_{kin} = M_1 \dot{\xi}_{1p}^2 / 2 + M_{12} \dot{\xi}_{1p} \dot{\xi}_{2p} + M_2 \dot{\xi}_{2p}^2 / 2, \quad (4.521)$$

$$W_{pot} = K_1 \xi_{1p}^2 / 2 + K_{12} \xi_{1p} \xi_{2p} + K_2 \xi_{2p}^2 / 2. \quad (4.522)$$

Здесь M_1 , M_2 и K_1 , K_2 — эквивалентные массы и эквивалентные жесткости парциальных систем; M_{12} и K_{12} — взаимные массы и жесткости, которые количественно характеризуют инерционное и упругое взаимодействие между парциальными системами.

Обобщенные силы f_{m1} и f_{m2} , которые вызывают колебания парциальных систем, независимы, и энергия, сообщаемая системам этими силами

$$W_e = f_{m1}\xi_{1p} + f_{m2}\xi_{2p}. \quad (4.523)$$

Выражения типа (4.521) и (4.522) могут описывать связанные колебания не только в упругом теле, но и в механических системах, состоящих из двух отдельных тел, между которыми существует конструктивная связь. Для иллюстрации рассмотрим типичный пример механической системы с двумя степенями свободы с сосредоточенными параметрами, представленной на Рис. 4.40.

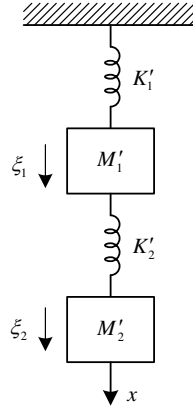


Рисунок 4.40: Связанная механическая система с сосредоточенными параметрами.

Массы M'_1 и M'_2 колеблются в вертикальном направлении на пружинах, постоянные жесткости которых K'_1 и K'_2 . (штрихи введены для того, чтобы отличить пример от общего случая). Конфигурация системы полностью определяется смещениями масс ξ_1 и ξ_2 .

Потенциальная и кинетическая энергии системы

$$W_{pot} = \frac{1}{2} K'_1 \xi_1^2 + \frac{1}{2} K'_2 (\xi_2 - \xi_1)^2 = \frac{1}{2} (K'_1 + K'_2) \xi_1^2 - K'_2 \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} K'_2 \xi_2^2, \quad (4.524)$$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} M'_1 \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} M'_2 \dot{\xi}_2^2. \quad (4.525)$$

В этом примере парциальные системы составляют: при $\xi_2 = 0$ это масса M'_1 , колеблющаяся между пружинами K'_1 и K'_2 , суммарная жесткость которых $K'_1 + K'_2$; при $\xi_1 = 0$ это масса M'_2 , колеблющаяся на пружине K'_2 . Резонансные частоты парциальных систем равны $f_{1p} = (1/2\pi)\sqrt{(K'_1 + K'_2)/M'_1}$ и $f_{2p} = (1/2\pi)\sqrt{K'_2/M'_2}$, соответственно. Связь между парциальными системами упругая (так как $M'_{12} = 0$) с взаимной жесткостью $K'_{12} = K'_2$.

Используя выражения (4.521)-(4.523), получим уравнения Лагранжа для системы с двумя связанными степенями свободы в виде

$$(K_1 - \omega^2 M_1)\xi_{1p} + (K_{12} - \omega^2 M_{12})\xi_{2p} = F_1, \quad (4.526)$$

$$(K_{12} - \omega^2 M_{12})\xi_{1p} + (K_2 - \omega^2 M_2)\xi_{2p} = F_2. \quad (4.527)$$

Введем следующие обозначения: для собственных частот парциальных систем

$$f_{1p} = (1/2\pi)\sqrt{K_1/M_1} \text{ и } f_{2p} = (1/2\pi)\sqrt{K_2/M_2}; \quad (4.528)$$

и для коэффициентов инерционной и упругой связи между системами

$$\gamma_i = M_{12} / \sqrt{M_1 M_2} \text{ и } \gamma_e = K_{12} / \sqrt{K_1 K_2} \quad (4.529)$$

В примере механической системы, представленной на Рис. 4.40, связь упругая, следовательно, $\gamma_i = 0$ и $\gamma_e = K'_{12} / \sqrt{K'_1 K'_2} = -\sqrt{K'_2 / (K'_1 + K'_2)}$.

Далее в общем анализе связанных колебаний в упругих телах для краткости будем рассматривать только инерционную связь, предполагая, что $K_{12} = 0$, и коэффициент инерционной связи будем обозначать γ . Вариант упругой связи можно рассматривать аналогичным образом.

4.6.1.1 Свободные колебания в связанных системах

С введенными обозначениями (4.528) и (4.529) и при условии, что $K_{12} = 0$, уравнения (4.526) и (4.527) для свободных колебаний принимают форму

$$M_1(f_{1p}^2 - f^2)\xi_1 - M_{12}f^2\xi_2 = 0, \quad (4.530)$$

$$-M_{12}f^2\xi_1 + M_2(f_{2p}^2 - f^2)\xi_2 = 0. \quad (4.531)$$

Частотное уравнение для системы, полученное из условия, что ее детерминант равен нулю

$$(f_{1p}^2 - f^2)(f_{2p}^2 - f^2) - \gamma^2 f^4 = 0. \quad (4.532)$$

В результате решения этого уравнения получим значения собственных частот колебаний связанной системе f_1 и f_2 в виде

$$f_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1-\gamma^2)} \left[f_{1p}^2 - f_{2p}^2 \pm (f_{1p}^2 - f_{2p}^2)\sqrt{1+\gamma^2} \right]. \quad (4.533)$$

Здесь введено обозначение $\chi = 2\gamma f_{1p} f_{2p} / |f_{2p}^2 - f_{1p}^2|$. Эту величину называют коэффициентом связности системы.

Из одного из уравнений (4.530), (4.531) определим отношения амплитуд смещений в парциальных системах на собственных частотах, коэффициенты форм колебаний ms_i , в виде

$$ms_1 = \left. \frac{\xi_2}{\xi_1} \right|_{f=f_1} = \frac{M_1(f_{1p}^2 - f_1^2)}{f_1^2 M_{12}}, \quad ms_2 = \left. \frac{\xi_2}{\xi_1} \right|_{f=f_2} = \frac{M_2(f_{2p}^2 - f_2^2)}{f_2^2 M_{12}}. \quad (4.534)$$

Анализ выражения (4.533) показывает, что значения парциальных частот расположены между собственными частотами системы. Если предположить, что $f_1 < f_2$ и $f_{1p} < f_{2p}$, то выполняется соотношение $f_1 < f_{1p} < f_{2p} < f_2$. Таким образом, из выражений (4.534) следует, что $ms_1 > 0$ и $ms_2 < 0$.

Количественная оценка взаимодействия между парциальными системами и сдвига собственных частот относительно парциальных зависит от величины коэффициента связности χ . При малых значениях коэффициента связи γ связность парциальных систем значительно возрастает при $f_{1p} \rightarrow f_{2p}$, и наоборот, при большой разнице между парциальными частотами парциальные системы становятся независимыми, даже если коэффициент связи γ относительно велик.

Из формул (4.533) и (4.534) следует, что при условии $f_{1p} = f_{2p} = f_p$

$$f_1^2 = f_p^2 / (1 + \gamma), \quad f_2^2 = f_p^2 / (1 - \gamma), \quad (4.535)$$

$$ms_1 = 1, \quad ms_2 = -1, \quad (4.536)$$

т.е. колебания парциальных систем имеют одинаковую амплитуду, но на нижней собственной частоте они происходят в фазе, а на верхней — в противофазе.

Рассмотрим поведение собственных частот при постоянном коэффициенте связи γ в зависимости от расстройки между парциальными системами, которую будем характеризовать величиной коэффициента расстройки

$$\beta = f_{1p} / f_{2p}. \quad (4.537)$$

Обозначив нормированный коэффициент собственных частот связанной системы $\Omega = f^2 / f_{1p}^2$, приведем уравнение (4.532) к виду

$$(1-\gamma^2)\Omega^2 - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\Omega + \frac{1}{\beta^2} = 0. \quad (4.538)$$

Полученные в результате решения уравнения зависимости $\Omega_{1,2}$ от β качественно представлены на Рис. 4.41 (а).

При $\beta = 0$ $\Omega_1 = 1$ и $\Omega_2 \rightarrow \infty$, так что

$$f_1 = f_{1p} \text{ и } f_2 \rightarrow \infty. \quad (4.539)$$

При $\beta \rightarrow \infty$ $\Omega_1 \rightarrow 0$ и $\Omega_2 \rightarrow (1-\gamma^2)^{-1}$, так что

$$f_1 \rightarrow 0 \text{ и } f_2 \rightarrow f_{1p} / \sqrt{1-\gamma^2}. \quad (4.540)$$

Коэффициенты формы колебаний (4.534) в новых обозначениях становятся

$$ms_1 = \frac{M_1}{M_{12}} \frac{1-\Omega_1}{\Omega_1}, \quad ms_2 = \frac{M_2}{M_{12}} \frac{1-\Omega_2}{\Omega_2}, \quad \frac{ms_1}{ms_2} = \frac{\Omega_2(1-\Omega_1)}{\Omega_1(1-\Omega_2)}. \quad (4.541)$$

при $\beta \rightarrow 0$, $\Omega_1 = 1$ и $ms_1 = 0$; $\Omega_2 \rightarrow \infty$ и $ms_2 \rightarrow -M_2 / M_{12}$.

при $\beta \rightarrow \infty$, $\Omega_1 \rightarrow 0$; $ms_1 \rightarrow \infty$; $\Omega_2 \rightarrow 1/(1-\gamma^2)$, $ms_2 \rightarrow -M_{12} / M_1$.

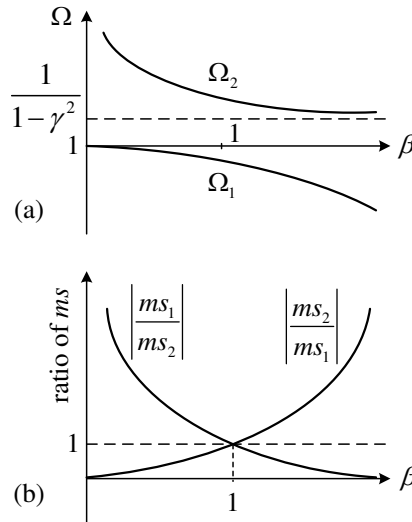


Рисунок 4.41: Зависимости от коэффициента расстройки β : (а) нормированных собственных частот и (б) коэффициентов формы колебаний.

Зависимости коэффициентов формы от расстройки β приведены на Рис. 4.41 (б). Чем дальше от величины $\beta = 1$, при которой связь между парциальными системами наибольшая и $ms_1 = -ms_2$, тем меньше вклад парциальных систем в колебания друг

друга. Если задать допустимое значение отношения $|ms_1 / ms_2|$, то можно определить значения коэффициента расстройки, при которых взаимодействие между парциальными системами становится незначительным.

4.6.1.2 Вынужденные колебания в связанных системах

Преобразуем уравнения (4.526) и (4.527), заменив в них смещения скоростями колебаний $U_{1p} = \dot{\xi}_{1p}$ и $U_{2p} = \dot{\xi}_{2p}$. Кроме того, введем обозначения

$$\begin{aligned} j(\omega^2 - \omega_{1p}^2)M_1 / \omega &= Z_1, \\ j(\omega^2 - \omega_{1p}^2)M_2 / \omega &= Z_2, \\ j\omega M_{12} &= Z_c, \end{aligned} \quad (4.542)$$

где Z_1 и Z_2 — собственные импедансы парциальных систем при отсутствии связи, Z_c — импеданс связи парциальных систем (в нашем случае предполагается инерционная связь). В результате уравнения, описывающие вынужденные колебания в связанной системе, приобретают вид

$$Z_1 U_{1p} + Z_c U_{2p} = F_1, \quad (4.543)$$

$$Z_c U_{1p} + Z_2 U_{2p} = F_2. \quad (4.544)$$

Решение этой системы уравнений

$$U_{1p} = \frac{F_1 Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_c^2} - \frac{F_2 Z_c}{Z_1 Z_2 - Z_c^2}, \quad (4.545)$$

$$U_{2p} = \frac{F_2 Z_1}{Z_1 Z_2 - Z_c^2} - \frac{F_1 Z_c}{Z_1 Z_2 - Z_c^2}. \quad (4.546)$$

Эти соотношения позволяют найти распределение скоростей механической системе в общем случае. Для удобства анализа связанных систем вводят понятия входных Z_{11} и Z_{22} и переходного Z_{12} импедансов системы:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{F_1}{U_{1p}} \right|_{F_2=0} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_c^2}{Z_2}, \\ Z_{22} &= \left. \frac{F_2}{U_{2p}} \right|_{F_1=0} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_c^2}{Z_1}, \\ Z_{12} &= - \left. \frac{F_1}{U_{2p}} \right|_{F_2=0} = - \left. \frac{F_2}{U_{1p}} \right|_{F_1=0} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_c^2}{Z_c}. \end{aligned} \quad (4.547)$$

Последнее соотношение представляет собой формулировку принципа взаимности для механических систем.

С применением выражений для входных и переходного импедансов, уравнения (4.543) и (4.544) приобретают вид

$$U_{1p} = \frac{F_1}{Z_{11}} - \frac{F_2}{Z_{12}}, \quad U_{2p} = \frac{F_2}{Z_{22}} - \frac{F_1}{Z_{12}}. \quad (4.548)$$

Связанная система имеет две резонансные частоты, близко к которым амплитуды вынужденных колебаний в соответствующих им парциальных системах увеличиваются. При малых потерях частоты, при которых достигается максимальная величина колебаний, близки к собственным частотам системы, поскольку определяются из условия минимального значения $|Z_1 Z_2 - Z_c^2|$, тогда как собственные частоты соответствуют условию $\text{Im}\{Z_1 Z_2 - Z_c^2\} = 0$.

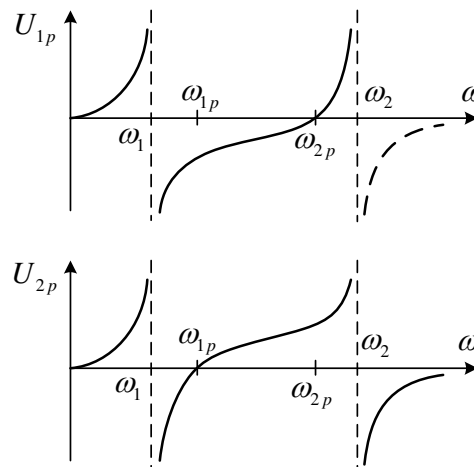


Рисунок 4.42: Частотные характеристики связанной системы.

Если на систему действует только одна из сил, например, F_1 , то частотные характеристики скоростей колебаний в парциальных системах качественно выглядят так, как представлено на Рис. 4.42 для скорости U_{1p} . Особенность этого случая в том, что U_{1p} обращается в ноль на парциальной частоте f_{2p} . Это свойство используют при проектировании гасителей вибрации и режекторных фильтров. В конструкциях преобразователей (преимущественно приемников) это может привести к появлению провала в частотной характеристике при условии, что парциальная частота связанной механической системы (это может быть герметизирующий корпус и/или конструктивные элементы, к

которым преобразователь прикреплен) попадает в рабочий диапазон преобразователя.

4.6.2 Примеры связанных колебаний в механических системах

4.6.2.1 Симметричная механическая система из двух пластин

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из двух одинаковых круглых пластин, шарнирно опертых на общее основание в виде жесткого круглого кольца, как показано на Рис. 4.43.

Предположим, что смещения центров пластин равны ξ_{1p} и ξ_{2p} . Массу и смещение основания обозначим M_b и ξ_b . Распределение смещений по поверхностям пластин можно представить в виде

$$\xi_1(r/a) = \xi_b + \xi_{1p}\theta(r/a), \quad \xi_2(r/a) = \xi_b + \xi_{2p}\theta(r/a). \quad (4.549)$$

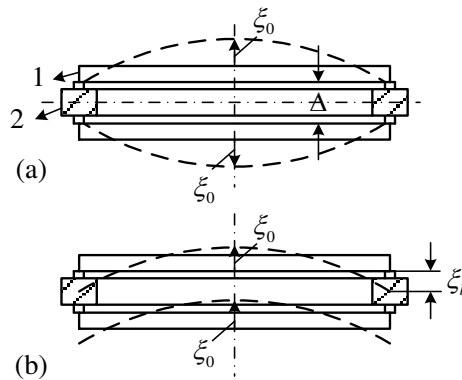


Рисунок 4.43: Связанные колебания механической системы из двух пластин: 1 - пластина; 2 - основание (опора). Режимы колебаний конструкции из двух пластин с равными смещениями ξ_0 : (а) симметричные колебания пластин в противоположной фазе, $\dot{\xi}_b = 0$; (б) синфазные колебания пластин, $\dot{\xi}_b \neq 0$.

Определим кинетическую и потенциальную энергии системы с учетом кинетической энергии основания $M_b \dot{\xi}_b^2 / 2$. В результате получим

$$W_{kin} = \frac{1}{2} 2\pi\rho t \int_0^a (\dot{\xi}_b + \dot{\xi}_{1p}\theta)^2 r dr + \frac{1}{2} 2\pi\rho t \int_0^a (\dot{\xi}_b + \dot{\xi}_{2p}\theta)^2 r dr + M_b \dot{\xi}_b^2 / 2, \quad (4.550)$$

$$W_{pot} = \frac{1}{2} (K_{eqv} \xi_{1p}^2 + K_{eqv} \xi_{2p}^2), \quad (4.551)$$

где K_{eqv} — эквивалентная жесткость свободно опертой пластины.

Выполнив интегрирование в выражении для W_{kin} , и введя обозначение $\rho t S_{av} = M_{av}$ для средней массы пластины, получим

$$W_{kin} = \frac{2M_{pl} + M_b}{2} \dot{\xi}_b^2 + \dot{\xi}_b (\dot{\xi}_{1p} + \dot{\xi}_{2p}) M_{av} + M_{eqv} \frac{\dot{\xi}_{1p}^2 + \dot{\xi}_{2p}^2}{2}. \quad (4.552)$$

Выражения для эквивалентной жесткости и массы, а также средней поверхности S_{av} , представлены формулами (2.151). А именно, $M_{eff} = 0.29M_{pl}$ и $S_{av} = 0.46\pi a^2$. Из уравнения Лагранжа для обобщенной координаты ξ_b

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_b} \right) = 0, \quad (4.553)$$

следует, что

$$\dot{\xi}_b = - \frac{(\dot{\xi}_{1p} + \dot{\xi}_{2p}) M_{av}}{M_b + 2M_{pl}}. \quad (4.554)$$

После подстановки скорости $\dot{\xi}_b$ в уравнение (4.552) найдем

$$W_{kin} = \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_{1p}^2 + M_{12} \dot{\xi}_{1p} \dot{\xi}_{2p} + \frac{1}{2} M_2 \dot{\xi}_{2p}^2, \quad (4.555)$$

где

$$M_1 = M_2 = M_{eqv} \left[1 - \frac{1}{3(1 + M_b / 2M_{pl})} \right], \quad (4.556)$$

$$M_{12} = - \frac{0.1M_{pl}}{1 + M_b / 2M_{pl}}. \quad (4.557)$$

Таким образом, согласно формуле (4.529)

$$\gamma = \frac{M_{12}}{\sqrt{M_1 M_2}} = - \frac{1}{3(1 + M_b / 2M_{pl}) - 1}, \quad (4.558)$$

и

$$M_1 = M_{eqv} \frac{1}{1 + |\gamma|}. \quad (4.559)$$

Поскольку коэффициент связи γ отрицателен, во избежание сомнений относительно знака этой величины в формулах, в которых он присутствует, будем применять

его абсолютное значение со знаком минус.

Парциальные частоты системы

$$f_{1p} = f_{2p} = f_p = \sqrt{\frac{K_{eqv}}{M_1}} = f_0 \sqrt{1+|\gamma|}, \quad (4.560)$$

где согласно формуле (4.184), f_0 — первая резонансная частота свободно опертой пластины. Поскольку парциальные частоты равны, собственные частоты связанной системы определим по формулам (4.535), а именно:

$$f_1^2 = \frac{f_p^2}{1-|\gamma|} = \frac{f_0^2(1+|\gamma|)}{1-|\gamma|}, \quad f_2^2 = \frac{f_p^2}{1+|\gamma|} = f_0^2. \quad (4.561)$$

В этом случае $f_2 < f_1$.

Согласно соотношениям (4.536), на частоте f_2 $ms_1 = -1$, т. е. $\xi_{2p} = -\xi_{1p}$. Пластины колеблются в противофазе (Рис. 4.43 (а)) и смещение основания $\xi_b = 0$. Механическая система, колеблющаяся в этом режиме, идеальна для конструкции гидрофонов-приемников давления. Основание гидрофона часто крепится к некоторой платформе, поэтому он не должен быть чувствителен к ее структурной вибрации.

На частоте f_1 получаем $\xi_{1p} = \xi_{2p} = \xi_p$. Пластины колеблются синфазно (Рис. 4.43 (b)), и смещение основания можно определить по формуле (4.554) в виде

$$\dot{\xi}_b = -\frac{2\dot{\xi}_p M_{av}}{M_b + 2M_{pl}} = -\frac{0.45}{1 + M_b / 2M_{pl}} \dot{\xi}_p. \quad (4.562)$$

Механическую систему, колеблющуюся в этом режиме, можно применить для проектирования гидрофонов-приемников градиента давления и приемников вибрации.

Интересно отметить, что при $M_b = 0$ из соотношения (4.558) следует, что $\gamma = -0.5$ и $f_1 = 1.73f_0$. При $(1 + M_b / 2M_{pl}) \rightarrow \infty$ получаем $\gamma \rightarrow 0$ и $f_1 \rightarrow f_2 = f_0$. В этом случае пластины могут колебаться независимо. Близкий к этому эффект можно получить при конечных значениях соотношения $M_b / 2M_{pl}$. Его можно оценить по формуле

$$f_1 / f_0 = \sqrt{[(M_b / 2M_{pl}) + 1] / [(M_b / 2M_{pl}) + 0.34]} \quad (4.563)$$

которая следует из соотношения (4.561) с учетом выражения (4.558) для коэффициента γ .

4.6.2.2 Связанные колебания в прямоугольных пластинах и стержнях

В общем случае механические системы пьезоэлектрических керамических преобразователей представляют собой упругие тела таких размеров, при которых трудно точно определить или предсказать распределение смещений по их объему при колебаниях. Приблизительный подход к решению такого рода задачи был предложен в работе [19] и известен как «гипотеза Гиббе и Блехшмидта». Подход к решению задачи основан на предположениях, что: (а) колебания реального упругого тела можно представить как связанные колебания парциальных одномерных систем, к которым реальное тело приближается при предельных значениях отношения своих размеров, и (б) коэффициенты связи между парциальными системами выбраны таким образом, чтобы получить известные резонансные частоты для полученных таким образом одномерных систем.

Так, например, было предложено рассматривать продольные колебания прямоугольной пластины как связанные колебания двух стержней, что показано на Рис. 4.44 (а), с инерционной связью между ними с коэффициентом связи $\gamma_m = \sigma$. Для этого случая первыми резонансными частотами парциальных систем являются $f_{1p} = (1/2L_1)\sqrt{Y/\rho}$ и $f_{2p} = (1/2L_2)\sqrt{Y/\rho}$. В работе [20] такой подход применен для определения резонансных частот пьезоэлектрических тел нескольких конфигураций, и полученные результаты были достаточно точными.

Однако методика, основанная на подходе Гиббе и Блехшмидта, не может быть непосредственно применена к расчету электромеханических параметров преобразователей. Более того, ее нельзя применить для расчета преобразователей как электроакустических устройств, т. е. под действием акустических нагрузок, поскольку для этого необходимо знать, как изменяются формы колебаний пьезоэлементов в зависимости от соотношения их сторон.

Для этих случаев подход должен быть несколько изменен. Прделаем это, предположив, что парциальные формы смещения в механической системе выбраны так, как предлагается в соответствии с частью (а) гипотезы Гиббе и Блехшмидта и применив соображения общей теории связи. В этом разделе проиллюстрируем применение измененного подхода на примерах механических систем в форме тонких прямоугольных пластин (Рис. 4.44 (а)) и длинных стержней (Рис. 4.45), колебания которых будем рассматривать

как двумерные.

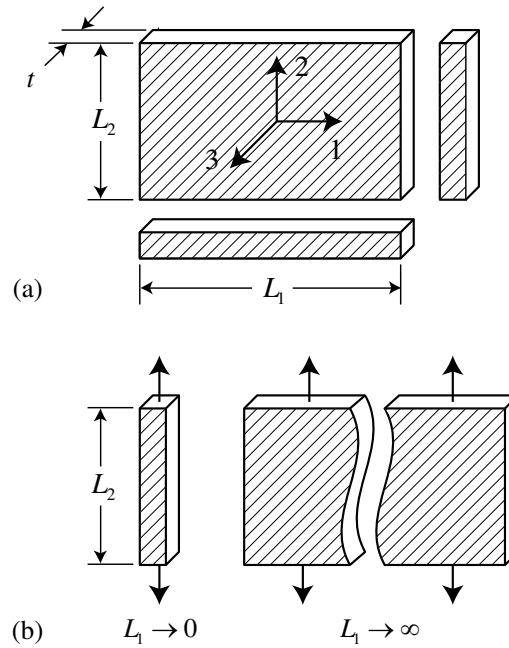


Рисунок 4.44: (а) Конфигурация прямоугольной пластины, рассматриваемой как связанная система из двух стержней. (б) Одномерные системы при предельных значениях отношения размеров пластины

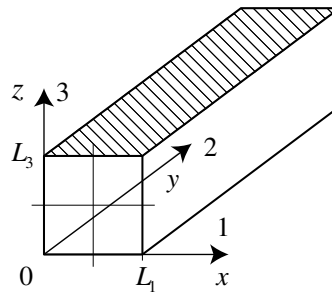


Рисунок 4.45: Геометрия длинного стержня и система координат. Предположено, что длина стержня достаточно велика, чтобы полагать $S_2 = 0$.

Здесь предположим, что механические системы являются пассивными изотропными телами. В том случае, если они изготовлены из пьезоэлектрической керамики, их свойства зависят от направлений их поляризации и могут стать анизотропными. Возникающие в результате различия будут рассмотрены в Главе 10 при расчете преобразователей, использующих такие механические системы. Чтобы облегчить обращение к результатам этого раздела, поверхности, которые предположительно будут покрыты электродами,

заштрихованы, и применены обозначения координатных осей, соответствующие кристаллографической системе координат.

4.6.2.2.1 Связанные колебания в прямоугольных пластинах

Рассмотрим колебания тонкой прямоугольной изотропной пластины в ее плоскости. Геометрия пластины представлена на Рис. 4.44 (а). Мы предполагаем, что толщина пластины t значительно меньше ее поперечных размеров L_1 и L_2 , и поэтому можно принять, что напряжение $T_3 = 0$. Нас интересует зависимость параметров пластины от отношения длин ее сторон L_1 / L_2 . Парциальные распределения смещений в пластине представим в виде основных форм колебаний тонких стержней длиной L_1 и L_2

$$\xi_x = \xi_{1p} \cos(\pi x / L_1), \quad \xi_y = \xi_{2p} \cos(\pi y / L_2). \quad (4.564)$$

Соответствующее распределение смещений и деформаций в пластине

$$\xi(x, y) = \xi_{1p} \cos(\pi x / L_1) + \xi_{2p} \cos(\pi y / L_2), \quad (4.565)$$

$$S_1 = \xi_{1p} (\pi / L_1) \sin(\pi x / L_1), \quad S_2 = \xi_{2p} (\pi / L_2) \sin(\pi y / L_2). \quad (4.566)$$

Здесь и далее знак минус опущен для краткости. Смысл его в том, что при положительных направлениях смещений деформации являются сжимающими, т. е. отрицательными по принятому правилу знаков. В контексте этого раздела это не существенно.

Для напряжений из уравнения (4.10) следует

$$T_1 = \frac{Y}{1 - \sigma^2} (S_1 + \sigma S_2), \quad T_2 = \frac{Y}{1 - \sigma^2} (\sigma S_1 + S_2). \quad (4.567)$$

Для деформации в направлении оси z получим

$$S_3 = -\frac{\sigma}{1 - \sigma} (S_1 + S_2). \quad (4.568)$$

Определим энергии колебаний пластины. Потенциальная энергия равна

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} (T_1 S_1 + T_2 S_2) d\tilde{V} = \frac{1}{2} \frac{Y}{1 - \sigma^2} \int_{\tilde{V}} (S_1^2 + 2\sigma S_1 S_2 + S_2^2) d\tilde{V}. \quad (4.569)$$

Здесь \tilde{V} — объем механической системы. После подстановки выражений (4.566) для деформации и интегрирования по объему пластины получим

$$W_{pot} = \frac{1}{2} (K_1 \xi_{1p}^2 + 2K_{12} \xi_{1p} \xi_{2p} + K_2 \xi_{2p}^2), \quad (4.570)$$

где

$$K_1 = \frac{\pi^2 Y t}{2(1-\sigma^2)} \frac{L_2}{L_1}, \quad K_2 = \frac{\pi^2 Y t}{2(1-\sigma^2)} \frac{L_1}{L_2}, \quad K_{12} = \frac{4Y \sigma t}{1-\sigma^2}. \quad (4.571)$$

Кинетическая энергия равна

$$W_{kin} = \frac{\rho}{2} \int_{\tilde{V}} (\dot{\xi}_x^2 + \dot{\xi}_y^2 + \dot{\xi}_{z\Sigma}^2) d\tilde{V}. \quad (4.572)$$

Здесь скорость колебаний поверхности $\dot{\xi}_z$ обозначена как $\dot{\xi}_{z\Sigma}$. Из уравнения (4.568) следует, что $\dot{\xi}_{z\Sigma} = \dot{\xi}_3 = \dot{S}_3 z$. Таким образом,

$$\dot{\xi}_{z\Sigma} = -\frac{\sigma t}{2(1-\sigma)} (\dot{S}_1 + \dot{S}_2). \quad (4.573)$$

Отметим, что скорость $\dot{\xi}_{z\Sigma}$, будучи относительно небольшой по сравнению со скоростями в боковых направлениях, важна для измерения форм колебаний пластины. Кроме того, эта величина характеризует акустическое излучение в том случае, если для этой цели используется пластина, колеблющаяся в своей плоскости.

После интегрирования по объему пластины кинетическую энергию представим в виде

$$W_{kin} = \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_{1p}^2 + M_{12} \dot{\xi}_{1p} \dot{\xi}_{2p} + \frac{1}{2} M_2 \dot{\xi}_{2p}^2, \quad (4.574)$$

где

$$M_1 = \frac{M}{2} \left[1 + \frac{\pi^2 \sigma^2 t^2}{12(1-\sigma^2) L_1^2} \right], \quad M_2 = \frac{M}{2} \left[1 + \frac{\pi^2 \sigma^2 t^2}{12(1-\sigma^2) L_2^2} \right], \quad (4.575)$$

$$M_{12} = M \frac{\sigma^2 t^2}{3(1-\sigma^2) L_1 L_2}.$$

В этих соотношениях $M = L_1 L_2 t \rho$ — масса пластины. Если $t \ll L_1, L_2$, то вклад членов с множителями t^2 / L^2 незначителен и

$$M_1 = M_2 = M / 2, \quad M_{12} \approx 0. \quad (4.576)$$

Таким образом, связь между парциальными системами является чисто упругой.

Рассматривая выражения для потенциальной (4.570) и кинетической (4.574) энергий вместе с выражениями для эквивалентных жесткостей (4.571) и масс (4.575), можно сделать следующие заключения. В рассматриваемом случае парциальная система, определяемая условием $\xi_{1p} = 0$ или $S_1 = 0$, при $L_1 \rightarrow \infty$ представляет собой полосу, которая бесконечна в направлении x и колеблется вдоль размера L_2 . Аналогично, другая парциальная система (при $\xi_{2p} = 0$) представляет собой полосу, которая бесконечна в направлении y и колеблется вдоль L_1 . Таким образом, парциальные резонансные частоты равны

$$f_{ip} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} = \frac{1}{2L_i} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}} \quad (i = 1, 2). \quad (4.577)$$

Связь между парциальными системами упругая с коэффициентом связи

$$\gamma_e = \frac{K_{12}}{\sqrt{K_1 K_2}} = \frac{8\sigma}{\pi^2}. \quad (4.578)$$

(Нижний индекс далее будет опущен.) Для пластины из керамики PZT-4 поляризованной в направлении z ($\sigma = \sigma_1^E = 0.33$) $\gamma = 0.27$.

После определения энергий свободных колебаний пластины (без учета потерь энергии и внешних воздействий), уравнения Лагранжа получим в виде аналогичном уравнениям (4.530) и (4.531), а именно

$$(f_{1p}^2 - f^2)U_{1p} + (K_{12} / K_1)f_{1p}^2 U_{2p} = 0, \quad (4.579)$$

$$(K_{12} / K_2)f_{2p}^2 U_{1p} + (f_{2p}^2 - f^2)U_{2p} = 0. \quad (4.580)$$

Из этой системы уравнений следует частотное уравнение

$$(f_{1p}^2 - f^2)(f_{2p}^2 - f^2) - \gamma^2 f_{1p}^2 f_{2p}^2 = 0. \quad (4.581)$$

Далее для определенности предположим, что размер L_2 (т. е. f_{2p}) остается постоянным и изменяется L_1 . Обозначив $f^2 / f_{2p}^2 = \Omega$ в качестве нормированного коэффициента собственных частот и

$$\frac{f_{2p}}{f_{1p}} = \frac{L_1}{L_2} = \beta, \quad (4.582)$$

как отношение парциальных частот, уравнение (4.581) приведем к виду

$$\Omega^2 - (1 + 1/\beta^2)\Omega + (1 - \gamma^2)/\beta^2 = 0. \quad (4.583)$$

Решения этого уравнения представляют собой две ветви резонансных частот, которые соответствуют значениям Ω_1 и Ω_2 , в функции от коэффициента β (отношения сторон L_1 / L_2). Условимся считать, что зависимость $\Omega_1(\beta)$ образует нижнюю, а $\Omega_2(\beta)$ верхнюю ветви изменения частот. Частотные зависимости, рассчитанные при значении коэффициента связи $\gamma = (8 / \pi^2) \sigma_1 = 0.27$, представлены на Рис. 4.46 сплошными линиями. Из уравнения (4.583) следует, что при $\beta = 1$

$$\Omega_1 = 1 - \gamma, \quad \Omega_2 = 1 + \gamma, \quad \frac{f_2^2}{f_1^2} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}. \quad (4.584)$$

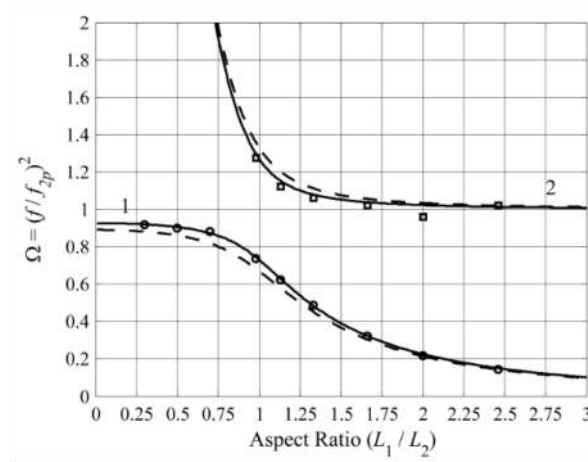


Рисунок 4.46: Зависимости резонансных частот от соотношения сторон пластины: (1) нижняя ветвь, (2) верхняя ветвь. Сплошные линии – результаты вычислений. Пунктирные линии – результаты из работы [20]. Маркеры – результаты экспериментального исследования из работы [21].

После того, как определены резонансные частоты, соответствующие коэффициенты формы колебаний,

$$ms_i = \frac{U_{1p}}{U_{2p}} \Big|_{\Omega=\Omega_i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.585)$$

найдем из системы уравнений (4.579) и (4.580) в виде

$$ms_i = -\frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{1 - \Omega_i \beta^2}. \quad (4.586)$$

Из выражений (4.578) и (4.571) следует, что $(K_{12} / K_1) = \gamma \beta$. Таким образом, уравнение (4.586) примет вид

$$ms_i = -\frac{\gamma\beta}{1-\Omega_i\beta^2}. \quad (4.587)$$

Зависимости коэффициентов формы колебаний от соотношения сторон β представлены на Рис. 4.47. Из уравнения (4.587) следует, что при частотах, относящихся к нижней ветви, скорости U_1 и U_2 находятся в противофазе. В частности, при $\beta = 1$ $ms_1 = -1$ и $ms_2 = 1$. Это означает, что на высшей и нижней резонансных частотах скорости имеют одинаковую величину, но находятся в фазе на высшей и в противофазе на нижней.

Интересно оценить соотношение полученных решений для резонансных частот с известными результатами для предельных одномерных конфигураций пластины, которые представляют собой длинный стержень (при $\beta \rightarrow 0$ и постоянной L_2) и длинную тонкую полосу (при $\beta \rightarrow \infty$ и постоянной L_2).

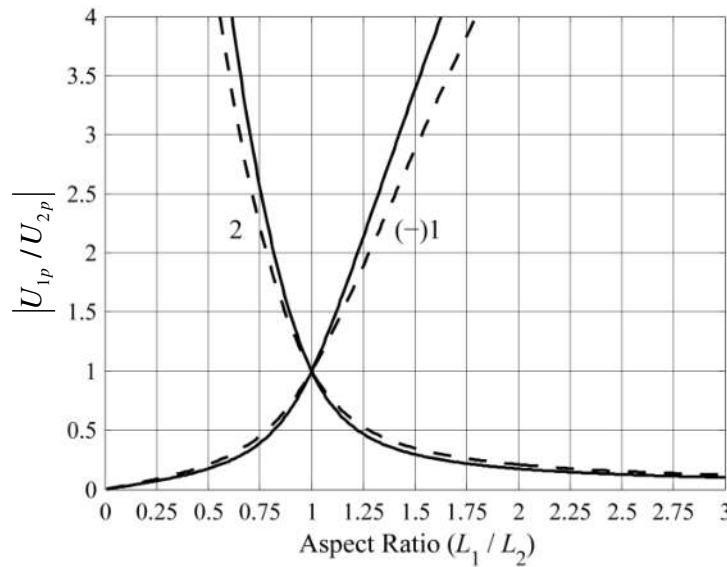


Рисунок 4.47: Зависимости коэффициентов формы колебаний от отношения сторон для нижней (1) и верхней (2) частотных ветвей. Сплошные линии – результат вычислений. Пунктирные линии – результаты из работы [20], где принято $\gamma = \sigma_1^E$.

Из уравнения (4.583) следует, что

$$\Omega_{1,2} = \frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta^2(1-\gamma^2)}{(1+\beta^2)^2}} \right]. \quad (4.588)$$

При $\beta \rightarrow 0$

$$\Omega_{1,2} \approx \frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \{1 \pm [1-2\beta^2(1-\gamma^2)]\}, \quad (4.589)$$

и

$$\Omega_1 \approx (1-\gamma^2), \quad \Omega_2 \rightarrow 1/\beta^2. \quad (4.590)$$

Таким образом,

$$f_1 \rightarrow f_{2p} \sqrt{1-\gamma^2}, \quad f_2 \rightarrow (f_{2p}/\beta) = f_{1p}. \quad (4.591)$$

Принимая во внимание выражение (4.571) для парциальных частот f_{ip} , мы получим резонансную частоту тонкого стержня длиной L_2 в виде

$$f_1 = \frac{1}{2L_2} \sqrt{\frac{Y(1-\gamma^2)}{\rho(1-\sigma^2)}}, \quad (4.592)$$

и бесконечно длинной полосы шириной L_1

$$f_2 = \frac{1}{2L_1} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (4.593)$$

Учитывая, что точное значение резонансной частоты тонкого стержня должно быть $f_{bar} = (1/2L_2)\sqrt{Y/\rho}$, и что $\gamma = 0.27$, получаем $f_1 = 1.02f_{bar}$. Таким образом, погрешность принятого метода можно считать незначительной для предельного случая при $\beta \rightarrow 0$. Для другого предельного случая (длинная полоса) значение резонансной частоты, полученное по формуле (4.593), является точным.

4.6.2.2.2 Связанные колебания в прямоугольных стержнях

Геометрия длинного стержня и расположение электродов на его поверхностях представлены на Рис. 4.45. В силу большой длины стержня принимаем условие $S_2 = 0$. Распределение смещений в поперечном сечении стержня представим в виде

$$\xi_x = \xi_{1p} \cos(\pi x / L_1), \quad \xi_z = \xi_{3p} \cos(\pi z / L_3), \quad (4.594)$$

откуда распределение деформаций

$$S_1 = \xi_{1p} (\pi / L_1) \sin(\pi x / L_1), \quad S_3 = \xi_{3p} (\pi / L_3) \sin(\pi z / L_3). \quad (4.595)$$

(Относительно опущенного знака минус см. примечание к уравнению (4.566).)

Из системы уравнений (4.9) при $S_2 = 0$ следует, что

$$T_1 = c_{11}S_1 + c_{13}S_3, \quad T_3 = c_{13}S_1 + c_{33}S_3, \quad (4.596)$$

где для изотропного материала

$$c_{11} = c_{33} = c = \frac{Y(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad c_{13} = \frac{Y\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}. \quad (4.597)$$

К этому варианту непосредственно применима процедура анализа, которая была принята для пластины. Парциальными системами являются пластины с бесконечными поперечными размерами толщиной L_1 (в этом случае $S_3 = 0$) и толщиной L_3 (в этом случае $S_1 = 0$). Рассмотрев выражения для потенциальной и кинетической энергий, аналогичные (4.570) и (4.574), получим

$$K_1 = \frac{c\pi^2 L_2}{2} \frac{L_3}{L_1}, \quad K_3 = \frac{c\pi^2 L_2}{2} \frac{L_1}{L_3}, \quad K_{13} = 4c_{13}L_2, \quad (4.598)$$

и

$$M_1 = M_3 = \frac{L_1 L_2 l_3}{2} \rho = \frac{M_{bar}}{2}, \quad M_{13} \approx 0. \quad (4.599)$$

Таким образом, парциальные частоты

$$f_{1p} = \frac{1}{2L_1} \sqrt{\frac{c}{\rho}}, \quad f_{3p} = \frac{1}{2L_3} \sqrt{\frac{c}{\rho}}, \quad (4.600)$$

и выражения для отношения парциальных частот равны $\beta = (L_1 / L_3)$. Связь между парциальными системами упругая с коэффициентом связи

$$\gamma = \frac{K_{13}}{\sqrt{K_1 K_3}} = \frac{8}{\pi^2} \frac{c_{13}}{c} = \frac{8}{\pi^2} \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (4.601)$$

Так, для стержня из изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.33$ коэффициент связи равен $\gamma = 0.4$.

Зависимости резонансных частот и коэффициентов формы колебаний от коэффициента β получим из уравнений (4.583) и (4.587), соответственно, при новом значении коэффициента связи γ , если заменить нижний индекс 3 на 2. Качественно эти зависимости выглядят так же, как показано на Рис. 4.46 и 4.47.

Для пьезокерамических стержней все расчеты усложнятся из-за анизотропии упругих свойств. Этот случай будет рассмотрен в Главе 10.

Напомним, что результаты, представленные в этом разделе, ограничены основными формами колебаний парциальных систем и как таковые применимы для диапазона частот вблизи и ниже резонансных частот низших форм их колебаний. Анализ не предназначен для гораздо более широкого частотного диапазона, который может представлять интерес для общего случая колебаний пластин и стержней как таковых. Применительно к механическим системам пьезоэлектрических преобразователей обертона парциальных систем не представляют интерес, потому что соответствующие формы колебаний практически не пригодны для эффективного электромеханического преобразования.

4.6.2.3 Связанные колебания сплошных цилиндрических стержней

Пьезоэлектрические элементы в форме толстых дисков или сплошных круглых цилиндров (Рис. 4.48), которые претерпевают продольные колебания в направлении вдоль оси, находят применение в большом количестве конструкций преобразователей и в широком диапазоне частот.

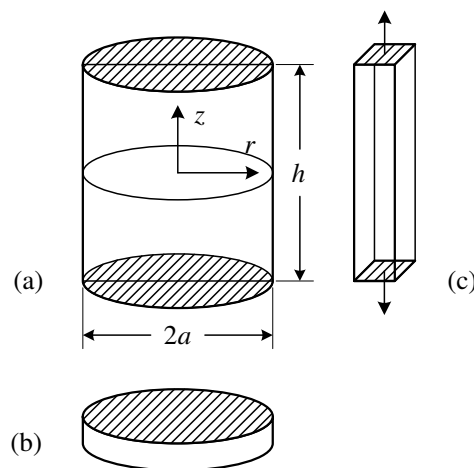


Рисунок 4.48: (а) Геометрия цилиндра конечного размера, (б) предельный случай при $h/2a \ll 1$, (с) предельный случай при $h/2a \gg 1$.

Отношение высоты к диаметру этих пьезоэлементов $h/2a$ может изменяться от очень малого (при $h/2a \ll 1$ диск на Рис. 4.48 (б)), до значительного (при $h/2a \gg 1$, Рис. 4.48 (с)). При таких соотношениях размеров пьезоэлементы обычно называют «дисками» и

«стержнями», соответственно, и при расчете колебаний вдоль оси их можно рассматривать как одномерные системы. В промежуточных случаях, когда высота пьезоэлемента соизмерима с его диаметром, пьезоэлементы будем называть «цилиндрами конечной высоты». В дальнейшем, поскольку речь идет о зависимости параметров от соотношения размеров, будем применять это название независимо от реальных размеров пьезоэлемента.

Опубликовано много результатов экспериментальных исследований, связанных с колебаниями круглых дисков с разным соотношением высоты и диаметра (работы [22]-[24]). Основной целью этих работ было измерение и классификация осесимметричных форм колебаний круглых дисков и их зависимости от соотношения высоты и диаметра. В этих исследованиях использовались пьезокерамические диски с полностью покрытыми электродами торцами, так как это удобный способ возбуждения осесимметричных колебаний. Эти работы показали сложность колебаний, особенно для тонких дисков. Авторы указанных работ выполнили очень тщательные и детальные измерения распределений колебаний по поверхности дисков в направлении оси, которые в большинстве случаев оказались существенно неоднородными, что делает их практически непригодными для эффективного излучения звука. Эту информацию можно использовать для качественного прогнозирования диапазонов соотношений размеров, которых следует избегать при практическом проектировании пьезоэлементов для электроакустических преобразователей.

На основе концепции связанных колебаний можно дать качественное объяснение того, как происходит изменение распределений колебаний на поверхности тонких дисков по мере изменения отношения $h/2a$ от предельно малых к большим значениям или, иначе говоря, по мере изменения резонансной частоты f_{ax} (индекс ax от axial) колебаний вдоль оси от высоких к более низким значениям, в то время как диаметр диска остается постоянным.

При приближении резонансной частоты колебаний вдоль оси к резонансным частотам радиальных форм колебаний $f_{rad,i}$ возникает эффект связи между этими формами колебаний, что приводит к неравномерному распределению смещений вдоль оси по поверхности за счет вклада форм колебаний в радиальном направлении. До тех пор пока

отношение $h/2a$ остается малым, формы колебаний в радиальном направлении имеют высокий порядок ($i > 5 - 6$), их эффективные коэффициенты связи малы, и вкладом этих форм колебаний в смещение вдоль оси на практике можно пренебречь. В этом диапазоне толщин колебания диска вдоль оси можно приблизительно рассматривать как одномерные.

По мере увеличения отношения $h/2a$ в действие вступают радиальные формы колебаний более низкого порядка с более значительными эффективными коэффициентами связи. Влияние их связи с колебаниями вдоль оси становится более сильно выраженным и вызывает увеличение неравномерности распределения колебаний по поверхности, что в свою очередь приводит к искажению характеристики направленности преобразователя в виде диска. Это влияние особенно значительно в диапазонах отношений $h/2a$ вокруг значений, соответствующих условию $f_{ax} \approx f_{rad.i}$, при котором связь между осевыми и радиальными колебаниями наиболее сильна. После того, как отношение $h/2a$ достигнет значений, при которых достаточно учитывать только взаимодействие с первой (соответствующей $f_{rad.1}$) радиальной формой колебаний, цилиндр конечной высоты можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы, и для расчета его параметров можно применять метод связанных колебаний. При дальнейшем увеличении отношения $h/2a$ продольные колебания цилиндра становятся преобладающими, и для расчета соответствующих преобразователей можно применять одномерную теорию.

В этом разделе рассмотрим зависимости резонансных частот и коэффициентов формы колебаний цилиндрических пьезоэлементов конечных размеров в диапазоне отношений $h/2a$, при которых может быть применен метод связанных колебаний.

В результате этого анализа определяются приблизительные значения отношения $h/2a$, после которых продольные колебания цилиндра конечной высоты можно считать одномерными.

Для того чтобы механическую систему можно было квалифицировать как систему с двумя степенями свободы, к которой применим метод связанных колебаний, соответствующие парциальные системы должны каждая иметь одну степень свободы во всем рассматриваемом диапазоне изменения $h/2a$. Для определения парциальных систем в первую очередь необходимо сделать предположение о распределении смещений в теле.

Следуя гипотезе Гиббе и Блехшмидта, выберем предполагаемые парциальные распределения смещений в виде форм колебаний одномерных тел, соответствующих предельным значениям отношения $h/2a$. В нашем случае это тонкий диск, колеблющийся в радиальном направлении (при $h/2a \rightarrow 0$) и тонкий стержень, колеблющийся в продольном направлении (при $h/2a \rightarrow \infty$), которые представлены на Рис. 4.48. Парциальные смещения в радиальном направлении и вдоль оси обозначим ξ_a и ξ_h . Характеристики парциальных систем можно определить с помощью уравнений (4.521) и (4.522), в которых парциальные смещения нужно заменить на ξ_a и ξ_h . Пара парциальных систем, соответствующих этим уравнениям, представляет собой колеблющийся в радиальном направлении бесконечно длинный цилиндр (в пределе $h \rightarrow \infty$, $\xi_h \rightarrow 0$) и колеблющийся по толщине диск большого диаметра (в пределе $a \rightarrow \infty$, $\xi_a \rightarrow 0$). Действительно, при $\xi_h = 0$ оставшиеся уравнения характеризуют бесконечно длинный цилиндр, колеблющийся в радиальном направлении, а при $\xi_a = 0$ они характеризуют колеблющийся вдоль оси диск бесконечного радиуса.

Если рассматривать колебания цилиндра конечной высоты только в окрестности его первой резонансной частоты, то распределение смещений в направлении оси цилиндра имеет вид

$$\xi(z) = \xi_h \sin(\pi z / h), \quad (4.602)$$

и остается неизменным во всем диапазоне отношений $h/2a$.

Формы радиальных колебаний длинного цилиндра те же, что и для тонкого диска. Колебания тонкого диска в радиальном направлении рассмотрены в Разделе 4.4.2. Его нельзя рассматривать как систему с одной степенью свободы во всем представляющем интерес частотном диапазоне, поскольку в этом диапазоне он имеет множество резонансов. Осесимметричное распределение смещения в радиальном направлении, представленное как разложение в ряд по нормальным формам колебаний уравнения (4.163), имеет вид

$$\xi(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i J_1(k_i r) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ai} J_1(k_i r) / J_1(k_i a). \quad (4.603)$$

Здесь ξ_{ai} — смещения при $r = a$, $k_i = \lambda_i / a$ и λ_i — собственные значения для задачи

колебаний (Раздел 4.4.2). Для того чтобы выявить диапазон отношений $h/2a$, в котором возможно применение метода двумерной связи, нужно сохранить только первый член ряда

$$\xi(r) = \xi_a J_1(k_1 r) / J_1(k_1 a), \quad (4.604)$$

где $k_1 a = 2.05$. Соответствующая резонансная частота по формуле (4.16) равна

$$f_a = \frac{2.05}{2\pi a} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (4.605)$$

Резонансная частота следующей формы колебаний в радиальном направлении имеет место при $k_2 a = 5.83$. Таким образом, можно считать, что первая резонансная форма колебаний остается доминирующей примерно до $ka = 3$.

Примем в качестве парциальных резонансных частот резонансную частоту стержня, колеблющегося в своей основной форме,

$$f_h = \frac{1}{2h} \sqrt{Y/\rho}, \quad (4.606)$$

и резонансную частоту тонкого диска, колеблющегося в радиальном направлении вплоть до частот определяемых формулой (4.605), в которой положено $ka = 3$. Отношение $h/2a$, соответствующее условию $\beta = (f_a / f_h) = 1$ сильной связи для резонансных форм колебаний диска, можно определить из соотношения

$$\beta = 6h/2\pi a \sqrt{(1-\sigma^2)} = 1 \text{ или } (h/2a) > 0.5 \text{ при } \sigma = 0.33. \quad (4.607)$$

При увеличении отношения $h/2a$ (увеличение высоты при постоянном диаметре) выше примерно $h/2a \approx 1.5$ усиливается вклад третьей формой продольных колебаний з-за ее связи с первой формой колебаний в радиальном направлении. (Самая сильная связь между третьей формой продольных колебаний и первой формой колебаний в радиальном направлении высокого цилиндра имеет место при $h/2a \approx 1.8$). Но диапазон отношений $h/2a$ за пределами этого значения уже не представляет проблем, поскольку при этих соотношениях высоты и диаметра продольные колебания цилиндра можно рассматривать как одномерные, как будет показано ниже, а формы колебаний в радиальном направлении такого высокого стержня не представляют практического интереса.

Таким образом, весь диапазон отношений $h/2a$ можно условно разделить на несколько областей, которые качественно отличаются с точки зрения вклада колебаний цилиндра в радиальном направлении в его колебания по толщине и с точки зрения применимости к решению задачи техники связанных колебаний. При отношениях $h/2a < 0.1$ вкладом колебаний в радиальном направлении можно практически пренебречь из-за ничтожных значений коэффициентов связи радиальных форм колебаний. Колебания по толщине можно рассматривать как предельный случай одномерных колебаний пластины с бесконечно большими поперечными размерами.

Диапазон $0.5 > h/2a > 0.1$ отношений высоты к диаметру характеризуется связанными колебаниями вдоль оси с несколькими формами колебаний в радиальном направлении при относительно небольших интервалах между резонансными частотами. Это делает задачу колебаний довольно сложной и приводит к сильно неравномерным распределениям смещений на торцевых поверхностях цилиндров. Пьезоэлементы, имеющие такие соотношения размеров, вряд ли пригодны для проектирования преобразователей. Данные о распределении смещений по поверхности дисков при таких соотношениях размеров можно найти в работе [22].

В диапазоне отношений $1.5 > h/2a > 0.5$ доминирует первая форма колебаний в радиальном направлении, и колеблющийся диск можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. В этом диапазоне значений $h/2a$ цилиндр конечной высоты можно рассматривать как систему с двумя степенями свободы, и применять к расчету ее характеристик метод связанных колебаний. Далее рассмотрим зависимости резонансных частот и коэффициентов форм колебаний связанной системы именно для этого диапазона отношений $h/2a$.

Деформации в теле цилиндра в соответствии с предполагаемыми распределениями смещений (4.602) и (4.603) равны

$$S_1 = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} = \xi_a \frac{1}{J_1(k_1 a)} \frac{\partial J_1(k_1 r)}{\partial r} = \xi_a \frac{k_1}{J_1(k_1 a)} \left[J_0(k_1 r) - \frac{J_1(k_1 r)}{k_1 r} \right], \quad (4.608)$$

$$S_2 = \frac{\xi_r}{r} = \xi_a \frac{k_1}{J_1(k_1 a)} \frac{J_1(k_1 r)}{k_1 r}, \quad (4.609)$$

$$S_3 = \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = \xi_h \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h}. \quad (4.610)$$

Соответствующие выражения для напряжений получим с помощью уравнений (4.9). При этом учтем, что для парциальной системы при $\xi_a = 0$ (колеблющийся вдоль оси диск большого диаметра) существуют условия $S_1 = S_2 = 0$; а при $\xi_h = 0$ (цилиндр большой высоты, колеблющийся в радиальном направлении) $S_3 = 0$. Таким образом,

$$T_1 = \frac{Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)S_1 + \sigma S_2], \quad (4.611)$$

$$T_2 = \frac{Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [\sigma S_1 + (1-\sigma)S_2], \quad (4.612)$$

$$T_3 = \frac{Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (1-\sigma)S_3. \quad (4.613)$$

Отметим, что наша конечная цель состоит в расчете связанных колебаний пьезоэлементов рассматриваемой конфигурации. Это будет сделано в Главе 10. Упругие свойства пьезоэлектрической керамики анизотропны, и уравнения, аналогичные (4.9), выглядят как

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3, \\ T_2 &= c_{12}^E S_1 + c_{11}^E S_2 + c_{13}^E S_3, \\ T_3 &= c_{13}^E S_1 + c_{13}^E S_2 + c_{33}^E S_3, \end{aligned} \quad (4.614)$$

где c_{ik}^E — модули упругости пьезокерамики при напряженности электрического поля $E_3 = 0$. Здесь мы рассматриваем колебания пассивных изотропных тел, но для того, чтобы получить выражения для эквивалентных параметров изотропного тела в таких же обозначениях как в последующем для пьезоэлементов той же конфигурации, а кроме того и из соображений краткости, введем следующие обозначения

$$\frac{Y(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = c_a = c_h, \quad (4.615)$$

где c_a — аналог c_{11}^E и c_h — аналог c_{33}^E ,

$$\frac{Y\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = c_{ah}, \quad (4.616)$$

где c_{ah} — аналог c_{13}^E и c_{12}^E .

Рассмотрим выражения для потенциальной и кинетической энергий связанной системы.

$$W_{pot} = \frac{1}{2} 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a (S_1 T_1 + S_2 T_2 + S_3 T_3) r dr dz = \frac{1}{2} (K_{eqva} \xi_a^2 + 2K_{ah} \xi_a \xi_h + K_{eqvh} \xi_h^2), \quad (4.617)$$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a \rho [\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_z^2] r dr dz = \frac{1}{2} (M_{eqva} \dot{\xi}_a^2 + 2M_{ah} \dot{\xi}_a \dot{\xi}_h + M_{eqvh} \dot{\xi}_h^2). \quad (4.618)$$

После подстановки выше приведенных выражений для напряжений, деформаций и смещений, получим следующие выражения для эквивалентных жесткостей и масс, относящихся к парциальным системам (их «собственные» параметры) и для параметров K_{ah} , M_{ah} , характеризующих связь между парциальными системами:

$$K_{eqva} = 13.4hc_a, \quad K_{eqvh} = \frac{\pi^3 a^2}{2h} c_h, \quad K_{ah} = 4.2\pi a c_{ah}; \quad (4.619)$$

$$M_{eqva} = 0.86M, \quad M_{eqvh} = 0.5M, \quad M_{ah} = 0. \quad (4.620)$$

Таким образом, связь между парциальными системами упругая и коэффициент связи равен

$$\gamma = \left(K_{ah} / \sqrt{K_{eqva} K_{eqvh}} \right) \approx \frac{c_{ah}}{\sqrt{c_a c_h}} = \frac{\sigma}{1 - \sigma}. \quad (4.621)$$

Например, рассмотрим цилиндр из алюминия ($\sigma = 0.33$) с $\gamma = 0.49$.

Парциальные резонансные частоты

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{eqva}}{M_{eqva}}} = \frac{0.43}{a} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad f_h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{eqvh}}{M_{eqvh}}} = \frac{0.61}{h} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \quad (4.622)$$

Отношение парциальных резонансных частот получим в виде

$$\beta = \frac{f_a}{f_h} \approx 1.4 \frac{h}{2a}. \quad (4.623)$$

После того как определены коэффициенты γ и β , можно рассчитать зависимости резонансных частот и коэффициентов форм колебаний аналогично тому, как это было продемонстрировано в предыдущем разделе (см. уравнения (4.58) и (4.583)).

4.6.2.4 Связанные колебания тонкостенных цилиндров

Широкое применение в гидроакустике находят цилиндрические пьезокерамические преобразователи. В том случае, если преобразователи состоят из тонкостенных коротких колец, для которых справедливо предположение об одномерной природе колебаний в окружном направлении, методы расчета их параметров хорошо известны (см. Раздел 4.4.4). С увеличением отношения высоты к диаметру составляющих пьезоэлементов одномерное приближение становится неприемлемым, и колебания цилиндрических пьезоэлементов, имеющих конечную высоту, необходимо рассматривать как двумерные связанные колебания в окружном и осевом направлениях.

Следует отметить, что существует неопределенность в отношении того, как называть тонкостенные цилиндрические пьезоэлементы, если рассматривать их двумерные колебания. Что касается пассивных элементов, то их обычно называют кольцами при $h/2a \ll 1$ и цилиндрами при $h/2a \gg 1$. Но неясно, при каких условиях кольцо переходит в цилиндр. В то же время у поставщиков пьезокерамических элементов существует соглашение называть тонкостенные пьезоэлементы с электродами, нанесенными на боковые поверхности, цилиндрами независимо от соотношения их высоты и диаметра, а пьезоэлементы с электродами на торцах – кольцами. Следуя этому правилу, мы будем называть объекты анализа в этом разделе цилиндрами, имея в виду их последующие применения в качестве пьезоэлементов поляризованных радиально.

Впервые анализ колебаний радиально поляризованных пьезокерамических цилиндров в двумерном приближении был проведен в работе [25], следуя методу расчета колебаний аналогичных пассивных тонких цилиндров, разработанному в работе [1] на основе «мембранной» теории оболочек. Общим в обоих этих анализах было предсказание существования так называемой «мертвой зоны», то есть некоторого частотного диапазона, в котором не могут возникать резонансные колебания цилиндра. Этот невероятный с физической точки зрения результат коренится в приближении мембранной теории, которая предполагает, что толщина цилиндрической оболочки мала до такой степени, что можно пренебречь энергией ее изгибных деформаций по сравнению с энергией продольных деформаций при любом отношении $h/2a$.

Альтернатива подходу, примененному в работе [1], который приводит к решению

дифференциальных уравнений движения в частных производных, была предложена Гиббе и Блехшмидтом [19]. Они предложили рассматривать колебания цилиндра, как динамическое взаимодействие двух связанных парциальных механических систем, а именно: тонкого кольца, совершающего радиальные колебания, и тонкого стержня, совершающего продольные колебания. Далее мы будем придерживаться этого подхода.

Что касается наличия «мертвой зоны», то в работе [26] было показано, что такое предположение особенно неверно для диапазона соотношений размеров цилиндра, при которых (по терминологии теории связанных колебаний, не упомянутой в работе) существует сильная связь между парциальными системами цилиндра. Для того чтобы исправить этот недостаток, при рассмотрении связанных колебаний цилиндра следует учитывать энергию деформаций изгиба его стенки, или стержня как одной из парциальных систем. Это требует введение еще одной обобщенной координаты, что приводит к задаче с тремя степенями свободы. Для ее решения примененная ранее методика рассмотрения связанных колебаний должна быть изменена. Далее будем следовать измененной методике, которая представлена в работе [27].

4.6.2.4.3 Распределение деформаций в тонкостенных цилиндрах.

Рассмотрим продольные осесимметричные колебания тонкостенного изотропного цилиндра, представленного на Рис. 4.49 (а), как связанные колебания двух одномерных парциальных систем, а именно: кольца, совершающего радиальные колебания, (Рис. 4.49 (b)) и тонкого стержня, совершающего продольные колебания (Рис. 4.49 (с)).

Обычное предположение относительно толщины t «тонкостенного» цилиндра — $t \ll 2a$. Другими словами, это означает, что резонансная частота колебаний кольца по толщине и резонансная частота колебаний кольца в радиальном направлении $f_r = c / 2\pi a$ находятся очень далеко друг от друга. Таким образом, эти колебания можно считать независимыми, и на частотах, близких к радиальному резонансу кольца, толщина очень мала по сравнению с длиной волны продольных колебаний.

Поэтому напряжения в радиальном направлении T_r являются практически постоянными, и, будучи нулевыми на поверхностях кольца, они остаются ничтожно малыми внутри его объема, т.е. $T_r = 0$, что позволяет рассматривать задачу колебаний цилиндра

как двухмерную.

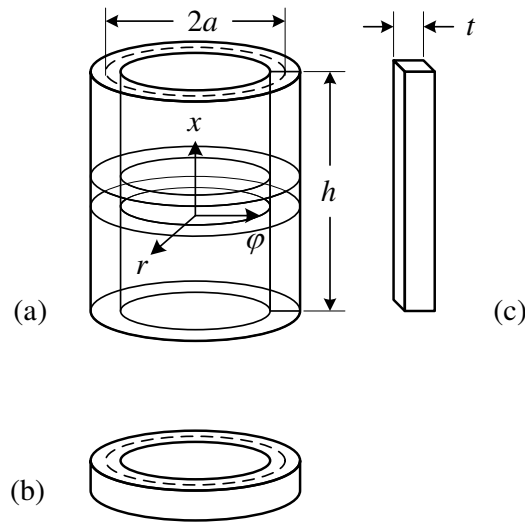


Рисунок 4.49: Тонкостенный цилиндр (а) и его парциальные подсистемы: (b) короткое кольцо, совершающее радиальные колебания, и (c) тонкий стержень, совершающий продольные колебания.

Рассмотрим предельные случаи для высоты цилиндра. В случае если $h/2a \ll 1$, цилиндр переходит в короткое кольцо, первая резонансная частота колебаний которого по высоте $f_{h1} \doteq c/2h$ значительно выше резонансной частоты колебаний в радиальном направлении f_r . По причинам, обсужденным относительно толщины кольца, можно предположить, что осевое напряжение $T_x = 0$ в объеме кольца. Таким образом, задача становится одномерной с известным решением. В случае если $h/2a \rightarrow \infty$, цилиндр становится очень длинным, резонансная частота продольных колебаний становится значительно ниже, чем для радиальных колебаний, и осевые колебания в районе частоты радиального резонанса можно рассматривать как одномерные с механическими условиями $T_r = 0$ и $S_x = 0$, где S_x — деформация в осевом направлении. Последнее условие, строго говоря, справедливо для бесконечно длинного цилиндра из соображений симметрии, но можно предположить, что оно применимо и к цилиндру, длина которого велика по сравнению с длиной волны продольных колебаний в представляющем интерес диапазоне частот. На практике оба одномерных приближения справедливы для широкого диапазона отношений $h/2a$ при условии, что расстояние между резонансными частотами колебаний в осевом и радиальном направлениях достаточно велико. Однако, что значит

достаточно велико с точки зрения приемлемой точности расчетов, произведенных при этих приближениях, еще предстоит оценить.

Из общей теории связанных колебаний следует, что самая сильная связь между парциальными системами имеет место, если резонансные частоты парциальных систем равны. В нашем случае это условие выполняется при значении $\beta = h/2a = \pi/2$, при котором $f_r = f_{h1}$, а затем многократно при совпадениях гармоник продольных резонансов с радиальным резонансом. Таким образом, можно ожидать, что приближение одномерным кольцом может быть справедливо для цилиндров с отношениями размеров $h/2a \ll \pi/2$. При каком наименьшем значении отношения $h/2a$ становится приемлемым одномерное приближение длинным цилиндром, предстоит выяснить.

Для того чтобы применить метод связанных колебаний, необходимо сделать предположение относительно распределения деформаций в объеме цилиндра. В начале рассмотрим деформации кольца (Рис. 4.49 (b)). Обозначим смещение поверхности кольца в радиальном направлении ξ_0 , тогда деформации в окружном направлении S_φ равны

$$S_\varphi = \frac{2\pi(a + \xi_0) - 2\pi a}{2\pi a} = \frac{\xi_0}{a}, \quad (4.624)$$

и деформации S_x в направлении вдоль оси

$$S_x = -\sigma S_\varphi = -\sigma \xi_0 / a. \quad (4.625)$$

Соответственно, смещение в направлении оси ξ_{xr} , вызываемое в цилиндре смещением в радиальном направлении, имеет вид

$$\xi_{xr} = -\xi_0 \frac{\sigma x}{a}. \quad (4.626)$$

Рассмотрим теперь деформации тонкого стержня (Рис. 4.49 (c)). Смещение в направлении оси ξ_{xx} можно представить в виде разложения в ряд

$$\xi_{xx} = \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{xi} \sin(i\pi x / h), \quad (4.627)$$

где n - число форм колебаний, принимаемых во внимание для приемлемого приближения. Выражение для деформаций в направлении вдоль оси

$$S_x = \partial \xi_{xx} / \partial x, \quad (4.628)$$

и деформацию в поперечном направлении S_φ можно определить как

$$S_\varphi = -\sigma S_x = -\sigma \partial \xi_{xx} / \partial x. \quad (4.629)$$

Деформации S_φ в окружном направлении соответствует радиальное смещение поверхности ξ_{rx} . Из формулы (4.624) следует, что это смещение равно

$$\xi_{rx} = a S_\varphi \quad (4.630)$$

Таким образом, деформации стержня в направлении вдоль оси порождают смещение поверхности цилиндра в радиальном направлении

$$\xi_{rx} = -\sigma a (\partial \xi_{xx} / \partial x), \quad (4.631)$$

которые, со ссылкой на уравнение (4.627), можно представить в виде

$$\xi_{rx} = \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{ri} \cos(i\pi x / h), \quad (4.632)$$

где $\xi_{ri} = -i\pi\sigma a / h$, $i = 0, \dots, 4$.

Суммируя приведенные соображения, распределение смещений в осесимметрично колеблющемся тонкостенном цилиндре представим следующим образом:

$$\xi_x = \xi_{xx} + \xi_{xr} = (-\sigma x / a) \xi_0 + \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{xi} \sin(i\pi x / h), \quad (4.633)$$

$$\xi_r = \xi_0 + \xi_{rx} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{ri} \cos(i\pi x / h). \quad (4.634)$$

Распределение смещений в цилиндре качественно представлено на Рис. 4.50 (а) в виде суперпозиции смещений, генерируемых колебаниями парциальных систем (для простоты проиллюстрирована только основная форма колебаний стержня).

Исходя из распределений смещений, определяемых выражениями (4.629) и (4.630), осесимметричное распределение деформаций в теле цилиндра представим в цилиндрических координатах x , φ следующим образом:

$$S_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{a} \xi_0 + \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{xi} \frac{i\pi}{h} \cos(i\pi x / h) - z \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{ri} \left(\frac{i\pi}{h} \right)^2 \cos(i\pi x / h), \quad (4.635)$$

$$S_\varphi = \frac{\xi_r}{a} = \frac{\xi_0}{a} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{2n-1} \xi_{ri} \cos(i\pi x / h). \quad (4.636)$$

Член $(-z \partial^2 \xi_r / \partial x^2)$ в уравнении (4.635) соответствует деформациям изгиба стенки цилиндра. Координатная ось z направлена радиально и имеет начало на средней поверхности цилиндра, как это показано на Рис. 4.50 (b). Этот член является принципиальным в нашем анализе. Он отвечает за энергию изгибных деформаций стенки цилиндра, имеющей конечную толщину. Наличие этой составляющей позволяет устранить недостатки решения, полученного на основе применения «мембранной» теории.

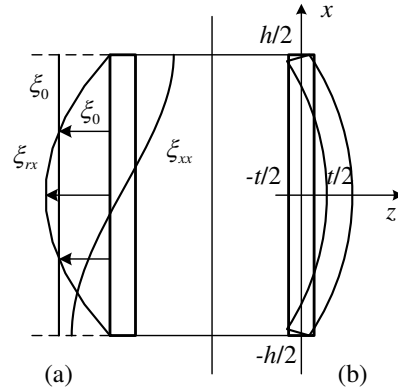


Рисунок 4.50: Распределение смещений в цилиндре: (a) при продольных колебаниях, (b) при изгибных колебаниях.

Из уравнения (4.10) следует, что напряжения в цилиндре (напомним, что $T_r = 0$) равны

$$T_x = \frac{Y}{1 - \sigma^2} (S_x + \sigma S_\varphi), \quad (4.637)$$

$$T_\varphi = \frac{Y}{1 - \sigma^2} (\sigma S_x + S_\varphi). \quad (4.638)$$

Путем подстановки в уравнение (4.637) деформаций S_x и S_φ , определяемых выражениями (4.635) и (4.636), легко убедиться в том, что граничные условия $T_x(\pm h/2) = 0$ на свободных торцах цилиндра соблюдены. При известных распределениях смещений и деформаций в цилиндре уравнения движения могут быть представлены в виде уравнений Лагранжа.

Следует сделать замечание относительно числа членов ряда (4.627), которые надо учитывать при практических расчетах для достижения приемлемого уровня точности результатов. Это зависит от диапазона рассматриваемых отношений $h/2a$. В диапазоне

ниже и вокруг первой области сильной связи, а именно при $0 < h/2a < 3$, достаточно удержать только первый член ряда, который соответствует основной форме продольных колебаний. В диапазоне ниже и вокруг второй области сильной связи, то есть при $0 < h/2a < 6$, необходимо включить следующий член, который соответствует третьей гармонике продольных колебаний.

Еще одно замечание касается члена в уравнении (4.635), соответствующего колебаниям изгиба. Этот член представлен на основе элементарной теории изгиба. Это можно считать достаточно точным до тех пор, пока отношение половины волны колебаний изгиба к толщине стержня как парциальной системы значительно больше единицы, т.е. $h/it \gg 1$, где i — число полуволн колебаний изгиба на длине стержня. В противном случае следует принимать во внимание поправки, учитывающие влияние на результаты инерции вращения и деформаций сдвига поперечных сечений стержня, как это показано в Разделе 4.3.5.

4.6.2.4.4 Результаты решения уравнений связанных колебаний тонкостенных цилиндров

Уравнения свободных колебаний изотропных упругих цилиндров можно получить в виде уравнений Лагранжа. Будем рассматривать второе приближение (в этом случае $n = 2$ в уравнениях (4.635) и (4.636)). Введем следующие новые обозначения для обобщенных координат: $\xi_{r1} \rightarrow \xi_1$, $\xi_{r3} \rightarrow \xi_3$, $\xi_{x1} \rightarrow \xi_2$, $\xi_{x3} \rightarrow \xi_4$. Таким образом, для описания решения задачи будут применены пять обобщенных координат ξ_i . Для получения уравнений Лагранжа необходимо рассмотреть кинетическую и потенциальную энергии колебаний цилиндра. В предположении, что для анализа деформаций изгиба применима элементарная теория изгиба, эти энергии представим следующим образом.

Кинетическая энергия равна

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \rho (\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_x^2) d\tilde{V} = \frac{1}{2} 2\pi a t \rho \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_x^2) dx. \quad (4.639)$$

Здесь $\dot{\xi}$ — производная по времени от смещения или скорость, и \tilde{V} — объем цилиндра. После подстановки смещений ξ_r и ξ_x из уравнений (4.633) и (4.634) и интегрирования по высоте цилиндра получим

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^4 M_{ii} \dot{\xi}_i^2 + 2 \sum_{l=1}^4 M_{0l} \dot{\xi}_0 \dot{\xi}_l \right), \quad (4.640)$$

где

$$\begin{aligned} M_{00} &= M \left(1 + \frac{\sigma^2 h^2}{12a^2} \right), \quad M_{ii} = \frac{M}{2} \quad (\text{при } i = 1, 2, 3, 4), \quad M_{01} = \frac{2}{\pi} M, \\ M_{02} &= -\frac{2\sigma h}{\pi^2 a} M, \quad M_{03} = -\frac{2}{3\pi} M, \quad M_{04} = \frac{2\sigma h}{9a\pi^2} M. \end{aligned} \quad (4.641)$$

Здесь $M = 2\pi a h t \rho$ — масса цилиндра.

Потенциальная энергия цилиндра

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} (S_x T_x + S_\varphi T_\varphi) d\tilde{V}, \quad (4.642)$$

После подстановки выражений (4.635) и (4.636) для деформаций и выражений (4.637) и (4.638) для напряжений под интеграл (4.642), интегрирования по объему цилиндра и некоторых преобразований получим

$$W_{pot} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^4 K_{ii} \xi_i^2 + 2(K_{01} \xi_0 \xi_1 + K_{12} \xi_1 \xi_2 + K_{03} \xi_0 \xi_3 + K_{34} \xi_3 \xi_4) \right], \quad (4.643)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} K_{00} &= \frac{2\pi h t Y}{a}, \quad K_{ii} = \frac{\pi h t Y}{a(1-\sigma^2)} \left[1 + \frac{(i\pi)^4}{48} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \left(\frac{2a}{h} \right)^2 \right] \quad (i = 1, 3), \\ K_{22} &= \frac{\pi^3 a t Y}{h(1-\sigma^2)}, \quad K_{44} = \frac{9\pi^3 a t Y}{h(1-\sigma^2)}, \quad K_{01} = \frac{4thY}{a}, \\ K_{03} &= \frac{4thY}{3a}, \quad K_{12} = \frac{\pi^2 t \sigma Y}{1-\sigma^2}, \quad K_{34} = \frac{3\pi^2 t \sigma Y}{1-\sigma^2}. \end{aligned} \quad (4.644)$$

Как было отмечено, при малых отношениях h/t следует ввести поправки к выражениям для эквивалентных масс и жесткостей, характеризующих изгиб, аналогичные тем, что были введены в соответствии с формулами (4.140) для стержней. В результате для масс и жесткостей при $i = 1, 3$ получим выражения

$$M_{ii} = \frac{M}{2} \left[1 + \frac{(i\pi t)^2}{12h^2} \right], \quad (4.645)$$

$$K_{ii} = \frac{\pi h t Y}{a(1-\sigma^2)} \left[1 + \frac{(i\pi)^4}{48} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \left(\frac{2a}{h} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{(i\pi)^2}{20} \frac{Y}{\mu} \left(\frac{t}{h} \right)^2 \right], \quad (4.646)$$

с поправками, учитывающими инерцию вращения и сдвиговые деформации при изгибе. Расчеты, выполненные с учетом этих поправок, точны в диапазоне отношений $h/2a > 0.5$ при $i = 1$ и $h/2a > 1.5$ при $i = 3$.

Уравнения Лагранжа свободных колебаний цилиндра,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \frac{\partial W_{pot}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (4.647)$$

после подстановки выражений (4.640) и (4.643) для кинетической и потенциальной энергии, дифференцирования и преобразования в комплексные величины, получаем в виде

$$(j\omega M_{eqvi} + K_{eqvi} / j\omega) U_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (4.648)$$

Здесь U_i — комплексная амплитуда скорости $\dot{\xi}_i$, а M_{eqvi} и K_{eqvi} — эквивалентные параметры, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{eqv0} &= M_{00} + \sum_{i=1}^4 M_{0i}(U_i / U_0), & M_{eqv1} &= M_{11} + M_{01}(U_0 / U_1), \\ M_{eqv2} &= M_{22} + M_{02}(U_0 / U_2), & M_{eqv3} &= M_{33} + M_{03}(U_0 / U_3), \\ M_{eqv4} &= M_{44} + M_{04}(U_0 / U_4), \end{aligned} \quad (4.649)$$

$$\begin{aligned} K_{eqv0} &= K_{00} + K_{01}(U_1 / U_0) + K_{03}(U_3 / U_0), & K_{eqv2} &= K_{22} + K_{12}(U_1 / U_2), \\ K_{eqv4} &= K_{44} + K_{34}(U_3 / U_4), & K_{eqv1} &= K_{11} + K_{01}(U_0 / U_1) + K_{12}(U_2 / U_1), \\ K_{eqv3} &= K_{33} + K_{03}(U_0 / U_3) + K_{34}(U_4 / U_3). \end{aligned} \quad (4.650)$$

После подстановки определенных таким образом параметров в уравнение (4.648), эти уравнения в конечном итоге можно представить в форме

$$Z_{ii} U_i + \sum_{l \neq i} z_{il} U_l = 0 \quad (i, l = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (4.651)$$

где

$$\begin{aligned} z_{il} &= z_{ii}, & z_{13} &= z_{23} = z_{14} = z_{24} = 0, & Z_{ii} &= (K_{ii} / j\omega)(1 - \omega^2 / \omega_{ii}^2), \\ z_{01} &= (K_{01} / j\omega)(1 - \omega^2 / \omega_{01}^2), & z_{02} &= j\omega M_{02}, & z_{03} &= (K_{03} / j\omega)(1 - \omega^2 / \omega_{03}^2), \\ z_{04} &= j\omega M_{04}, & z_{12} &= K_{12} / j\omega, & z_{34} &= K_{34} / j\omega. \end{aligned} \quad (4.652)$$

При представлении импедансов в виде (4.652) учтены соотношения (4.649) и (4.650)

и введены обозначения:

$$\omega_{ii}^2 = K_{ii} / M_{ii}, \quad \omega_{01}^2 = K_{01} / M_{01}, \quad \omega_{03}^2 = K_{03} / M_{03}. \quad (4.653)$$

Частоты ω_{ii} можно интерпретировать следующим образом:

$$\omega_{00}^2 = K_{00} / M_{00} = \frac{Y}{a^2 \rho [1 + \sigma^2 h^2 / (12a^2)]} = \omega_{ring}^2, \quad (4.654)$$

$$\omega_{11}^2 = K_{11} / M_{11} = \frac{Y}{a^2 \rho (1 - \sigma^2)} + \frac{\pi^4 t^2 Y}{12h^4 \rho (1 - \sigma^2)} = \omega_{tube}^2 + \omega_{fn1}^2, \quad (4.655)$$

$$\omega_{22}^2 = K_{22} / M_{22} = \frac{\pi^2 Y}{h^2 \rho (1 - \sigma^2)} = \omega_{h1}^2, \quad (4.656)$$

$$\omega_{33}^2 = K_{33} / M_{33} = \omega_{tube}^2 + \omega_{fn3}^2 = \omega_{tube}^2 + 9\omega_{fn1}^2, \quad (4.657)$$

$$\omega_{44}^2 = K_{44} / M_{44} = \omega_{h3}^2 = 9\omega_{h1}^2. \quad (4.658)$$

Выражения для ω_{11} и ω_{33} приведены для отношений $h/2a$, при которых применима элементарная теория изгиба, т. е. без поправок в выражениях (4.645) и (4.646).

В уравнениях (4.654) - (4.658) введены следующие обозначения: ω_{ring} — для резонансной частоты колебаний в радиальном направлении тонкого кольца высотой h , малой по сравнению с его радиусом; ω_{h1} и ω_{h3} для основной резонансной частоты и третьей гармоники колебаний бесконечной тонкой полосы в направлении ее ширины h ; ω_{tube} для резонансной частоты колебаний в радиальном направлении тонкостенного цилиндра бесконечной высоты; ω_{fn1} и ω_{fn3} для первой и третьей резонансных частот изгибных колебаний по «ширине» бесконечной полосы толщиной t свободно опертой по краям. Выражения для частот в уравнениях (4.654) - (4.656) можно найти в работе [1]. Уравнение (4.655) представим в виде

$$\omega_{11}^2 = \omega_{tube}^2 \left[1 + \frac{\pi^4}{48} (t/h)^2 (2a/h)^2 \right], \quad (4.659)$$

откуда следует, что частота ω_{11} зависит как от отношения $h/2a$, так и от отношения толщины к высоте цилиндра t/h . Далее частоты ω_{ii} будут обозначены для краткости ω_i при $i = 0, \dots, 4$.

Система уравнений (4.651) приводит к решению задачи свободных связанных колебаний в пассивном изотропном цилиндре. Результаты вычисления резонансных частот

как функций отношения $h/2a$ представлены на Рис. 4.51. Расчеты произведены для цилиндров из пьезокерамики PZT-4 с наружным диаметром $D_o = 38.2$ мм и толщиной $t = 3.2$ мм, что соответствует размерам цилиндров, которые были применены в экспериментальном исследовании [28]. В расчете приняты значения постоянных упругости керамики PZT-4, приведенные в работе [29]. Результаты вычислений, приведенные на Рис. 4.51, показали, что, по крайней мере до отношений $h/2a \doteq 3$, второе приближение не вносит заметного вклада в значения частот в ветвях 0, 1 и 2, рассчитанные с использованием только первого приближения.

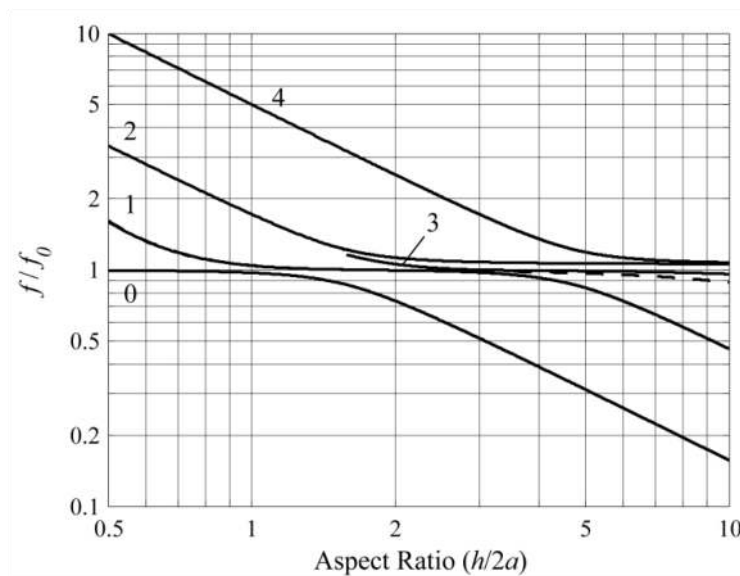


Рисунок 4.51: Резонансные частоты ω_i тонкостенного цилиндра (PZT-4, $2a=35$ мм, $t=3.2$ мм), нормированные к резонансной частоте короткого кольца, $f_0 = 30$ кГц, в зависимости от отношения $h/2a$. Кривые помечены номерами $i = 0, \dots, 4$.

Единственное отклонение, обусловленное вторым приближением, показано на Рис. 4.51 пунктирной линией и принадлежит кривой 1. Частотные ветви 0, 1 и 2 представляют наибольший практический интерес. При их рассмотрении обобщенные скорости U_3 , U_4 и все связанные с ними импедансы в уравнении (4.651) можно опустить. Так что дальнейший анализ ограничим первым приближением, тем более что диапазон отношений $h/2a < 3$ наиболее интересен для практических применений, а принятое ограничение существенно упрощает анализ без потери точности. Кроме того, при необходимости рассмотреть решения для больших значений $h/2a$ можно применить аналогичную

методику.

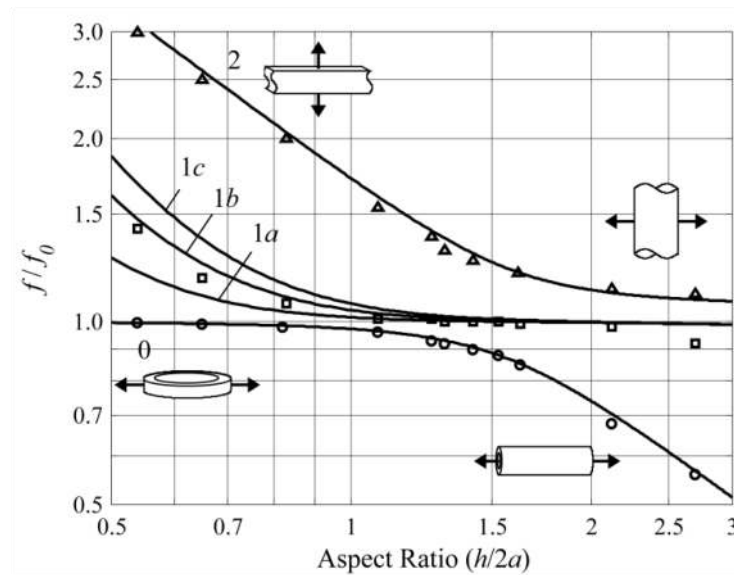


Рисунок 4.52: Нормированные резонансные частоты цилиндра (PZT-4, $2a = 35$ мм), рассчитанные в первом приближении при разной толщине стенки t : (1a) 2.0 мм, (1b) 3.2 мм, (1c) 4.0 мм. Экспериментальные данные, приведенные в работе [28], показаны кружками для ветви 0, квадратами для ветви 1 и треугольниками для ветви 2.

Приведенные на Рис. 4.51 зависимости, относящиеся только к первому приближению и до значений $h/2a = 3$, воспроизведены на Рис. 4.52 в большем масштабе. На рисунке представлены также результаты расчетов, выполненных при разных толщинах стенки цилиндра, и результаты экспериментального исследования.

Принципиальное отличие частотных зависимостей, представленных на Рис. 4.51, от тех, что приведены в работе [25], состоит в существовании связанных с изгибом стенки цилиндра частотных ветвей 1 и 3, которые пересекают так называемую «мертвую зону». Наличие этих частотных ветвей не могло быть предсказано «мембранной» теорией, следствием чего и явился физически не состоятельный вывод о якобы существовании такой зоны.

На Рис. 4.52 представлены результаты расчетов, выполненных для цилиндров с разными толщинами стенок, которые демонстрируют существенную зависимость «промежуточной» ветви частоты 1 от толщины при отношениях $h/2a$ вплоть до значений в непосредственной близости от точки наибольшей связи, что свидетельствует об

изгибной природе соответствующих форм колебаний в этом диапазоне размеров. (Заметим, что в силу зависимости от толщины, нормированные численные значения частоты для ветвей, связанных с изгибом, справедливы только при толщине $t = 3.2$ мм). Выше точки наибольшей связи эта частотная ветвь становится независимой от толщины, как и ветви, соответствующие продольным колебаниям. Это согласуется с результатами экспериментальных исследований, приведенных в работе [28].

Влияние связанных колебаний на эффективность работы пьезокерамических цилиндрических преобразователей конечного размера будет рассмотрено в Главе 7.

4.7 Входные импедансы механических систем

4.7.1 Входное сопротивление однородного стержня

Входное сопротивление стержня постоянного сечения S_{cs} , который нагружен на противоположном торце импедансом Z_L , определенное соотношением (4.101) или из двухполюсной схемы, представленной на Рис. 4.6 (а), равно

$$Z_{in} = \frac{j\rho c S_{cs} \tan kl + Z_L}{1 + j(Z_L / \rho c S_{cs}) \tan kl}. \quad (4.660)$$

Кроме того, отношение скорости колебаний нагрузки U_L к скорости колебаний торца на входе стержня U , полученное из той же схемы, имеет вид

$$U_L / U = 1 / \cos kl [1 + j(Z_L / \rho c S_{cs}) \tan kl]. \quad (4.661)$$

Рассмотрим входные сопротивления стержня при различных нагрузках.

Входное сопротивление стержня со свободным торцом ($Z_L = 0$) равно

$$Z_{in} = j\rho c S_{cs} \tan kl. \quad (4.662)$$

Эта функция представлена на Рис. 4.53 сплошной линией. В случае если $l \rightarrow \lambda/4$ (четверть длины волны на длине стержня), что соответствует частоте параллельного резонанса ω_{pr} , входное сопротивление стремится к бесконечности $Z_{in} \rightarrow \infty$, и в окрестности частоты резонанса эквивалентную схему стержня можно представить в виде параллельного контура. Прикрепление четвертьволнового ненагруженного стержня к некоторому участку поверхности может привести к торможению участка.

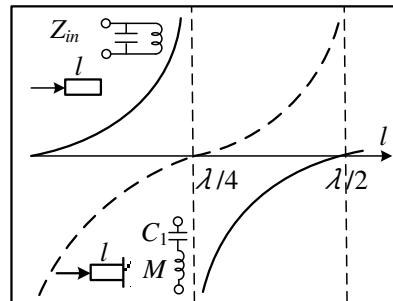


Рисунок 4.53: Входное сопротивление стержня: стержень со свободным торцом - сплошная линия, стержень с заторможенным торцом – штриховая линия.

При уменьшении длины стержня до $l \rightarrow \lambda/6$ входное сопротивление становится

$$Z_{in} \approx j\rho c S_{cs} kl = j\omega M, \quad (4.663)$$

и в пределах 10% точности стержень ведет себя как масса $M = \rho S_{cs} l$.

Как это следует из формулы (4.660), входное сопротивление стержня, нагруженного активным сопротивлением $Z_L = r_L$, где $r_L / \rho c S_{cs} < 1$, равно

$$Z_{in} \approx j\rho c S_{cs} \tan kl + r_L / \cos^2 kl. \quad (4.664)$$

Таким образом, стержень можно использовать для существенного преобразования сопротивления нагрузки путем изменения его длины к длине волны в стержне.

Входное сопротивление стержня с заторможенным торцом ($Z_L \rightarrow \infty$) равно

$$Z_{in} = j\rho c S_{cs} / \tan kl. \quad (4.665)$$

Эта функция представлена на Рис. 4.53 штриховой линией. При длине $l = \lambda/4$ $Z_{in} = 0$, что соответствует резонансной частоте стержня. В диапазоне частот, близком к этой частоте, эквивалентную схему стержня можно представить в виде последовательного контура с параметрами

$$M_l = M/2, \quad C_l = 8/\pi^2 Y S_{cs}. \quad (4.666)$$

При $l < \lambda/6$

$$Z_{in} \approx -j\rho c S_{cs} / kl = \rho c^2 S_{cs} = K_l / j\omega, \quad (4.667)$$

и стержень ведет себя как жесткость

$$K_l = l / \rho c^2 S_{cs} = l / Y S_{cs}. \quad (4.668)$$

Таким образом, реактивная и активная составляющие входного импеданса однородного стержня могут быть существенно изменены в зависимости от нагрузки, приложенной к его торцу, и от волнового сопротивления $\rho c S_{cs}$ и волновой длины стержня. Благодаря этому качеству стержень может быть применен для согласования преобразователей с внешними нагрузками, в частности, для компенсации реактивной составляющей внутреннего импеданса преобразователя на определенной рабочей частоте (резонансная настройка) и для преобразования импедансов нагрузки и внешних сил с целью приближения к оптимальным условиям эксплуатации преобразователя. Для расширения возможностей согласования наряду с однородными стержнями постоянного сечения применяют системы, которые состоят из стержней, имеющих разные поперечные сечения и выполненных из разных материалов.

Следует помнить, что все рассуждения в этом разделе справедливы при условии, что поперечные сечения стержня совершают поршневые колебания. На практике это приближение справедливо при достаточно больших значениях отношения длины стержня к диаметру ($l/2a > 1.5$). При меньших отношениях размеров эффекты связанных колебаний вдоль оси и в радиальном направлениях могут стать значительными, и в конечном итоге могут возникнуть неравномерности колебаний в сечениях стержня подобно тому, как это происходит с толстым диском. В таком случае точное аналитическое решение задачи колебаний становится маловероятным, и более естественно применить для расчетов МКЭ. В следующем разделе рассмотрены входные сопротивления тонкого диска в предельном случае при малом отношении размеров (при $l/2a \rightarrow 0$).

4.7.2 Входные сопротивления круглого диска

Круглые диски находят широкое применение в конструкциях преобразователей. Так, например, фланцы цилиндрического преобразователя можно рассматривать как круглые диски. Расчет цилиндрического преобразователя в этом случае требует определения входных сопротивлений на краю диска в радиальном (Z_{irr}) и в перпендикулярном к его поверхности (Z_{inx}) направлениях. Круглый диск можно рассматривать так же как предельный случай соответствующего элемента преобразователя типа Topriltz. При этом стержневой преобразователь часто изготавливают в виде полого цилиндра, и его расчет

требует знания входного сопротивления диска в направлении, перпендикулярном к его плоскости на окружности с радиусом, который может быть изменен из соображений оптимизации условий согласования. В обоих случаях диски должны иметь такие размеры, чтобы их резонансные частоты были выше рабочего диапазона частот.

4.7.2.1 Входное сопротивление круглого диска в радиальном направлении

Предполагая, что в диапазоне частот ниже первой резонансной частоты сохраняется резонансная форма колебаний, диск со свободным краем можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, форма колебаний которой

$$\theta_1(r/a) = J_1(2.05r/a) / J_1(2.05). \quad (4.669)$$

Общая система уравнений (4.254) для диска в этом приближении сводится к уравнению

$$Z_{m11}U_1 = F_{m1}, \quad (4.670)$$

где F_{m1} — суммарная сила, действующая на край диска в радиальном направлении, U_1 — скорость колебаний края в радиальном направлении, и Z_{m11} определяется соотношением (4.253). Таким образом, входное сопротивление диска равно

$$Z_{inr} = F_{m1} / U_1 = Z_{m11}, \quad (4.671)$$

а именно

$$Z_{inr} = F_{m1} / U_1 = j\omega M_{11} + (K_{11} / j\omega) + r_{mL} = -jK_{11}[1 - (\omega / \omega_1)^2] / \omega + r_{mL}. \quad (4.672)$$

Эквивалентная масса M_{11} и жесткость K_{11} определяются формулами (4.236). Для этого случая

$$M_{11} = 2\pi t \rho \int_0^a \theta_1^2(r/a) r dr, \quad K_{11} = \frac{2\pi t Y}{1 - \sigma^2} \int_0^a \theta_1^2(r/a) r dr. \quad (4.673)$$

После подстановки формы колебаний (4.669) и интегрирования получим

$$M_{11} = 0.78M, \quad K_{11} = \frac{10.3tY}{1 - \sigma^2}, \quad \omega_1 = \frac{2.05}{a} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1 - \sigma^2)}}. \quad (4.674)$$

4.7.2.2 Входное сопротивление на краю диска в поперечном направлении

Представим смещения диска в виде

$$\xi(r) = \xi_a + \xi_o \theta(r/a), \quad (4.675)$$

где ξ_a — смещение края диск (Рис. 4.54 (а)), и

$$\theta_1(r/a) = (1 - r^2/a^2)(1 - r^2/4a^2) \quad (4.676)$$

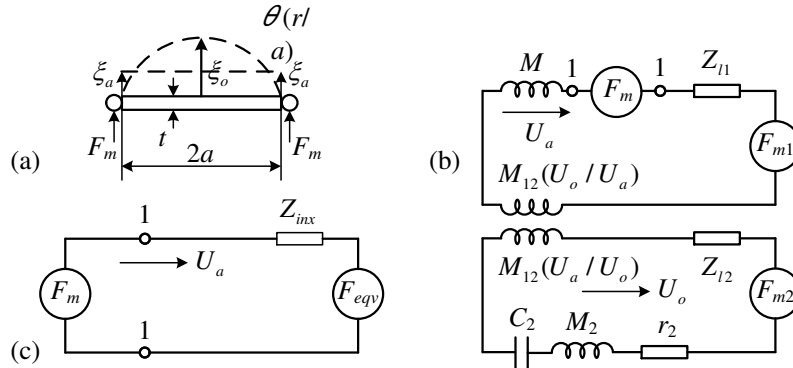


Рисунок 4.54: К определению входного сопротивления на краю круглого диска: (а) общий вид диска, (б) эквивалентная схема для расчета входного сопротивления между точками 1, 1; (с) упрощенная эквивалентная схема.

это форма статического прогиба свободно опертого диска. В этом приближении диск представляет собой систему с двумя связанными степенями свободы, и общая система уравнений колебаний (4.254) сводится к уравнениям типа (4.526) и (4.527). Парциальные системы представляют собой: жесткий диск, который колеблется как поршень со смещениями ξ_a ; и свободно опертый диск, колебания которого $\xi(r) = \xi_o \theta(r/a)$. Таким образом, в уравнениях (4.526) и (4.527) парциальные смещения $\xi_{1p} = \xi_a$, $\xi_{2p} = \xi_o$, и параметры первой парциальной системы равны $K_1 = 0$, $M_1 = M$.

Эквивалентные параметры для второй парциальной системы следует определять с учетом того, что толщина диска должна быть достаточной чтобы обеспечить его прочность при статической нагрузке и вывести значение резонансной частоты за пределы рабочего диапазона преобразователя. Поэтому может потребоваться определять эквивалентные параметры с поправками на инерцию вращения и сдвиг поперечных сечений диска. Поправки для плотностей энергий при изгибе рассмотрены в Разделе 4.4.3.1, а сами поправки определены в Разделе 9.4.3. Забегая вперед, они приведены здесь для

справки в виде вторых членов в квадратных скобках в выражениях для эквивалентных параметров K_2 и M_2

$$M_2 = 0.3M \left[1 + 0.5(t/a)^2 \right], \quad (4.677)$$

$$K_2 \approx \frac{2}{a^2} \frac{t^3 Y}{(1-\sigma^2)} \left[1 - 0.25 \frac{Y}{(1-\sigma^2)\mu} \frac{t^2}{a^2} \right]. \quad (4.678)$$

Взаимные массу M_{12} и жесткость K_{12} определим по формулам (4.236) в предположении, что $\theta_1(r) = 1$ (поршневые колебания) и $\theta_2(r) = \theta(r/a)$. В результате найдем, что $K_{12} = 0$ и

$$M_{12} = 2\pi\rho t \int_0^a \theta(r/a) r dr = \rho t S_{av} = 0.45M. \quad (4.679)$$

(напомним, что для круглой свободно опертой пластины $S_{av} = 0.45S_{pl}$).

При расчете входного сопротивления диска при условии, что его поверхность не нагружена, следует принять $F_2 = 0$. Таким образом, уравнения (4.526) и (4.527) колебаний диска под действием силы, приложенной на его контуре, приобретают вид

$$j\omega M U_a + j0.45\omega M U_o = F_m, \quad (4.680)$$

$$j0.45\omega M U_a + j\omega M_2 [1 - (\omega_{pl}^2 / \omega^2)] U_o = 0. \quad (4.681)$$

Из этих уравнений следует, что

$$Z_{inx} = \frac{F_m}{U_a} = j\omega M \left(1 + \frac{0.7\omega^2}{\omega_{pl}^2 - \omega^2} \right) \left(1 + 0.5 \frac{t^2}{a^2} \right), \quad (4.682)$$

где $\omega_{pl}^2 = K_2 / M_2$. Если диск представляет собой фланец преобразователя, то он может испытывать воздействие внешних сил и импедансов, что в свою очередь приведет к изменению входных сопротивлений. Для того чтобы учесть внешние воздействия при оценке зависимости скорости колебаний U_o от силы F_m , воспользуемся схемой, приведенной на Рис. 4.54 (b), которая эквивалентна системе уравнений (4.680) и (4.681).

При условии, что внешние воздействия известны, выражения для эквивалентных сил F_{m1} , F_{m2} и импедансов нагрузок Z_{i1} и Z_{i2} найдем с помощью соотношений (4.240) и (4.242). Так, если на фланец преобразователя действует акустическое давление P_o , которое однородно по его поверхности, то

$$F_{m1} = P_o S_{pl} = P_o \pi a^2, \quad F_{m2} = P_o S_{av}. \quad (4.683)$$

Это имеет место, если размеры преобразователя малы по сравнению с длиной акустической волны. Естественно предположить, что в рассматриваемом случае сопротивления нагрузок можно пренебречь по сравнению с механическим входным сопротивлением фланца (напомним, что его резонансная частота должна быть выше рабочего диапазона частот), и поэтому принять $Z_{11} \approx Z_{12} \approx 0$. Согласно теореме Тэвенина, примененной к схеме на Рис. 4.54 (b) между точками 1, 1, схему можно преобразовать к виду, представленному на Рис. 4.54 (c). В этой схеме сопротивление Z_{inx} определено формулой (4.682). Эквивалентная сила F_{eqv} учитывает комбинированное действие сил F_{m1} и F_{m2} , приведенных к выходу схемы между точками 1, 1 (см. Рис. 4.54 (b)). Учитывая, что $U_a = 0$, найдем

$$U_o = -F_{m2} \omega / jM_2 (\omega_{pl}^2 - \omega^2), \quad (4.684)$$

и

$$F_{eqv} = F_{m1} + jM_{12} U_o = F_{m1} \left[1 - \frac{M_{12} F_{m2} \omega^2}{M_2 F_{m1} (\omega_{pl}^2 - \omega^2)} \right]. \quad (4.685)$$

После подстановки в это соотношение выражений (4.683) для F_{m2} и F_{m1} , и выражений (4.677) и (4.679) для M_2 и M_{12} получим

$$F_{eqv} = P_o \pi a^2 [1 - 0.67(1 + 0.5t^2 / a^2) \omega^2 / (\omega_{pl}^2 - \omega^2)]. \quad (4.686)$$

4.7.2.3 Входное сопротивление свободного диска на окружности радиусом $b < a$

Представим распределение смещений по поверхности диска в виде суммы

$$\xi(r) = \xi_o + \xi_1 \theta_1(r/a), \quad (4.687)$$

где $\theta_1(r/a)$ это собственная форма колебаний круглой пластины со свободным контуром, которая в соответствии с формулой (4.200) при собственном значении $k_1 a = 3.0$ имеет вид

$$\theta_1(r/a) = 1.1J_0(3r/a) - 0.1I_0(3r/a). \quad (4.688)$$

Особенность распределения смещений (4.687) по сравнению с предыдущим случаем состоит в том, что для свободной пластины существует нормальная форма колебаний

$\theta_0(r/a) = 1$, формально соответствующая собственной частоте $\omega_0 = 0$ (свободная пластина может колебаться как поршень). При $\omega_0 = 0$ $Z_{in} = j\omega M_{pl}$.

Таким образом, выражение (4.687) представляет собой сумму первых двух членов разложения смещения $\xi(r)$ в ряд по нормальным формам колебаний. Уравнения колебаний получим аналогично предыдущему случаю в виде уравнений (4.526) и (4.527). В этом случае $M_{10} = 0$, так как формы колебаний $\theta_0(r/a) = 1$ и $\theta_1(r/a)$ ортогональны, и парциальные системы (жесткий поршень и свободная на контуре пластина) независимы. Выражения для эквивалентных массы и жесткости свободной пластины, в которых учтены поправки на инерцию вращения и сдвиг (аналогично формулам (4.677) и (4.678)), составляют:

$$M_1 = 0.26M[1 + 1.5 \cdot (t^2/a^2)], \quad (4.689)$$

$$K_1 = [6t^3Y/a^2(1-\sigma^2)][1 - 0.7 \cdot Y(t^2/a^2)/\mu(1-\sigma^2)]. \quad (4.690)$$

Резонансная частота парциальной системы, которая представляет собой свободную пластину, равна $\omega_{1p}^2 = \omega_{pl}^2 = K_1/M_1$.

Обобщенные силы, действующие на парциальные системы, можно получить из выражения (4.523), преобразованного в комплексную форму, а именно

$$\bar{W}_e = F_m \bar{\xi}^*(b) = F_m \bar{\xi}_o^* + F_m \bar{\xi}_1^* \theta_1(b/a). \quad (4.691)$$

Таким образом,

$$F_{m0} = F_m, \quad F_{m1} = F_m \theta_1(b/a), \quad (4.692)$$

и уравнения вынужденных колебаний диска принимают вид

$$j\omega M U_o = F_m, \quad (4.693)$$

$$j\omega M_1 (1 - \omega_{pl}^2 / \omega^2) U_1 = F_m \theta_1(b/a). \quad (4.694)$$

Из этой системы уравнений получим распределение скорости колебаний по поверхности диска

$$U(\omega, r/a) = U_o(\omega) + U_1(\omega) \theta_1(r/a) = \frac{F_m}{j\omega M} \left[1 - \frac{M}{M_1} \frac{\theta_1(b/a) \theta_1(r/a)}{\omega_{pl}^2 / \omega^2 - 1} \right]. \quad (4.695)$$

Выражение для входного сопротивления диска на окружности радиуса b найдем из

этого соотношения в виде

$$Z_{in}(\omega, b/a) = \frac{F_m}{U(\omega, b/a)} = j\omega M \left[1 - \frac{M}{M_1} \frac{\theta_1^2(b/a)}{\omega_{pl}^2 / \omega^2 - 1} \right]^{-1}. \quad (4.696)$$

Поведение входного сопротивления в зависимости от отношения b/a качественно представлено на Рис. 4.55 (а).

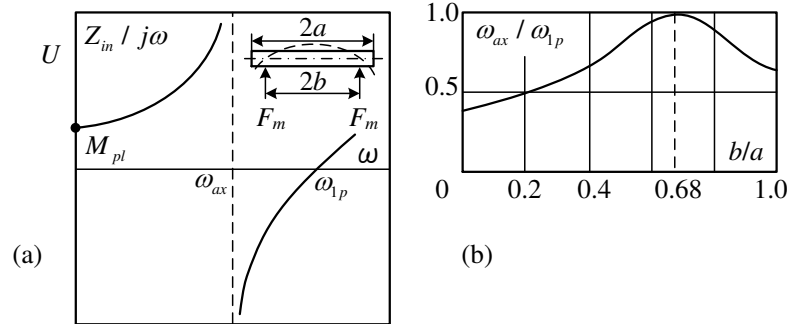


Рисунок 4.55: (а) Величина входного сопротивления круглого диска на окружности переменного радиуса в зависимости от частоты, (б) зависимость отношения частот антирезонанса и резонанса пластины $\omega_{ar} / \omega_{pl}$ от отношения b/a .

На некоторой частоте ω_{ar} (частота антирезонанса), которая зависит от радиуса окружности b , на которой приложена возбуждающая сила, входное сопротивление становится бесконечно большим, $Z_{in} \rightarrow \infty$. Нежелательно чтобы эта частота попадала в рабочий диапазон частот. На Рис. 4.55 (б) показана зависимость отношения частот антирезонанса и резонанса пластины $\omega_{ar} / \omega_{pl}$ от отношения b/a . Из рисунка можно сделать вывод, что оптимальным с точки зрения удаления частоты ω_{ar} из рабочего диапазона частот является значение $b/a = 0.68$, что соответствует радиусу узловой окружности, на которой $\theta_1(r/a) = 0$.

Выражение (4.696) показывает, что в случае, если внешняя сила действует на узловой окружности пластины, распределение колебаний по ее поверхности в идеале должно быть равномерным. На практике нарушение однородности колебаний может быть вызвано тем, что в действительности сила прикладывается не совсем по линии, а по кольцу конечной ширины. Кроме того, при подавлении первой формы колебаний следует учитывать вклад следующей формы колебаний $\theta_2(r/a)$, который до сих пор не был принят во внимание. Однако, используя выражение (4.200) при $ka = 6.29$ для формы колебаний

$\theta_2(r/a)$, можно показать, что при $b/a = 0,68$ в диапазоне частот $\omega < \omega_{pl}$

$$|U_2 / U_1| < 10\theta_2(0.68) \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_{pl2}^2} < 0.15 \frac{\omega^2}{\omega_{pl}^2}, \quad (4.697)$$

где ω_{pl2} резонансная частота, соответствующая форме колебаний $\theta_2(r/a)$. (обратите внимание, что $\omega_{pl} / \omega_{pl2} = 0.23$). Учитывая, что $\omega / \omega_{1p} < 1$, вклад второй формы колебаний относительно невелик. Таким образом, при правильном приложении действующей силы колебания даже относительно тонкого диска можно сделать близкими к равномерным. Более детально такая возможность рассмотрена в Главе 10.

4.8 Литература

1. А. Е. Ляв, *Математическая теория упругости*, -М., Л., ОНТИ НКТП, 1935.
2. С. П. Тимошенко, *Сопротивление материалов*. – М.: Наука, 1960.-Т.1.3).
3. *Справочник по математическим функциям*, под редакцией М. Абрамовица и И. А. Стиган,- М.:Наука, 1979.
4. Л. Я. Гутин, "О теории магнитострикционного преобразователя", Журнал технической физики, т. XV, No 4–5, 1945. В избранных произведениях (Судостроение, Ленинград, 1977), с. 135.
5. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, перевод 3-го русского издания Кертиса Д. Бенстера (Interscience, Нью-Йорк, 1959).
6. A. W. Leissa, *Vibration of Shells* (Reprinted by the Acoustical Society of America, New York, 1993).
7. W. E. Baker, "Axisymmetric Modes of Vibration of the Thin Spherical Shell," J. Acoust. Soc. Am. **33**, 1749-1758 (1961).
8. A. Kalnins, "Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells," J. Acoust. Soc. Am. **36**, 74-81 (1964).
9. B. Aronov, D. A. Brown, X. Yan, and C. L. Bachand, "Modal analysis of the electromechanical conversion in piezoelectric ceramic spherical shells", J. Acoust. Soc. Am. **130**(2), 753-763 (2011).
10. R. V. Southwell, "On the free transverse vibrations of a uniform circular disk clamped at its center and on the effect of rotation," Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A, **101**, 133-153 (1922).
11. R. S. Woollett, *Theory of the Piezoelectric Flexural Disk Transducer with Applications to Underwater Sound*, USL Research Report No. 490, Naval Undersea Warfare Center, Newport (1960).
12. G. V. Joga Rao and K. Vijayakumar, "On Admissible Functions for Flexural Vibration and Buckling of Annular Plates", Journal of Aeronautical Society of India, Vol. 15, No. 1, pp. 1- 5 (1963).

13. A. W. Leissa, *Vibration of Plates* (Reprinted by the Acoustical Society of America, New York, 1993).
14. S. M. Vogel and D. W. Skinner, "Natural Frequency of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **32**, 926-931 (1965).
15. T. B. Gabrielson, "Frequency Constants for Transverse Vibration of Annular disks," *J. Acoust. Soc. Am.*, **105**, 3311-3317 (1999).
16. I. S. Gradshteyn, and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, (Academic, New York, 1963).
17. T. Boussinesq, "Résistance d'un Anneau à la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale" ("Resistance of a ring to bending under external constant pressure"), *Comptes Rendus* **97**, 843 (1883).
18. B. S. Aronov, "Piezoelectric slotted ring transducer", *J. Acoust. Soc. Am.* **133**(6), 3875-3884 (2013).
19. E. Giebe and E. Blechschmidt, "Experimental and Theoretical Studies of Extensional Vibrations of Rods and Tubes," *Ann. Physik* **18**, 417-485 (1933).
20. M. Onoe and H. F. Tiersten, "Resonant Frequencies of Finite Piezoelectric Vibrators with High Electromechanical Coupling," *IEEE Trans. Ultrasonic Engineering* **10**, 32-39 (1963).
21. B. S. Aronov, C. L. Bachand, and D. A. Brown "Analytical modeling of piezoelectric ceramic transducers based on coupled vibration analysis with application to rectangular thickness poled plates," *J. Acoust. Soc. Am.* **126**(6), 2983–2990 (2009).
22. E. A. G. Shaw, "On the resonant vibration of thick barium titanate discs," *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 38–50 (1956).
23. S. Ikegami, I. Ueda, and S. Kobayashi, "Frequency spectra of resonant vibration in disc plates of PbTiO₃ piezoelectric ceramic," *J. Acoust. Soc. Am.* **55**, 339-344 (1974).
24. S. Ueha, S. Sakuma, and E. Mori, "Measurement of vibration velocity distribution and mode analysis in thick discs of Pb(ZrTi)O₃," *J. Acoust. Soc. Am.* **73**(5), 1842-1847 (1983).
25. J. F. Haskins and J. L. Walsh, "Vibrations of ferroelectric cylindrical shells with transverse isotropy," *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 729-734 (1957).

26. M. C. Junger and F. G. Rosato, "The propagation of elastic waves in thin-walled cylindrical shells," J. Acoust. Soc. Am. **26**, 709–713 (1954).
27. B. S. Aronov, "Coupled vibration analysis of the thin-walled cylindrical piezoelectric ceramic transducers," J. Acoust. Soc. Am. **125**(2), 803-818 (2009).
28. B. S. Aronov, D. A. Brown and S. Regmi, "Experimental investigation of coupled vibrations in piezoelectric cylindrical shells," J. Acoust. Soc. Am., **120**(3), 1374-1380 (2006).
29. Д. А. Берлинкур, Д. Р. Курран и Х. Яффе, *Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их функции в преобразователях*, Физическая Акустика (под редакцией У. Мезона), Т.1, Часть А, с. 265–310. М.: Мир, 1966.
- 30.

ГЛАВА 5

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

5.1 Уравнения состояния пьезокерамической среды

В соответствии с энергетическим подходом, который принят в этой работе и сформулирован в Главе 1, все уравнения, описывающие состояние преобразователя, выводятся из вариационного принципа. Основной характерной особенностью применения вариационного принципа для вывода уравнений колебаний пьезокерамических тел является то, что состояние пьезокерамического тела определяется не только механическими, но и электрическими обобщенными координатами. Поэтому в выражении (1.94) для Лагранжиана L электромеханической системы, которую представляет собой пьезокерамическое тело, вместо плотности потенциальной энергии w_{pot} следует использовать подходящую термодинамическую функцию, характеризующую его энергетическое состояние. Поскольку процессы колебаний упругих тел считают адиабатическими (происходящими в условиях теплоизоляции при постоянной энтропии), подходящей термодинамической функцией может быть внутренняя энергия w_{int}

$$\delta w_{int} = T_i \delta S_i + E_m \delta D_m + T \delta S, \quad (5.1)$$

где $T_i \delta S_i$ и $E_m \delta D_m$ — независимые механические и электрические энергии, сообщаемые элементу объема тела (термодинамические функции относят к единице объема), T — температура, S — энтропия; $T \delta S$ — тепловая энергия, которая при адиабатическом процессе равна нулю ($\delta S = 0$). Смысл имеют только вариации термодинамических функций как мера работы, производимой в процессе изменения состояния тела. Сведения о термодинамике пьезокерамических сред можно получить, например, из работы [1].

Для пьезокерамического тела, находящегося под действием внешних сил, или для единицы объема этого тела, представим Лагранжиан в виде, аналогичном принятому соотношениями (1.94) и (1.92), заменив потенциальную энергию на внутреннюю энергию. А именно, для единицы объема

$$L = w_{kin} - w_{int} + w_e \quad (5.2)$$

и для тела

$$L = W_{kin} - W_{int} + W_e, \quad W_{int} = \int_{\tilde{V}} w_{int} d\tilde{V}. \quad (5.3)$$

Уравнения движения пьезокерамических тел можно получить таким же образом, как они были выведены для упругих тел, изготовленных из электромеханически пассивного материала, в виде уравнений Эйлера (4.1) в обобщенных координатах или (4.2) в геометрических координатах. Разница лишь в том, что в число обобщенных координат следует включить электрическую координату. Для вывода конкретных уравнений Эйлера необходимо получить явные выражения для внутренней энергии элемента объема и для всего пьезокерамического тела через обобщенные координаты. Для этого необходимо рассмотреть уравнения состояния, описывающие соотношения между переменными, которые участвуют в определении энергии тела.

Уравнения состояния пьезокерамической среды выводят исходя из термодинамических функций, выбор которых зависит от того, какие переменные используют в качестве независимых в конкретной ситуации. В адиабатическом процессе наряду с внутренней энергией удобно применять энтальпию H ,

$$\delta H = -S_i \delta T_i - D_m \delta E_m + T \delta S, \quad (5.4)$$

в случае если независимыми переменными являются напряжение T_i и электрическое поле E_m ; а так же электрическую энтальпию H_2 ,

$$\delta H_2 = T_i \delta S_i - D_m \delta E_m + T \delta S, \quad (5.5)$$

в случае если независимыми переменными являются деформация S_i и электрическое поле E_m .

Для общего анализа работы преобразователя предпочтительнее функция H_2 с S_i и E_m в качестве независимых переменных. Однако выбор той или иной исходной функции не имеет решающего значения, так как все термодинамические функции взаимосвязаны. Удобство использования деформации S_i в качестве независимой переменной обусловлено тем, что при общем анализе часто предполагают известными форму колебаний тела и распределение деформаций в нем. Кроме того, передача энергии в нагрузку, как правило, вызвана смещениями поверхности преобразователя, которые напрямую связаны с

деформациями. Уравнения состояния, полученные из энтальпии H_2 , имеют следующий вид

$$T_i = \left(\frac{\partial H_2}{\partial S_i} \right)_{E,S} = T_i(S_i, E_m), \quad D_m = - \left(\frac{\partial H_2}{\partial E_m} \right)_{S_i,S} = D_m(S_i, E_m). \quad (5.6)$$

Для тех же случаев, в которых в качестве независимых переменных удобно применять напряжения T_i и E_m , уравнения состояния выводят из функции H и они имеют вид

$$S_i = - \left(\frac{\partial H}{\partial T_i} \right)_{E,S} = S_i(T_i, E_m), \quad D_m = - \left(\frac{\partial H}{\partial E_m} \right)_{T,S} = D_m(T_i, E_m). \quad (5.7)$$

Нижние индексы у производных от термодинамических функций указывают на то, что значения соответствующих им переменных остаются постоянными. Если рассматривать преобразователи при малых отклонениях независимых переменных от их положения равновесия и при линейном приближении, что оправдано практически для всех используемых на практике режимов работы преобразователей, выполненных из современных пьезокерамических материалов, то уравнения состояния (5.6) можно представить в следующем виде:

$$T_i = c_{ik}^E S_k - e_{im} E_m, \quad (5.8)$$

$$D_m = e_{mi} S_i + \varepsilon_{mk}^S E_k, \quad (5.9)$$

где $c_{ij}^E = (\partial T_i / \partial S_j)_E$ — модули упругости при постоянном электрическом поле, $\varepsilon_{mk}^S = (\partial D_m / \partial E_k)_S$ — диэлектрические постоянные при постоянной деформации, и

$$e_{im} = (\partial T_i / \partial E_m)_S = - (\partial D_m / \partial S_i)_E \quad (5.10)$$

являются пьезоэлектрическими постоянными. Последнее выражение представляет собой отношение электромеханической взаимности для пьезоэлектрического преобразования.

Аналогичным образом для уравнений (5.7) получаем

$$S_i = s_{ik}^E T_k + d_{im} E_m, \quad (5.11)$$

$$D_m = d_{mi} T_i + \varepsilon_{mk}^T E_k, \quad (5.12)$$

где $s_{ik}^E = (\partial S_i / \partial T_j)_E$ — упругие податливости при постоянном электрическом поле, $\varepsilon_{mk}^T = (\partial D_m / \partial E_k)_T$ — диэлектрические постоянные при постоянном механическом

напряжении и $d_{im} = (\partial S_i / \partial E_m)_T = (\partial D_m / \partial T_i)_E$ — пьезоэлектрические модули.

Предполагается, что в уравнениях (5.8), (5.9) и (5.11), (5.12) в соответствии с правилом, принятым для тензорных величин, по повторяющимся индексам в правых частях произведено суммирование. Эти уравнения называют местными уравнениями пьезоэффекта (уравнениями состояния), поскольку они описывают состояние малого элемента объема, в пределах которого значения независимых переменных не изменяются. Объем, в котором действительны местные уравнения, может быть и не малым, если в его пределах деформация и электрическое поле однородны. При отсутствии пьезоэлектрического эффекта уравнения (5.8) и (5.9) становятся независимыми уравнениями механического состояния (закон Гука $T_i = c_{ik} S_k$) и уравнениями диэлектрического состояния $D_m = \varepsilon_{mk} E_k$. Эти уравнения следует применять на участках объема преобразователя, на которых керамика не поляризована. Это распространенный случай в проектировании преобразователей, и поэтому помимо значений констант $c_{ik}^E, s_{ik}^E, \varepsilon_{ik}^T, \varepsilon_{mk}^S$ необходимо знать значения упругих и диэлектрических постоянных неполяризованной керамики.

Постоянные упругости c_{ik}^E и s_{ik}^E связывают два тензора второго порядка и образуют тензоры четвертого порядка. (Точнее называть эти постоянные электроупругими, поскольку их значения зависят от электрического состояния пьезоэлемента.) Пьезомодули связывают тензоры второго порядка и вектор и образуют тензор третьего порядка. Диэлектрические постоянные образуют тензор второго порядка. Все вышеперечисленные постоянные определяют экспериментально. Количество ненулевых и независимых постоянных зависит от симметрии структуры материала. Для поляризованной керамики, которая относится к классу симметрии ∞mm , матрицы упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических постоянных, которые соответствуют уравнениям (5.11) и (5.12), представлены в Таблице 5.1. Следует отметить, что при этом элемент объема пьезокерамики отнесен к ортогональной системе координат (Рис. 5.1), где направление оси 3 (единичный вектор q_3) совпадает с направлением вектора поляризации P . Направления единичных векторов q_1 и q_2 произвольны, но таковы, что все три вектора образуют правую систему координат (вращение q_1 до совмещения с q_2 должно происходить против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора q_3). Для определенности будем полагать направление q_1 таким, чтобы вектор E находился в плоскости 2, 3, причём $E_1 = 0$ и

$$E = E_3 q_3 + E_2 q_2 .$$

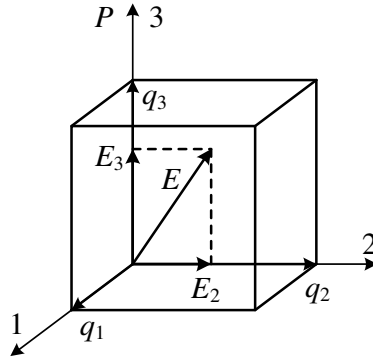


Рисунок 5.1: Элемент объема в кристаллографической системе координат.

Между постоянными упругости существуют соотношения

$$s_{ij}^E = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} / \Delta, \quad (5.13)$$

где Δ — определитель матрицы, $c_{ij}^E \Delta_{ij}$ — минор, образованный удалением строки i и столбца j (аналогично для c_{ij}^E). А именно (для краткости опустим надстрочные индексы E постоянных упругости в соотношениях между ними):

$$\begin{aligned} \Delta &= (s_{11} - s_{12})[s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2], & \Delta_{11} &= s_{11}s_{33} - s_{13}^2, & \Delta_{33} &= s_{11}^2 - s_{12}^2, \\ \Delta_{13} &= s_{12}s_{13} - s_{11}s_{13}, & \Delta_{12} &= s_{13}^2 - s_{12}s_{33}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Пьезоэлектрические постоянные связаны между собой соотношениями

$$d_{mi} = e_{mj} s_{ji}^E, \quad e_{mi} = d_{mj} c_{ji}^E. \quad (5.15)$$

Поскольку в процессе преобразований придется пользоваться переходом от одних постоянных к другим, полезно представить некоторые соотношения между ними, вытекающие из выражений (5.13)-(5.15).

$$\begin{aligned} c_{33} - c_{13}^2 / c_{11} &= s_{11} / (s_{11}s_{33} - s_{13}^2), & c_{11} - c_{13}^2 / c_{33} &= s_{11} / (s_{11}^2 - s_{12}^2), \\ c_{11} - c_{12}^2 / c_{11} &= s_{33} / (s_{11}s_{33} - s_{13}^2), & c_{12} - c_{13}^2 / c_{33} &= -s_{12} / (s_{11}^2 - s_{12}^2); \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} e_{33} - e_{31}c_{13} / c_{11} &= (d_{33}s_{11} - d_{31}s_{13}) / (s_{11}s_{33} - s_{13}^2), & e_{31} - e_{33}c_{13} / c_{33} &= d_{31} / (s_{11} + s_{12}), \\ e_{31}(1 - c_{12} / c_{11}) &= [d_{33}(s_{11} + s_{12}s_{13}) + d_{31}s_{13}] / (s_{11}s_{33} - s_{13}^2). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Также действительны соотношения, полученные из (5.16) и (5.17) путем замены в них c_{ij} на s_{ij} , d_{mi} на e_{mi} , и наоборот.

Таблица 5. 1: Матрицы постоянных пьезоэлектрической керамики.

-	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	E_1	E_2	E_3
S_1	s_{11}^E	s_{12}^E	s_{13}^E	0	0	0	0	0	d_{31}
S_2	s_{12}^E	s_{11}^E	s_{13}^E	0	0	0	0	0	d_{31}
S_3	s_{13}^E	s_{13}^E	s_{33}^E	0	0	0	0	0	d_{33}
S_4	0	0	0	s_{44}^E	0	0	0	d_{15}	0
S_5	0	0	0	0	s_{44}^E	0	d_{15}	0	0
S_6	0	0	0	0	0	$s_{66}^{E\ 1)}$	0	0	0
D_1	0	0	0	0	d_{15}	0	ε_{11}^T	0	0
D_2	0	0	0	d_{15}	0	0	0	ε_{11}^T	0
D_3	d_{31}	d_{31}	d_{33}	0	0	0	0	0	ε_{33}^T

При расчете электромеханических преобразователей часто приходится ссылаться на свойства аналогичных механических систем, изготовленных из изотропных пассивных материалов, или рассматривать механические системы преобразователей как состоящие из активных и пассивных материалов. Поэтому удобно использовать аналогичные обозначения для постоянных упругости пассивных и пьезокерамических материалов. Такие обозначения для пьезокерамических материалов можно ввести путем сравнения уравнений состояния (4.10) и (5.11) при $m = 3$ и $E_3 = 0$. Для этого последнее запишем в виде

$$S_1 = s_{11}^E [T_1^E + (s_{12}^E / s_{11}^E) T_2^E + (s_{13}^E / s_{11}^E) T_3^E], \quad (5.18)$$

$$S_2 = s_{11}^E [(s_{12}^E / s_{11}^E) T_1^E + T_2^E + (s_{13}^E / s_{11}^E) T_3^E], \quad (5.19)$$

$$S_3 = s_{33}^E [(s_{13}^E / s_{33}^E) T_1^E + (s_{13}^E / s_{33}^E) T_2^E + T_3^E]. \quad (5.20)$$

Далее введем обозначения

$$1 / s_{11}^E = Y_1^E, \quad 1 / s_{33}^E = Y_3^E, \quad (5.21)$$

как аналоги модулям Юнга, и

$$-s_{12}^E / s_{11}^E = \sigma_1^E, \quad -s_{13}^E / s_{11}^E = \sigma_3^E, \quad -s_{13}^E / s_{33}^E = \sigma_{13}^E, \quad (5.22)$$

как аналоги коэффициентов Пуассона. В этих обозначениях уравнения (5.19) и (5.20)

приобретут вид:

$$S_1 = \frac{1}{Y_1^E} [T_1^E - \sigma_1^E T_2^E - \sigma_3^E T_3^E], \quad (5.23)$$

$$S_2 = \frac{1}{Y_1^E} [-\sigma_1^E T_1^E + T_2^E - \sigma_3^E T_3^E], \quad (5.24)$$

$$S_3 = \frac{1}{Y_3^E} [-\sigma_{13}^E T_1^E - \sigma_{13}^E T_2^E + T_3^E]. \quad (5.25)$$

Значения введенных постоянных упругости для нескольких составов пьезокерамики представлены в Таблице 5.2 с использованием исходных данных из работы [2] (см. Приложение В, Таблица В.1.)

Таблица 5.2: Значения постоянных упругости различных составов пьезокерамики.

	Y_1^E ГПа	Y_3^E ГПа	σ_1^E	σ_3^E	σ_{13}^E
ПЗТ-4	81	64	0.33	0.43	0.34
ПЗТ-5	61	53	0.35	0.44	0.38
ПЗТ-8	87	74	0.32	0.42	0.35

Рассмотрим пьезоэлектрические уравнения (5.8), (5.9) и (5.11), (5.12) с точки зрения правила знаков, принятого в Разделе 1.5.2. Для наглядности представим поведение доменных зон в пьезокерамике как поведение диполя (два заряженных шарика на податливом стержне, как показано на Рис. 5.2), электрический момент которого

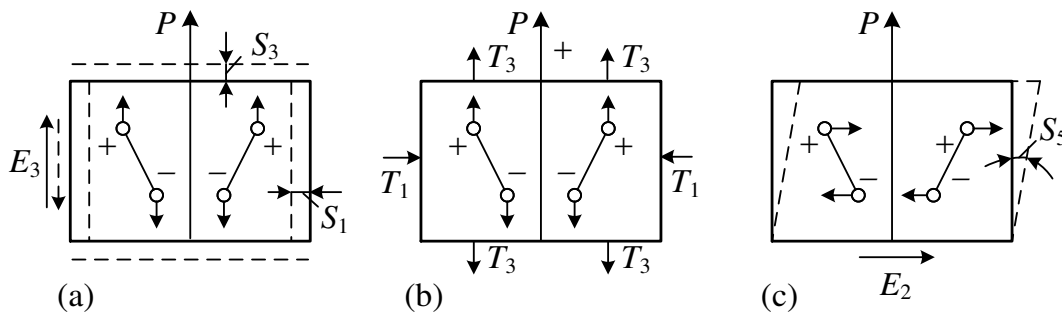


Рисунок 5.2: К правилу знаков в пьезоэлектрических уравнениях для деформаций растяжений (a, b) и сдвига (c).

параллелен направлению преимущественной ориентации электрических моментов

доменов. Предположим также, что деформации в пьезоэлектрическом элементе и изменения зарядов на электродах (изменения плотности заряда D), вызванные механическими воздействиями и внешним электрическим полем, обусловлены деформациями (вращениями и растяжениями-сжатиями) доменных областей, а в нашей модели - эквивалентных диполей. На Рис. 5.2 представлено поперечное сечение пьезоэлектрического элемента с двумя диполями, моменты которых одинаково наклонены относительно направления вектора поляризации, так как направления моментов доменов симметричны относительно полярной оси.

В свободном пьезоэлектрическом элементе (при $T_k = 0$) $S_i = d_{3i}E_3$. Действие электрического поля E_3 в направлении полярной оси должно приводить к положительной деформации растяжения S_3 и отрицательным деформациям сжатия S_1 и S_2 в поперечном направлении, так как в этом случае диполи удлиняются и вращаются в сторону полярной оси (Рис. 5.2 (а)). Так как $d_{33} > 0$, $d_{31} < 0$, именно это направление q_3 является условно положительным. При изменении направления вектора q_3 (пунктирная линия в (а)), диполи укорачиваются и отклоняются от полярной оси, что приводит к отрицательной деформации сжатия S_3 и положительным деформациям растяжения S_1 и S_2 . Легко убедиться, что для условно положительного направления q_2 $E \times P > 0$.

В коротко замкнутом пьезоэлементе (при $E_3 = 0$) $S_i = s_{ik}T_k$. Растягивающие механические напряжения вызывают продольные деформации растяжения ($s_{ii} > 0$) и поперечные деформации сжатия ($s_{ik} < 0$). Поэтому они условно положительны. Из уравнения (5.12) следует, что $D_m = d_{mi}T_i$, и механическое напряжение растяжения T_3 должно вызывать положительную поляризацию (увеличение плотности заряда на электродах), так как $d_{33} > 0$, в то время как T_1 и T_2 должны вызывать отрицательную поляризацию (уменьшение плотности заряда на электродах) так как $d_{31} < 0$. Действительно, как видно из Рис. 5.2 (b) напряжение T_3 приводит к удлинению диполя и вращению в сторону полярной оси и, следовательно, увеличению плотности заряда на электродах. Напротив, напряжения растяжения T_1 и T_2 вызывают отток зарядов с электродов и, как следствие, снижение плотности заряда. Положительные напряжения сдвига приводят к вращению диполя в сторону электродов (Рис. 5.2 (с)), что соответствует значению $d_{15} > 0$.

Из уравнений (5.8) и (5.9) следует (и, аналогично приведенному выше случаю, это

можно проиллюстрировать с помощью Рис. 5.2), что электрическое поле E_m при предполагаемом условно положительном направлении порождает в заторможенном пьезоэлементе ($S_i = 0, T_i = -e_{im}E_m$) механические напряжения сжатия T_3 и отрицательные напряжения сдвига T_5 ($e_{33} > 0, e_{15} > 0$), а также положительные напряжения растяжения T_1 и T_2 ($e_{i3} < 0$). В коротко замкнутом пьезоэлектрическом элементе ($E_3 = 0, D_3 = e_{3i}S_i$) деформации растяжения S_3 и положительные деформации сдвига S_5 вызывают положительную поляризацию, тогда как деформации растяжения S_1 и S_2 вызывают отрицательную.

Упругие и диэлектрические постоянные характеризуют пьезокерамику как идеальную упругоэлектрическую среду. При расчете преобразователей необходимо учитывать механические и диэлектрические потери энергии, происходящие в процессе работы. Качество пьезокерамики с точки зрения внутренних потерь энергии характеризуется ее механической (Q_m) и электрической (Q_e) добротностью или более удобными в некоторых случаях для пользования углами потерь δ_m и δ_e , которые связаны с добротностями формулами $\tan \delta_m = 1/Q_m$ и $\tan \delta_e = 1/Q_e$.

Значения пьезомодулей зависят от начального равновесного состояния керамики, а именно от статических механических напряжений и температуры, при которой работают преобразователи. При сильных динамическом механическом напряжении и электрическом поле может стать заметной нелинейность свойств пьезокерамики, что необходимо учитывать при расчете мощных преобразователей. Информацию о зависимостях параметров пьезокерамики от сильных статических и динамических воздействий можно найти в работе [2] и в Главе 11.

5.2 Энергетическое состояние элемента объема

Рассмотрим энергетическое состояние элемента объема пьезокерамики в прямоугольной системе координат с единичными векторами q_1, q_2, q_3 (Рис. 5.1). Как отмечалось ранее, возможные варианты взаимного направления векторов P и E для пьезокерамики могут быть сведены к двум, а именно $E = E_3q_3$ в том случае, если одни и те же электроды используются для поляризации пьезокерамики и работы преобразователя. В случае если для возможности осуществления электромеханического преобразования при

деформации сдвига рабочие электроды нанесены на грани пьезоэлемента, параллельные оси поляризации, после удаления электродов, использованных для поляризации, $E = E_2 q_2$.

В каждом конкретном случае на гранях элемента объема существуют некоторые механические и электрические граничные условия. Если между элементом объема и окружающей средой не происходит обмена энергией, то имеем дело с идеальными граничными условиями. При этом грани могут быть свободны от механических напряжений ($T = 0$) или зажаты ($S = 0$), а электроды могут быть коротко замкнуты ($E = 0$) или разомкнуты ($D = 0$).

Изменение внутренней энергии единичного элемента объема

$$\delta w_{int} = T_i \delta S_i + E_m \delta D_m, \quad (5.26)$$

может быть вызвано поступлением в объем независимых механической и/или электрической энергий. Если поступает только механическая энергия, то независимая электрическая энергия отсутствует и

$$\delta w_{int} = \delta w_{mch} = T_i \delta S_i. \quad (5.27)$$

Если поступает только электрическая энергия, то отсутствует независимая механическая энергия и

$$\delta w_{int} = \delta w_{el} = E_m \delta D_m. \quad (5.28)$$

Конечно, это не означает, что в первом случае не возникает деформаций или механических напряжений, а во втором случае не генерируются заряды или электрические поля, как это было бы при отсутствии электромеханического преобразования, выполняемого пьезокерамикой. На самом деле, в первом случае в силу прямого пьезоэлектрического эффекта при механических воздействиях в пьезоэлементе возникает зависящая от этих воздействий энергия электрической поляризации, которая содержится как часть в полной механической энергии δw_{mch} . Во втором случае при электрическом воздействии в силу обратного пьезоэлектрического эффекта возникает зависящая энергия деформации, которая содержится как часть в полной электрической энергии δw_{el} .

Для того чтобы различать энергии, обусловленные независимыми механическими и

электрическими воздействиями в общем случае, когда поступают и те, и другие, будем выделять подчеркиванием члены, относящиеся к независимым механическим воздействиям. Таким образом, выражение (5.26) для внутренней энергии в общем случае представим в виде

$$\delta w_{int} = \underline{T_i \delta S_i} + E_m \delta D_m. \quad (5.29)$$

Вначале предположим, что к элементу объема поступает только электрическая энергия. При этом в элементе генерируется электрическое поле E_m , и вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта возникают деформации S_i , допускаемые граничными условиями. Электрическое поле E_m является независимой переменной. Принимая во внимание, что в этом случае независимая механическая энергия отсутствует, $\underline{\delta w_{mech}} = T_i \delta S_i = 0$ и с учетом уравнения (5.8) получим следующее выражение для уравнения (5.28)

$$\delta w_{int} = \delta w_{el} = E_m \delta D_m = \varepsilon_{mn}^S E_m \delta E_m + e_{mi} E_m \delta S_i. \quad (5.30)$$

Первый член в уравнении (5.30) - это энергия, которую приобрел бы элемент объема, если бы он был полностью заторможен ($\delta S_i = 0$), при воздействии внешнего электрического источника с напряженностью поля, изменяющейся как δE_m . Эту энергию обозначим δw_{el}^S . Второй член представляет собой энергию, которую приобрел бы элемент объема от электрического источника, если бы электрическое поле E_m поддерживалось постоянным и деформация изменялась на δS_i . Эту величину назовем электромеханической энергией и обозначим δw_{em} . Понятие электромеханической энергии было введено в Главе 1 (см. уравнение (1.51)) для случая одномерной деформации. Здесь оно будет рассмотрено для общего случая. При $m = 3$ имеем $\delta w_{em3} = e_{31} E_3 \delta S_1$, при $m = 2$ $\delta w_{em2} = e_{24} E_2 \delta S_4$. Умножая обе части уравнения (5.8) на δS_i и принимая во внимание, что благодаря идеальным граничным условиям $T_i \delta S_i = 0$, получим

$$\delta w_{em3} = e_{3i} E_3 \delta S_i = c_{ii}^E S_i \delta S_i + c_{ik}^E S_i \delta S_k = \delta w_{mch3}^E \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (5.31)$$

$$\delta w_{em2} = e_{24} E_2 \delta S_4 = c_{44}^E S_4 \delta S_4 = \delta w_{mch2}^E. \quad (5.32)$$

Выражения для δw_{mech}^E описывают приращения энергий деформаций объема определенные при условии, что значения модулей упругости определяются при $\delta E_m = 0$. Из

соотношений (5.31) и (5.32) следует, что электромеханическую энергию δw_{em} можно рассматривать как ту часть энергии, подведенной к элементу объема, которая преобразуется в энергию деформации, определяемую при значениях модулей упругости при постоянном E_m .

Поскольку все последующие преобразования, касающиеся двух возможных вариантов взаимной ориентации векторов \mathbf{P} и \mathbf{E} при $m = 3$ и при $m = 2$ аналогичны, мы выполним их для наиболее распространенного варианта при $m = 3$, опуская нижний индекс m в обозначениях энергий. Соотношения для варианта при $m = 2$ представим в их окончательном виде, когда это будет необходимо. Таким образом, суммируя выражения (5.30)-(5.32), приходим к следующим соотношениям

$$\delta w_{int} = \delta w_{el} = \delta w_{el}^S + \delta w_{em}, \quad (5.33)$$

$$\delta w_{int} = \delta w_{el}^S + \delta w_{mch}^E, \quad (5.34)$$

где

$$\delta w_{el} = \varepsilon_{33}^S E_3 \delta E_3, \quad \delta w_{em} = e_{3i} E_3 \delta S_i. \quad (5.35)$$

Если элемент объема рассматривать в режиме электромеханического преобразования при наличии внешней механической нагрузки (что имеет место, например, при изучении), то энергетический баланс вместо (5.30) следует представить в виде

$$\delta w_{el} = \delta w_{el}^S + \delta w_{em} = \delta w_{int} + \delta w_e, \quad (5.36)$$

где δw_e — механическая энергия, образующаяся в результате электромеханического преобразования и распространяющаяся в нагрузку. Таким образом, в этом случае

$$\delta w_{int} = \delta w_{el}^S + \delta w_{em} - \delta w_e. \quad (5.37)$$

Применив уравнение (5.8), получим

$$e_{mi} E_m \delta S_i = c_{ik}^E S_k \delta S_i - T_{ir} \delta S_i, \quad (5.38)$$

где T_{ir} представляет механические напряжения, которые возникают на поверхности элемента объема как реакция нагрузки. Это выражение можно преобразовать следующим образом.

Так как энергия δw_e течет в нагрузку, т.е. из элемента объема, $T_{ir} \delta S_i = -\delta w_e$

(ситуация аналогична той, что продемонстрирована на Рис. 1.14), то при наличии реакции нагрузки в элементе объема может возникать электрическое поле, напряженность которого направлена перпендикулярно граням, свободным от электродов. (Для краткости будем в дальнейшем под электрическим полем подразумевать его напряженность.) Поскольку на этих гранях нет свободных зарядов, соответствующие плотности зарядов равны нулю, и из уравнения (5.8) получим: $E_1 = -e_{15}S_5 / \varepsilon_{11}^S$ и $E_2 = -e_{24}S_4 / \varepsilon_{11}^S$ при $m=3$; $E_3 = -e_{3i}S_i / \varepsilon_{33}^S$ и $E_1 = -e_{15}S_5 / \varepsilon_{11}^S$ при $m = 2$. Под действием внешнего поля E_m деформации S_4 , S_5 при $m = 3$ и S_1 , S_2 , S_3 при $m = 2$ не генерируются напрямую, но они могут возникнуть как реакция окружающей среды на деформацию элемента объема. В результате подстановки полученных таким образом значений электрического поля в выражение (5.38) и учитывая, что $T_{ir}\delta S_i = -\delta w_e$, получим в вариантах при $m = 3$ и $m = 2$, соответственно,

$$\begin{aligned}\delta w_{em} &= e_{3i}E_3\delta S_i = c_{ii}^E S_i \delta S_i + c_{ik}^E S_i \delta S_k + c_{ll}^D S_l \delta S_l + \delta w_e = \\ &= \delta w_{mch3}^E + \delta w_e \quad (i, k = 1, 2, 3; l = 4), \\ \delta w_{em} &= e_{24}E_2\delta S_4 = c_{44}^E S_4 \delta S_4 + c_{ii}^D S_i \delta S_i + c_{ik}^D S_i \delta S_k + \delta w_e = \\ &= \delta w_{mch2}^E + \delta w_e \quad (i, k \neq 4).\end{aligned}\tag{5.39}$$

В соотношениях (5.39) учтена связь между упругими постоянными, $c_{ik}^E + e_{mk}^2 / \varepsilon_{mm}^S = c_{ik}^D$, которую можно получить с помощью уравнений (5.8) и (5.9) при $D_m = 0$. В общем случае, если элемент объема находится внутри тела, которое испытывает деформацию, следует применять выражения для δw_{mch3}^E и δw_{mch2}^E , полученные из соотношений (5.39). Соотношения (5.39) показывают, что в этом случае δw_{em} - это полная энергия, которая преобразуется в механическую форму в результате электромеханического преобразования, причем часть механической энергии распространяется в нагрузку. Подстановка (5.39) в (5.37) приводит к выражению

$$\delta w_{int} = \delta w_{el}^S + \delta w_{em} - \delta w_e = \delta w_{el}^S + \delta w_{mch}^E.\tag{5.40}$$

Таким образом, в то время как выражение (5.37) для внутренней энергии справедливо всегда, выражение (5.34) справедливо только для идеальных граничных условий, и в общем случае, когда присутствует реакция окружающей среды, вместо него следует использовать выражение (5.37).

Определим суммарную энергию, передаваемую в элемент объема по мере изменения его состояния от начальной стадии при $E_3 = 0$, $S_i = 0$ к той, которая характеризуется значениями E_3 , S_i . В результате интегрирования выражений для элементарных энергий между этими состояниями получим

$$w_{el}^S = \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^S E_3^2, \quad w_{mch}^E = \frac{1}{2} \left(c_{ii}^E S_i^2 + c_{ik}^E S_i S_k + c_{ll}^D S_l^2 \right) \quad (i, k \neq 4, 5; l = 4, 5). \quad (5.41)$$

Для того чтобы определить полное изменение энергии w_{em} , представим себе, что весь интервал изменения E_m и S_i разделен на N равных частей. Предположим, что внутри каждой части $\delta S_i = S_i / N$ и электрическое поле остается постоянным и претерпевает внезапное изменение на величину E_m / N в конце интервала. Электромеханическую энергию w_{em} можно найти как предел интегральной суммы

$$w_{em} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} e_{im} \frac{S_i}{N} \cdot \frac{E_m}{N} \cdot n = \frac{1}{2} e_{im} E_m S_i. \quad (5.42)$$

Теперь величину энергии w_{int} можно представить на основе соотношения (5.33) как

$$w_{int} = w_{el} = w_{el}^S + |w_{em}|. \quad (5.43)$$

Величина w_{em} взята по модулю по следующим причинам. Как видно из выражения (5.32), эта величина является положительной (энергия, которую она представляет, течет в элемент объема). Это согласуется и с выражением (5.35), если принять во внимание знаки пьезомодулей и деформаций, вытекающих из условно положительного направления E_3 . Однако на практике в расчетах трудно отследить знаки деформаций, и можно ошибочно получить отрицательное значение w_{em} . Если брать модуль этой величины, то возможность такой ошибки исключается.

Выражение для внутренней энергии можно также представить в форме, отличной от формы уравнения (5.30). Учитывая, что значения E_m и S_i характеризуют состояние элемента объема с гранями, свободными от напряжений (за исключением тех, которые закреплены в силу граничных условий), внутреннюю энергию можно представить в виде

$$\delta w_{int} = E_m \delta D_m = \delta w_{el}^{T_i} = \varepsilon_{mm}^{T_i} E_m \delta E_m. \quad (5.44)$$

Здесь $w_{el}^{T_i} = \varepsilon_{mm}^{T_i} E_m^2 / 2$ можно рассматривать как электрическую энергию элемента объема, определяемую при значении диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{mm}^{T_i}$, что

соответствует существующим граничным условиям (верхний индекс T_i указывает, какие механические напряжения равны нулю). Сравнение нового выражения для δw_{em} с формулой (5.23) приводит к соотношению

$$w_{em} = w_{el}^{T_i} - w_{el}^S. \quad (5.45)$$

При изменении механического состояния элемента объема из состояния, соответствующего полностью заторможенному объему, в состояние, соответствующее свободному объему (в той мере, в какой это допускается заданными граничными условиями), при выполнении условия, что электрическое поле поддерживается неизменным, высвобождается энергия, равная электромеханической энергии. Она может быть преобразована в механическую работу, выполняемую во внешней среде. Поэтому электромеханическую энергию w_{em} также можно назвать преобразуемой, как это сделано в работе [7]. Наконец, чтобы еще раз подчеркнуть неразрывность связи между электрическим и механическим состояниями пьезокерамики, эту энергию можно назвать взаимной, как это сделано в работе [2].

Рассмотрим теперь внутреннюю энергию δw_{int} , в том случае, если к элементу объема подведен независимый поток механической энергии и электроды разомкнуты ($D_m = 0$), что соответствует условию холостого хода на электрическом выходе пьезоэлемента. При этом

$$\underline{\delta w_{mch}} = \underline{T_i \delta S_i}. \quad (5.46)$$

Применив уравнение (5.8), получим (будем рассматривать только вариант при $m=3$)

$$\delta w_{int} = \underline{\delta w_{mch}} = \underline{c_{ik}^E S_k \delta S_i} - \underline{e_{3i} E_{3oc} \delta S_i} = \underline{\delta w_{mch}^D}. \quad (5.47)$$

Из формулы (5.8) при $D_3 = 0$ получим, что $E_{3oc} = -e_{3k} S_k / \epsilon_{33}^S$. Таким образом,

$$\underline{-e_{3i} E_{3oc} \delta S_i} = \underline{\epsilon_{33}^S E_{3oc} \delta E_{3oc}}. \quad (5.48)$$

Обозначим

$$\underline{-e_{3i} E_{3oc} \delta S_i} = \underline{\delta w_{me}}, \quad \underline{\epsilon_{33}^S E_{3oc} \delta E_{3oc}} = \underline{\delta w_{el}^S}. \quad (5.49)$$

Как следует из соотношения (5.48), $\underline{\delta w_{me}}$ это часть механической энергии, подведенной к элементу объема, которую можно рассматривать, как преобразованную в

электрическую форму δw_{el}^S . Поскольку (см. уравнение (5.31))

$$\underline{c_{ik}^E S_i} \delta S_k = \underline{\delta w_{mch}^E}, \quad (5.50)$$

из формулы (5.47) с учетом введенных обозначений получим

$$\underline{\delta w_{me}} = \underline{\delta w_{mch}^D} - \underline{\delta w_{mch}^E}, \quad (5.51)$$

$$\delta w_{int} = \underline{\delta w_{mch}} = \underline{\delta w_{mch}^E} + \underline{\delta w_{me}} = \underline{\delta w_{mch}^E} + \underline{\delta w_{el}^S}. \quad (5.52)$$

Из сравнения уравнений (5.49) и (5.35) следует, что, при замене E_{3oc} на E_3 , выражения для $\underline{\delta w_{em}}$ и $\underline{\delta w_{me}}$ отличаются только знаком. Противоположные знаки $\underline{\delta w_{em}}$ и $\underline{\delta w_{me}}$ отражают тот факт, что в случае электромеханического преобразования электрическое поле E_3 условно положительного направления (совпадающего с направлением вектора поляризации) вызывает положительную деформацию (поскольку $e_{33} > 0$), а в случае механоэлектрического преобразования положительная деформация растяжения вызывает возникновение поля E_{3oc} противоположного направления. Это соответствует соотношению взаимности пьезоэлектрического преобразования (5.10).

В общем случае, когда механические граничные условия сложны, следует пользоваться выражениями для энергий (5.41) и (5.42). Однако в большинстве случаев число независимых составляющих тензоров деформации или напряжения ограничено и целесообразно заранее упростить эти выражения. Сделаем это для тех же видов граничных условий, что были рассмотрены в Главе 4 по отношению к элементам объема пассивного изотропного материала.

Краткое изложение результатов этого раздела, которое может оказаться полезным для понимания сути предмета, представлено в работе [3].

5.3 Выражения для плотностей энергии при различных граничных условиях

Рассмотрим плотности энергии при различных взаимных направлениях действующих деформаций и вектора поляризации, которые приведены в Таблице 5.3. В таблице представлены конфигурации пьезоэлементов, объединенные под номерами I–VI, в которых реализуются те или иные граничные условия, и различные ориентации оси

поляризации в этих пьезоэлементах обозначенные цифрами 1, 2, 3. Координатные оси, направление которых совпадает с направлением действующей деформации, обозначены пунктирными линиями.

Вначале рассмотрим варианты деформаций, которые не сопровождаются сдвигом, то есть при условии, что $S_4 = S_5 = S_6 = 0$. Номера вариантов соответствуют номерам их изображений в Таблице 5.3.

I. Деформация по толщине пластины, другие размеры которой велики.

Деформации в плоскости пластины отсутствуют из соображений симметрии. Можно рассматривать два направления оси 3: 1) перпендикулярно плоскости пластины, при этом $S_1 = S_2 = 0$; 2) параллельно плоскости пластины, при этом $S_2 = S_3 = 0$. При подстановке деформации S_1 в выражения (5.41) и (5.42) для этих двух направлений оси 3, в первом из которых реализуется продольный, а во втором поперечный пьезоэлектрический эффект, получим

$$1) \quad 2w_{el}^S = \varepsilon_{33}^S E_3^2, \quad 2w_{mch}^E = c_{33}^E S_3^2, \quad 2w_{em} = e_{33} E_3 S_3, \quad (5.53)$$

$$2) \quad 2w_{el}^S = \varepsilon_{33}^S E_3^2, \quad 2w_{mch}^E = c_{11}^E S_1^2, \quad 2w_{em} = e_{31} E_3 S_1. \quad (5.54)$$

II. Деформация по ширине тонкой пластины, один размер которой велик, или в направлении по окружности длинного тонкого цилиндра.

Поскольку толщина пластины (цилиндра) невелика, и механические напряжения на ее боковых поверхностях равны нулю, их можно считать нулевыми и по всей толщине пластины (цилиндра). Деформации в направлении большой длины отсутствуют из соображений симметрии. В этом случае возможны деформации при различных направлениях оси 3: 1) ось 3 совпадает с направлением деформации и реализуется продольный пьезоэлектрический эффект, $T_1 = 0$, $S_2 = 0$; 2) ось 3 перпендикулярна плоскости пластины, поперечный пьезоэлектрический эффект, $T_3 = 0$, $S_2 = 0$; 3) ось 3 параллельна длине пластины, поперечный пьезоэлектрический эффект, $T_2 = 0$, $S_3 = 0$.

В варианте 1 (продольный пьезоэлектрический эффект, $T_1 = 0$, $S_2 = 0$) из уравнения (5.8) при $i = 1$ получаем $S_1 = (e_{31} E_3 - c_{13}^E S_3) / c_{11}^E$. Подставив значения S_1 и $S_2 = 0$ в выражения (5.41) и (5.42), по формуле (5.43) получим

Таблица 5.3: Коэффициенты, характеризующие пьезоэффект при различных граничных условиях (1/3)

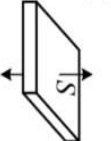
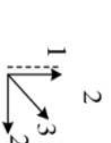
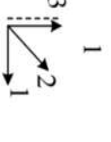
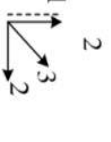
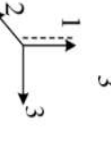
Mechanical System	I		II			
Boundary Conditions Parameter	 $S_1 = S_2 = 0, S_3$	 $S_2 = S_3 = 0, S_1$	 $S_1 = 0, T_2 = 0, S_3$	 $S_2 = 0, T_3 = 0, S_1$	 $S_3 = 0, T_2 = 0, S_1$	
	C_{Δ}^S	ϵ_{33}^S	ϵ_{33}^S	$\epsilon_{33}^{S_{11}} = \epsilon_{33}^S + \epsilon_{31}^2 / c_{11}^E$	$\epsilon_{33}^{S_{12}} = \epsilon_{33}^S + \epsilon_{33}^2 / c_{33}^E = \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2)$	$\epsilon_{33}^{S_{13}} = \epsilon_{33}^S + \epsilon_{31}^2 / c_{11}^E$
	K_{Δ}^E	c_{33}^E	c_{11}^E	$c_{33}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{11}^E$	$c_{11}^E - (c_{13}^E)^2 c_{33}^E / [(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2]$	$c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{11}^E$
	n_{Δ}	e_{33}	e_{31}	$e_{33} - e_{31} c_{13}^E / c_{11}^E$	$e_{31} - e_{33} c_{13}^E / c_{33}^E = d_{31} / (s_{11}^E + s_{12}^E)$	$e_{31} (1 - c_{12}^E / c_{11}^E)$
	k_c	$\frac{e_{33}}{\sqrt{\epsilon_{33}^S c_{33}^D}}$	$\frac{e_{31}}{\sqrt{\epsilon_{33}^S c_{11}^D}}$	-	-	-
Designation of k_c in Ref. 2	k_f	k_{31}^*	k_{33}^*	k_{31}^*	k_{31}^*	
K_{Δ}	$\frac{(1-\sigma)Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$	-	-	$\frac{Y}{1-\sigma^2}$	-	

Таблица 5.3: Коэффициенты, характеризующие пьезоэффект при различных граничных условиях (2/3)

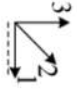
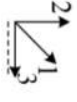

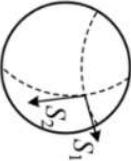
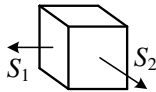
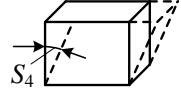
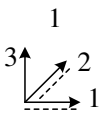
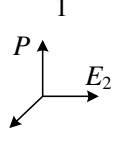
Mechanical System	III	IV
Boundary Conditions	 $T_2 = T_3 = 0, S_1$	 $S_1 \neq S_2, T_3 = 0$
Parameter	 $T_3 = 0, S_1 = S_2$	 $T_2 = 0, S_1 \neq S_3$
$C_{\nu\Delta}^{S_i}$	$\epsilon_{33}^{S_1} = \epsilon_{33}^T - d_{31}^2 / s_{11}^E$ $= \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$	$\epsilon_{33}^{S_2} = \epsilon_{33}^T - d_{33}^2 / s_{33}^E$ $= \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$
K_{Δ}^E	$\frac{1}{s_{11}^E}$	$\frac{2}{\frac{E}{S_{11}} + \frac{E}{S_{12}}}$
n_{Δ}	$\frac{1}{\frac{E}{s_{11}^E}}$	$\frac{2d_{31}}{\frac{E}{S_{11}} + \frac{E}{S_{12}}}$
k_{ϵ}	$\frac{d_{31}}{\sqrt{\epsilon_{33}^T s_{33}^E}}$	$k_{31} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{E}{S_{12}} / \frac{E}{S_{11}}}}$
Designation of k_{ϵ} in Ref. 2	k_{31}	k_p
K_{Δ}	Y	$\frac{2Y}{1 - \sigma}$
w_{pot}^E	from (4.16)	from (4.16)
w_{pot}^E	-	-
w_{mech}^E	from (5.69)	from (5.73)
w_{em}^E	from (5.70)	from (5.74)

Таблица 5.3: Коэффициенты, характеризующие пьезоэффект при различных граничных условиях (3/3)

Механическая система	V 		VI 
Граничные условия	 $S_3 = 0, S_1 \neq S_2$		 S_4
Параметр		$S_1 = S_2$	
$C_{e\Delta}^{S_i}$	ε_{33}^S	ε_{33}^S	ε_{11}^S
K_{Δ}^E	w_{mch}^E От (5.76)	$2(c_{11}^E + c_{12}^E)$	$c_{44}^E = 1 / s_{44}^E$
n_{Δ}	w_{em} От (5.77)	$2e_{31}$	$e_{15} = d_{15} / s_{44}^E$
k_c	-	-	$\frac{d_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^T s_{44}^E}}$
Обозначение k_c в работе [2]	-	k_p'	k_{15}
K_{Δ}	-	-	μ

$$w_{int} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{33}^S + e_{31}^2 / c_{11}^E) E_3^2 + \frac{1}{2} (e_{33} - e_{31} c_{13}^E / c_{11}^E) E_3 S_3 = w_{el}^{S_{3,1}} + \frac{1}{2} (c_{33}^E - c_{13}^{E2} / c_{11}^E) S_3^2. \quad (5.55)$$

Принимая во внимание соотношения (5.16) и (5.17) между постоянными пьезокерамики, выражения для составляющих внутренней энергии получим в виде:

$$2w_{el}^{S_{3,1}} = \varepsilon_{33}^{S_{3,1}} E_3^2, \quad \varepsilon_{33}^{S_{3,1}} = \varepsilon_{33}^S + e_{31}^2 / c_{11}^E, \quad (5.56)$$

$$2w_{mch}^E = (c_{33}^E - c_{13}^{E2} / c_{11}^E) S_3^2 = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^{E2}} S_3^2, \quad (5.57)$$

$$2w_{em} = (e_{33} - e_{31} c_{13}^E / c_{11}^E) E_3 S_3 = \frac{d_{33} s_{11}^E - d_{31} s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^{E2}} E_3 S_3. \quad (5.58)$$

Здесь введено обозначение $\varepsilon_{33}^{S_{3,1}} = \varepsilon_{33}^S + e_{31}^2 / c_{11}^E$ для диэлектрической проницаемости, определяемой при условии, что $S_3 = 0$ и $S_1 = 0$. В нижнем индексе обозначения $S_{3,1}$

индекс действующей деформации идет первым.

В варианте 2 (поперечный пьезоэффект, $T_3 = 0$, $S_2 = 0$) аналогичным образом получим:

$$2w_{el}^{S_{1,2}} = \varepsilon_{33}^{S_{1,2}} E_3^2, \quad \varepsilon_{33}^{S_{1,2}} = \varepsilon_{33}^S + e_{33}^2 / c_{33}^E, \quad (5.59)$$

$$2w_{mch}^E = (c_{11}^E - c_{13}^{E2} / c_{33}^E) S_1^2 = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^{E2} - s_{12}^{E2}} S_1^2, \quad (5.60)$$

$$2w_{em} = (e_{31} - e_{33} c_{13}^E / c_{33}^E) E_3 S_1 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E} E_3 S_1. \quad (5.61)$$

В варианте 3 ($T_2 = 0$, $S_3 = 0$):

$$2w_{el}^{S_{1,3}} = \varepsilon_{33}^{S_{1,3}} E_3^2, \quad \varepsilon_{33}^{S_{1,3}} = \varepsilon_{33}^{S_{3,1}}, \quad (5.62)$$

$$2w_{mch}^E = (c_{11}^E - c_{12}^{E2} / c_{11}^E) S_1^2 = \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^{E2}} S_1^2, \quad (5.63)$$

$$2w_{em} = e_{31} (1 - c_{12}^E / c_{11}^E) E_3 S_1 = \frac{d_{33} (s_{11}^E + s_{12}^E) + d_{31} s_{33}^E}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^{E2}} E_3 S_1. \quad (5.64)$$

III. Деформации тонкого стержня в направлении его длины или тонкого короткого кольца в направлении его окружности.

Этот вариант рассмотрен в Главе 1 (уравнения (1.47)–(1.50)) для случая поперечного пьезоэффекта ($T_2 = T_3 = 0$). Вариант продольного пьезоэффекта можно рассмотреть аналогичным образом. Конечные результаты для плотностей энергий

$$2w_{el}^{S_i} = \varepsilon_{33}^{S_i} E_3^2, \quad \varepsilon_{33}^{S_i} = \varepsilon_{33}^T - d_{3i}^2 / s_{ii}^E, \quad (5.65)$$

$$2w_{mch}^E = s_{ii}^E T_i^2 = S_i^2 / s_{ii}^E, \quad (5.66)$$

$$2w_{em} = d_{3i} E_3 T_i = (d_{3i} / s_{ii}^E) E_3 S_i. \quad (5.67)$$

Здесь нижние индексы $i = 1$ и $i = 3$ соответствуют поперечному и продольному пьезоэффектам, соответственно.

IV. Двумерная деформация в плоскости тонкой пластины.

В варианте поперечного пьезоэлектрического эффекта $T_3 = 0$, $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$. Такие же условия имеют место при деформациях тонкостенной сферической оболочки и вдоль

оси тонкостенного цилиндра. В общем случае (вариант 1), в котором $S_1 \neq S_2$, применив уравнения (5.8), (5.9) и соотношения (5.41), (5.42) получим:

$$2w_{el}^{S_{1,2}} = \varepsilon_{33}^{S_{1,2}} E_3^2, \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} 2w_{mch}^E &= (c_{11}^E - c_{13}^{E2} / c_{33}^E)(S_1^2 + S_2^2) + 2(c_{12}^E - c_{13}^{E2} / c_{33}^E)S_1S_2 = \\ &= \frac{s_{11}^E}{s_{11}^{E2} - s_{12}^{E2}} [S_1^2 - 2(s_{12}^E / s_{11}^E)S_1S_2 + S_2^2], \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$2w_{em} = (e_{31} - e_{33}c_{13}^E / c_{33}^E)E_3(S_1 + S_2) = \frac{d_{31}E_3}{s_{11}^E + s_{12}^E}(S_1 + S_2). \quad (5.70)$$

Здесь приняты во внимание соотношения (5.16) и (5.17) между постоянными пьезокерамики. Для пульсирующей сферы (вариант 2) $S_1 = S_2 = S$ и

$$2w_{mch}^E = 2S^2 / (s_{11}^E + s_{12}^E), \quad 2w_{em} = 2d_{31}E_3S / (s_{11}^E + s_{12}^E). \quad (5.71)$$

В случае если направление поляризации параллельно плоскости пластины (вариант 3) $T_2 = 0$, $S_1 \neq 0$, $S_3 \neq 0$ и получим

$$2w_{el}^{S_{3,1}} = \varepsilon_{33}^{S_{3,1}} E_3^2, \quad (5.72)$$

$$2w_{mch}^E = \frac{1}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E} (s_{11}^E S_3^2 - 2s_{13}^E S_1 S_3 + s_{33}^E S_1^2), \quad (5.73)$$

$$2w_{em} = \frac{E_3}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^{E2}} [(d_{31}s_{33}^E - d_{33}s_{13}^E)S_1 + (d_{33}s_{11}^E - d_{31}s_{13}^E)S_3]. \quad (5.74)$$

V. Двумерная деформация в плоскости поперечного сечения длинного цилиндрического стержня.

В отличие от приведенного выше примера, здесь при поперечном пьезоэффекте $S_3 = 0$, $T_3 \neq 0$ и

$$2w_{el}^S = \varepsilon_{33}^S E_3^2, \quad (5.75)$$

$$2w_{mch}^E = (c_{11}^E S_1^2 + 2c_{12}^E S_1 S_2 + c_{11}^E S_2^2), \quad (5.76)$$

$$2w_{em} = e_{31} E_3 (S_1 + S_2). \quad (5.77)$$

VI. Деформация сдвига элементарного объема.

Если исключить возможность механической трансформацию сдвига в деформации

других видов, то $S_i = 0$ при $i \neq 4$, и из уравнений типа (5.31) и (5.35) при $m = 2$ получим

$$2w_{el}^S = \varepsilon_{11}^S E_2^2, \quad (5.78)$$

$$2w_{mch}^E = c_{44}^E S_4^2 = T_4^2 / s_{44}^E, \quad (5.79)$$

$$2w_{em} = e_{24} S_4 E_2 = d_{24} T_4 E_2. \quad (5.80)$$

Возвращаясь к выражению (5.34) для внутренней энергии элемента объема пьезокерамики, можно сделать вывод, что электрическая (E) и механическая (S_i) переменные как бы разделены. Величина $w_{el}^{S_i}$ определена как энергия объема, изготовленного из керамики с диэлектрической проницаемостью, известной для каждого конкретного случая деформации. Величина w_{mch}^E определена как потенциальная энергия элемента объема пассивного керамического материала с постоянными упругости при $E = 0$.

Принципиально новой является величина w_{em} , характеризующая электромеханическое преобразование энергии в пьезокерамике. Для оценки качества пьезокерамики как активного материала широко используются коэффициенты электромеханической связи. Их значения напрямую связаны со значениями электромеханической энергии w_{em} и зависят от условий деформации пьезоэлемента. Прежде чем рассмотреть методы определения коэффициентов электромеханической связи и расчета их значений для наиболее распространенных условий деформации элементов объема пьезокерамики отметим, что во всех рассмотренных выше случаях деформации, за исключением примеров с двумерной деформацией при $S_1 \neq S_2$, плотность внутренней энергии оказалась выраженной через одну электрическую (E) и одну механическую (S_i) переменную. Для всех этих случаев можно провести аналогию между преобразованием энергии в элементарном объеме пьезокерамики и в некотором электромеханическом четырехполюснике. Действительно, если рассматривать единичный элемент объема ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x = 1$), то численное значение напряженности электрического поля E равно напряжению между электродами V ($E = V / \Delta x$), деформация S_i численно равна смещению соответствующей грани ($S_i = \xi_i / \Delta x$), и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{33}^{S_i}$ равна емкости элемента объема $C_{e\Delta}^{S_i}$ ($C_{e\Delta}^{S_i} = \varepsilon_{33}^{S_i} \Delta x^2 / \Delta x$). Принимая во внимание эти соображения и соотношения (5.33), выражения для внутренней энергии и ее составляющих $w_{int} = w_{el} = w_{el}^{S_i} + w_{em}$, $w_{em} = w_{mch}^E$ можно представить следующим образом:

$$w_{el}^{S_i} = C_{e\Delta}^{S_i} V^2 / 2, \quad (5.81)$$

$$w_{mch}^E = K_{\Delta}^E S_i^2 / 2, \quad (5.82)$$

$$w_{em} = n_{\Delta} V S_i / 2. \quad (5.83)$$

Здесь $C_{e\Delta}^{S_i}$, K_{Δ}^E , n_{Δ} — коэффициенты, которые обозначают удельную емкость, удельную жесткость ($C_{\Delta}^E = 1 / K_{\Delta}^E$ является удельной гибкостью) и коэффициент электромеханической трансформации для различных вариантов одномерной деформации элемента объема. Используя эти коэффициенты, можно представить пьезоэлектрические уравнения в следующем общем виде:

$$T = K_{\Delta}^E S - n_{\Delta} E_3, \quad (5.84)$$

$$D_3 = n_{\Delta} S + C_{e\Delta}^S E_3, \quad (5.85)$$

где S — единственная активная деформация. Подобное же представление можно сделать и для варианта деформации сдвига.

Выражения для $C_{e\Delta}^{S_i}$, K_{Δ}^E и n_{Δ} для разных вариантов одномерных деформаций, которые следуют из приведенных выше выражений для плотностей энергии, представлены в Таблице 5.3. Таблица также содержит выражения для коэффициента K_{Δ} , относящиеся к случаю, когда при тех же граничных условиях элемент объема выполнен из пассивного изотропного материала.

Для двумерных деформаций в Таблице даны ссылки на формулы, которые следует применять для определения соответствующих плотностей энергии.

Легко проверить, что энергетические соотношения (5.81)-(5.83) справедливы для электрического четырехполюсника, представленного на Рис. 5.3 (а), если применить общепринятые правила расчета электрических цепей и предположить, что фиктивный трансформатор, введенный в схему, сохраняет коэффициент трансформации n_{Δ} до частоты $\omega = 0$ (что соответствует статической деформации).

В режиме электромеханического преобразования энергия подается на электрический вход (положение 2 переключателя El), а механический выход находится в условиях холостого хода ($S_i = 0$) или короткого замыкания ($T_i = 0$) в положениях 1 или 3 переключателя Mch , соответственно.

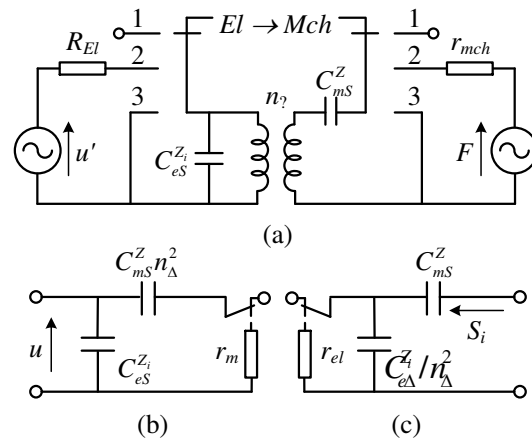


Рисунок 5.3: Электромеханический четырехполюсник.

В режиме механоэлектрического преобразования, в котором энергия подается на механический вход (положение 2 переключателя Mch), можно получить выражения для внутренней энергии элемента объема, которые соответствуют условиям короткого замыкания ($E = 0$) или холостого хода ($D = 0$) электрической стороны в положениях 3 или 1 переключателя El , соответственно. Те же результаты вытекают из выражений (5.47) - (5.52).

5.4 Коэффициенты связи

5.4.1 Об определениях коэффициентов электромеханической связи

Коэффициенты электромеханической связи (далее просто коэффициенты связи k_c) являются важными параметрами пьезоэлектрического материала и пьезоэлектрических тел, подвергающихся деформации. Они введены для оценки качества пьезокерамики как пьезоактивного материала для разных условий деформации. Основным энергетическим выражением для k_c является ⁴

$$k_c^2 = \frac{\text{энергия, запасенная в механической форме}}{\text{полная энергия на входе}}. \quad (5.86)$$

Для режима приема это определение можно перефразировать в виде

$$k_c^2 = \frac{\text{энергия, запасенная в электрической форме}}{\text{полная механическая энергия на входе}}. \quad (5.87)$$

В пьезоэлектрическом теле конечного размера качество электромеханического преобразования зависит от распределения деформаций по его объему. Для оценки эффективности преобразования энергии в пьезоэлектрических телах при неравномерном распределении деформаций введено понятие эффективного коэффициента связи k_{eff} . Для этого случая выражения (5.84) и (5.85) можно изменить, как это было сделано в Главе 2 (формула (2.88)),

$$k_{eff}^2 = \frac{\text{механическая энергия, запасенная в рассматриваемой форме колебаний}}{\text{полная электрическая энергия на входе}}$$

при $\omega \rightarrow 0$ (5.88)

Эффективный коэффициент связи зависит от статического распределения деформации в теле, которое соответствует определенному режиму колебаний. Несколько примеров применения этой формулы были рассмотрены в Главе 2.

В некоторых случаях трудно рассчитать и особенно проанализировать возможные способы оптимизации эффективных коэффициентов связи, пользуясь приведенными выражениями непосредственно. Поэтому в работе [2] была введена еще одна формула для коэффициента связи пьезокерамики

$$k_m = \frac{w_{em}}{\sqrt{w_e w_{mech}}}. \quad (5.89)$$

В работе [5] эта формула была распространена на случай эффективного коэффициента связи пьезоэлектрического тела

$$k_{eff}^2 = \frac{\left(\int_{\tilde{V}} w_{em} d\tilde{V}\right)^2}{\left(\int_{\tilde{V}} w_e d\tilde{V}\right)\left(\int_{\tilde{V}} w_{mech} d\tilde{V}\right)}, \quad (5.90)$$

В формулах (5.89) и (5.90) w_{em} , w_e и w_{mech} являются плотностями взаимной, электрической и упругой энергий в наших обозначениях (исходные обозначения в работе [2] — U_m , U_e и U_d , соответственно). Применение этих формул непросто и требует дополнительных пояснений. Систематизированный обзор определений коэффициентов связи, включающий объяснение возможных недостатков применения формул (5.89) и (5.90), представлен в работе [6].

Примечательно, что иногда (например, в работе [2]) коэффициенты связи пьезокерамики k_m называют статическими, а эффективные коэффициенты связи k_{eff} - динамическими коэффициентами связи. Такие определения не вытекают из сути дела, поскольку понятие неоднородности деформации не обязательно связано с движением. Динамические деформации могут быть однородными по всему объему, как, например, при пульсирующих колебаниях кольца или сферической оболочки, в то время как статические деформации могут быть неравномерными, как в случае изгиба пластин и прямоугольных стержней.

Здесь рассмотрим коэффициенты связи пьезокерамического материала при разных механических граничных условиях. Эффективные коэффициенты связи для пьезокерамических тел при неравномерных распределениях деформаций будут рассмотрены в Разделе 5.6 после проведения общего анализа энергетического состояния деформированного тела.

5.4.2 Коэффициенты связи пьезокерамического материала

Энергия, запасенная в механической (электрической) форме в выражениях (5.86) и (5.87), является электромеханической w_{em} или механоэлектрической w_{me} энергией (в зависимости от направления преобразования энергии). Коэффициент связи материала будем обозначать k_m до тех пор, пока не заданы определенные граничные условия. Применяя соотношение (5.43), представим коэффициент связи в следующих эквивалентных формах

$$k_m^2 = \frac{w_m^E}{w_{el}^S + w_m^E} = \frac{|w_{em}^E|}{w_{el}^S + w_m^E} \quad (5.91)$$

$$k_m^2 = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^T} = \frac{|w_{me}|}{w_{mch}^D}. \quad (5.92)$$

Или, применив соотношение (5.33), получим еще два полезных выражения

$$k_m^2 = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^T} = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^S + |w_{em}|}, \quad (5.93)$$

откуда

$$\frac{k_m^2}{1-k_m^2} = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^S}. \quad (5.94)$$

Причина, по которой w_{em} и w_{me} в соотношениях (5.91)-(5.94) взяты по модулю, объяснена при обсуждении формулы (5.53). Удобство применения альтернативных выражений (5.92) и (5.94) для коэффициентов связи зависит от того, какие величины более целесообразно принять в качестве независимых переменных при том или ином варианте граничных условий.

Поскольку выражения для w_{em} и w_{el} при различных граничных условиях определены в Разделе 5.3, для расчета соответствующих коэффициентов связи удобно непосредственно применить формулы (5.91)-(5.94). Преобразуем эти формулы таким образом, чтобы они включали в явном виде величины $C_{e\Delta}^{S_i}$, K_{Δ}^E , n_{Δ} , которые характеризуют состояние единичного объема. Применив соотношения (5.81)-(5.83), получим

$$k_m^2 = \frac{1}{1 + C_{e\Delta}^{S_i} / (n_{\Delta}^2 C_{\Delta}^E)}. \quad (5.95)$$

Выражения для коэффициентов связи k_m при разных граничных условиях, рассмотренных в Разделе 5.3, представлены в Таблице 5.3.

С помощью формулы (5.91) могут быть получены соотношения между значениями упругих и диэлектрических постоянных пьезокерамики при разных механических и электрических граничных условиях, включающие соответствующие коэффициенты связи. Поскольку из выражений (5.44), (5.45) и (5.51), (5.52) следует, что $\delta w_{em} = \delta w_{el}^{T_i} - \delta w_{el}^{S_i}$, $\delta w_{el} = \delta w_{el}^{T_i}$ и, аналогично, $\delta w_{me} = \delta w_{mch}^D - \delta w_{mch}^E$, $\delta w_{mch} = \delta w_{mch}^D$, формулу (5.91) преобразуем следующим образом:

$$k_m^2 = \frac{w_{el}^{T_i} - w_{el}^{S_i}}{w_{el}^{T_i}} = \frac{w_{mch}^D - w_{mch}^E}{w_{mch}^D}. \quad (5.96)$$

Эти соотношения также могут быть получены с помощью эквивалентной схемы, представленной на Рис. 5.3. В случае если поступает независимая электрическая энергия, после преобразования механического импеданса на электрическую сторону (Рис. 5.3 (b)) получим

$$w_{el} = \frac{1}{2} V^2 (C_{e\Delta}^{S_i} + n_{\Delta}^2 C_{\Delta}^E) = \frac{1}{2} V^2 C_{e\Delta}^{T_i} = w_{el}^{T_i}, \quad (5.97)$$

$$w_{el}^{S_i} = \frac{1}{2} V^2 C_{e\Delta}^{S_i}, \quad \frac{w_{el}^{T_i} - w_{el}^{S_i}}{w_{el}^{T_i}} = \frac{1}{1 + C_{e\Delta}^{S_i} / n_{\Delta}^2 C_{\Delta}^E} = k_m^2. \quad (5.98)$$

Из этих выражений следует, что

$$C_{e\Delta}^{S_i} = C_{e\Delta}^{T_i} (1 - k_m^2), \quad \varepsilon_{33}^{S_i} = \varepsilon_{33}^{T_i} (1 - k_m^2). \quad (5.99)$$

В случае если поступает независимая механическая энергия, после преобразования электрического импеданса на механическую сторону (Рис. 5.3 (с)) аналогичным образом получим

$$K_{\Delta}^D (1 - k_m^2) = K_{\Delta}^E. \quad (5.100)$$

Таким образом, с помощью соотношений (5.99) и (5.100) в варианте I.1 граничных условий (см. Таблицу 5.3) получим

$$\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^{T_3} (1 - k_i^2), \quad c_{33}^D (1 - k_i^2) = c_{33}^E, \quad (5.101)$$

и в вариантах III.1 и III.2

$$\varepsilon_{33}^{S_i} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{3i}^2), \quad s_{ii}^E (1 - k_{3i}^2) = s_{ii}^D, \quad (5.102)$$

где $i = 1$ и $i = 3$ для поперечного и продольного пьезоэффекта, соответственно.

Поскольку значения коэффициентов связи зависят от типа граничных условий, возникает вопрос: каковы их максимальные значения и при каком механическом воздействии их можно реализовать. В случае если $m = 2$, единственным и, следовательно, максимальным коэффициентом связи является k_{15} . В дополнение к соответствующему выражению, представленному в Таблице 5.3, есть еще один вариант выражения

$$k_{15}^2 = 1 - \varepsilon_{11}^S / \varepsilon_{11}^T \quad (5.103)$$

который следует из соотношения, аналогичного формуле (5.99). В случае если $m = 3$, максимальное значение коэффициента связи $k_{\max 3}$ (в работе [2] он называется «инвариантным») можно получить путем создания в элементе объема напряжений T_3 и $T_1 = T_2$ с противоположными знаками, например, растяжения вдоль полярной оси и сжатия в перпендикулярной плоскости. В результате этого

$$k_{\max 3}^2 = 1 - \varepsilon_{33}^S / \varepsilon_{33}^T \quad (5.104)$$

5.4.3 Циклы преобразования энергии пьезоэлементом

Для лучшего понимания физического значения понятий электромеханической энергии и коэффициента связи рассмотрим циклы преобразования электрической энергии в механическую и обратного преобразования энергии механического источника в электрическую энергию, которые выполняются пьезоэлементом. Пьезоэлемент будет схематично представлен четырехполосником (короткий стержень), имеющим электрические и механические входы. Электромеханическое преобразование проиллюстрировано диаграммами на Рис. 5.4.

Будем рассматривать процессы преобразования энергии происходящими в несколько этапов. Предположим, что на первом этапе (он будет обозначен верхним индексом I) на пьезоэлемент действует внешняя сила F , которая затормаживает его в направлении оси 3 ($S_3^I = 0$). Внешний электрический источник создает электрическое поле E_3^I внутри элемента. Как следует из уравнений (5.11) и (5.12), в пьезоэлементе возникают механическое напряжение и плотность заряда

$$T_3^I = -d_{33} E_3^I / s_{33}^E, \quad (5.105)$$

$$D_3^I = (\varepsilon_{33}^T - d_{33}^2 / s_{33}^E) E_3^I = \varepsilon_{33}^{S_3} E_3^I. \quad (5.106)$$

Изменение состояния пьезоэлемента на этом этапе представлено на Рис. 5.4 происходящим вдоль отрезка $0, I$. Источник электроэнергии затратил энергию

$$w_{el}^I = \varepsilon_{33}^{S_3} (E_3^I)^2 / 2. \quad (5.107)$$

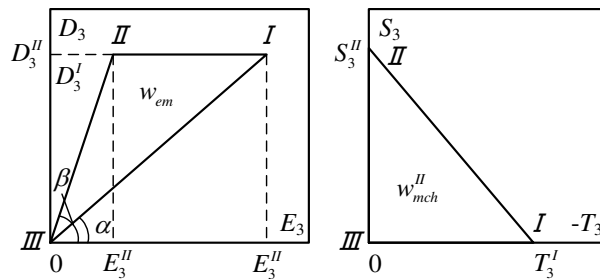


Рисунок 5.4: Цикл электромеханического преобразования: $\tan \alpha = \varepsilon_{33}^{S_3}$, $\tan \beta = \varepsilon_{33}^{T_3}$.

На втором этапе пьезоэлемент отсоединяем от электрического источника, при этом

его электроды остаются разомкнутыми (таким образом $D_3^{\text{II}} = D_3^{\text{I}}$). Убираем затормаживающую силу, что эквивалентно подключению небольшого сопротивления механической нагрузки r_{ml} к механическим клеммам пьезоэлемента. В идеальном цикле $r_{ml} \rightarrow 0$ и в конце второго этапа $T_3^{\text{II}} = 0$. (В реальности r_{ml} , каким бы малым оно ни было, все же имеет конечное значение, так что $T_3^{\text{II}} \approx 0$.) Из уравнений (5.11) и (5.12) получим к концу второго этапа в идеальном цикле

$$\begin{aligned} D_3^{\text{II}} &= \varepsilon_{33}^T E_3^{\text{II}} = D_3^{\text{I}} = \varepsilon_{33}^{S_3} E_3^{\text{I}}, \\ E_3^{\text{II}} &= \varepsilon_{33}^{S_3} E_3^{\text{I}} / \varepsilon_{33}^T, \\ S_3^{\text{II}} &= d_{33} E_3^{\text{II}} = d_{33} \varepsilon_{33}^{S_3} E_3^{\text{I}} / \varepsilon_{33}^T. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Следует отметить, что $T_1 = T_2$ все время, и состояние $T_3^{\text{II}} = 0$ эквивалентно состоянию механически полностью свободного пьезоэлемента. Поэтому применение ε_{33}^T оправдано. Изменение состояния пьезоэлемента на этом этапе представлено отрезком *I, II*. Энергия

$$\left| w_{mch}^{\text{II}} \right| = T_3^{\text{I}} S_3^{\text{II}} / 2 = d_{33}^2 \varepsilon_{33}^{S_3} (E_3^{\text{I}})^2 / 2 \varepsilon_{33}^E \varepsilon_{33}^T = w_{el}^{\text{I}} k_{33}^2 \quad (5.109)$$

переходит в механическую нагрузку. Принят модуль энергии w_{mch}^{II} , так как формально она имеет знак минус ($\delta w_{mch}^{\text{II}} = \delta T_3^{\text{I}} \cdot S_3^{\text{II}}$ и $\delta T_3^{\text{I}} < 0$), что означает по принятому правилу знаков, что поток энергии вытекает из объема пьезоэлемента.

На заключительном этапе электроды подключаются к небольшому внутреннему сопротивлению источника электрической энергии r_{in} . В идеале $r_{in} \rightarrow 0$, $E_3^{\text{III}} = 0$ и $S_3^{\text{III}} = 0$. В реальности $E_3^{\text{III}} \approx 0$. В идеальном цикле к концу этой стадии пьезоэлектрический элемент возвращается в исходное состояние, в котором были $E_3 = 0$, $S_3 = 0$ и $T_3 = 0$. Изменение состояния показано отрезком *II, III*. Пьезоэлемент возвращает электрическому источнику энергию

$$\left| w_{el}^{\text{III}} \right| = D_3^{\text{II}} E_3^{\text{III}} / 2 = \varepsilon_{33}^{S_3} (E_3^{\text{I}})^2 / 2 \varepsilon_{33}^T = w_{el}^{\text{I}} \varepsilon_{33}^{S_3} / \varepsilon_{33}^T, \quad (5.110)$$

при этом он не выполняет никакой механической работы ($T_3^{\text{II}} = T_3^{\text{III}} = 0$). Принят модуль энергии w_{el}^{III} , так как поток энергии вытекает из пьезоэлемента и формально должен иметь знак минус. Действительно, $\delta w_{el}^{\text{III}} = D_3^{\text{II}} \delta E_3^{\text{III}}$, где $\delta E_3^{\text{III}} < 0$.

Разница между энергией w_{el}^{I} , подведенной к пьезоэлементу, и $\left| w_{el}^{\text{III}} \right|$, возвращенной элементом электрическому источнику, равна механической работе, выполненной пьезоэлементом, т.е. энергии, передаваемой в механическую нагрузку. Таким образом,

$$w_{el}^I - |w_{el}^{III}| = w_{el}^I (1 - \varepsilon_{33}^{S_3} / \varepsilon_{33}^T) = |w_{mch}^II| = w_{el}^I k_{33}^2. \quad (5.111)$$

Из графического представления идеального цикла на Рис. 5.4 следует, что энергия, сообщаемая электрическим источником пьезоэлементу, пропорциональна площади треугольников $0, I, E_3^I$ или $0, I, D_3^I$, т. е. $S_{0ID^I} \rightarrow w_{el}^I$. Энергия, возвращаемая источнику в конце цикла, пропорциональна площади треугольника $0, II, D_3^{II}$. Площадь треугольника $0, I, II$

$$S_{0, I, D_3^{II}} - S_{0, II, D_3^{II}} = S_{0, I, II} \rightarrow w_{em} \quad (5.112)$$

представляет собой электромеханическую энергию как часть подводимой электрической энергии, которая может быть преобразована в механическую энергию в идеальном цикле.

Для варианта механоэлектрического преобразования энергии механического источника в энергию, передаваемую в электрическую нагрузку, графическое представление идеального цикла, которое приведено на Рис. 5.5, может быть рассмотрено аналогичным образом. Поэтому мы ограничимся только краткой сводкой результатов, относящихся к каждому из этапов преобразования.

Этап I.

Источник механической энергии вызывает деформацию S_3^I (пусть это будет растяжение $S_3^I > 0$). Электроды пьезоэлемента разомкнуты ($D_3^I = 0$). Из уравнений (5.11) и (5.12) следует, что

$$E_3^I = -d_{33} T_3^I / \varepsilon_{33}^T, \quad (5.113)$$

$$S_3^I = (s_{33}^E - d_{33}^2 / \varepsilon_{33}^T) T_3^I = s_{33}^D T_3^I. \quad (5.114)$$

Подводимая механическая энергия

$$w_{mch}^I = T_3^I S_3^I / 2 = s_{33}^D (T_3^I)^2 / 2. \quad (5.115)$$

Изменение состояния пьезоэлемента характеризуется отрезком $0, I$.

Этап II.

Зафиксировав торец пьезоэлемента (поддерживая $S_3^{II} = S_3^I$), замыкаем его электроды

на малое сопротивление электрической нагрузки $r_{el} \rightarrow 0$. В идеальном цикле $r_{el} = 0$ и $E_3^{\text{II}} = 0$. Механическое напряжение в пьезоэлементе изменяется на величину T_3^{II} , которую можно найти из условия

$$S_3^{\text{II}} = s_{33}^E T_3^{\text{II}} = S_3^{\text{I}} = s_{33}^D T_3^{\text{I}}, \quad (5.116)$$

откуда

$$T_3^{\text{II}} = s_{33}^D T_3^{\text{I}} / s_{33}^E, \quad D_3^{\text{II}} = d_{33} T_3^{\text{II}} = d_{33} s_{33}^D T_3^{\text{I}} / s_{33}^E. \quad (5.117)$$

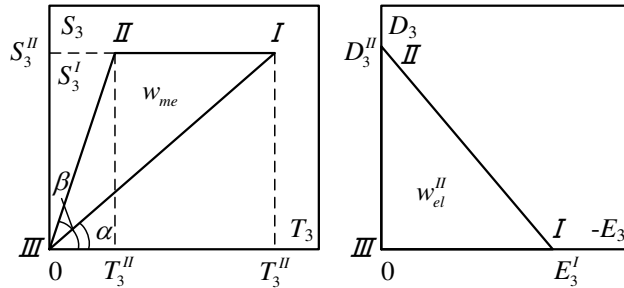


Рисунок 5.5: Цикл механоэлектрического преобразования: $\tan \alpha = s_{33}^D$, $\tan \beta = s_{33}^E$.

Электрическая энергия, которая поступает в нагрузку

$$|w_{el}^{\text{II}}| = D_3^{\text{II}} E_3^{\text{I}} / 2 = d_{33}^2 s_{33}^D (T_3^{\text{I}})^2 / 2 s_{33}^E = w_{mch}^{\text{I}} k_{33}^2. \quad (5.118)$$

Выражение для энергии взято по модулю, потому что она вытекает из пьезоэлемента и формально отрицательна по правилу знаков. На Рис. 5.5 изменение состояния происходит по отрезку I, II .

Этап III.

Силу, которая поддерживала постоянную деформацию, уменьшаем в идеальном цикле до нуля, и $T_3^{\text{III}} = S_3^{\text{III}} = 0$. (В реальном цикле эти величины уменьшаются до малых значений, которые определяются внутренним сопротивлением механического источника $r_{mch} \rightarrow 0$). Таким образом, электроды остаются коротко замкнутыми, $E_3^{\text{III}} = E_3^{\text{II}} = 0$ и никакого изменения электрической энергии не происходит. Неизрасходованная часть механической энергии

$$|w_{mch}^{\text{III}}| = T_3^{\text{II}} S_3^{\text{I}} / 2 = (s_{33}^D T_3^{\text{I}})^2 / 2 s_{33}^E = w_{mch}^{\text{I}} s_{33}^D / s_{33}^E, \quad (5.119)$$

на этом этапе возвращается к механическому источнику. (Взят модуль энергии, потому

что она вытекает из объема пьезоэлемента.) Изменение состояния пьезоэлемента до начального (в идеальном цикле к $E_3^{III} = D_3^{III} = 0$, $S_3^{III} = T_3^{III} = 0$) представлено отрезком II , III . В результате

$$|w_{el}^{II}| = w_{mch}^I - |w_{mch}^{III}| = w_{mch}^I (1 - s_{33}^D / s_{33}^E) = w_{mch}^I k_{33}^2. \quad (5.120)$$

Эта часть подводимой механической энергии, которая может быть преобразована в электрическую энергию в идеальном цикле (механоэлектрическая энергия), представлена на Рис. 5.5 площадью треугольника $0, I, II$.

Электромеханическую (механоэлектрическую) энергию также называют преобразуемой или взаимной энергией [7]. Отношение преобразуемой энергии к общей энергии, подводимой к пьезоэлементу, в идеальном цикле равно квадрату коэффициента связи. В реальном цикле преобразуемая часть энергии уменьшается.

5.4.4 К сравнению определений коэффициентов связи

Следует уточнить применимость формулы (5.89) (а значит, и формулы (5.90)) для вычисления коэффициентов связи. Это выражение отличается от физически ясного определения (5.86). Оно введено формальным образом и имеет недостатки. Рассмотрим его вывод в работе [2]. Начав с общего выражения для внутренней энергии

$$w_{int} = \frac{1}{2} S_i T_i + \frac{1}{2} D_m E_m, \quad (5.121)$$

и применив пьезоэлектрические уравнения (5.30), авторы получили соотношение

$$w_{int} = \frac{1}{2} T_i s_{ik}^E T_k + \frac{1}{2} T_i d_{im} E_m + \frac{1}{2} E_m d_{im} T_i + \frac{1}{2} E_3^2 \epsilon_{33}^T = U_e + 2U_m + U_d, \quad (5.122)$$

где $U_e = T_i s_{ik}^E T_k / 2$, $U_m = E_m d_{im} T_i / 2$ и $U_d = \epsilon_{33}^T E_3^2 / 2$ — упругая, взаимная и диэлектрическая энергии, соответственно. Затем введено определение (5.89) для k_m по аналогии с коэффициентом корреляции между двумя действиями. Однако следует помнить, что $E_m D_m / 2$ и $T_i S_i / 2$ в соотношении (5.121) представляют собой *независимые* электрическую и механическую энергии. Поэтому соотношения (5.121) и (5.122) следует представить в наших обозначениях в виде

$$\begin{aligned}
w_{int} &= \frac{1}{2} S_i T_i + \frac{1}{2} E_m D_m = \frac{1}{2} T_i S_{ik}^E T_k + \frac{1}{2} T_i d_{im} E_m + \frac{1}{2} T_i d_{im} E_m + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^T E_3^2 \\
&= \underline{w_{mech}^E} + \underline{w_{me}} + w_{em} + w_{el}^T.
\end{aligned} \tag{5.123}$$

Откуда видно, что средние члены в соотношении (5.122), будучи внешне схожими, в общем случае не равны и не могут быть удвоены. Они могут быть равны только в том случае, если существует определенное отношение между независимыми электрическими и механическими воздействиями. Это соотношение получим из уравнения $w_{em} = \underline{w_{me}}$ в виде

$$\frac{E_3}{T_i} = - \frac{d_{3i}}{\varepsilon_{33}^T}. \tag{5.124}$$

Вследствие отмеченной неточности пьезоэлектрические уравнения (5.8) и (5.9) с деформациями в качестве независимых переменных нельзя использовать для вывода выражения (5.89). Применение той же процедуры, что проведена с выражениями (5.121) и (5.122), в этом случае приводит к соотношениям

$$w_{int} = \frac{1}{2} S_i c_{ik}^E S_k + \frac{1}{2} S_i e_{im} E_m - \frac{1}{2} E_m e_{im} S_i + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^S E_3^2 = U_e + U_d, \tag{5.125}$$

где взаимный член исчезает.

Несмотря на неточное выведение формулы (5.89), выражение такого рода можно применять для определения коэффициента связи k_m , поскольку оно может быть получено из исходного определения (5.86) в виде выражений (5.91). Действительно, если учесть, что $|w_{em}| = w_{mech}^E$, в случае, если механические напряжения являются независимыми переменными, выражение (5.92) для k_m^2 можно представить в виде

$$k_m^2 = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^T} = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^T} \cdot \frac{|w_{em}|}{w_{mech}^E}, \text{ т. е. } \frac{k_m}{\sqrt{1-k_m^2}} = \frac{|w_{em}|}{\sqrt{w_{el}^S w_{mech}^E}}. \tag{5.126}$$

В случае если деформации являются независимыми переменными, из выражения (5.94) следует, что

$$\frac{k_m^2}{1-k_m^2} = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^S} = \frac{|w_{em}|}{w_{el}^S} \cdot \frac{|w_{em}|}{w_{mech}^E}, \text{ т. е. } \frac{k_m^2}{\sqrt{1-k_m^2}} = \frac{|w_{em}|}{\sqrt{w_{el}^S w_{mech}^E}}. \tag{5.127}$$

Выражения (5.126) и (5.127) можно использовать для вычисления k_m , а также

формул (5.91).

5.5 Внутренняя энергия пьезокерамического тела

Основное содержание этого раздела представлено в работе [3].

5.5.1 Основные положения

Определим внутреннюю энергию пьезокерамического тела как интеграл плотности внутренней энергии w_{int} по его объему. Принимая во внимание, что элемент объема внутри тела в процессе деформации испытывает реакцию окружающих частей тела (обозначим ее T_{ri}), для w_{int} надо использовать выражение, которое следует из соотношения (5.37). Учитывая, что энергия, связанная с реакцией окружающих элементов объема $w_e = T_{ri}S_i / 2$,

$$W_{int} = \int_{\tilde{V}} w_{int} d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} w_{el}^s d\tilde{V} + \int_{\tilde{V}} w_{em} d\tilde{V} - \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} T_{ri} S_i d\tilde{V}. \quad (5.128)$$

Применяя преобразование Грина к последнему интегралу, и имея в виду, что объемные силы в теле отсутствуют, получим

$$\int_{\tilde{V}} T_{ri} S_i d\tilde{V} = \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\xi} d\Sigma = W_{\Sigma} = 0. \quad (5.129)$$

Здесь \mathbf{f} — плотность сил, действующих на поверхности тела Σ , $\boldsymbol{\xi}$ — смещение точек поверхности, W_{Σ} — работа внешних сил, т. е. механическая энергия, которая втекает через поверхность тела. В силу предположения, что деформации тела происходят при идеальных граничных условиях, $W_{\Sigma} = 0$. Для вычисления остальных интегралов в (5.128) кроме плотностей энергии для различных механических граничных условий надо обладать следующими сведениями.

Должна быть известна конфигурация электрического поля поляризации керамики, так как она определяет кристаллографическую систему координат $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, для которой определены тензоры пьезоэлектрических постоянных, приведенные в Таблице 5.1. Интегрирование целесообразно выполнять в этой системе координат. В противном случае тензоры постоянных пришлось бы преобразовать в выбранную систему координат.

Должна быть известна конфигурация рабочего электрического поля \mathbf{E}_m . В соответствии с нашим соглашением мы должны рассматривать только два варианта: с $\mathbf{E}_m \parallel \mathbf{q}_3$ ($m = 3, E_3 \neq 0, E_2 = 0$) и $\mathbf{E}_m \perp \mathbf{q}_3$ ($m = 2, E_2 \neq 0, E_3 = 0$). Первый вариант соответствует наиболее распространенному случаю, в котором одни и те же электроды используют как для поляризации керамики, так и для работы преобразователя. Если в рабочем режиме некоторые части электродов соединены в противофазе, то в части объема вокруг зазора между этими частями электродов может возникнуть составляющая поля E_2 . Для реализации второго варианта, как правило, электроды, использованные для поляризации, удаляют и рабочие электроды наносят таким образом, чтобы выполнить условие $\mathbf{E}_m \perp \mathbf{q}_3$. При необходимости общий случай произвольного взаимного направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{P} можно рассматривать как суперпозицию этих двух вариантов.

Должно быть известно распределение деформации S_i по объему. Поскольку при решении задач колебаний в обобщенных координатах мы вводили системы вспомогательных функций, с помощью которых были выражены распределения смещений по объему, при общем анализе энергетического состояния тела распределение деформаций можно рассматривать как *априори* известное.

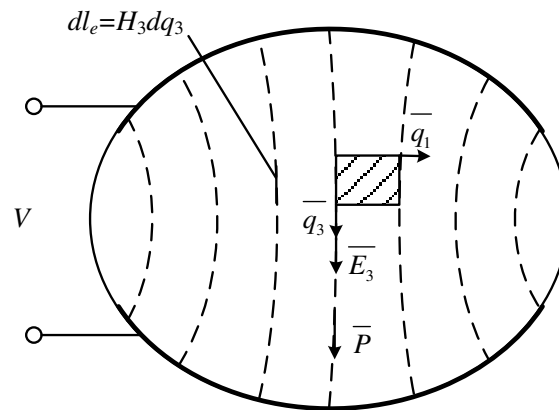


Рисунок 5.6: Пьезоэлектрическое тело, представленное в кристаллографической системе координат.

Прежде чем определять конкретные конфигурации поля поляризации, которые зависят от формы пьезоэлектрических элементов и расположения электродов на их поверхностях, проведем анализ интеграла (5.128) в криволинейных координатах в общей форме. Конфигурация пьезоэлемента общей формы качественно представлена на

Рис. 5.6. Предположим, что единичный вектор q_3 направлен по касательной к силовым линиям поля поляризации, а единичные векторы q_1 , q_2 направлены по касательной к эквипотенциальным поверхностям этого поля. Элемент объема $d\tilde{V} = H_i dq_i$ ограничен боковой поверхностью трубки тока, образованной силовыми линиями рабочего электрического поля и эквипотенциальными поверхностями этого поля (Рис 5.6).

В начале предположим, что весь объем пьезоэлемента заключен между двумя электродами. Поскольку оба варианта взаимных направлений вектора поляризации P и рабочего электрического поля E можно рассматривать аналогичным образом, проведем подробный анализ для варианта $E \parallel q_3$, а по отношению к варианту с $E \perp q_2$ приведем только конечный результат. Весь анализ будет выполнен для режима электромеханического преобразования.

Составляющие плотности внутренней энергии w_{el}^{Si} и w_{em} в формуле (5.128) определены соотношениями (5.41) и (5.42). Особенность преобразования энергии элементарным объемом внутри пьезоэлектрического тела может происходить из-за возможных механических и электрических взаимодействий между этим элементом и соседними частями тела. Механические взаимодействия не оказывают влияния на результат интегрирования по объему при идеальных механических граничных условиях, как это следует из выражения (5.129).

Электрические взаимодействия между элементами внутри тела могут быть результатом того, что распределение электрического поля в деформированном теле (обозначим его E'_3) может отличаться от распределения E_3 в заторможенном теле при условии, что к нему приложено такое же напряжение, поскольку для элементарного объема поле, создаваемое оставшейся частью тела в результате пьезоэлектрического эффекта, оказывается внешним. Поэтому в уравнениях (5.8), (5.9) и (5.11), (5.12) E_3 следует заменить на E'_3 , если рассматриваемый элемент объема находится внутри тела. Для этого надо установить связь между значениями E'_3 и E_3 . Поскольку пьезокерамика является диэлектрическим материалом, и внутри объема нет электродов, на которых могли бы образовываться свободные заряды, для вектора индукции (плотности заряда D) справедливо соотношение ΔW

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(D_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(D_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(D_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] = 0. \quad (5.130)$$

Если $\mathbf{E} \parallel \mathbf{q}_3$, то $D_1 = D_2 = 0$, потому что на соответствующих поверхностях тела нет электродов, и

$$\partial(D_3 H_1 H_2) / \partial q_3 = 0, \quad D_3 H_1 H_2 = \text{constant}. \quad (5.131)$$

Применив уравнение (5.9) к элементарному объему тела на Рис. 5.6 с подстановкой E'_3 вместо E_3 , умножив обе стороны уравнения на $H_1 H_2$ и интегрируя вдоль линии электрического поля l_e ($dl_e = dl_3 = H_3 dq_3$), получим

$$D_3 = \frac{\varepsilon_{33}^S}{l_e H_1 H_2} \int_0^{l_e} E'_3 H_1 H_2 H_3 dq_3 + \frac{e_{3i}}{l_e H_1 H_2} \int_0^{l_e} S_i H_1 H_2 H_3 dq_3. \quad (5.132)$$

(Заметим, что длина l_e в общем случае может зависеть от координат q_1, q_2 .) Первый член в этом соотношении представляет собой плотность заряда $\varepsilon_{33}^S E_3$, обусловленную электрическим полем E_3 в заторможенном теле при действии приложенного напряжения. Второй член представляет собой плотность заряда, создаваемого деформацией тела в результате пьезоэлектрического эффекта. Подставляя величину D_3 , выраженную уравнением (5.132), в уравнение (5.9), получим электрическое поле внутри деформируемого тела E'_3 в виде

$$E'_3 = E_3 + \frac{e_{3i}}{\varepsilon_{33}^S l_e H_1 H_2} \int_0^{l_e} S_i H_1 H_2 H_3 dq_3 - \frac{e_{3i} S_i}{\varepsilon_{33}^S}. \quad (5.133)$$

Отметим, что в соотношениях (5.132) и (5.133) предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. А именно, в общем случае это может быть $e_{3i} S_i = e_{31}(S_1 + S_2) + e_{33} S_3$, но где только S_i является рабочей деформацией. При конкретных граничных условиях, которые приводят к одномерной деформации, $e_{3i} S_i / \varepsilon_{33}^S = (n_\Delta / C_{3\Delta}^{S_i}) S_i$ где S_i — рабочая деформация, $n_\Delta, C_{3\Delta}^{S_i}$ — постоянные, представленные в Таблице 5.3. С учетом соотношения (5.95) $e_{3i} / \varepsilon_{33}^S$ можно заменить на $K_\Delta^E k_c^2 / (1 - k_c^2)$, где k_c — соответствующий коэффициент связи.

Таким образом, при неравномерной деформации тела для его внутренних точек вместо местных уравнений (5.8) и (5.9) следует применять уравнение (5.132) для D_3 и следующее уравнение для напряжения T_i

$$T_i = c_{ik}^E S_k - e_{3i} E_3 - \frac{e_{3i}^2}{\varepsilon_{33}^S H_1 H_2 l_e} \int_0^{l_e} S_i H_1 H_2 H_3 dq_3 + \frac{e_{3i}^2}{\varepsilon_{33}^S} S_i, \quad (5.134)$$

полученное из уравнения (5.8) после замены E_3 выражением (5.133) для E_3' . Выражение (5.128), включающее составляющие внутренней энергии, теперь следует записать в виде

$$W_{int} = \int_{\tilde{V}} w_{el}^{S_i} d\tilde{V} + \int_{\tilde{V}} w_{em} d\tilde{V} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \varepsilon_{33}^S (E_3')^2 d\tilde{V} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} e_{3i} E_3' S_i d\tilde{V}. \quad (5.135)$$

После замены E_3' его выражением (5.133) при интегрировании учтем, что $H_1 H_2$ приблизительно не зависит от координаты q_3 практически для всех конфигураций пьезокерамических преобразователей. (В противном случае электрическое поле поляризации в пьезоэлементах было бы неравномерным, что привело бы к уменьшению качества поляризации). С учетом этого и того, что

$$\int_0^{l_e} H_3 dq_3 = l_e \quad (5.136)$$

интегрирование в уравнении (5.135) становится легко выполнимым и приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \varepsilon_{33}^S (E_3')^2 dV = \\ & = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \varepsilon_{33}^S E_3^2 dV + \frac{1}{2} \frac{e_{3i}^2}{\varepsilon_{33}^S} \int_{q_1, q_2} \left[\int_0^{l_e} S_i^2 H_3 dq_3 - \frac{1}{l_e} \left(\int_0^{l_e} S_i H_3 dq_3 \right)^2 \right] H_1 H_2 dq_1 dq_2, \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} e_{3i} S_i E_3' dV = \\ & = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} e_{3i} S_i E_3 dV - \frac{e_{3i}^2}{2\varepsilon_{33}^S} \int_{q_1, q_2} \left[\int_0^{l_e} S_i^2 H_3 dq_3 - \frac{1}{l_e} \left(\int_0^{l_e} S_i H_3 dq_3 \right)^2 \right] H_1 H_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Интегрирование во втором члене в выражении (5.135) произведено по эквипотенциальной поверхности, перпендикулярной направлению поляризации q_3 .

Следует отметить, что на основании соотношений (5.38), в которых E_3 следует заменить на E_3' , и (5.129)

$$\frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} e_{3i} E_3' S_i d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} w_{mch}^E d\tilde{V} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} T_{ri} S_i d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} w_{mch}^E d\tilde{V} = W_m^E. \quad (5.139)$$

Здесь W_m^E — энергия деформации пьезокерамического тела, вычисленная исходя из предположения, что электрическое поле сохраняется постоянным в процессе деформации.

Для краткости введем несколько обозначений:

$$\frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{33}^S E_3^2 dV = W_{el}^S \quad (5.140)$$

для электрической энергии, подводимой к заторможенному телу источником, создающим электрическое поле силой E_3 ;

$$\frac{1}{2} \int_V e_{3i} E_3 S_i d\tilde{V} = W_{em} \quad (5.141)$$

для электромеханической энергии, и

$$\frac{e_{3i}^2}{2\varepsilon_{33}^S} \int_{q_1, q_2} \left[\int_0^{l_e} S_i^2 H_3 dq_3 - \frac{1}{l_e} \left(\int_0^{l_e} S_i H_3 dq_3 \right)^2 \right] H_1 H_2 dq_1 dq_2 = \Delta W \quad (5.142)$$

для до сих пор неизвестной дополнительной величины, которая зависит как от распределения деформации, так и от конфигурации электрического поля в заторможенном теле. Как выяснится в дальнейшем, эта величина характеризует электрическое взаимодействие между элементами объема в неравномерно деформируемом теле.

При граничных условиях, которые приводят к одномерной деформации, $e_{3i} S_i / \varepsilon_{33}^S = (n_\Delta / C_{e\Delta}^{S_i}) S_i$, где S_i — рабочая деформация. Параметры n_Δ , $C_{e\Delta}^{S_i}$ представлены в Таблице 5.3. Воспользовавшись соотношением (5.95), величину $e_{3i} / \varepsilon_{33}^S$ можно заменить на $K_\Delta^E k_c^2 / (1 - k_c^2)$, где k_c - соответствующий коэффициент связи.

Суммируя выражения (5.138) — (5.142), в результате получим

$$W_{em} = W_m^E + \Delta W . \quad (5.143)$$

После подстановки выражений (5.137) и (5.138) и с учетом введенных обозначений формулу (5.135) представим в виде

$$W_{int} = W_{el}^{S_i} + W_{em} = W_{el}^{S_i} + W_m^E + \Delta W . \quad (5.144)$$

В том случае, если деформации не изменяются вдоль направления электрических силовых линий (т. е. $\partial S_i / \partial q_3 = 0$), $\Delta W = 0$ и соотношения (5.143) и (5.144) принимают

вид

$$W_{int} = W_{el}^S + W_m^E, \quad W_{em} = W_m^E. \quad (5.145)$$

То есть при условии, что $\Delta W = 0$, электрические и механические переменные оказываются как бы разделенными. Это значит, что внутреннюю энергию деформированного тела можно рассчитать как сумму электрической энергии заторможенного тела и механической энергии, определяемой при постоянном электрическом поле. Это утверждение можно квалифицировать как формулировку *теоремы о разделении* электрических и механических переменных в деформированных пьезокерамических телах.

В варианте $\mathbf{E} \perp \mathbf{q}_3$ ($E_3 = 0, E_2 \neq 0$), соотношения (5.143) — (5.145) остаются справедливыми. Выражения для входящих в них энергий выглядят следующим образом:

$$W_{el}^S = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \varepsilon_{11}^S E_2^2 d\tilde{V}, \quad (5.146)$$

$$W_{em} = \int_{\tilde{V}} e_{24} E_2 S_4 d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} d_{24} E_2 T_4 d\tilde{V}, \quad (5.147)$$

$$W_m^E = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} w_{mch2}^E d\tilde{V}, \quad (5.148)$$

$$\Delta W = \frac{e_{24}^2}{2\varepsilon_{11}^S} \int_{q_1, q_3} \left[\int_0^{l_e} S_4^2 H_1 H_2 H_3 dq_2 - \frac{1}{l_e} \int_0^{l_e} S_4 H_2 dq_2 \int_0^{l_e} S_4 H_1 H_2 H_3 dq_2 \right] dq_1 dq_3. \quad (5.149)$$

Условие, при котором $\Delta W = 0$ — $\partial S_4 / \partial q_2 = 0$.

При вычислении энергий по формулам (5.139) — (5.141) для конкретных пьезоэлементов при определенных граничных условиях следует пользоваться выражениями для плотностей энергии w_{el}^S , w_{mch}^E и w_{em} , которые приведены в Таблице 5.3.

Предположим, что пьезоэлектрическое тело имеет одну механическую степень свободы и распределение смещений внутри тела представлено как $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0(t)\theta(\mathbf{r})$. Здесь $\xi_0(t)$ — смещение точки приведения на поверхности тела и $\theta(\mathbf{r})$ — безразмерная функция геометрических координат, которая не изменяется в рассматриваемом диапазоне частот. При этом все составляющие внутренней энергии W_{int} оказываются выраженными через смещение ξ_0 в качестве обобщенной механической координаты, и напряжение V в качестве обобщенной электрической координаты, а именно:

$$W_{el}^S = \frac{C_{el}^S V^2}{2}, \quad W_m^E = \frac{K_m^E \xi_o^2}{2} = \frac{\xi_o^2}{2C_m^E}, \quad W_{em} = \frac{1}{2} V \xi_o n, \quad \Delta W = \frac{\Delta K \xi_o^2}{2} = \frac{\xi_o^2}{2\Delta C}. \quad (5.150)$$

Здесь C_{el}^S — электрическая емкость зажатого тела, K_m^E и C_m^E — эквивалентные жесткость и податливость ($K_m^E = 1/C_m^E$), n — коэффициент электромеханической трансформации и $\Delta K = 1/\Delta C$ представляет собой дополнительную жесткость колеблющегося тела, которая связана с энергией ΔW . Как правило, эквивалентную электромеханическую схему такого преобразователя с одной механической степенью свободы можно представить так, как показано на Рис. 5.7 (а).

В случае если $\Delta W = 0$ элемент схемы ΔC следует из схемы исключить.

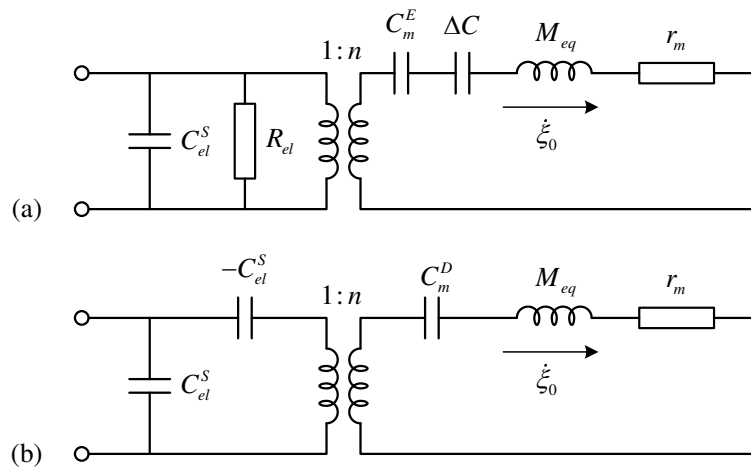


Рисунок 5.7: Эквивалентная схема преобразователя с одной механической степенью свободы: (а) общее представление (в случае, если электрические и механические координаты разделяемы, т.е. $\Delta W = 0$, необходимо исключить податливость ΔC), (б) эквивалентная схема Мейсона для стержня с электродами на торцах при основной форме колебаний.

5.5.2 О физическом смысле величины ΔW

Величина энергии ΔW , определяемая выражением (5.142), является принципиально важной в вопросе о разделении (в указанном выше смысле) электрических и механических переменных. Рассмотрим физическую природу этой величины и ее количественную оценку по сравнению с энергией упругой деформации W_m^E . Это удобно сделать с помощью типичных примеров пьезоэлементов в виде стержней: колеблющихся в продольном направлении при различных электрических граничных условиях (представлены на

Рис. 5.8); совершающих колебания изгиба (представлены на Рис. 5.11).

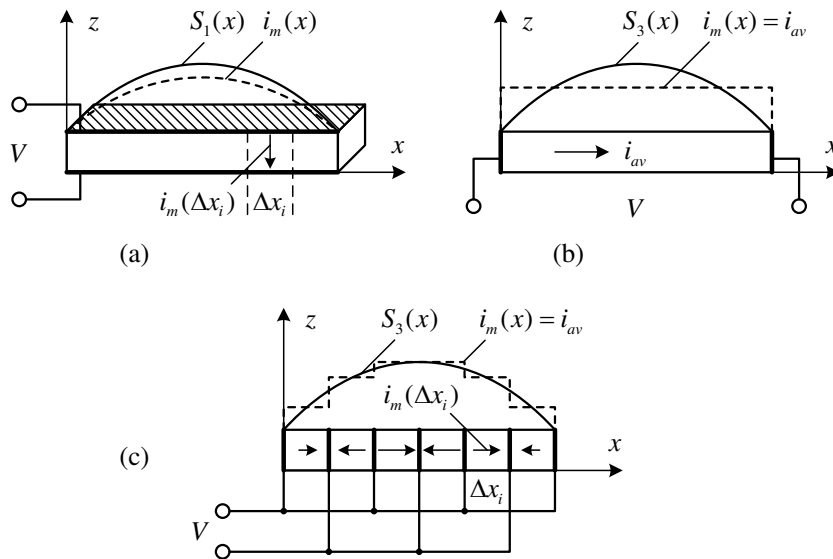


Рисунок 5.8: Пьезоэлектрические стержни, колеблющиеся в продольном направлении в основной форме колебаний: а) поперечный пьезоэффект при электродах на боковых поверхностях; б) продольный пьезоэффект при электродах на торцах; в) сегментированные с осевой поляризацией, продольный пьезоэффект.

5.5.2.1 Стержни, колеблющиеся в продольном направлении

Плотности внутренней энергии колеблющегося в продольном направлении стержня задаются выражениями (5.65) – (5.67)

$$w_{el}^S = w_{el}^{S_i} = \varepsilon_{33}^{S_i} \frac{E_3^2}{2}, \quad w_m^E = \frac{S_i^2}{2s_{ii}^E}, \quad w_{em} = \frac{d_{3i}}{2s_{ii}^E} S_i E_3. \quad (5.151)$$

Распределения смещений и деформаций в стержнях $\xi(x) = \xi_0 \cos(\pi x/l)$ и $S_i = -\xi_0 (\pi/l) \sin(\pi x/l)$, соответственно. Эквивалентные параметры для стержней следует рассчитать с использованием выражений (5.139) — (5.142) и плотностей энергий по формулам (5.151). Система координат прямоугольная. Таким образом, при вычислении ΔW по формуле (5.149) следует принять $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, $dq_3 = dx_3$, $dq_1 = dx_1$, $dq_2 = dx_2$. При рабочей деформации в направлении поляризации (продольный пьезоэффект)

$$e_{3i}^2 S_i^2 / \varepsilon_{33}^{S_i} = d_{33}^2 S_3^2 / s_{33}^{E2} \varepsilon_{33}^{S_3} = k_{33}^2 S_3^2 / (1 - k_{33}^2) s_{33}^E; \quad (5.152)$$

при рабочей деформации в перпендикулярном направлении (поперечный пьезоэффект)

$$e_{3i}^2 S_i^2 / \varepsilon_{33}^{S_i} = d_{31}^2 S_1^2 / s_{11}^{E2} \varepsilon_{33}^{S_1} = k_{31}^2 S_1^2 / (1 - k_{31}^2) s_{11}^E. \quad (5.153)$$

В результате интегрирований получим следующие выражения для эквивалентных параметров.

Для стержня с электродами на боковых поверхностях (поперечная поляризация) рабочая деформация $S_1(x)$, $dS_1 / dq_3 = dS_1(x) / dz = 0$ и эквивалентные параметры:

$$C_{el}^{S_1} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{wl}{t}, \quad K_m^E = \frac{1}{C_m^E} = \frac{\pi^2 tw}{2s_{11}^E l}, \quad n = \frac{2wd_{31}}{s_{11}^E}, \quad \Delta K = 0. \quad (5.154)$$

Таким образом, стержень с электродами на боковых поверхностях является типичным примером, в котором электрические и механические переменные разделены. Эквивалентная схема для преобразователя выглядит так, как показано на Рис. 5.7(a) без ΔC и, очевидно, совпадает с общей эквивалентной схемой для стержня с электродами на боковых поверхностях при основной форме колебаний.

Для стержня с электродами на торцах (продольная поляризация) рабочая деформация $S_3(x)$, $dS_3 / dq_3 = dS_3(x) / dx = -\xi_o (\pi x / l)^2 \cos(\pi x / l)$. В результате

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{S_{cs}}{s_{33}} \left[\int_0^l S_3^2 dx - \frac{1}{l} \left(\int_0^l S_3 dx \right)^2 \right] = \frac{\Delta K_3 \xi_o^2}{2}. \quad (5.155)$$

Эквивалентные параметры стержня:

$$C_{el}^{S_3} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{wt}{l}, \quad K_m^E = \frac{1}{C_m^E} = \frac{\pi^2 tw}{2s_{33}^E l}, \quad n = \frac{2d_{33} wt}{s_{33}^E l}, \quad (5.156)$$

$$\Delta K_3 = \frac{1}{\Delta C} = K_m^E \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{k_{33}^2}{(1 - k_{33}^2)}.$$

Стержень с электродами на торцах является наиболее типичным примером преобразователя с неравномерным распределением деформаций вдоль электрического поля, что приводит к дополнительной жесткости ΔK , которая обусловлена наличием энергии ΔW . Для стержня, изготовленного из керамики PZT-4, $k_{33}^2 \doteq 0.5$ и $\Delta K_3 = 0.2K_m^E$. Этот эффект представлен членом ΔC в эквивалентной схеме, представленной на Рис. 5.7 (a). Хорошо известный альтернативный вариант эквивалентной схемы такого стержня, приведенный в работе [2], показан на Рис. 5.7 (b). Параметры C_m^D и $(-C_{el}^S)$ в этой схеме отвечают за тот же эффект, что и параметры C_m^E и ΔC в схеме на Рис. 5.7 (a).

В варианте секционированного стержня при параллельном электрическом соединении секций, как это показано на Рис. 5.8 (с), направления поляризации и рабочего электрического поля совпадают в каждой секции. Распределение деформации в стержне не изменилось. При вычислении энергий W_{el}^S , W_{em} и ΔW следует выполнить интегрирование в пределах каждой секции и суммировать результаты.

При этом для энергии ΔW , которую в этом случае будем обозначать ΔW_N (N — число секций), получим

$$\Delta W_N = \frac{1}{2} \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \frac{S_{cs}}{s_{33}^E} \left[\int_0^l S_3^2 dx - \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left(\int_{\Delta x(n-1)}^{\Delta x n} S_3 dx \right)^2 \right] = \frac{\Delta K_{3N} \xi_o^2}{2}. \quad (5.157)$$

После подстановки под интегралы выражения для деформации S_3 получим формулу для вычисления значений дополнительной жесткости стержня ΔK_{3N} в зависимости от числа секций

$$\Delta K_{3N} = K_m^E \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \left[1 - \beta \left(\sin^2 \frac{\pi}{2N} \right) \left(\frac{\pi}{2N} \right)^{-2} \right]. \quad (5.158)$$

Здесь $\beta=1$ при $N \geq 2$ и $\beta=2$ при $N=1$, что соответствует предыдущему случаю сплошного стержня.

Остальные эквивалентные параметры имеют значения

$$C_{el}^{S_3} = \varepsilon_{33}^T (1-k_{33}^2) \frac{wtN^2}{l}, \quad K_m^E = \frac{\pi^2 tw}{2s_{33}^E l}, \quad n = \frac{2d_{33} wtN}{s_{33}^E l}. \quad (5.159)$$

График отношения $\Delta K_{3N}/\Delta K_{31}$ в зависимости от числа секций N представлен на Рис. 5.9.

При числе секций $N > 6$ на половине длины волны деформации значение $\Delta K_6 < 0.1\Delta K_1$ и на практике пренебрежимо мало. Так, например, в варианте с PZT-4 $\Delta K_6 < 0.02K_m^E$. При $\Delta K_N \ll K_m^E$, т.е. $1/\omega\Delta C_N \ll 1/\omega C_m^E$ и величиной $1/\omega\Delta C_N$ можно пренебречь. (Можно полагать, что при применении современной PZT керамики это достигается, если $N \geq 6$). При этом эквивалентная схема секционированного стержня качественно не отличается от схемы для стержня с поперечной поляризацией. (Различия состоят только в значениях эквивалентных параметров.) Это отражает тот факт, что

преобразование энергии в этих двух случаях качественно происходит одинаковым образом и отличается от варианта сплошного стержня с продольной поляризацией.

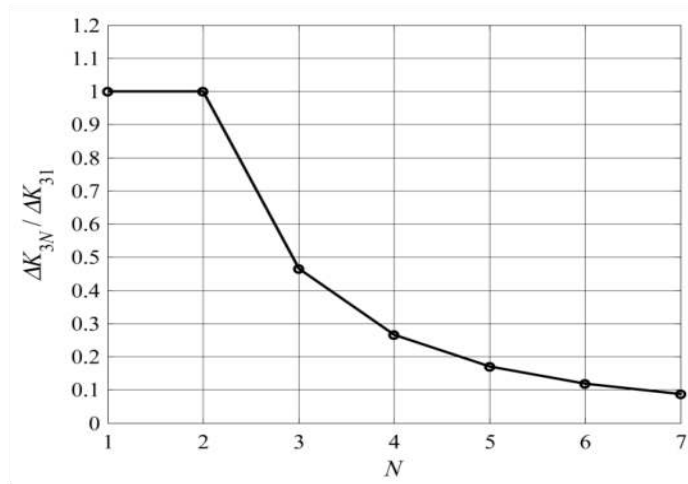


Рисунок 5.9: Отношение $\Delta K_{3N} / \Delta K_{31}$ в зависимости от числа секций N .

Для того чтобы объяснить физическую разницу в качестве преобразования энергии между стержнями с поперечной поляризацией, сплошным и секционированным стержнями с продольной поляризацией, предположим, что стержень разделен на малые участки Δx , как это представлено на Рис. 5.8(а). Рассмотрим эти участки как элементарные преобразователи энергии. Электрическую энергию, которая к ним поступает, можно представить как $w_{el}(x) = [w_{el}^s(x) + w_{em}(x)] \sim [i_s(x) + i_m(x)]$ (знак « \sim » указывает на пропорциональность). Члены $w_{el}^s(x)$ и $i_s(x)$ представляют собой электрическую энергию и ток через элемент в том случае, если стержень заторможен. Члены $w_{em}(x)$ и $i_m(x)$ являются частью электрической энергии, потребляемой элементом, и тока через него, которые вызваны колебаниями (деформациями) всего стержня. Назовем их «динамическими» энергией и током. Динамическая часть электрической энергии, потребляемой элементом, равна $w_{em}(x) \sim i_m(x) \cdot E_3(x)$. Часть электрической энергии, которая преобразуется в механическую энергию в процессе деформации элемента $w_{em}(x) = w_{mch}^E$, и, согласно уравнению (5.42), она пропорциональна деформации, т.е. $w_m^E(x) \sim S(x) \cdot E_3(x)$, где $E_3(x)$ — электрическое поле в элементе. Таким образом, отношение $w_{mch}^E(x) / w_{em}(x) \sim S(x) / i_m(x)$ количественно определяет ту часть динамической электрической энергии, которая преобразуется в механическую форму элементом стержня с

координатой x . В варианте поперечного пьезоэлектрического эффекта электроды стержня распределяют ток движения таким образом, что $i_m(x) \sim S(x)$ (на самом деле $i_m = d_{31} S_1 / s_{11}^E$) и $w_{mch}^E(x) / w_{em}(x)$ не зависит от координаты x . Распределение динамической электрической энергии между элементами механической системы происходит в точном соответствии с их вкладом в электромеханическое преобразование.

В варианте сплошного стержня при продольной поляризации $i_m(x) = i_{av}$, где i_{av} — средний ток, который протекает через все элементы, в то время как $S(x) \sim \sin(\pi x / l)$. Соответственно, $w_{mch}^E(x) / w_{em}(x) \sim \sin(\pi x / l)$. То есть, элементы, расположенные вблизи концов, почти ничего не вносят в электромеханическое преобразование, хотя в то же время потребляют такое же количество динамической электрической энергии, как и элементы, расположенные в средней части стержня, вклад которых максимален. Распределение динамической электрической энергии в этом случае является «несправедливым». Между элементами стержня происходит электрическое взаимодействие таким образом, что «сильные» элементы стержня питают «слабые». Чтобы получить такое же количество механической энергии требуется относительно больше электрической энергии, чем в предыдущем варианте поперечного электрического поля.

В секционированном стержне электроды, встроенные в стержень, распределяют динамический ток между секциями в соответствии со средней деформацией $S_{3av}(\Delta x_i)$ внутри секции $[i_m(\Delta x_i) \sim S_{av}(\Delta x_i)]$. Поэтому $w_{mch}^E / w_{em} \sim S_3(x_i) / S_{3av}(\Delta x_i)$. С увеличением числа секций $\Delta x_i = l / N \rightarrow 0$ и $S_3(x_i) / S_{3av}(\Delta x_i) \rightarrow 1$. (Можно полагать, что $S_{3av}(\Delta x) \approx S_3(x)$ уже при $N > 6$ на половине длины волны деформации, как это следует из Рис. 5.9.) Распределение динамической энергии становится почти таким же «справедливым», как и в случае поперечного электрического поля. Преобразование энергии в этих двух случаях происходит качественно похожим образом и более «экономично», чем в варианте сплошного стержня при продольном пьезоэффекте.

Возвращаясь к эквивалентным схемам, представленным на Рис. 5.7, можно сделать вывод, что вариант схемы на Рис. 5.7 (а) с членом ΔC имеет преимущество понятности, тогда как наличие элемента $(-C_{el}^S)$ на Рис. 5.7 (b) не имеет ясного физического смысла и носит формальный характер.

Из-за вышеописанного обстоятельства сплошной стержень с электродами на торцах

ведет себя так, как будто он более жесткий, так как для достижения того же уровня деформации ему требуется большая электрическая энергия, чем секционированному стержню. Действительно, жесткость сплошного стержня равна $K^E = K_3^E + \Delta K_3$, в то время как жесткость секционированного $K^E = K_3^E$. Существует терминология, отражающая различие между пьезо жесткими и пьезо мягкими формами колебаний пьезокерамических тел (подразумевается, что в первом случае используется продольный пьезоэффект, а во втором — поперечный). Как видим, такая классификация в определенной степени оправдана, так как при поперечном пьезоэффекте $\Delta K = 0$. Однако в применении к реальным конструкциям преобразователей это не бесспорно, тем более что отношение значений эквивалентных модулей Юнга для продольного и поперечного пьезоэффекта равно $s_{11}^E / s_{33}^E < 1$.

Наиболее неадекватное потребление динамической электрической энергии в сплошном стержне при продольном пьезоэффекте имеет место вблизи торцов стержня, где деформации особенно малы. Поэтому интересно рассмотреть тот случай, когда электроды встроены в стержень на некотором расстоянии от торцов, как показано на Рис. 5.10 (а).

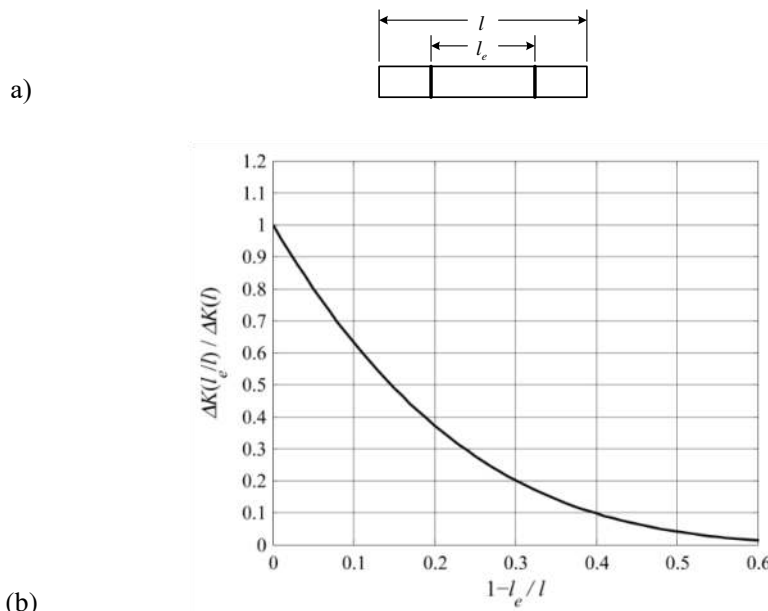


Рисунок 5.10: Эффект электродов, встроенных в пьезоэлектрический стержень: (а) расположение электродов, (б) отношение $\Delta K(l_e) / \Delta K(l)$ в зависимости от расстояния между электродами.

С помощью уравнения (5.142), где интегрирование следует выполнить по длине части стержня между электродами, получим

$$\frac{\Delta K(l_e)}{\Delta K(l)} = \frac{1}{1-8/\pi^2} \cdot \frac{l_e}{l} \left[1 + \frac{l}{\pi l_e} \cdot \sin \frac{\pi l_e}{l} - 2 \frac{\sin^2(\pi l_e / 2l)}{(\pi l_e / 2l)^2} \right]. \quad (5.160)$$

Эта функция представлена на Рис. 5.10 (b), откуда следует, что при $l_e / l < 0.5$ величиной $\Delta K(l_e)$ по сравнению с $\Delta K(l)$ можно пренебречь.

5.5.2.2 Прямоугольный стержень, совершающий колебания изгиба

Еще один пример, в котором деформации изменяются в направлении электрического поля, представляют собой преобразователи с механическими системами в форме стержней (пластин малой ширины), пластин и оболочек, совершающих колебания изгиба. При поперечном пьезоэффекте речь идет о распределении деформаций по толщине. Это распределение деформаций в таких системах не зависит от их конфигурации в горизонтальной плоскости и от граничных условий. В качестве примера выберем прямоугольный шарнирно опертый стержень в основной форме колебаний $\theta(x) = \sin(\pi x / l)$. Частный случай такого пьезоэлемента был рассмотрен в Разделе 2.6.1. Различные варианты конструкций пьезоэлементов представлены на Рис. 5.11.

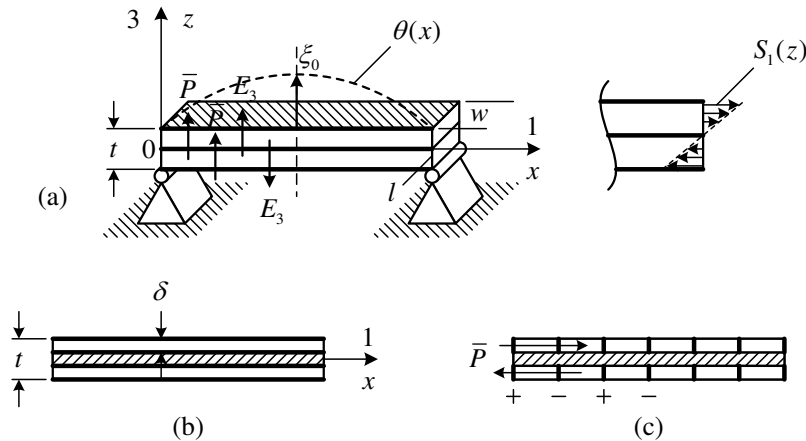


Рисунок 5.11: Варианты конструкций прямоугольных стержней, совершающих колебания изгиба: а) полностью активная биморфная конструкция, б) трехслойная конструкция, в) секционированная конструкция (продольный пьезоэффект).

Общее выражение для деформации — $S_1(z, x) = z \xi_o (\pi / l)^2 \sin(\pi x / l)$. Подставляя это

выражение в формулу (5.142), и принимая во внимание соотношения (5.152) и выражение $K_m^E = (\pi^4 / 48)(wt^3 / \ell^3 s_{11}^E)$ для эквивалентной жесткости стержня, получим

$$\Delta W = \frac{\xi_o^2}{2} \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^S s_{11}^E} K_m^E \left[1 - \frac{2}{t} \left(\int_0^{t/2} z dz \right)^2 \left(\int_0^{t/2} z^2 dz \right)^{-1} \right] = \frac{\xi_o^2}{2} \Delta K, \quad (5.161)$$

откуда

$$\Delta K = 0.25 \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} K_m^E. \quad (5.162)$$

Если преобразователь изготовлен из керамики PZT-4, то $k_{31}^2 \doteq 0.1$, и $\Delta K \doteq 0.03 K_m^E$. Таким изменением жесткости K_m^E очевидно, можно пренебречь. Тем более, что в практических конструкциях изгибных преобразователей часто применяют трехслойные механические системы, в которых слои пьезоэлектрического материала смещены от нейтральной плоскости, как показано на Рис. 5.11 (b). В таких конструкциях $\Delta K / K_m^E$ дополнительно уменьшается по мере увеличения расстояния между пьезоэлектрическим слоем и нейтральной плоскостью по той же причине, что и в случае колеблющегося в продольном направлении стержня со встроенными электродами. Если предположить, что модули Юнга активных и пассивных материалов примерно одинаковы, то

$$\frac{\Delta K(\delta)}{\Delta K(t/2)} = \left(\frac{2\delta}{t} \right)^2 \left[3 \left(1 - \frac{2\delta}{t} \right) + \left(\frac{2\delta}{t} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (5.163)$$

где δ — толщина пьезоэлектрического слоя, а t — общая толщина стержня. Из этого уравнения следует, что при $\delta / t \leq 0.4$, что целесообразно по соображениям оптимизации эффективного коэффициента связи (см. Раздел 5.6), величиной ΔK можно пренебречь наверняка.

Пьезоэлементы изгибных преобразователей с прямоугольными стержнями, предназначенные для применения в качестве излучателей, обычно секционированы как это показано на Рис. 5.11 (c) и реализуют продольный пьезоэффект. Ситуация с точки зрения дополнительной жесткости в этом случае точно такая же, как и для секционированного продольно колеблющегося стержня. Формула (5.158) справедлива для ΔK_N при значении основной жесткости $K_m^E = (\pi^4 / 48)(wt^3 / \ell^3 s_{33}^E)$.

5.6 Эффективные коэффициенты связи

Рассмотрим теперь эффективные коэффициенты связи k_{eff} в общем случае для произвольно деформированных пьезоэлектрических тел⁶. Воспользовавшись определением (5.90) и выражениями (5.143) и (5.144) для составляющих внутренней энергии неоднородно деформированного пьезоэлектрического тела, можно представим величину k_{eff} в виде

$$k_{eff}^2 = \frac{W_{em}}{W_{el}^S + W_{em}} = \frac{W_m^E + \Delta W}{W_{el}^S + W_m^E + \Delta W}. \quad (5.164)$$

Следует отметить, что понятие k_{eff} имеет смысл только в связи с определенным распределением деформации в теле и справедливо до тех пор, пока это распределение остается неизменным. Другими словами, каждая отдельная механическая степень свободы пьезоэлектрического тела характеризуется собственным коэффициентом связи k_{eff} . Поэтому, прежде чем вычислять k_{eff} , необходимо знать распределение смещений $\xi(\mathbf{r})$ в теле. Представим это распределение смещений в виде

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi_o \theta_\xi(\mathbf{r}), \quad (5.165)$$

где ξ_o — смещение точки приведения с координатой \mathbf{r}_o и $\theta_\xi(\mathbf{r})$ — форма колебаний, т.е., распределение смещений, нормированное таким образом, что $\theta_\xi(\mathbf{r}_o) = 1$. Пусть соответствующее распределение деформаций будет

$$S(\mathbf{r}) = S_o \theta_S(\mathbf{r}). \quad (5.166)$$

В случае если тело имеет одну механическую степень свободы, энергии, входящие в формулу (5.164), могут быть выражены через соответствующие эквивалентные параметры, определяемые формулами (5.150). При этом выражение для k_{eff}^2 получим в виде

$$k_{eff}^2 = 1 / (1 + C_{el}^S / n^2 C_m), \quad (5.167)$$

где $C_m = C_m^E \cdot \Delta C / (C_m^E + \Delta C)$. Формула (5.167) особенно удобна для вычисления k_{eff} конкретных типов преобразователей.

5.6.1 Оптимизация эффективных коэффициентов связи

Обычно при неравномерной деформации $k_{eff} < k_m$. Это означает, что способность

пьезоэлектрического материала выполнять электромеханическое преобразование используется не полностью. Возникает вопрос о том, можно ли повысить эффективность электромеханического преобразования (увеличить k_{eff}) в неравномерно деформированных телах. Для ответа на этот вопрос рассмотрим формулировку (5.164) для k_{eff} .

Во-первых, в том случае, если изначально $\Delta W \neq 0$, k_{eff} можно повысить секционированием механической системы преобразователя в направлении электрического поля. При этом величиной ΔW можно пренебречь, если число секций $N \geq 6$ на половине волны деформации, как было показано в Разделе 5.5.2. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что в выражении (5.164) $\Delta W = 0$, и в результате в формуле (5.167) $C_m = C_m^E$.

Выражения (5.150) для энергий тела с одной механической степенью свободы представим в общем виде следующим образом:

$$W_{el}^S = C_{el}^S V^2 / 2 = \int_V w_{el}^S(\mathbf{r}) dV, \quad (5.168)$$

$$W_m^E = \xi_o^2 / 2C_m^E = \int_V w_m^E(\mathbf{r}) dV, \quad (5.169)$$

$$W_{em} = nV \xi_o / 2 = \int_V w_{em}(\mathbf{r}) dV. \quad (5.170)$$

Предположим теперь, что напряженность электрического поля является функцией координат

$$E_3(\mathbf{r}) = E_3(\mathbf{r}_o) \theta_E(\mathbf{r}), \quad (5.171)$$

где $\theta_E(\mathbf{r})$ — нормированное распределение электрического поля. Плотности энергии w_{el}^S , w_m^E и w_{em} , как функции электрического поля и деформации, с учетом выражений (5.166) и (5.171) представим в виде

$$w_{el}^S(\mathbf{r}) = w_{el}^S(\mathbf{r}_o) \theta_E^2(\mathbf{r}), \quad w_m^E(\mathbf{r}) = w_m^E(\mathbf{r}_o) \theta_S^2(\mathbf{r}), \quad w_{em} = w_{em}(\mathbf{r}_o) \theta_E(\mathbf{r}) \theta_S(\mathbf{r}). \quad (5.172)$$

Подставив плотности энергий под интегралы в (5.168)-(5.170) и полученные результаты в выражение (5.164), получим формулу для эффективного коэффициента связи в зависимости от распределений в пьезоэлементе деформации и электрического поля

$$k_{eff}^2 = \frac{w_{em}(\mathbf{r}_o) \int_V \theta_E(\mathbf{r}) \theta_S(\mathbf{r}) dV}{w_{el}^S(\mathbf{r}_o) \int_V \theta_E^2(\mathbf{r}) dV + w_m^E(\mathbf{r}_o) \int_V \theta_S^2(\mathbf{r}) dV}. \quad (5.173)$$

Рассмотрим следующие варианты распределений:

1. Равномерная деформация, однородное электрическое поле [$\theta_S(\mathbf{r}) = 1$, $\theta_E(\mathbf{r}) = 1$].

Примером являются пьезоэлементы в виде тонких колец и сферических оболочек с полностью покрытыми электродами внутренней и наружной поверхностями, которые совершают пульсирующие колебания. Выражение (5.173) в этом случае приобретает вид

$$k_{eff}^2 = \frac{w_{em}(\mathbf{r}_o)}{w_{el}^S(\mathbf{r}_o) + w_m^E(\mathbf{r}_o)}, \quad (5.174)$$

и в соответствии с формулой (5.91) $k_{eff} = k_m$.

2. Наиболее распространенный вариант произвольного распределения деформаций и однородного электрического поля [$\theta_S(\mathbf{r}) < 1$ при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_o$, $\theta_E(\mathbf{r}) = 1$]. Из выражения (5.173) следует, что $k_{eff} < k_m$.

3. Распределение деформаций произвольно. Распределение электрического поля повторяет распределение деформации [$\theta_E(\mathbf{r}) = \theta_S(\mathbf{r})$]. Подстановка $\theta_E(\mathbf{r}) = \theta_S(\mathbf{r})$ в выражение (5.173) приводит к соотношению (5.174) и, следовательно, $k_{eff} = k_m$.

Таким образом, эффективный коэффициент связи k_{eff} пьезоэлектрического тела при неравномерной деформации может быть увеличен (теоретически до соответствующего коэффициента связи материала k_m), если согласовать распределение электрического поля с распределением деформаций. Чтобы показать, как это условие может быть выполнено на практике, и дать ему физическое пояснение, обратимся к примерам.

Во-первых, рассмотрим продольно колеблющиеся стержни: с электродами на боковых поверхностях, с электродами на торцах и секционированные. Геометрия стержней и расположение электродов показаны на Рис. 5.8, а выражения для эквивалентных параметров приведены в Разделе 5.5.2. Подстановка эквивалентных параметров в формулу (5.167) приводит к следующим значениям k_{eff} :

$$k_{eff}^2 = \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{1 - k_{3i}^2}{k_{3i}^2} \right)^{-1} \quad (5.175)$$

для стержня с электродами на боковых поверхностях (при $i = 1$, поперечный пьезоэффект) и для секционированного стержня с числом секторов $N > 6$ ($i = 3$, продольный пьезоэффект);

$$k_{eff}^2 = 8k_{33}^2 / \pi^2 \quad (5.176)$$

для сплошного стержня с электродами на торцах (продольный пьезоэффект).

Таким образом, k_{eff} сплошного стержня с электродами на торцах меньше, чем у секционированного стержня. При использовании керамики PZT-4 $k_{eff}^2 = 0.40$ для сплошного стержня и $k_{eff}^2 = 0,45$ для секционированного, тогда как для материала (т.е. при равномерной деформации) $k_m^2 = 0.5$. Качественно с физической точки зрения эти различия объяснены в Разделе 5.5.2. Это один из примеров того, что эффективный коэффициент связи колеблющегося по длине стержня может быть увеличен путем рационального изменения распределения электрического поля, хотя в этом случае секционирование конструкции в основном преследовало другие цели. Рассмотрим примеры целенаправленной оптимизации коэффициентов связи.

5.6.2 Примеры оптимизации эффективных коэффициентов связи

5.6.2.1 Стержень, колеблющийся по длине, поперечный пьезоэффект.

Как показано в предыдущем разделе, максимальная величина эффективного коэффициента связи может быть достигнута при условии, что распределение напряженности рабочего электрического поля повторяет распределение деформации в пьезоэлементе. Вряд ли можно точно выполнить соотношение $\theta_E(x) = \theta_S(x)$ разумным образом в применяемых на практике пьезоэлементах за исключением тривиальных случаев равномерной деформации пульсирующих колец и сфер. Так, например, гипотетический вариант ступенчатого приближения распределения электрического поля к первой форме колебаний стержня, представленный на Рис. 5.12 (а), едва ли является осуществимым.

Однако близкие к оптимальным значения k_{eff} можно получить с помощью простого приближения электрическим полем к распределению деформаций, представленного на Рис. 5.12(б).

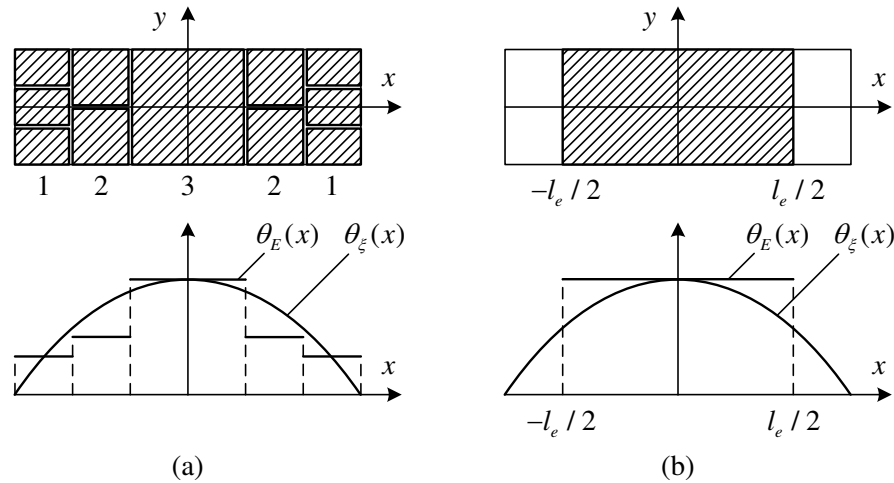


Рисунок 5.12: Стержни (пластины малой ширины) колеблющиеся по длине при различных конфигурациях электродов: (а) комбинированный из частей электрод, приводящий к ступенчатому распределению (части 1 и 2 соединены последовательно, затем соединены все электроды одного и того же знака), (б) части электрода вблизи торцов удалены.

Оно достигается путем удаления (или не нанесения при изготовлении пьезоэлемента) электродов с тех частей механической системы, которые подвергаются относительно небольшой деформации. Чтобы произвести количественный анализ результатов изменения конфигурации электродов, рассмотрим выражение (5.167) для k_{eff} . В этом выражении член

$$\frac{n^2 C_m^E}{C_{el}^S} = \frac{n^2}{C_{el}^S K_m^E} = \alpha_c \quad (5.177)$$

зависит от формы электродов. При условии, что становящиеся пассивными части механической системы остаются покрыты отделенными электродами, которые коротко замкнуты, эквивалентная податливость C_m^E остается прежней при изменении формы электродов. Этот вариант на практике мало реален, но он отличается наибольшей простотой анализа, а его погрешность по сравнению с другими вариантами исполнения невелика, как это будет видно из дальнейшего.

Если части электродов удалены с поверхностей ранее полностью поляризованного пьезоэлемента, то для этих частей потенциальная энергия должна быть вычислена при условии, что $D_3 = 0$ (на их поверхностях свободные заряды отсутствуют), и соответственно должна быть изменена величина эквивалентной гибкости.

Если же эти части не были покрыты электродами при изготовлении пьезоэлемента, то при оценке вклада деформации пассивных частей в общую потенциальную энергию механической системы следует применять модуль Юнга неполяризованной керамики.

В принципе, при строгом подходе, отмеченные поправки к потенциальным энергиям и соответствующие изменения эквивалентной гибкости должны быть учтены при изменениях формы электродов. Однако плотность потенциальной энергии w_{pot} рассматриваемых частей пьезоэлементов относительно невелика в силу их малых деформаций (именно по этой причине они подлежат исключению из электромеханического преобразования). Соответственно и поправки к значениям полных W_m^E и C_m^E оказываются не существенными. На этом основании в процессе анализа в этом разделе мы будем полагать значение C_m^E неизменным.

Часто не покрытые электродами части механической системы заменяют пассивным материалом с другими упругими свойствами. В этом случае порядок анализа остается тем же, но следует учитывать изменения C_m^E .

Коэффициент α_c связан с k_{eff} соотношением

$$k_{eff}^2 = \frac{\alpha_c}{1 + \alpha_c}, \quad (5.178)$$

и об изменении k_{eff} можно судить по поведению этого коэффициента. Или, учитывая неизменность эквивалентной гибкости C_m^E , по комбинации параметров n^2 / C_{el}^S . Введем обозначение α_{cm} для значения коэффициента α_c , которое соответствует максимальной величине эффективного коэффициента связи $k_{eff} = k_m$. Коэффициент

$$A = \frac{\alpha_c}{\alpha_{cm}} = \left(\frac{n^2}{C_{el}^S} \right) \cdot \left(\frac{n^2}{C_{el}^S} \right)_m^{-1} \quad (5.179)$$

характеризует насколько близко та или иная форма электрода приближает k_{eff} к его максимально возможному значению k_m . Учитывая формулу (5.167) для k_{eff} и соотношения (5.177)-(5.179), получим

$$k_{eff}^2 = \frac{A k_m^2}{1 - (1 - A) k_m^2}. \quad (5.180)$$

С помощью этого выражения можно определить значение k_{eff} для конкретной

формы электродов при условии, что известен соответствующий коэффициент A . При поперечном пьезоэффекте $k_m^2 < 0.15$ практически для всех составов пьезокерамики, и из соотношения (5.180) следует, что $k_{eff}^2 \approx A \cdot k_m^2$ с точностью примерно 5%.

В варианте стержня с электродами на боковых поверхностях в результате подстановки $w_{el}^{S_1}$ и w_{em} из (5.65) и (5.67) в соотношения (5.172) и интегрирования по объему стержня получим следующие общие выражения для коэффициента электромеханической трансформации n и емкости $C_{el}^{S_1}$:

$$n = \frac{d_{31} w}{s_{11}^E} \int_{-l/2}^{l/2} \theta_E(x) \theta_S(x) dx, \quad (5.181)$$

$$C_{el}^{S_1} = \frac{\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) w}{t} \int_{-l/2}^{l/2} \theta_E^2(x) dx. \quad (5.182)$$

С помощью этих выражений для распределения электрического поля, соответствующего соединению электродов, показанному на Рис. 5.12(a), получим $A = 0.95$, т.е. $k_{eff} = 0.97k_{31}$, что является почти максимально возможным значением по сравнению с $k_{eff} = 0.90k_{31}$ в случае однородного электрического поля. При форме электродов, показанной на Рис. 5.12(b),

$$\theta_E(x) = 1 \text{ при } |x| \leq l_e/2 \text{ и } \theta_E(x) = 0 \text{ при } |x| > l_e/2. \quad (5.183)$$

Соответствующие выражения для параметров n , $C_{el}^{S_1}$ и коэффициента A имеют вид

$$n = \frac{2wd_{31}}{s_{11}^E} \sin(\pi l_e/2l), \quad C_{el}^{S_1} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) w l_e / t, \quad (5.184)$$

$$A(l_e/l) = \frac{8l}{\pi^2 l_e} \sin^2(\pi l_e/2l). \quad (5.185)$$

График функции $A(l_e/l)$ представлен на Рис. 5.13. Из него следует, что максимальное значение k_{eff} можно получить путем удаления около 0.13 длины электродов с каждого конца стержня. При этом $A \approx 0.92$, т.е. почти такое же значение, как и для довольно сложной конфигурации электродов, представленной на Рис. 5.12 (a). Примечательно так же и то, что при $l_e = 0.5l$ эффективный коэффициент связи имеет такое же значение, что и при полной длине электродов.

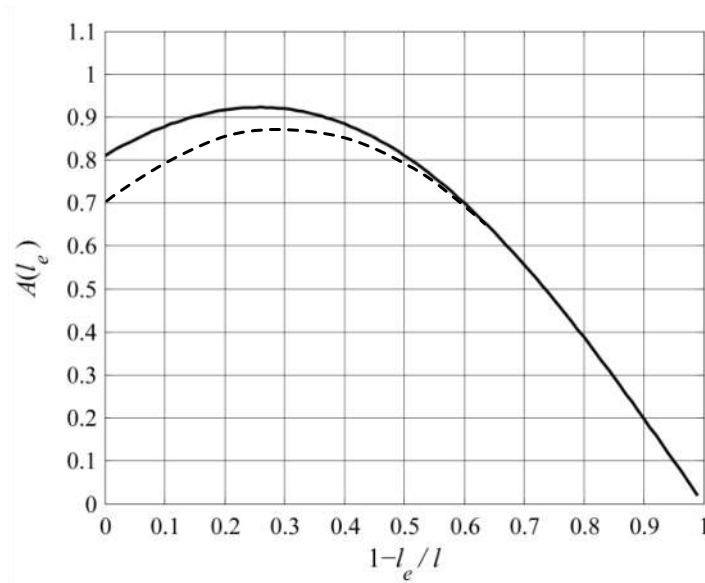


Рисунок 5.13: Иллюстрация зависимости k_{eff} от длины электрода, $A(l_e/l) \approx k_{eff}^2(l_e)/k_m^2$. Сплошная линия - для стержня при поперечном пьезоэффекте и для секционированного стержня при продольном пьезоэффекте. Пунктирная линия - для сплошного стержня со встроенными электродами при продольном пьезоэффекте.

В варианте сплошного стержня со встроенными электродами (Рис. 5.10) функция $A(l_e/l)$, полученная в результате аналогичного анализа для случая продольного пьезоэффекта, показана на Рис. 5.13 пунктирной линией. Если стержень секционирован на части длиной l_e , то зависимость $A(l_e/l)$ имеет ту же форму, что и в случае поперечного пьезоэффекта. Сравнение зависимостей для секционированных стержней и сплошных со встроенными электродами показывает, что при $l_e/l < 0.5$ секционирование не приводит к дальнейшему увеличению k_{eff} . Качественно это объясняется тем, что секции, расположенные близко к концам стержня, потребляют количество электрической энергии непропорционально большое по отношению к их вкладу в электромеханическое преобразование и тем самым вызывают уменьшение эффективного коэффициента связи.

Если рассматривать пьезоэлектрический преобразователь как механическую систему с несколькими степенями свободы, каждая из которых соответствует собственной форме колебаний, то максимизация k_{eff} для определенной формы колебаний делает эту форму изолированной, т. е. единственной электромеханически активной. Стоит отметить, что противоположное утверждение не справедливо, т.е. изолированной форме

колебаний не всегда соответствует максимальный k_{eff} . Так, например, в работе [8] рассмотрена форма электродов, которая показана на Рис. 5.14 и при которой распределение электрического поля может быть аналитически представлено следующим образом:

$$\theta_E(x, y) = 1 \text{ при } |y| \leq (w/2) \sin(\pi x/l), \quad (5.186)$$

и

$$\theta_E(x) = 0 \text{ при } |y| > (w/2) \sin(\pi x/l). \quad (5.187)$$

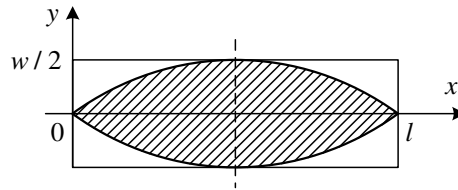


Рисунок 5.14: Форма электродов, которая приводит к изолированной основной форме колебаний $\theta(x) = \cos(\pi x/l)$.

Легко убедиться, что при таком распределении электрического поля все коэффициенты электромеханической трансформации, кроме соответствующего основной форме колебаний $\theta(x) = \cos(\pi x/l)$, равны нулю, что делает эту форму изолированной. Однако, оценка k_{eff} с использованием рассмотренной выше процедуры приводит в этом случае к значению $k_{eff} = 0.78k_{31}$ даже меньшему, чем при однородном электрическом поле.

Выводы, касающиеся оптимизации формы электродов, сделанные для пьезоэлемента в форме стержня, являются общими для пьезокерамических тел с неоднородным распределением деформаций. А именно, для увеличения k_{eff} пьезоэлементы следует секционировать в направлении силовых линий электрического поля, если деформации неоднородны в этом направлении и распределение электрического поля следует приближать к распределению деформаций. Простейшим способом увеличения k_{eff} является удаление электродов с частей пьезоэлектрического тела, которые испытывают относительно малые деформации.

Часто (в особенности при проектировании гидрофонов) оказывается полезнее уменьшить количество пьезоэлектрического материала в механической системе преобразователя без потерь в k_{eff} , чем получить максимально возможный коэффициент связи.

Так из графика на Рис. 5.13 следует, что можно заменить пассивным материалом до половины длины стержня без потерь в k_{eff} . Еще более значительное сокращение объема пьезокерамики может быть достигнуто в механических системах, которые подвергаются деформации изгиба. Это будет показано в следующем разделе.

5.6.2.2 Стержни и круглые пластины при деформации изгиба

В стержнях и круглых пластинах, представленных на Рис. 5.15, существует распределение деформаций по толщине и по длине или по радиусу.

Поэтому значения k_{eff} для пьезоэлементов при однородном электрическом поле относительно меньше, чем в случае одномерного распределения деформаций, и выигрыш за счет оптимизации формы электродов может быть более значительным. Вначале рассмотрим трехслойный стержень со свободно опертыми концами (Рис. 5.15 (а)) при первой собственной форме изгибных колебаний. В этом случае

$$\xi_z(x) = \xi_o \cos(\pi x / l), \quad (5.188)$$

$$S_x(x, z) = -z(\partial^2 \xi_z / \partial^2 x) = z \xi_o (\pi / l)^2 \cos(\pi x / l). \quad (5.189)$$

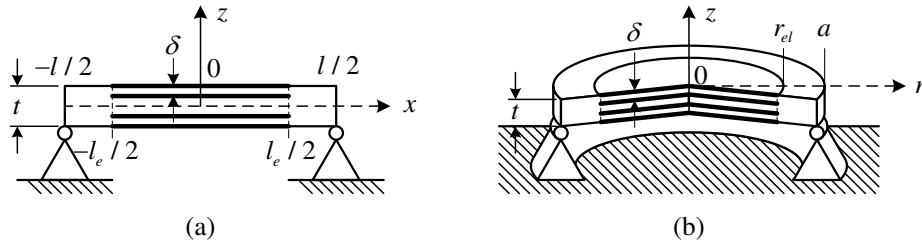


Рисунок 5.15: Трехслойные стержень (а) и круглая пластина (б), испытывающие деформации изгиба.

Напряженность электрического поля в объеме стержня представим следующим образом:

$$E_3(x, z) = (V / \delta) \theta_{Ex}(x) \theta_{Ez}(z), \quad (5.190)$$

где

$$\theta_{Ex}(x) = 1 \text{ в } |x| \leq l_e / 2 \text{ и } \theta_{Ex} = 0 \text{ в } |x| > l_e / 2, \quad (5.191)$$

$$\theta_{Ez}(z) = 1 \text{ в } |z| \geq t / 2 - \delta \text{ и } \theta_{Ez}(z) = 0 \text{ в } |z| \leq t / 2 - \delta. \quad (5.192)$$

Здесь l_e и δ — длина и толщина активных пьезоэлектрических слоев, которые электрически соединены параллельно. Значения $l_e = l$ и $\delta = t/2$ соответствуют стержню, выполненному полностью из активного материала. Подставив выражения для плотностей энергии $w_{el}^{S_1}$ и w_{em} из (5.65) и (5.67) в (5.172) и вычислив интегралы (5.168)-(5.170) по объему стержня, получим

$$n(\delta, l_e) = \frac{wd_{31}}{s_{11}^E} \frac{(t-\delta)\pi}{l} \sin \frac{\pi l_e}{2l}, \quad C_{el}^{S_1} = \frac{2\varepsilon_{33}^T(1-k_{31}^2)wl_e}{\delta}. \quad (5.193)$$

Коэффициент $\alpha_c(\delta, l_e)$ нормированный к его значению при $\delta = t/2$ и $l_e = l$ представим в виде

$$\frac{\alpha_c(\delta, l_e)}{\alpha_c(t/2, l)} = A(l_e)A(\delta), \quad (5.194)$$

где $A(l_e)$ выражена формулой (5.185) и изображена на Рис. 5.13 и

$$A(\delta) = 8 \frac{(1-\delta/t)^2 \delta}{t}. \quad (5.195)$$

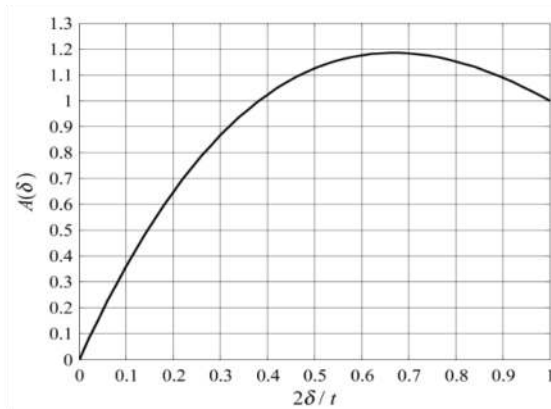


Рисунок 5.16: Зависимость эффективного коэффициента связи от относительной толщины пьезоэлектрического слоя.

Коэффициент $A(\delta)$ показан на Рис. 5.16 как функция от δ/t . Эта функция имеет максимум при $\delta = t/3$ и при $\delta = t/5$ имеет такое же значение, как и при $\delta = t/2$. Обобщая результаты, представленные на Рис. 5.13 и 5.16, приходим к выводу, что максимальное значение k_{eff} можно получить при $\delta = t/3$ и $l_e = 0.74l$. При этом $k_{eff} = 0.91k_{31}$ и объем активного материала составляет половину от общего объема стержня. Отметим, что

в случае, если $\delta = t/5$ и $l_e = 0.5l$ ($\tilde{V}_{active} = 0.2\tilde{V}_{total}$), эффективный коэффициент связи имеет такое же значение, как и для стержня, выполненного полностью из активного материала.

Электромеханическое преобразование в круглой осесимметричной пластине (Рис. 5.15 (b)) при изгибных колебаниях рассмотрено в Разделе 2.6.3. Для круглой пластины выражение, аналогичное выражению (5.194) для стержня, имеет вид

$$\frac{\alpha(\delta, r_{el})}{\alpha(t/2, a)} = A(\delta)A(r_{el}). \quad (5.196)$$

Функция $A(\delta)$ та же, что задана формулой (5.195) и представлена на Рис. 5.16. Функция $A(r_{el})$ зависит от граничных условий. Она приведена на Рис. 5.17 для пластин с опертым и свободным контуром. В том случае, если пластины полностью изготовлены из пьезокерамики, $k_{eff} = 0.9k_{31}$ для опертой и $k_{eff} = 0.8k_{31}$ для свободной пластины. Те же значения k_{eff} имеет при $r_{el} = 0.8a$ и $\delta = t/5$ ($\tilde{V}_{active} = 0.25\tilde{V}_{total}$) для опертой пластины и при $r_{el} = 0.58a$, $\delta = t/5$ ($\tilde{V}_{active} = 0.13\tilde{V}_{total}$) для свободной пластины. Максимальные значения k_{eff} : для опертой пластины $k_{eff} = 0.98k_{31}$ (при $r_{el} = 0.9a$, $\delta = t/3$) и $k_{eff} = 0.92k_{31}$ (при $r_{el} = 0.75a$, $\delta = t/3$) для свободной пластины.

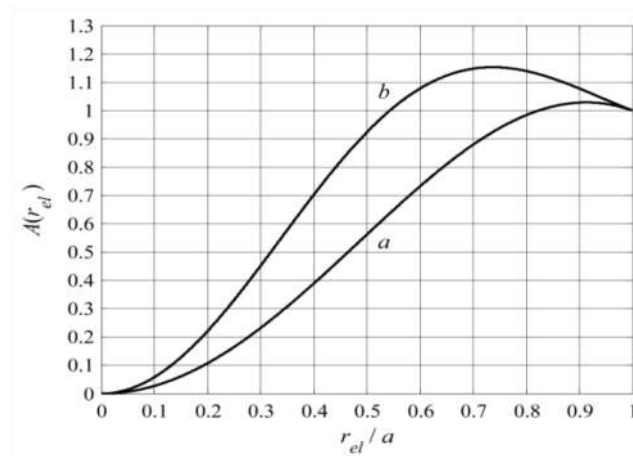


Рисунок 5.17: Функция $A(r_{el}) \approx k_{eff}^2(r_{el})/k_{eff}^2(a)$, характеризующая зависимость k_{eff} от радиуса электродов круглой пластины: (a) со свободно опертым контуром, (b) со свободным контуром.

Следует отметить, что все численные результаты, связанные с оптимизацией k_{eff} , получены в предположении, что упругие свойства пассивных частей механической

системы имеют примерно такие же значения, что и активных. В случае если упругие свойства активной и пассивной частей существенно различаются, механическую систему следует рассматривать как неоднородную, и численные результаты могут измениться, хотя качественные выводы при этом остаются в силе. Параметры неоднородных механических систем рассмотрены в Главе 9.

Проведенный анализ показывает, что аналитические выражения (5.164) для эффективного коэффициента связи k_{eff} и его модификации (5.167), в основе которых лежит понятие о внутренней энергии пьезоэлектрического тела при неравномерной деформации, позволяют успешно осуществлять оптимизацию электромеханического преобразования энергии.

Следует отметить, что оптимизация эффективного коэффициента связи, несомненно, желательна для приемников, поскольку их удельная чувствительность пропорциональна этому коэффициенту (см. формулу (3.181)). Что касается излучателей, целесообразность его оптимизации может вызывать сомнения, потому что уменьшение количества активного материала приводит к уменьшению эквивалентной электромеханической силы, которая производит колебания. Это вызывает необходимость увеличивать напряженность электрического поля для получения того же эффекта. Поэтому подобная оптимизация приемлема только в том случае, если преобразователь имеет достаточный запас электрической прочности.

5.6.3 Влияние электромеханически пассивных элементов на эффективный коэффициент связи

Конструкции преобразователей могут содержать электромеханически пассивные элементы, которые необходимы для их работы. Типичными примерами в этом отношении является кабель (имеющий емкость C_c) и армирующий механический элемент (с эквивалентной жесткостью K_{ad}), представленный на Рис. 5.18, на котором схематически изображен армированный секционированный стержневой преобразователь.

Такие пассивные элементы дают эффект увеличения электрической энергии, потребляемой преобразователем, и дополнительной энергии деформации W_{mad} при той же скорости колебаний преобразователя. При этом полные поставляемая электрическая и

производимая механическая энергии приобретают вид

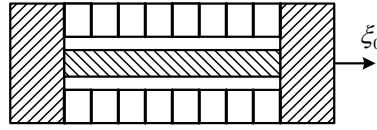


Рисунок 5.18: Секционированный стержень с центральным армирующим болтом.

$$W_{el} = W_{el}^S + W_{cable} = \frac{V^2}{2} (C_{el}^S + C_c), \quad (5.197)$$

где W_{el} — электрическая энергия, потребляемая заторможенным преобразователем, и

$$W_{mech} = W_m^E + W_{mad} = \frac{\xi_o^2}{2} (K_m^E + K_{ad}), \quad (5.198)$$

где W_{mech} — полная энергия деформации и W_m^E — полезная механическая энергия, которая остается такой же, как и без пассивных элементов. Кроме того, сохраняется соотношение

$$W_{em} = \frac{1}{2} V \xi_o n = W_{mech}. \quad (5.199)$$

Полную электрическую энергию, подводимую к преобразователю, представим в виде

$$W_{etotal} = W_{el} + W_{mech} = W_{el}^S + W_{cable} + W_m^E + W_{mad}. \quad (5.200)$$

Баланс энергий, соответствующий приведенным выше уравнениям энергий, приводит к эквивалентной схеме, представленной на Рис. 5.19.

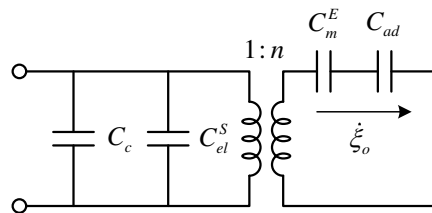


Рисунок 5.19: Эквивалентная схема преобразователя с пассивными элементами.

После подстановки выражений для энергий в базовое определение (5.164) получим следующий результат для эффективного коэффициента связи $(k_{eff})_p$, который учитывает наличие пассивных элементов,

$$(k_{eff}^2)_p = \frac{W_{mech}}{W_{e\,total}} = \frac{\xi_o^2 (K_m^E + K_{ad})}{V^2 (C_{el}^S + C_c) + \xi_o^2 (K_m^E + K_{ad})}. \quad (5.201)$$

Из сравнения выражений (5.198) и (5.199) следует, что

$$\frac{V}{\xi_o} = \frac{K_m^E + K_{ad}}{n}. \quad (5.202)$$

Применяя соотношения (5.201) и (5.202), получим формулу для эффективного коэффициента связи $(k_{eff}^2)_p$ в виде

$$(k_{eff}^2)_p = \frac{\alpha_c}{\alpha_c + [1 + (K_{ad} / K_m^E)][1 + (C_c / C_{el}^S)]}, \quad (5.203)$$

где α_c определено выражением (5.177). Напомним, что без пассивных элементов коэффициент связи имеет значение $k_{eff}^2 = \alpha_c / (\alpha_c + 1)$.

5.7 Уравнения колебаний пьезокерамических тел в обобщенных координатах

5.7.1 Выражения для входящих энергий.

Отметим, что вывод уравнений колебаний пьезокерамических тел в обобщенных координатах был в упрощенном виде произведен в Разделе 1.6. Особенности внутренней энергии неравномерно деформируемых пьезокерамических тел при этом не были учтены. Здесь вывод уравнений представим в общем виде.

Для вывода уравнений колебаний пьезокерамического тела в обобщенных координатах в виде уравнений Эйлера (4.1) уже известные выражения для составляющих внутренней энергии тела W_{int} следует выразить в явном виде через обобщенные координаты, как это было сделано в Разделе 4.5 для тела, изготовленного из изотропного пассивного материала. Для этого целесообразно использовать ту же систему опорных функций $\theta_i(\mathbf{r})$, которая была бы выбрана для решения задачи о свободных колебаниях пассивного тела той же конфигурации. Таким образом, смещения в пьезокерамическом теле представим в виде разложение в ряд (4.231)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \theta_i(\mathbf{r}). \quad (5.204)$$

Коэффициенты $\xi_i(t)$ этого ряда и электрическое напряжение $v(t)$ на входе преобразователя образуют систему обобщенных координат.

Выражение для W_{kin} не отличается от аналогичного выражения (4.232) для пассивного тела, а именно,

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M_{il} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_l, \quad M_{il} = \int_{\tilde{V}} m_{\Delta} \theta_i(\mathbf{r}) \theta_l(\mathbf{r}) d\tilde{V}, \quad (5.205)$$

где m_{Δ} — удельная масса элемента объема, как и в уравнении (4.39), M_{il} — эквивалентные массы. Они являются собственными массами для форм колебаний θ_i при $l = i$ и взаимными массами, характеризующими инерционное взаимодействие между формами колебаний θ_i и θ_l при $l \neq i$.

Составляющие внутренней энергии выразим через обобщенные координаты для варианта, в котором $\mathbf{E} \uparrow \uparrow \mathbf{q}_3$ ($E = E_3$). Выражения для энергий при $E = E_2$ будут отличаться только применением соответствующих этому варианту постоянных пьезокерамики.

Электрическая энергия $W_{el}^{S_i}$ равна [см. (5.140)]

$$W_{el}^{S_i} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{V}} \varepsilon_{33}^{S_i} E_3^2 d\tilde{V} = \frac{1}{2} C_{el}^{S_i} v^2, \quad (5.206)$$

где

$$C_{el}^{S_i} = (1/v^2) \int_{\tilde{V}} \varepsilon_{33}^{S_i} E_3^2 d\tilde{V} \quad (5.207)$$

это емкость заторможенного пьезоэлемента, $\varepsilon_{33}^{S_i}$ — значение $C_{el\Delta}^{S_i}$ в Таблице 5.3, которое соответствует определенным граничным условиям. Рассматривая $W_{el}^{S_i}$ в реальном пьезокерамическом теле, следует учитывать энергию диэлектрических потерь, которая количественно характеризуется электрической добротностью Q_e или $\tan \delta_e = 1/Q_e$. Таким образом энергия электрических потерь равна

$$W_{eL} = W_{el}^{S_i} / Q_e = W_{el}^{S_i} \tan \delta_e \quad (5.208)$$

(см. Раздел 1.4). В уравнениях колебаний диэлектрические потери можно учесть либо придавая емкости значение комплексной величины $\bar{C}_{el}^{S_i} = C_{el}^{S_i} (1 - j \tan \delta_e)$, либо вводя в рассмотрение параллельное емкости сопротивление электрических потерь R_{el} в

соответствии с формулами

$$\dot{W}_{eL} = v^2 / R_{eL} = i_{eL} v, \quad (5.209)$$

$$R_{eL} = 1 / \omega C_{el}^{S_i} \tan \delta_e. \quad (5.210)$$

Электромеханическая энергия W_{em} (5.141)

$$W_{em} = \int_{\tilde{V}} w_{em} d\tilde{V} = \frac{1}{2} v \sum_{i=1}^{\infty} n_i \xi_i, \quad (5.211)$$

где w_{em} — плотность электромеханической энергии при соответствующих граничных условиях, и n_i — коэффициент электромеханической трансформации для формы колебаний $\theta_i(r)$. Его можно получить, воспользовавшись соотношением (5.35)

$$\delta W_{em} = v \sum_{l=1}^{\infty} n_l \delta S_l.$$

Таким образом, коэффициент электромеханической трансформации для формы колебаний $\theta_i(r)$ получим в виде

$$n_i = \frac{1}{v} \frac{\partial \dot{W}_{em}}{\partial \dot{\xi}_i}. \quad (5.212)$$

Примечательно, что выражения для электромеханической энергии и коэффициента трансформации справедливы, если электроды разделены на электрически изолированные секции, которые соединены в разной полярности, или если активной является только часть объема пьезоэлемента (например, с целью оптимизации эффективного коэффициента связи). В этих случаях при интегрировании в уравнении (5.211) знаки электрического поля внутри секций должны быть изменены на противоположные, или электрическое поле в пассивных частях объема должно быть приравнено к нулю.

Механическую энергию W_m^E формально можно представить по аналогии с W_{pot} в виде выражения (4.233). Но плотность энергии пьезокерамического тела w_{mch}^E зависит от электрических граничных условий (в базовом варианте при $E = 0$). Таким образом,

$$W_m^E = \int_{\tilde{V}} w_m^E d\tilde{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} K_{il}^E \xi_i \xi_l, \quad (5.213)$$

где K_{il}^E — эквивалентные жесткости ($1 / K_{il}^E = C_{il}^E$ — эквивалентные податливости): собственные жесткости для форм колебаний θ_i при $l = i$ и взаимные жесткости,

характеризующие упругое взаимодействие между формами колебаний θ_i и θ_l при $l \neq i$. Если только часть механической системы выполнена из пьезокерамики, то для пассивной части объема под знаком интеграла следует принимать значение w_{mch} для пассивного материала при тех же механических граничных условиях. Однако, обозначения полной эквивалентной жесткости и энергии в этом случае будем сохранять с верхним индексом E , а именно K_{il}^E и W_m^E , чтобы они отличались от аналогичных величин для тела, которое полностью изготовлено из пассивного материала. При рассмотрении колебаний реальных пьезокерамических тел необходимо учитывать энергию механических потерь. Это может быть сделано путем введения в уравнения либо комплексной величины жесткостей $\bar{K}_{il}^E = K_{il}^E (1 + j \tan \delta_m)$, либо сопротивления механических потерь r_{mLi} , которые определим с помощью соотношения

$$\dot{W}_{mL} = \sum_{i=1}^{\infty} r_{mLi} \dot{\xi}_i^2. \quad (5.214)$$

Здесь (см. Раздел 1.4)

$$\dot{W}_{mL} = \dot{W}_m^E / Q_m = \dot{W}_m^E \tan \delta_m \quad (5.215)$$

(Q_m и δ_m - механическая добротность и угол механических потерь) и

$$r_{mLi} = 1 / \omega C_{ii}^E Q_m = K_{ii}^E / \omega Q_m. \quad (5.216)$$

Величина ΔW пропорциональна S_i^2 и, следовательно, ξ_i^2 , что следует из выражения (5.142). Мы будем рассматривать эту величину как механическую энергию (хотя ее в равной степени можно классифицировать как электрическую энергию, потому что величина $e_{3i} S_i$ имеет размерность заряда) и представим ее в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Delta K_{il} \xi_i \xi_l, \quad (5.217)$$

где ΔK_{ii} ($\Delta C_{ii} = 1 / \Delta K_{ii}$) соответствуют формам колебаний θ_i , а ΔK_{il} характеризуют взаимодействие между формами колебаний θ_i и θ_l , которое может возникнуть вследствие неравномерности электромеханического преобразования.

В число энергий внешних воздействий кроме энергии W_e механических воздействий теперь надо включить энергию электрического источника W_{el} в режиме электромеханического преобразования. Поток электрической энергии, подводимой к

преобразователю, составляет $\dot{W}_{el} = v i$. Так как в случае электромеханического преобразования $W_{el} = W_{int}$ и, согласно формуле (5.144), $W_{int} = W_e^{S_i} + W_{em}$, получим

$$\dot{W}_{el} = v i = \dot{W}_e^{S_i} + \dot{W}_{em} = C_{el}^{S_i} v \dot{v} + v \sum_{l=1}^{\infty} n_l \dot{\xi}_l, \quad (5.218)$$

и

$$\frac{\partial \dot{W}_{el}}{\partial \dot{\xi}_l} = v \sum_{l=1}^{\infty} n_l. \quad (5.219)$$

Потери электрической энергии можно учесть путем подстановки величины W_{eL} по формуле (5.209) в правую часть уравнения (5.218). После преобразования в комплексную форму уравнение (5.218) примет вид

$$I = j\omega C_{el}^{S_i} V + V / R_{eL} + \sum_{l=1}^{\infty} n_l U_l. \quad (5.220)$$

При механоэлектрическом преобразовании будем рассматривать режим холостого хода (с разомкнутыми электродами). Наличие электрической нагрузки может быть учтено с помощью теоремы Тэвенина (см. Раздел 1.5.3).

5.7.2 Вывод уравнений колебаний

В режиме электромеханического преобразования Лагранжиан системы, которую представляет собой пьезокерамическое тело, представим в виде

$$L = W_{kin} - W_{int} + W_{el} - W_L, \quad (5.221)$$

где W_L — энергия, переходящая в механическую нагрузку (в частности, энергия акустического излучения W_{ac}). Эта энергия в общем виде представлена выражением (4.240) и через импеданс нагрузки Z_L выражением (4.243).

Уравнения Эйлера (4.1) колебаний пьезоэлектрического тела в обобщенных координатах имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \frac{\partial W_{int}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial (W_{el} - W_L)}{\partial \xi_i} = 0. \quad (5.222)$$

После подстановки в уравнения Эйлера W_{kin} по формуле (5.205), W_{int} из (5.144) с учетом выражений (5.212) - (5.217), W_L по уравнению (4.240) и выражения (5.218) для

W_{el} , получим уравнения колебаний, которые аналогичны уравнениям (4.250) для пассивной механической системы. Здесь, как и в уравнениях (4.251), введены сопротивления, учитывающие энергию механических потерь

$$M_{ii}\ddot{\xi}_i + (K_{ii}^E + \Delta K_{ii})\dot{\xi}_i + r_i\dot{\xi}_i + \sum_{l \neq i}^{\infty} [M_{li}\ddot{\xi}_l + (K_{li}^E + \Delta K_{li})\dot{\xi}_l] = vn_i - f_{Li}. \quad (5.223)$$

Отличия уравнений колебаний пьезокерамического тела от аналогичных уравнений для пассивного тела состоят в том, что силы $f_i = vn_i$, вызывающие колебания, имеют электромеханическое происхождение, и существует особенность в определении величины эквивалентной жесткости. Для унификации уравнений (5.223) с уравнениями (4.254) для пассивных тел преобразуем их в комплексную форму и введем обозначения для механических импедансов пьезокерамических тел, аналогичные выражениям в (4.253). А именно:

$$\begin{aligned} j\omega M_{ii} + (K_{ii}^E + \Delta K_{ii}) / j\omega + r_i &= Z_{mii}^E, & j\omega M_{li} + (K_{li}^E + \Delta K_{li}) / j\omega &= Z_{mli}^E, \\ Z_{mii}^E + \sum_{l \neq i}^{\infty} (U_l / U_i) Z_{mli}^E &= Z_{mi}^E. \end{aligned} \quad (5.224)$$

В результате уравнения (5.223) приобретают вид

$$\left[Z_{mii}^E + Z_{L,ii} + \sum_{l \neq i}^{\infty} (U_l / U_i) (Z_{mli}^E + Z_{L,li}) \right] U_i = Vn_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5.225)$$

Вместе с уравнением (5.220) для обобщенной электрической координаты эти уравнения образуют полную систему уравнений, описывающих колебания пьезокерамического тела в режиме электромеханического преобразования (в режиме передачи).

В режиме механоэлектрического преобразования с разомкнутыми электродами

$$L = W_{kin} - W_{int} + W_m, \quad (5.226)$$

где W_m — энергия, сообщаемая внешним механическим источником (в частности, энергия, сообщаемая акустическим полем). При этом действие на поверхность преобразователя производит эквивалентная сила F_m . Энергия и эквивалентная сила выражены в общем виде формулами (4.239). Исходя из соотношений (5.52), из которых следует, что $w_{int} = \underline{w}_m^E + \underline{w}_{me}$ и $\underline{w}_{me} = \underline{w}_{el}^{S_i}$, в варианте механоэлектрического преобразования величину полной внутренней представим в виде

$$W_{int} = \underline{W}_m^E + \Delta W + \underline{W}_{em}, \quad \underline{W}_{em} = \underline{W}_e^{S_i}, \quad (5.227)$$

где в выражениях для \underline{W}_{em} и $\underline{W}_e^{S_i}$ величины E_3 и V следует заменить на E_{3oc} и V_{oc} , соответственно. Уравнения Эйлера для механических обобщенных скоростей в комплексной форме получим помощью такой же процедуры, что и в варианте электромеханического преобразования. В результате получим

$$\left[Z_{mii}^E + Z_{Lii} + \sum_{l \neq i} (U_l / U_i)(Z_{mli}^E + Z_{Lli}) \right] U_i + V_{oc} n_i = F_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5.228)$$

Уравнение для электрической координаты V_{oc} выведем непосредственно из соотношения $\dot{W}_{em} = \dot{W}_e^{S_i} + \dot{W}_{el}$ с учетом выражений (5.210) и (5.213). В результате

$$V_{oc} = Z_e^{S_i} \sum_{i=1}^{\infty} U_i n_i, \quad (5.229)$$

где

$$Z_e^{S_i} = 1 / Y_e^{S_i}, \quad Y_e^{S_i} = j\omega C_e^{S_i} + 1 / R_{eL}. \quad (5.230)$$

Уравнения (5.228) и (5.229) обеспечивают решение задачи расчета преобразователя, работающего в механоэлектрическом режиме (в режиме приема). После подстановки V_{oc} в соответствии с формулой (5.229) в уравнения (5.228), получим следующую систему уравнений для определения обобщенных скоростей

$$\left[Z_{mii}^E + Z_{Lii} + Z_{el}^{S_i} n_i^2 + \sum_{l \neq i} (U_l / U_i)(Z_{mli}^E + Z_{Lli} + Z_{el}^{S_i} n_l n_i) \right] U_i = F_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5.231)$$

Системы уравнений (5.220) и (5.225) для электромеханического и (5.229), (5.231) для механоэлектрического преобразования могут быть получены из электромеханической схемы с соответствующими значениями ее компонентов, представленной на Рис. 5.20. В этом легко убедиться, применив общие правила расчета электрических цепей. Если поступает электрическая энергия, переключатель в схеме должен быть установлен в положение *EM*. При отсутствии внешней силы следует положить $F_L = 0$. Если энергия поступает с механической стороны, при отсутствии электрической нагрузки (в режиме холостого хода), переключатель должен быть установлен в положение *ME*. Внутреннее сопротивление источника механической энергии представлено в схеме импедансом Z_{Li} . В

том случае, если преобразователь является электроакустическим, Z_{Li} представляет собой импеданс излучения, который следует включить в эквивалентную схему для обоих режимов работы. В режиме EM он представляет собой нагрузку. В режиме ME импеданс излучения представляет собой внутреннее сопротивление акустического поля как источника механической энергии с «акустомеханической» силой $F_i = F_{eqvi}$ (см. определение в Главе 1). Подробный анализ параметров акустического поля для преобразователей различных типов будет проведен в Главе 6.

5.7.3 Эквивалентные электромеханические схемы

Эквивалентная электромеханическая схема на Рис. 5.20 представляет собой визуализацию уравнений, описывающих колебания пьезокерамического тела при различных воздействиях. Хотя эквивалентные схемы несут ту же информацию, что и уравнения, из которых они получены, достоинством их применения является, в частности, то, что это позволяет рассматривать преобразователи и электрические устройства, совместно с которыми они работают, единым образом.

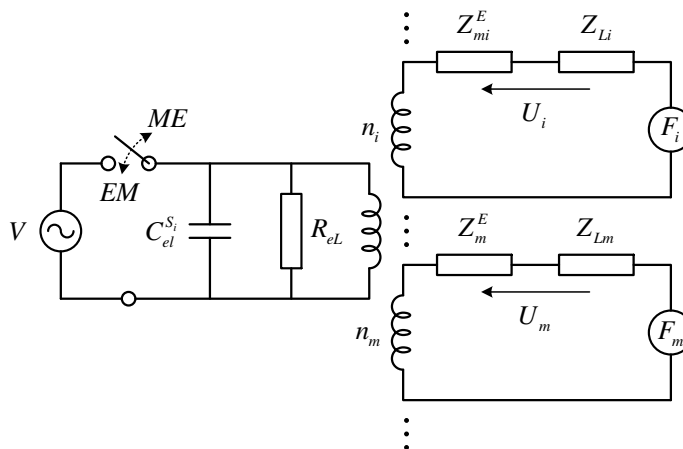


Рисунок 5.20: Эквивалентная электромеханическая схема преобразователя (общий случай)

До сих пор уравнения колебаний пьезокерамического тела в обобщенных координатах были представлены в наиболее общем виде уравнений (5.225) и (5.231). Они включают в себя взаимные импедансы $Z_{m mi}^E$, $Z_{L mi}$ и $Z_{el}^{S_i} n_m n_i$, которые связывают друг с другом контуры эквивалентной схемы, соответствующие формам колебаний. Это вызвано особенностью используемого метода, а именно тем, что в качестве системы опорных

функций выбраны собственные формы колебаний однородной изотропной механической системы, имеющей такую же форму и при таких же граничных условиях, что и рассматриваемое тело. При этом не учтены особенности реального объекта, такие как анизотропия свойств и наличие пьезоэффекта и механических нагрузок. Однако в большинстве случаев взаимодействия между уравнениями (контурами схемы) оказываются незначительными, так что либо можно ими пренебречь, либо их легко учесть. В первом случае уравнения колебаний (контуров схем) можно рассматривать в качестве независимых. Это особенно оправдано по отношению к преобразователям, которые работают в частотных диапазонах вокруг резонансных частот, соответствующих опорным формам колебаний. В этом случае эквивалентная схема упрощается до формы, представленной на Рис. 5.21, где эквивалентные податливости ($C_{ii}^E = 1/K_{ii}^E$) и массы (M_{ii}) представлены в виде емкостей и индуктивностей (как элементы, которые в электрических схемах также связаны с потенциальной и кинетической энергиями).

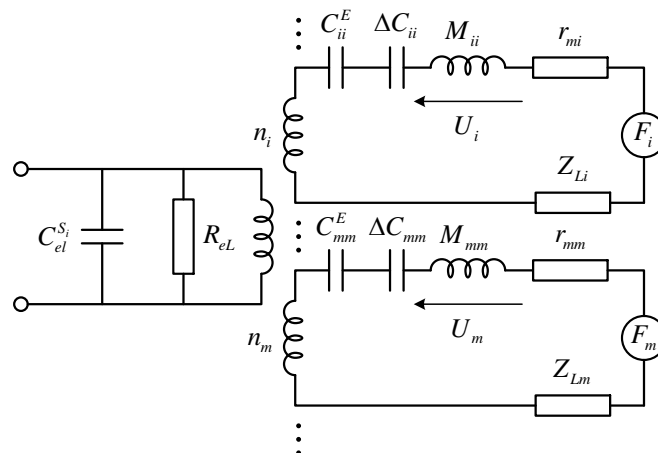


Рисунок 5.21: Эквивалентная электромеханическая схема преобразователя для случая, в котором взаимодействием между контурами можно пренебречь.

Некоторые из коэффициентов электромеханической трансформации n_i могут обращаться в ноль. Это означает, что соответствующие формы колебаний (контуров эквивалентной схемы) не имеют прямой связи с электрической стороной, т.е. колебания в них нельзя напрямую возбудить электрически, а механическое возбуждение не производит к прямому эффекту на электрическом выходе (они соответствуют пассивным формам колебаний). Однако некоторые эффекты на выходе могут возникать вследствие

взаимодействия между пассивными и активными формами колебаний.

Процедура вывода уравнений движения системы с бесконечным числом степеней свободы применима без каких-либо изменений к случаю, в котором число степеней свободы ограничено. В этом случае в системе уравнений (среди контуров эквивалентной схемы) остаются только те, которые соответствуют рассматриваемым степеням свободы. Для одной механической степени свободы результат будет таким же, как и в Разделе 1.6.1.

Рассмотрим примеры применения уравнений колебаний и соответствующих им эквивалентных схем в ряде широко применяемых частных случаев.

5.7.4 Примеры применения уравнений колебаний в обобщенных координатах

5.7.4.1 Уравнения колебаний пьезокерамических стержней

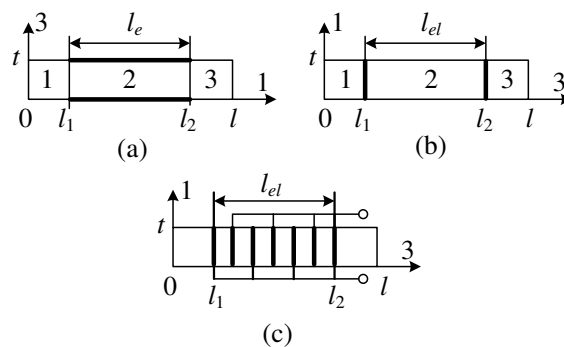


Рисунок 5.22: Преобразователи в форме стержня с неполными электродами: а) поперечный пьезоэффект, б) продольный пьезоэффект, сплошной стержень; в) продольный пьезоэффект, секционированный стержень.

Колебания стержня как системы с одной степенью свободы были рассмотрены в Разделе 2.4 в предположении, что концы стержня свободны от нагрузок, весь объем стержня заключен между однополярными электродами, а в случае продольного пьезоэффекта стержень секционирован и количество секций достаточно для того, чтобы считать, что электрическое поле вдоль стержня постоянно. В Разделах 5.5.2.1 и 5.6.2.1 стержни, колеблющиеся в первой собственной форме, приведены в качестве примеров для иллюстрации влияния неравномерной деформации на эффективный коэффициент связи. В этом разделе колебания стержней, которые представлены на Рис. 5.22, рассмотрим при

более общих предположениях.

Вначале предположим, что концы стержней не нагружены, активными являются отрезки стержней длиной l_e , расположенные симметрично относительно среднего поперечного сечения между координатами l_1 и l_2 . В качестве системы опорных функций выберем систему собственных форм колебаний задачи о свободных колебаниях однородного стержня $\theta_i = \cos(i\pi x/l)$. При этом смещения и деформации в стержне будут выражены следующим образом:

$$\xi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \theta_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \cos(i\pi x/l), \quad (5.232)$$

$$S(x) = \xi'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (i\pi/l) \sin(i\pi x/l). \quad (5.233)$$

(Знак минус в формуле для деформации учитывает правило знаков, согласно которому деформация является отрицательной в случае, если смещение приводит к сжатию.)

Эквивалентные параметры стержня M_{mi} , $C_e^{S_i}$, n_i , K_{mi}^E и ΔK_{mi} определим в соответствии с формулами (5.205), (5.207), (5.212), (5.213) и (5.217), используя в них выражения (5.65)-(5.67) для плотностей энергии

$$\varepsilon_{33}^{S_i} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{3i}^2), \quad w_m^E = S_i^2 / 2s_{ii}^E, \quad w_{em} = (d_{3i} / 2s_{ii}^E) E_3 S_i, \quad (5.234)$$

где $i = 1$ для поперечного и $i = 3$ для продольного пьезоэффекта.

В результате получим следующие значения эквивалентных параметров.

Эквивалентные массы для всех вариантов стержней: $M_{00} = M$ — масса, соответствующая движению стержня как единого целого (без деформации); $M_{ii} = M/2$ где $M = \rho S_{cs} l$ — полная масса стержня; $M_{mi} = 0$ в силу однородности стержня.

При $l_e \neq l$ и при поперечном пьезоэффекте (Рис. 5.22 (а))

$$C_e^{S_1} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) w l_e / t, \quad (5.235)$$

и при продольном пьезоэффекте (Рис. 5.22 (с))

$$C_e^{S_3} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) w t / l_e = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) N^2 w t / l_e, \quad (5.236)$$

где N — число отрезков в пределах длины l_e .

При определении значений эквивалентной жесткости K_{mi}^E следует помнить, что

величина постоянной упругости керамики в пределах участков 1 и 3, которые находятся вне объема, ограниченного активными электродами, зависит от того, поляризована керамика на этих участках или нет. Если нет, то это должна быть постоянная упругости керамики как пассивного материала. Если она была поляризована, но электроды впоследствии были удалены, то это должно быть s_{ii}^D , так как на поверхностях этих участков нет свободных зарядов. Наконец, если электроды на этих участках присутствуют и электрически изолированы, то упругие свойства зависят от того, замкнуты они или разомкнуты. В том случае, если электроды коротко замкнуты, $s_{ii} = s_{ii}^E$, как это было бы при $l_e = l$. Мы примем это предположение во всех дальнейших расчетах для упрощения анализа. Допускаемая при этом погрешность является не существенной, поскольку в рассматриваемых примерах нас будет интересовать, как изменение длины активной части стержня влияет на электромеханическое преобразование. Вариант, в котором изолированные электроды разомкнуты, будет рассмотрен в Разделе 5.7.4.3.

Чтобы различать значения K_{mi}^E , ΔK_{mi} и n_i для поперечного и продольного пьезоэффекта введем букву p в нижних индексах со значением $p = 1$ и $p = 3$, соответственно. Согласно формуле (5.213)

$$K_{pii}^E = \frac{i^2 \pi^2 S_{cs}}{2s_{pp}^E l}, \quad K_{pmi}^E = 0. \quad (5.237)$$

Следует отметить, что если бы мы учитывали различия в значениях s_{pp} по длине, то в общем случае (при $l_e \neq l$) было бы $K_{pmi}^E \neq 0$, т.е. существовало бы упругое взаимодействие между формами колебаний.

Величину ΔK_{mi} получим из выражения (5.142) после представления его в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta K_{mi} \xi_i^2. \quad (5.238)$$

Подставив выражение (5.233) для деформации и учитывая уравнение (5.217), для сплошного стержня с электродами на торцах при $l_e = l$ получим

$$\Delta K_{3ii} = K_{3ii}^E \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \left(1 - \frac{8}{i^2 \pi^2} \right) \quad (i = 1, 3, \dots), \quad (5.239)$$

$$\Delta K_{3ii} = K_{3ii}^E \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \quad (i = 2, 4, \dots), \quad (5.240)$$

$$\Delta K_{3mi} = -K_{3ii}^E \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{4}{\pi^2 mi} \quad (i = 1, 3, \dots; m = 1, 3, \dots; m \neq i). \quad (5.241)$$

Тот факт, что $\Delta K_{3mi} \neq 0$ при нечётных значениях i и m указывает на то, что в принципе существует связь между этими формами колебаний вследствие неоднородности электромеханического преобразования и, строго говоря, собственные формы колебаний стержня при продольном пьезоэффекте и пассивного стержня различаются. На практике эта связь ничтожно мала.

Как следует из формул (5.237) и (5.240), при $i = 2, 4, \dots$

$$K_{3ii} = K_{3ii}^E + \Delta K_{3ii} = K_{3ii}^E \frac{1}{1 - k_{33}^2} = K_{3ii}^D. \quad (5.242)$$

Для секционированного стержня при $l_e = l$, применяя формулу (5.158), получим

$$\Delta K_{3ii} = K_{3ii}^E \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \left[1 - \beta \frac{\sin^2(i\pi / 2N)}{(i\pi / 2N)^2} \right], \quad (5.243)$$

где $\beta = 1$, если i/N — дробь, и $\beta = 2$, если i/N — нечетное число. Как было отмечено в отношении формулы (5.95), $\Delta K_{3ii} \approx 0$ при $N_i \geq 6$.

При условии, что $l_e < l$, значения ΔK_{3im} можно найти с помощью формул (5.142) и (5.238) в сочетании с уравнением (5.217), при этом интегрирование следует производить по объему, ограниченному электродами. Однако с уменьшением отношения l_e / l эти значения быстро уменьшаются и на практике в расчетах ими можно пренебречь, по крайней мере, если $l_e / l < 0.85$.

Заметим, что секционирование применяют в конструкциях относительно низкочастотных преобразователей. Пьезоэлементы с электродами на торцах для высокочастотных применений (начиная с длины пьезоэлемента, которая обеспечивает его нормальную поляризацию) имеют вид сплошных стержней, и все « ΔK соображения» относятся к ним в полной мере.

Коэффициенты электромеханической трансформации $n_m(l_e)$ найдем по формуле (5.211) после подстановки выражения (5.233) для деформации и интегрирования по

объему, ограниченному электродами. В результате получим

$$n_m(l_e) = \frac{wtd_{3i}}{s_{ii}^E V} E_3 \left[\theta_m \left(\frac{l+l_e}{2} \right) - \theta_m \left(\frac{l-l_e}{2} \right) \right] \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.244)$$

Здесь форма колебаний $\theta_m = \cos(m\pi x/l)$, а электрическое поле имеет следующие значения: $E_3 = V/t$ при поперечном пьезоэффекте; $E_3 = V/l_e$ и $E_3 = VN/l_e$ при продольном пьезоэффекте в вариантах сплошного и секционированного стержней, соответственно. Таким образом, из формулы (5.244) получим

$$n_m(l_e) = \frac{wtd_{3i}}{s_{ii}^E} \sin\left(\frac{m\pi l_e}{2l}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (5.245)$$

для вариантов, представленных на Рис. 5.22 (a) и (b), и

$$n_m(l_e) = \frac{wtd_{33}N}{s_{33}^E l_e} \sin\left(\frac{m\pi l_e}{2l}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (5.246)$$

для варианта, представленного на Рис. 5.22 (c).

После того как определены все эквивалентные параметры, для расчёта колебаний стержня можно воспользоваться эквивалентной схемой на Рис. 5.21, поскольку при приведенных выше соображениях контуры схемы (соответствующие уравнения для обобщенных скоростей) независимы. При электродах, расположенных симметрично относительно среднего сечения стержня, четные (антисимметричные, при $m = 2k$) формы колебаний электромеханически пассивны (соответствующие коэффициенты $n_m = 0$). Электромеханическая активность нечетных (симметричных, при $m=2k-1$) форм колебаний зависит от длины электрода l_e . Нежелательная форма колебаний при $m > 1$ будет подавлена (сделана электромеханически пассивной), если длина электродов отвечает условию

$$\sin\left(\frac{m\pi l_e}{2l}\right) = 0, \text{ т. е. } \frac{l_e}{l} = \frac{2}{m}. \quad (5.247)$$

Так, например, если желательнее расширить частотный диапазон, в котором доминирует первая форма колебаний, то третью форму колебаний можно подавить, задав длину электродов $l_e \approx 0.66l$. Примечательно, что при такой длине электродов эффективный коэффициент связи первой формы колебаний увеличивается и почти достигает своего оптимального значения, как это видно из Рис. 5.23. Качественное объяснение такого

поведения коэффициентов трансформации можно дать, воспользовавшись графиками собственных форм колебаний, представленными на Рис. 5.23. До тех пор, пока электроды однополярны по всей длине (E_3 не меняет своего знака), знаки зарядов, образующихся на разных частях электродов, совпадают со знаками деформаций. Поскольку они усредняются по поверхности электрода, они могут оказаться полностью скомпенсированными. Это происходит в варианте распределения деформаций S_2 и S_4 на Рис. 5.23 (а) при полной длине электродов. Для того чтобы подавить третью форму колебаний (распределение деформаций S_3 на Рис. 5.23 (а)) длина электродов должна быть $l_e = 2l/3$, как это следует из рисунка. Электромеханическую активность четных форм колебаний можно восстановить, если разделить электроды пополам и половины соединить в противофазе, как это следует из графиков на Рис. 5.23 (b).

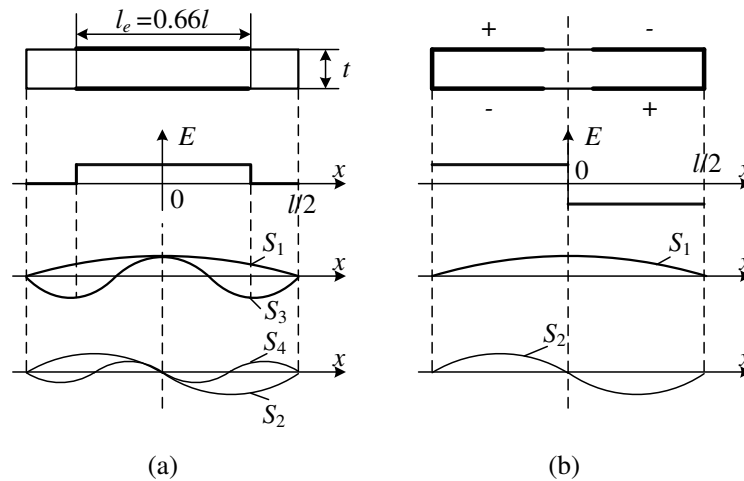


Рисунок 5.23: Собственные формы продольных колебаний стержней: (а) однополярные электроды, (b) половины электродов соединены в противофазе.

Таким образом, частотную характеристику преобразователя можно изменять, изменяя конфигурацию электродов. Для оценки влияния произвольной геометрии электродов и электрического соединения их частей представим электрическое поле в общем случае в виде

$$E_3 = \frac{V}{t} \Omega(x), \tag{5.248}$$

где функция $\Omega(x)$ зависит от конфигурации электродов, а t — расстояние между

электродами. Предположим, что $\Omega(x) > 0$ при $E_3 \uparrow \uparrow P$ и $\Omega(x) < 0$ при $E_3 \downarrow \uparrow P$. Следуя общему выражению (5.212), получим формулы для коэффициента трансформации стержня в следующем виде:

Для поперечного пьезоэффекта

$$n_i = \frac{d_{31} S_{cs}}{s_{11}^E l} \Omega_i, \quad (5.249)$$

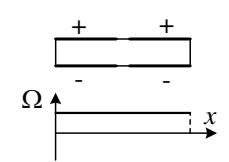
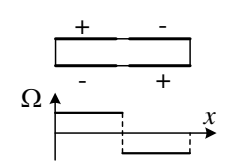
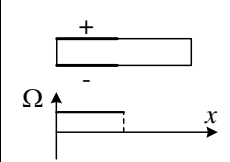
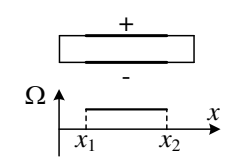
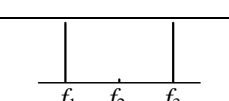
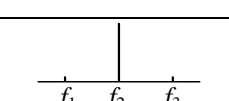
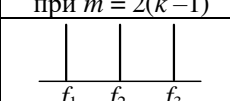
Для продольного пьезоэффекта в общем случае, когда стержень сегментирован по длине

$$n_i = \frac{d_{33} S_{cs} N}{s_{33}^E l_e} \Omega_i, \quad (5.250)$$

где множитель Ω_i равен

$$\Omega_i = \int_0^{l_e} \Omega(x) \theta_i'(x) dx. \quad (5.251)$$

Таблица 5.4: Спектр собственных частот стержня в зависимости от конфигурации электродов.

$\Omega(x)$				
$\Omega_m,$ $k = 1, 2, \dots$	2 при $m = 2k - 1$	4 при $m = 2(k - 1)$	1 при $m = 2k - 1$ 2 при $m = 2(k - 1)$	$2 \sin \frac{m\pi(x_1 + x_2)}{2l}$ $\times \sin \frac{m\pi(x_2 - x_1)}{2l}$
Спектр				-

Значения коэффициентов трансформации n_i существенно зависят от того, какова функция $\Omega(x)$. Значения коэффициентов Ω_i для нескольких вариантов конфигурации электродов представлены в Таблице 5.4. В последней строке таблицы показан спектр резонансных частот (в пределах первых трех), соответствующих активным формам

колебаний стержня. Таким образом, изменяя функцию $\Omega(x)$ (в частности, переключая части электродов), можно управлять частотными характеристиками преобразователя.

Рассмотрим теперь колебания стержня, который нагружен импедансами Z_0, Z_l, Z_x и находится под действием внешних сил F_0, F_l , как это показано на Рис. 5.24. Эквивалентные внешние силы и импедансы нагрузки, соответствующие вещественным величинам, можно определить по формулам (4.238) - (4.241).

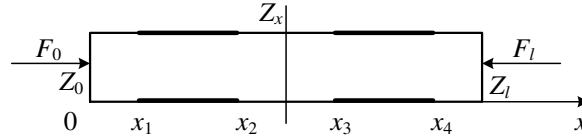


Рисунок 5.24: Стержневой преобразователь под воздействием внешних нагрузок и сил.

В этом примере мы рассмотрим концентрированные силы и импедансы. Если реальные воздействия распределены, то эти силы и импедансы должны рассматриваться как результат интегрирования воздействий по поверхностям, на которые они действуют. В частных случаях $Z(l)$ может имитировать импеданс излучения, $Z(x)$ - импеданс несущей конструкции, а сила $F(l)$ - эквивалентную силу, обусловленную воздействием акустического поля. Учитывая, что

$$\theta_i(x) = \cos(i\pi x / l), \quad \theta_i(0) = 1, \quad \theta_i(l) = (-1)^i, \tag{5.252}$$

получаем

$$F_i = F_0 + (-1)^{i+1} F_l, \tag{5.253}$$

$$F_i = F_0 + (-1)^{i+1} F_l, \tag{5.254}$$

где растягивающие силы следует рассматривать как положительные. Кроме того, существуют взаимные импедансы

$$z_{im} = Z_0 + (-1)^{i+m} Z_l + Z_x \cos(m\pi x / l) \cos(i\pi x / l) \tag{5.255}$$

которые характеризуют связи между формами колебаний (контурами эквивалентной схемы). Эти связи обязаны тому, что собственные формы колебаний нагруженного стержня, строго говоря, отличаются от таковых для ненагруженного. С увеличением величин сопротивлений нагрузки применение эквивалентной схемы Рис. 5.20 становится слишком сложным и практически нецелесообразным. Колебания произвольно

нагруженных стержневых преобразователей будут рассмотрены в Разделе 5.8 в геометрических координатах. В случае если импедансы нагрузки малы и взаимодействием между контурами можно пренебречь, общую эквивалентную схему на Рис. 5.20 для стержневых преобразователей можно заменить представленной на Рис. 5.52. Если стержень зафиксирован в среднем поперечном сечении ($Z_{i/2} \rightarrow \infty$), то возможны только колебания, при которых $\cos(i\pi/2) = 0$, т. е. при $i = 2m - 1$. Четные контуры (в том числе и с $i = 0$, который отвечает за движение стержня без деформаций) следует исключить из схемы.

В частотных областях вокруг резонансных частот достаточно рассматривать только тот контур, который в схеме на Рис. 5.25 соответствует резонансной форме колебаний. Заметим, что в таком случае взаимодействием между контурами можно пренебречь, поскольку фактический эффект взаимодействия зависит от вносимых импедансов $Z_{inmi} = z_{mi}(U_m/U_i)$ и вблизи от резонансной частоты i -ой формы колебаний $(U_m/U_i) \ll 1$.

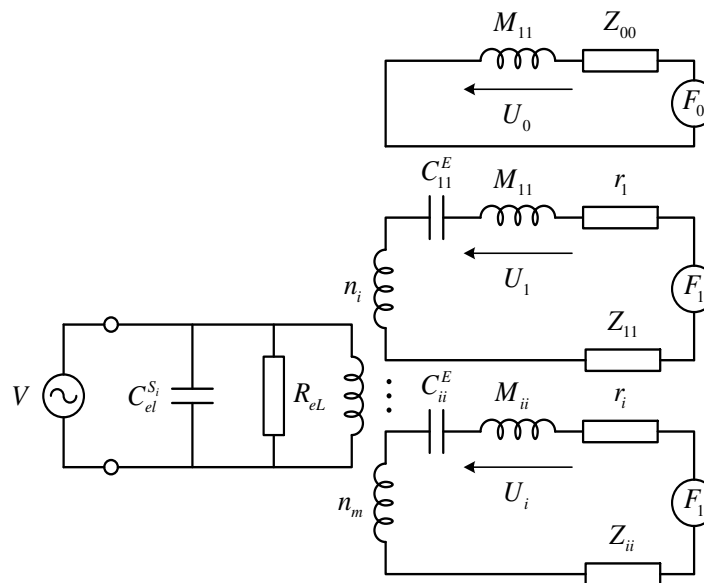


Рисунок 5.25: Многоконтурная эквивалентная схема стержневого преобразователя.

При расчете преобразователя в режиме приема в диапазоне частот значительно ниже первого резонанса ($1/\omega C_{ii}^E \gg \omega M_{ii}$ и $1/\omega C_{ii}^E \gg |Z_{ii}|$). Предположим, что электроды полноразмерные (активны формы колебаний при $i = 2m - 1$) и сила F_i действует только на один конец стержня, а другой конец свободен от внешнего воздействия (то есть, $F_0 = 0$,

$Z_0 = 0$). Сохраняя в схеме на Рис. 5.25 только упругие импедансы, получим выходное напряжение в виде

$$V_{out} = \frac{1}{\omega C_{el}^{S_1}} \frac{2wd_{31}}{s_{11}^E} F_l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2s_{11}^E l \omega}{\pi^2 S_{cs}} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{1}{C_{el}^{S_1}} \frac{2wd_{31}}{s_{11}^E} \frac{s_{11}^E l}{4S_{cs}} F_l. \quad (5.256)$$

Здесь учтено, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (5.257)$$

Такой же результат будет получен в Разделе 5.8 с применением другого подхода.

До сих пор мы обсуждали применение схемы, представленной на Рис. 5.25 при условии, что импедансы нагрузки малы. Если импеданс на одном из концов стержня настолько велик ($Z_0 \rightarrow \infty$), что этот конец можно считать заторможенным, то для расчета параметров эквивалентной схемы, соответствующей этому граничному условию, следует применить опорную систему собственных форм колебаний

$$\theta_i(x) = \sin[(2i-1)\pi x / l]. \quad (5.258)$$

В этом случае, применив приведенную выше процедуру, для стержня с полномерными электродами получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} M_{ii} &= M / 2, & K_{ii}^E &= i^2 \pi^2 S_{cs} / 2ls_{11}^E, \\ n_i &= (-1)^{m+1} d_{31} S_{cs} / s_{11}^E t \quad (i = 2m-1; m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.259)$$

Эквивалентными силами и импедансами нагрузки в этом случае являются $F_i = (-1)^{m+1} F_l$, $Z_{ii} = Z_l$.

Все выводы относительно стержневых преобразователей, колеблющихся в продольном направлении, справедливы для стержневых преобразователей, совершающих крутильные колебания. Необходимо лишь произвести следующие подстановки во всех формулах:

$$M_{ii} = \rho J_p l / 2, \quad K_{ii}^E = i^2 \pi^2 J_p / 2s_{44}^E l, \quad n_i = (w^2 d_{24} / 4s_{44}^E) \Omega_i. \quad (5.260)$$

5.7.4.2 Уравнения колебаний в плоскости круглого диска, поляризованного по толщине

Рассмотрим радиальные колебания пьезокерамического диска, поляризованного по

толщине, представленного на Рис. 5.26. Предположим, что электроды осесимметричны и контур диска свободен. В качестве опорных функций примем нормированные собственные формы колебаний задачи о колебаниях пассивного диска (см. Раздел 4.4.2.2.), а именно:

$$\theta_i(r/a) = J_1(\lambda_i r/a) / J_1(\lambda_i), \quad (5.261)$$

где λ_i — собственные значения, которые в силу соотношения (4.166) при $\sigma = 0.3$ равны

$$\lambda_i = 2,05, 5,38, 8,57; \text{ и при } i > 3 \lambda_i \approx (i\pi - 0.9). \quad (5.262)$$

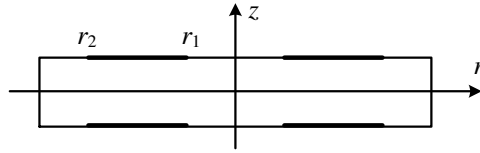


Рисунок 5.26: Круглый диск с осесимметричными электродами.

Заметим, что хотя для разных пьезокерамических материалов $\sigma_1^E = s_{12}^E / s_{11}^E \neq 0.3$ (для наиболее часто применяемых составов PZT σ_1^E лежит в пределах от 0.27 до 0.35), из уравнения (4.167) для определения собственных значений следует, что значения λ_i изменяются менее чем на 1% от их значений при $\sigma = 0.3$.

Смещения $\xi(r)$ в плоскости диска представим в виде ряда

$$\xi(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ai} \theta_i(r/a) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ai} J_1(k_i r) / J_1(k_i a), \quad (5.263)$$

где $k_i = \lambda_i / a$ и ξ_{ai} — радиальные смещения при $r = a$ для разных форм колебаний. В соответствии с формулой (5.205)

$$M_{mi} = 2\pi\rho t \int_0^a \theta_i \theta_m r dr, \quad (5.264)$$

откуда следует, что $M_{mi} = 0$ при $m \neq i$ в силу ортогональности собственных форм колебаний, а $M_{ii} = M(1 - 0.9 / \lambda_i^2)$ где $M = \pi a^2 t \rho$. Таким образом,

$$M_{11} = 0.76M, \quad M_{22} = 0.97M, \quad M_{ii} \approx M \quad (i > 3). \quad (5.265)$$

Другие эквивалентные параметры диска можно найти из выражений (5.206), (5.211) и (5.213). Величины $W_e^{S_i}$, W_{em} , W_m^E , входящие в эти выражения, необходимо определить по формулам (5.139) - (5.141) после подстановки значений плотностей энергии для

осесимметричной деформации в цилиндрических координатах из выражений (5.68)-(5.70). Поскольку диск поляризован в направлении z , которая совпадает с осью 3, оси 1 и 2 находятся в плоскости диска и $S_{rr} = S_1$, $S_{\varphi\varphi} = S_2$. После подстановки выражений (5.263) для $\xi(r)$ в формулы (4.145), получим (см. свойства функций Бесселя в Приложении С.1)

$$S_1 = \frac{\partial \xi(r)}{\partial r} = \sum_1^{\infty} \xi_{ai} \frac{1}{J_1(k_i a)} \frac{\partial J_1(k_i r)}{\partial r} = \sum_1^{\infty} \xi_{ai} \frac{k_i}{J_1(k_i a)} \left[J_0(k_i r) - \frac{J_1(k_i r)}{k_i r} \right], \quad (5.266)$$

$$S_2 = \frac{\xi(r)}{r} = \sum_1^{\infty} \xi_{ai} \frac{k_i}{J_1(k_i a)} \frac{J_1(k_i r)}{k_i r}. \quad (5.267)$$

Таким образом,

$$S_1 + S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ai} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [k_i r \theta(k_i r)] = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ai} \frac{k_i J_0(k_i r)}{J_1(k_i a)}. \quad (5.268)$$

В случае если электроды полностью покрывают поверхности диска, используя выражение для w_m^E из (5.69), получим

$$W_m^E = \frac{\pi t Y_1^E}{1 - \sigma_1^{E2}} \left\{ \int_0^a \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 + 2 \cdot 0.3 \frac{\xi}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right] r dr - \right. \\ \left. - 2 \int_0^a (0.3 - \sigma_1^E) \frac{\xi}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} r dr \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} K_{ii}^E \xi_i^2 + \sum_{m \neq i} K_{mi}^E \xi_i \xi_m. \quad (5.269)$$

Поскольку опорные функции θ_i определены как собственные формы колебаний при $\sigma = 0.3$, первый интеграл в (5.269) вносит свой вклад только в значения K_{ii}^E , определяя большую часть этих значений. В том случае, если $\sigma_1^E \neq 0.3$, второй интеграл вносит некоторое изменение в значение K_{ii}^E и приводит к появлению взаимных жесткостей K_{mi}^E , которые характеризуют взаимодействие между уравнениями (5.225) и между контурами эквивалентной схемы на Рис. 5.20. После подстановки в (5.269) смещения $\xi(r)$ в виде ряда (5.261) и последующих расчетов, получим следующие значения жесткостей

$$K_{ii}^E = \frac{2\pi t Y_1^E (\beta_{ii} + \sigma_1^E - 0.3)}{1 - \sigma_1^{E2}}, \quad K_{mi}^E \approx K_{11}^E \frac{\sigma_1^E - 0.3}{1.6}, \quad (5.270)$$

где $\beta_{11} = 1.6$; $\beta_{22} = 14.1$; $\beta_{33} = 36$. Для пьезокерамики PZT, которую применяют в преобразователях, $|\sigma_1^E - 0.3| < 0.05$, и можно положить, что

$$K_{11}^E = K_{eqv1}^E \approx \frac{10tY_1^E}{1-\sigma_1^{E2}}, \quad K_{22}^E = K_{eqv2}^E \approx 8.8K_{eqv1}^E, \quad (5.271)$$

$$K_{33}^E = K_{eqv3}^E \approx 22K_{eqv1}^E, \quad |K_{im}^E| < \frac{K_{11}^E}{30}.$$

При значениях $\sigma_1^E \neq 0.3$ существует некоторое взаимодействие между уравнениями (5.225) вследствие конечного значения взаимной жесткости K_{mi}^E . С помощью выражений для эквивалентных параметров диска и уравнения (5.231), можно получить оценку значений вносимых импедансов

$$Z_{inti} = j \sum_{m \neq i}^{\infty} (U_m / U_i) \omega C_{mi}^E, \quad (5.272)$$

для частотных диапазонов вокруг резонансных частот в виде

$$|Z_{inti}| < 0.02 / \omega C_{ii}^E Q_m, \quad (5.273)$$

где Q_m — добротность механической системы, значение которой не менее 10. Таким образом, величиной Z_{inti} можно пренебречь, и уравнения (5.231) для диска и соответствующие контуры эквивалентной схемы на Рис. 5.20 считать независимыми. Значения собственных частот определяются соотношением

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{a} \sqrt{\frac{Y_1^E}{\rho(1-\sigma_1^{E2})}} = \sqrt{\frac{K_{ii}^E}{M_{ii}}}. \quad (5.274)$$

Для первой формы колебаний с M_{11} и K_{11}^E взятыми из выражений (5.265) и (5.271), получим

$$\omega_i = \frac{2.04}{a} \sqrt{\frac{Y_1^E}{\rho(1-\sigma_1^{E2})}}, \quad (5.275)$$

тогда как значение, полученное из дифференциального уравнения при $\sigma_1^E = 0.3$, равно $\lambda_1 = 2.05$ (см. примечание к выражению (5.262)).

Рассматривая величины $C_e^{S_{12}}$ и n_i , предположим, что электроды могут быть частичными как это показано на Рис. 5.26. Строго говоря, изменение размеров электродов влияет и на энергию W_m^E , однако мы не будем это учитывать, как и в предыдущем примере со стержнем. По крайней мере, энергия W_m^E должна оставаться неизменной если предположить, что электроды на неактивных частях диска существуют, но они электрически

изолированы и коротко замкнуты. Применяя формулы для плотностей электрической и электромеханической энергий (5.68) и (5.70), из уравнений (5.206) и (5.211) получим

$$C_e^{S_{1,2}} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \pi (r_2^2 - r_1^2) / t, \quad (5.276)$$

$$W_{em} = \frac{1}{2} \frac{2\pi d_{31} t Y_1^E}{1 - \sigma_1^E} \int_{r_1}^{r_2} (S_1 + S_2) E_3 r dr = \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^{\infty} n_i \xi_{ai}. \quad (5.277)$$

После подстановки выражения для $(S_1 + S_2)$ из формулы (5.268), получим коэффициенты электромеханической трансформации в виде

$$n_i = \frac{2\pi d_{31} a Y_1^E}{1 - \sigma_1^E} \left[\frac{r_2}{a} \cdot \theta_i \left(\frac{r_2}{a} \right) - \frac{r_1}{a} \cdot \theta_i \left(\frac{r_1}{a} \right) \right]. \quad (5.278)$$

Первые три собственные формы радиальных колебаний диска (при $i = 1, 2, 3$) показаны на Рис. 5.27.

При полных электродах ($r_1 = 0, r_2 = a$)

$$n_i = \frac{2\pi d_{31} a Y_1^E}{1 - \sigma_1^E}. \quad (5.279)$$

Значения коэффициентов трансформации при различных соотношениях радиусов r_2 и r_1 можно получить, пользуясь графиками на Рис. 5.27.

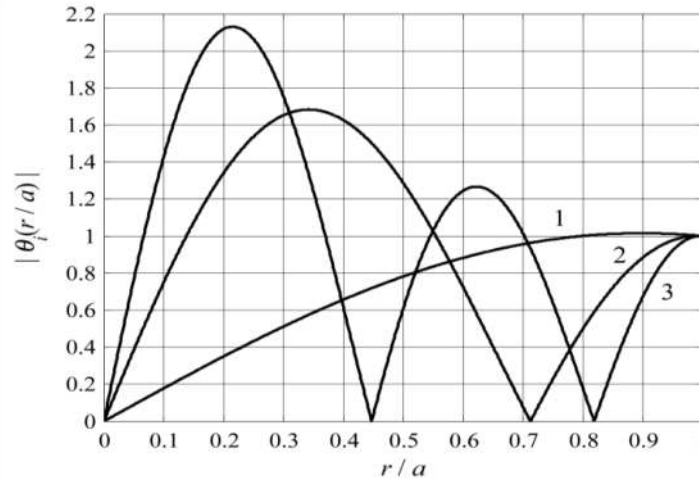


Рисунок 5.27: Собственные формы радиальных колебаний диска ($i = 1, 2, 3$).

В частности, электромеханическую активность форм колебаний θ_2 и θ_3 (как и любых других) можно значительно увеличить (или подавить) путем соответствующего

выбора размеров и расположения частей электродов. Качественно это можно объяснить так же, как это было сделано по отношению к продольным колебаниям стержней, если воспользоваться графиками функций $(S_1 + S_2)_i$ в зависимости от отношения r/a , приведенными на Рис. 5.28. (В соответствии с выражением (5.268) они пропорциональны $J_0(k_i r)$). На рисунке показаны графики этих функций для первых трех форм колебаний. Имеется в виду, что функции меняют знаки при прохождении через ноль.

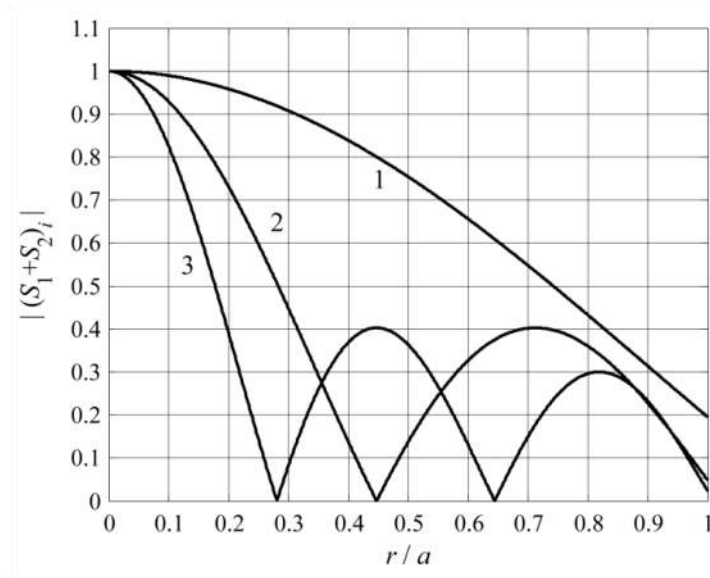


Рисунок 5.28: Графики функций $(S_1 + S_2)_i$ в зависимости от r/a .

Так, например, для увеличения коэффициентов трансформации n_2 и n_3 следует оставить только центральные электроды, ограниченные радиусами первых узловых окружностей. Дальнейшее увеличение электромеханической активности может быть достигнуто, если противофазные участки электродов присоединить к центральному в соответствующих фазах.

Для количественной оценки качества электромеханического преобразования рассмотрим зависимость эффективных коэффициентов связи от расположения и размера электродов с помощью выражений (5.178)

$$k_{eff}^2 = \frac{\alpha_c}{\alpha_c + 1}, \text{ где } \alpha_c = \frac{n^2}{K_{eqv}^E C_e^{S_{1,2}}} = \frac{\alpha'_c}{K_{eqv}^E}. \quad (5.280)$$

Здесь введен коэффициент

$$\alpha'_c = n^2 / C_e^{S_{1,2}}, \quad (5.281)$$

который зависит только от расположения и размера электродов. Как отмечалось ранее, эквивалентная жесткость K_{eqv}^E не зависит от геометрии электродов, если не учитывать разницу между постоянными упругости поляризованной и неполяризованной керамики частей пьезоэлемента с отсутствующими электродами. Эта разница в дальнейшем не учитывается, тем более что обычно лишены электродов те части механической системы, которые вносят меньший вклад в электромеханическое преобразование и, следовательно, обладают относительно небольшой потенциальной энергией. Максимальное значение k_{eff} достигается при максимальном значении коэффициента α_c , а значит и при максимальном значении коэффициента α'_c . Вначале рассмотрим зависимости $\alpha'_{ci}(r)$ от радиуса электродов, расположенных в центре диска. Заметим, что коэффициенты $\alpha'_i(a)$ не зависят от номера i формы колебаний. Они равны

$$\frac{\alpha'_{ci}(r)}{\alpha'_{ci}(a)} = \theta_i^2(r/a), \quad (5.282)$$

как это следует из выражений для $n_i(a)$ и $C_e^{S_{1,2}}$. С помощью графиков на Рис. 5.27 можно прийти к заключению, что максимальные значения $\alpha'_{ci}(r)$ достигаются для первой формы колебаний при $r = a$, для второй - при $r = 0.35a$, и для третьей формы колебаний при $r = 0.22a$. Соответствующие значения коэффициента

$$\alpha'_{c2}(0.35a) = \alpha'_{c1}(a)\theta_2^2(0.35) = 2.9\alpha'_{c1}(a), \quad (5.283)$$

$$\alpha'_{c3}(0.22a) = \alpha'_{c1}(a)\theta_2^2(0.22) = 4.6\alpha'_{c1}(a). \quad (5.284)$$

Рассмотрим теперь зависимости этого соотношения от относительной ширины концентрических электродов, расположенных вокруг узловых линий форм колебаний. Такие электроды могут быть использованы в некоторых вариантах применения дисковых преобразователей, например, для пьезоэлектрических трансформаторов, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Обозначим радиусы узловых линий r_{in} , где i — номер формы колебаний, а n — номер узловой линии. Радиусы узловых линий: $r_{21} = 0.71a$, $r_{31} = 0.45a$, $r_{32} = 0.8a$. Будем отмечать коэффициенты α_c и α'_c , которые соответствуют радиусам узловых линий, теми же нижними индексами. Результаты расчета относительной ширины электродов $\Delta r/a$, при которых достигается максимальное

значение отношений $\alpha'_{c_{in}} / \alpha'_{c_{i0}}$:

$$\begin{aligned} \alpha'_{c_{21\max}} &\approx 2.0\alpha'_{c_{20}} \text{ at } \Delta r \approx 0.23a, & \alpha'_{c_{31\max}} &\approx 1.6\alpha'_{c_{30}} \text{ at } \Delta r \approx 0.28a, \\ \alpha'_{c_{32\max}} &\approx 1.2\alpha'_{c_{30}} \text{ at } \Delta r \approx 0.23a. \end{aligned} \quad (5.285)$$

Здесь $\alpha'_{c_{20}} = \alpha'_{c_2}(0.35a)$, $\alpha'_{c_{30}} = \alpha'_{c_3}(0.22a)$. Все вышеперечисленные коэффициенты удобно выражать через коэффициент $\alpha_{c_1}(a)$ для первой формы колебаний полностью покрытого электродами диска. После подстановки в выражение (5.280) значений K_{eqv1}^E , $C_{e1}^{S_{1,2}}$ и n_1 из (5.271), (5.276) и (5.279), получим этот коэффициент в виде

$$\alpha_{c_1}(a) = \frac{\alpha'_{c_{10}}}{K_{eqv1}^E} = \frac{\pi}{5} (1 + \sigma_1^E) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}. \quad (5.286)$$

Численные значения коэффициентов при применении керамики PZT-4 ($\sigma_1^E = 0.33$, $k_p = 0.58$): $\alpha_{c_1}(a) = 0.42$ и $k_{eff} = \sqrt{\alpha_{c_1} / (1 + \alpha_{c_1})} = 0.54 = 0.94k_p$. Таким образом, радиально колеблющийся диск представляет собой удобную конфигурацию для экспериментального определения планарного коэффициента связи k_p путем измерения k_{eff} , например, по методу резонанса-антирезонанса.

Коэффициенты $\alpha_{c_{in}}$, необходимые для расчета соответствующих эффективных коэффициентов связи, получим следующим образом. Покажем это на примере расчета коэффициентов $\alpha_{c_{20}}$ и $\alpha_{c_{21}}$ для второй формы колебаний. Коэффициенты $\alpha_{c_{in}}$ равны $\alpha'_{c_{in}} / K_{eqvi}^E$ в предположении, что жесткость не зависит от конфигурации электродов. Коэффициенты $\alpha_{c_{20}} = \alpha'_{c_{20}} / K_{eqv2}^E$ и $\alpha_{c_{21}} = \alpha'_{c_{21}} / K_{eqv2}^E$ согласно соотношению (5.283) и (5.285) равны $\alpha_{c_{20}} = (2.9 / K_{eqv2}^E) \alpha'_{c_1}(a)$ и $\alpha_{c_{21}} = (5.8 / K_{eqv2}^E) \alpha'_{c_1}(a)$, соответственно. Учитывая, что $\alpha'_{c_1}(a) = \alpha_{c_1}(a) K_{eqv1}^E$ и $K_{eqv2}^E / K_{eqv1}^E = 8.8$ в соответствии с выражениями (5.271), мы в итоге получаем $\alpha_{c_{20}} = 0.33\alpha_{c_1}(a)$ и $\alpha_{c_{21}} = 0.66\alpha_{c_1}(a)$. Коэффициент $\alpha_{c_1}(a)$ определен формулой (5.286). При применении керамики PZT-4 $\alpha_{c_1}(a) = 0.42$, $\alpha_{c_{20}} \approx 0.13$, $\alpha_{c_{21}} \approx 0.26$. Соответствующие эффективные коэффициенты связи: $k_{eff1} = 0.54$, $k_{eff20} = 0.34$, $k_{eff21} = 0.45$.

Для второй формы колебаний полностью покрытого электродами диска $n_2(a) = n_1(a)$, $C_{e2}^{S_{1,2}}(a) = C_{e1}^{S_{1,2}}(a)$ и $\alpha_{c_2}(a) = \alpha_{c_1}(a) / 8.8$. При применении PZT-4 $\alpha_{c_2}(a) \approx 0.05$ и $k_{eff2} = 0.21$ вместо 0.42 и 0.54 соответствующих первой форме колебаний. Таким образом, эта форма колебаний гораздо менее эффективна с точки зрения

электромеханического преобразования. Электромеханическое преобразование, выполняемое преобразователем с полномерными электродами при второй форме колебаний, можно значительно улучшить путем применения правильно расположенных частичных электродов. Полученные результаты будут приведены в следующем разделе, где их применение окажется полезным.

5.7.4.3 Электро-механо-электрические преобразователи

5.7.4.3.5 Эквивалентная схема преобразователя

До сих пор мы предполагали, что весь объем пьезокерамического тела заключен между одной парой электродов. В некоторых случаях необходимо использовать в качестве активной только часть объема пьезоэлемента и/или разделить электроды на электрически изолированные секции и использовать их по-отдельности. В последнем случае назовем преобразователи электро-механо-электрическими (для краткости ЭМЭ). Электро-механо-электрические преобразователи имеют много применений. Это, например: электромеханические трансформаторы; средства для установления электрической обратной связи в устройствах с применением пьезокерамических резонаторов; контроль параметров преобразователей в процессе их работы. Теоретический анализ ЭМЭ преобразователей предполагает рассмотрение внутренней энергии пьезокерамического тела в случае, если рабочие электроды разделены, как показано на Рис. 5.6. Предположим, что на рисунке часть объема \tilde{V}_1 представляет собой активную часть, в которой происходит электромеханическое преобразование. Часть объема \tilde{V}_2 имеет отдельные электроды, электрический режим которых зависит от выполняемых задач. Как правило, это режим холостого хода, поскольку полученное таким образом результаты легко экстраполировать на результаты работы с любой электрической нагрузкой, применяя теорему Тэвенина. Часть объема \tilde{V}_3 представляет собой пассивную часть пьезоэлемента, которая либо не была поляризована, либо была поляризована и электроды были в последующем удалены.

Величину внутренней энергии всего тела, потребляющего независимый поток электрической энергии, представим в виде (см. выражение (5.144)) $W_{int} = W_e^{S_i} + W_{em}$, где

$$W_{em} = W_{m1}^E + \Delta W_1 + \underline{W_{m2}} + \underline{W_{m3}}. \quad (5.287)$$

Здесь W_{m1}^E и ΔW_1 должны быть определены по формулам (5.138) и (5.142); энергии $\underline{W_{m2}}$ и $\underline{W_{m3}}$ подчеркнуты, поскольку эти части объема потребляют независимый поток механической энергии. При расчете $\underline{W_{m3}}$ следует рассматривать два варианта. Если электроды в этой области не были нанесены в процессе изготовления пьезоэлемента, то энергия $\underline{W_{m3}}$ должна быть рассчитана со значениями модулей упругости неполяризованной керамики. Если электроды были удалены после поляризации пьезоэлемента, то ввиду отсутствия электродов и, следовательно, свободных зарядов на всей этой части объема $D = 0$.

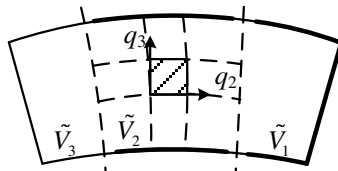


Рисунок 5.29: Конфигурация пьезокерамического тела общего типа с отдельными электродами.

Поэтому механическую энергию нужно определять со значениями постоянных упругости при индукции равной нулю, т.е. $\underline{W_{m3}} = \underline{W_{m3}^D}$. Часть объема \tilde{V}_2 выполняет механоэлектрическое преобразование (потребляет внешнюю механическую энергию и преобразует ее в электрическую форму), поэтому плотность внутренней энергии в этой части объема $\delta w_{int} = \underline{\delta w_m}$. Применив выражение (5.52) для механической энергии элемента объема, по формуле (5.227) получим, что

$$\underline{W_{m2}} = \underline{W_{m2}^E} + \Delta W_2 + \underline{W_{me2}}, \quad \underline{W_{me2}} = \underline{W_{e2}^{S_i}}. \quad (5.288)$$

Энергии $\underline{W_{m2}^E}$, ΔW_2 и $\underline{W_{e2}^{S_i}}$ следует определять по формулам (5.139), (5.142) и (5.140), в которых E_3 надо заменить на E_{3oc} . При условии короткого замыкания электродов $E_{3oc} = 0$, $\underline{W_{me2}} = \underline{W_{e2}^{S_i}} = 0$ и $\underline{W_{m2}} = \underline{W_{m2}^E} + \Delta W_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае выражения, характеризующие внутреннюю энергию и энергетический баланс в процессе колебаний, приобретают вид

$$W_{em} = W_{m1}^E + \Delta W_1 + \underline{W_{m2}^E} + \Delta W_2 + \underline{W_{m3}} + \underline{W_{me2}}, \quad \underline{W_{me2}} = \underline{W_{e2}^{S_i}}. \quad (5.289)$$

Здесь результатом электро-механо-электрического преобразования («преобразуемой

энергией») является $\frac{W_{me2}}{W_e}$. Поэтому выражение для эффективного коэффициента связи (5.88), соответствующего этому преобразованию, следует записать в виде

$$k_{eff}^2 = \frac{W_{me2}}{W_e^{S_i} + W_{em}} = \frac{W_{e2}^{S_i}}{W_e^{S_i} + W_{m\Sigma oc}}. \tag{5.290}$$

Для краткости энергию W_{em} в (5.289) обозначим $W_{m\Sigma oc}$, это общая механическая энергия разомкнутого пьезоэлемента.

Легко заметить, что в выражении (5.289) объединены соотношения (5.144) для электромеханических и (5.227) для механоэлектрических преобразований. Так как уравнения и эквивалентные схемы, описывающие электромеханические и механоэлектрические преобразования, нам уже известны, нет необходимости повторять аналогичный вывод уравнений для преобразователей ЭМЭ. Результат можно получить путем объединения уже существующих эквивалентных схем для этих двух вариантов преобразования.

Обычно ЭМЭ преобразователи работают вблизи своих резонансных частот, реже — ниже первого резонанса, и поэтому их можно рассматривать как имеющие одну механическую степень свободы. Эквивалентная схема электро-механо-электрического преобразователя с двумя парами электрически разделенных электродов, представлена на Рис. 5.30. Одна часть этой схемы работает в режиме электромеханического преобразования (она будет условно обозначаться как вход), а другая — в режиме механо-электрического преобразования (выход). Схема позволяет рассчитать все рабочие параметры преобразователей. Входная и выходная стороны схемы взаимно обратимы. В этом смысле названия «вход» и «выход» условны.

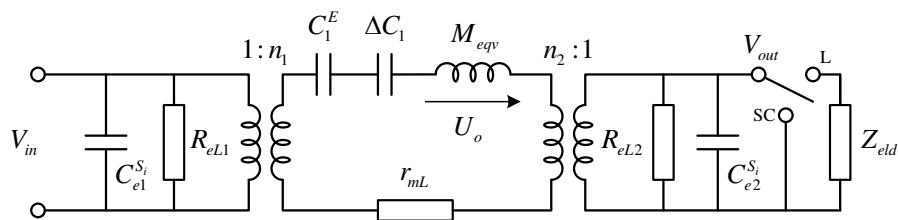


Рисунок 5.30: Эквивалентная схема электро-механо-электрического преобразователя.

Параметры схемы определим следующим образом. Значения емкостей и коэффициентов трансформации n_1 , $C_{e1}^{S_i}$ и n_2 , $C_{e2}^{S_i}$ следует определять по общим формулам для соответствующих сегментов электродов. Эквивалентная масса M_{eqv} не зависит от

разделения электродов и определяется только формой колебаний. Эквивалентную податливость $C_{\Sigma sc}^E = C_m^E = 1 / (K_m^E + \Delta K)$ следует определять в соответствии с соотношением

$$W_{m\Sigma sc} = (\xi_o^2 / 2)(K_{m1}^E + K_{m2}^E + K_{m3} + \Delta K_1 + \Delta K_2) \approx \xi_o^2 / 2)(K_m^E + \Delta K) . \quad (5.291)$$

Здесь нижний индекс *sc* указывает на то, что выход пьезоэлемента коротко замкнут. Значение члена K_{m3} , строго говоря, зависит от статуса пассивной части, как это было обсуждено ранее, но различия, которые в связи с этим могут возникнуть, не существенны. Для простоты предположим, что электроды на этой части существуют и коротко замкнуты. Таким образом, $K_{m3} \approx K_{m3}^E$, а значит $K_{m1}^E + K_{m2}^E + K_{m3} \approx K_m^E$, т.е. равна жесткости пьезоэлемента с электродами на всей поверхности тела. В члене уравнения $\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2$ слагаемые ΔK_i существуют только для тех частей пьезоэлемента, на которых применен продольный пьезоэффект. В противном случае $\Delta K_i = 0$. В результате

$$C_{\Sigma sc}^E = C_m^E = 1 / (K_m^E + \Delta K) . \quad (5.292)$$

В некоторых приложениях разделенные электроды могут использоваться для контроля рабочих характеристик преобразователя, для обратной связи или даже для регулировки в определенных пределах резонансной частоты ЭМЭ. Последнее обусловлено влиянием электрического выхода преобразователя на параметры механической системы. Это влияние определяется величиной импеданса

$$Z_{int} = n_2^2 / (1 / R_{eLd} + j\omega C_{e2}^{S_i}) \quad (5.293)$$

вносимого в механический контур со вторичной электрической стороны, как показано на Рис. 5.31. При коротком замыкании электродов $Z_{int} = 0$, при разомкнутых электродах $Z_{in} = n_2^2 / j\omega C_{e2}^{S_i}$. Это приводит к увеличению упругой жесткости, а значит и к увеличению резонансной частоты механической системы.

Пьезокерамические трансформаторы представляют собой наиболее сложный вариант применения ЭМЭ, поскольку они могут выполнять передачу значительных количеств энергии (аналогия с излучателем), тогда как в других вариантах этого не требуется. В последнем случае можно провести аналогию с электроакустическим приемником, если заменить источник электрической энергии акустомеханическим генератором, как показано на Рис. 1.8. Эквивалентная схема трансформатора аналогична таковой для

электроакустического излучателя с заменой импеданса излучения импедансом, вносимым с электрической стороны. Поэтому все соображения относительно свойств излучателей, представленные в Главе 3, качественно применимы и к этому случаю. Особенность же состоит в том, что импеданс электрической нагрузки легко изменить в отличие от нагрузки акустической. В частности, нагрузку можно превратить в чисто активную, применив индуктивность для компенсации ее реактивной составляющей. Так, например, при параллельной индуктивности $L = 1/\omega_{op}^2 C_{e2}^S$, где ω_{op} — рабочая частота трансформатора, вносимая емкость в схеме на Рис. 5.31 должна быть коротко замкнута, и вносимое сопротивление приобретет значение $R_{int} = n_2^2 R_{Ld}$.

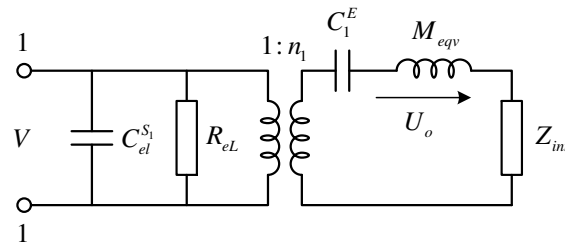


Рисунок 5.31: Эквивалентная электромеханическая схема электро-механо-электрического преобразователя с импедансом электрического выхода, преобразованным в механический контур.

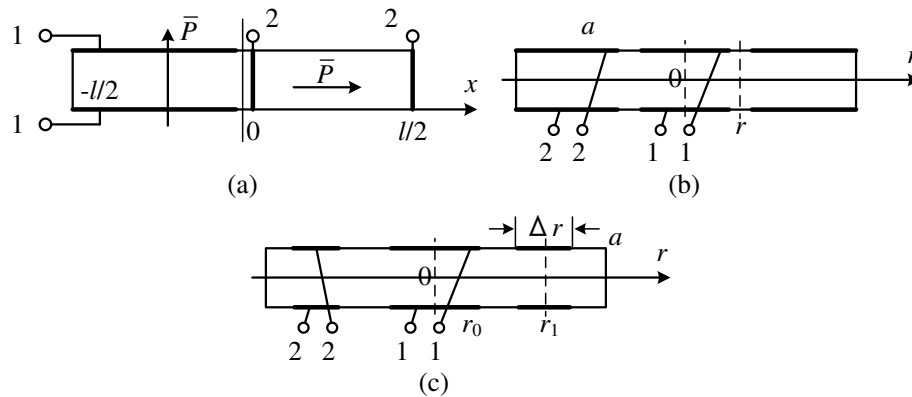


Рисунок 5.32: Пьезоэлементы, применяемые в конструкциях электромеханических трансформаторов: (а) стержень, колеблющийся в продольном направлении, реализующий как поперечный, так и продольный пьезоэффект (трансформатор типа Розена); (б) диск, совершающий радиальные колебания в первой форме с разделенными электродами; (с) диск, совершающий радиальные колебания во второй форме, с частичными электродами.

Хотя подробный анализ свойств пьезоэлектрических трансформаторов выходит за рамки этой работы, в качестве примеров пьезоэлементов, применяемых в типовых конструкциях трансформаторов, рассмотрим пьезоэлементы, представленные на Рис. 5.32. Цель состоит в том, чтобы проиллюстрировать методику определения их эффективных коэффициентов связи и резонансных частот. Особенность заключается в том, что входные параметры трансформатора зависят от состояния выхода. Рассмотрим режимы его холостого хода (замыкания на большое сопротивление) и короткого замыкания (замыкания на малое сопротивление). (Большое» и «малое» означают намного больше и намного меньше по сравнению с $1/\omega C_{el}^{S_i}$.)

5.7.4.3.6 Продольные колебания стержневого пьезоэлемента

Согласно выражениям (5.237), (5.240) и (5.252) после интегрирования по половинам стержня (Рис. 5.32 (а)), которые работают на поперечном (вход, отмеченный индексами I) и продольном (выход, отмеченный индексами II) пьезоэффекте в первой форме колебаний, получим следующие параметры эквивалентной схемы.

Коэффициенты электромеханической трансформации и емкости

$$n_I = \frac{d_{31}w}{s_{11}^E}, \quad n_{II} = \frac{2d_{33}wt}{s_{33}^E l}; \quad (5.294)$$

$$C_{el}^{S_1} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{wl}{2t} \quad \text{и} \quad C_{el}^{S_3} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{2wt}{l}. \quad (5.295)$$

Жесткость при условии, что выход преобразователя коротко замкнут (нагружен малым импедансом), равна

$$K_{\Sigma sc} = K_m^E + \Delta K_2, \quad (5.296)$$

где

$$K_m^E = \frac{\pi^2 wt}{4l} \left(\frac{1}{s_{11}^E} + \frac{1}{s_{33}^E} \right), \quad (5.297)$$

и ΔK_2 обусловлена продольным пьезоэффектом в одной половине стержня. Применив формулу (5.155), получим

$$\Delta K_2 = \frac{\pi^2 wt}{4ls_{33}^E} \frac{k_{33}^2}{1-k_{33}^2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right). \quad (5.298)$$

Таким образом,

$$K_{\Sigma sc} = \frac{\pi^2 wt}{4l} \left[\frac{1}{s_{11}^E} + \frac{1}{s_{33}^E(1-k_{33}^2)} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} k_{33}^2\right) \right] = \frac{\pi^2 wt}{4l} \left[\frac{1}{s_{11}^E} + \frac{1}{s_{33}^D} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} k_{33}^2\right) \right]. \quad (5.299)$$

Резонансная частота преобразователя при условии короткого замыкания выхода равна

$$f_{r.sc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{\Sigma sc}}{M_{eqv}}} \quad (5.300)$$

где $M_{eqv} = 0.5wtl\rho$, т.е.

$$f_{r.sc} = \frac{1}{2\sqrt{2}l} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{s_{11}^E} + \frac{1}{s_{33}^D} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} k_{33}^2\right) \right]}. \quad (5.301)$$

При разомкнутом выходе 2 -2

$$K_{\Sigma ocl} = K_m^E + \Delta K_2 + \frac{n_{II}^2}{C_{elI}^{S_3}} = K_{\Sigma sc} + \frac{n_{II}^2}{C_{elI}^{S_3}}. \quad (5.302)$$

Слагаемое, внесенное с электрической стороны, после подстановки выражений для n_{II} и $C_{elI}^{S_3}$ из (5.294) и (5.295) представим в виде

$$\frac{n_{II}^2}{C_{elI}^{S_3}} = \frac{\pi^2 wt}{4ls_{33}^D} \frac{8}{\pi^2} k_{33}^2. \quad (5.303)$$

Таким образом,

$$K_{\Sigma ocl} = \frac{\pi^2 wt}{4l} \left[\frac{1}{s_{11}^E} + \frac{1}{s_{11}^D} \right], \quad (5.304)$$

и формула для резонансной частоты становится

$$f_{r.sc} = \frac{1}{2\sqrt{2}l} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{s_{11}^E} + \frac{1}{s_{11}^D} \right)}. \quad (5.305)$$

Эффективный коэффициент связи преобразователя в том случае, если его выход разомкнут, определим по формуле (5.290). Выражения для входящих в нее энергий:

$W_{el}^{S_1} = 0.5V^2 C_{el}^{S_1}$, $W_{ell}^{S_3} = 0.5(\xi_o n_{II})^2 / C_{ell}^{S_3}$ и $W_{m\sigma oc} = 0.5\xi_o^2 K_{\Sigma oc}$. Принимая во внимание, что $(V / \xi_o) = (K_{\Sigma oc} / n_I)$, после некоторых преобразований получим

$$k_{eff}^2 = \alpha_{cl}^{oc} \frac{\alpha_{cl}^{oc}}{1 + \alpha_{cl}^{oc}}, \quad (5.306)$$

где

$$\alpha_{cl}^{oc} = \frac{n_I^2}{C_{el}^{S_1} K_{\Sigma oc}}, \quad \alpha_{cl}^{oc} = \frac{n_{II}^2}{C_{ell}^{S_3} K_{\Sigma oc}}. \quad (5.307)$$

Верхние индексы в коэффициентах α_c введены для того, чтобы отличать их значения, определенные при условии, что электроды на остальных частях пьезоэлемента разомкнуты (*oc* от *open circuited*), от определенных при условии, что они коротко замкнуты. Хотя при определении коэффициентов связи разницей между этими значениями можно пренебречь. Все параметры в выражениях для коэффициентов α_{cl}^{oc} и α_{cl}^{oc} известны из соотношений (5.294), (5.295) и (5.302). Окончательные значения этих коэффициентов равны

$$\alpha_{cl}^{oc} = \frac{8}{\pi^2} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1}{1 + s_{11}^E / s_{33}^D}, \quad \alpha_{cl}^{oc} = \frac{8}{\pi^2} k_{33}^2 \frac{1}{1 + s_{33}^D / s_{11}^E}. \quad (5.308)$$

Соответственно, эффективный коэффициент связи получим в виде

$$k_{eff}^2 = \frac{8}{\pi^2} k_{33}^2 \frac{1}{1 + s_{33}^D / s_{11}^E} k_{eff}^2, \quad (5.309)$$

где k_{eff} — эффективный коэффициент связи электромеханического преобразователя, имеющего вход I и жесткость $K_{\Sigma oc}$, а именно:

$$k_{eff}^2 = \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1 - k_{31}^2}{k_{31}^2} (1 + s_{11}^E / s_{33}^D) \right]^{-1}. \quad (5.310)$$

При применении керамики PZT-8 ($s_{11}^E = 11.5 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $s_{33}^E = 8.5 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $k_{31} = 0.3$, $k_{33} = 0.64$) коэффициент связи $k_{eff} = 0.08$. Таким образом, такой ЭМЭ преобразователь мало эффективен в силу двойного преобразования энергии.

Важной характеристикой ЭМЭ преобразователя является его коэффициент трансформации. Как это следует из схемы на Рис. 5.31, максимальное значение коэффициента

трансформации достигается при разомкнутом выходе, и выражение для этого значения

$$N_{tr} = \left| \frac{V_{IIoc}}{V_I} \right| = \frac{1}{V_I} \frac{|\dot{\xi}_o| n_{II}}{\omega C_{ell}^{S_3}}, \quad (5.311)$$

где

$$\dot{\xi}_o = V_I \frac{n_I \omega}{K_{\Sigma ocI}} Q_m \frac{f_{roc} / f}{\sqrt{1 + Q_m^2 [(f / f_{roc}) - (f_{roc} / f)]^2}}. \quad (5.312)$$

(В ходе преобразований использовано соотношение $(r_{mL} / K_{\Sigma oc}) = (1 / Q_m \omega_{roc})$).

Таким образом, выражение для коэффициента трансформации приобретает вид

$$N_{tr} = \frac{n_I n_{II}}{C_{ell}^{S_3} K_{\Sigma ocI}} Q_m \frac{f_{roc} / f}{\sqrt{1 + Q_m^2 [(f / f_{roc}) - (f_{roc} / f)]^2}}. \quad (5.313)$$

Полагая, что $K_{\Sigma ocI} \approx K_{\Sigma ocII}$, с помощью соотношения (5.307) первый множитель в этом выражении представим в виде

$$\frac{n_I n_{II}}{C_{ell}^{S_3} K_{\Sigma ocI}} Q_m = \sqrt{\alpha_{cl}^{oc} \cdot \alpha_{clI}^{oc}} \cdot \sqrt{\frac{C_{el}^{S_1}}{C_{ell}^{S_3}}} \cdot Q_m = N_{tr}(f_{res}). \quad (5.314)$$

В конечном счете,

$$N_{tr} = N_{tr}(f_{roc}) \frac{f_{roc} / f}{\sqrt{1 + Q_m^2 [1 - (f_{roc} / f)]^2}}, \quad (5.315)$$

где $N_{tr}(f_{roc})$ — максимальное значение коэффициента трансформации, которое достигается на резонансной частоте при разомкнутом выходе. Для рассматриваемого частного случая выражения для α_{ci}^{oc} заданы формулами (5.307), а для C_{ei}^S — формулами (5.295). После подстановки этих выражений в формулу (5.315) получим

$$N_{tr}(f_{roc}) = \frac{2l}{\pi^2 t} Q_m \cdot k_{33} k_{31} \sqrt{\frac{1 - k_{31}^2}{1 - k_{33}^2}} \cdot \frac{1}{1 + (s_{33}^E / s_{11}^E)(1 - k_{33}^2)}. \quad (5.316)$$

($s_{33}^D = s_{33}^E(1 - k_{33}^2)$ согласно (5.102)). Соотношение размеров l/t зависит только от геометрии пьезоэлемента, все остальные члены выражения определяются свойствами применяемой керамики и добротностью преобразователя, другими словами, механическими потерями в его конструкции. В приведенном выше примере с керамикой PZT-8

$$N_{tr}(f_{roc}) = 2.7 \cdot 10^{-2} (l/t) Q_m. \quad (5.317)$$

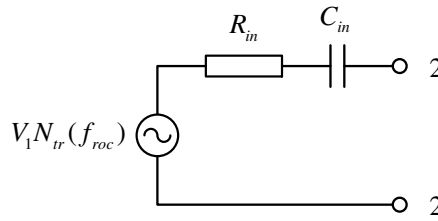


Рисунок 5.33: Представление работающего на резонансной частоте ЭМЭ преобразователя в качестве эквивалентного генератора.

ЭМЭ преобразователь может быть представлен в качестве эквивалентного генератора по отношению к выходу 2–2. Он показан на Рис. 5.33 для случая, в котором преобразователь работает на резонансной частоте. В соответствии с теоремой Тэвенина электродвижущая сила этого генератора равна $V_{2oc} = V_1 N_{tr}(f_{roc})$, а внутреннее сопротивление должно быть определено между клеммами 2–2 при коротко замкнутых клеммах 1–1. Легко показать, что на резонансной частоте $R_{in} = Q_m \alpha_{cII} / \omega_{roc} C_{ell}^{S_3}$ и $C_{in} \approx C_{ell}^{S_3}$. Таким образом, номинальная мощность ЭМЭ преобразователя (максимальная мощность на выходе, которую можно получить на согласованной нагрузке $R_{Ld} = R_{in}$) составляет

$$\dot{W}_{max} = \frac{[V_1 N_{tr}(f_{roc})]^2}{4R_{in}} = \frac{1}{4} V_1^2 \frac{N_{tr}^2(f_{roc})}{Q_m \alpha_{cII}^{oc}} \omega_{roc} C_{ell}^{S_3}, \quad (5.318)$$

где параметр, зависящий от свойств преобразователя (обозначим его $\gamma_{\dot{W}}$) равен

$$\gamma_{\dot{W}} = \frac{N_{tr}^2(f_{roc})}{Q_m \alpha_{cII}^{oc}} \omega_{roc} C_{ell}^{S_3}. \quad (5.319)$$

В рассмотренном выше примере с коэффициентом $N_{tr}(f_{roc})$, определяемом формулой (5.317), этот параметр равен

$$\gamma_{\dot{W}} = 7.3 \cdot 10^{-4} (l/t)^2 Q_m \frac{\omega_{roc} C_{ell}^{S_3}}{\alpha_{cII}^{oc}}. \quad (5.320)$$

Значения $C_{ell}^{S_3}$, ω_{roc} и α_{cII}^{oc} выражены через параметры пьезоэлемента формулами (5.295), (5.105) и (5.308), соответственно.

Максимальная (номинальная) мощность, которую может обеспечить пьезокерамический трансформатор, ограничена динамической механической прочностью

пьезоэлемента и его нагревом. Мощность, ограниченную механической прочностью, для рассматриваемого случая оценим следующим образом. Учитывая, что при первой форме колебаний $\xi(x) = \xi_0 \sin(\pi x / l)$ и деформация $S(x) = (\xi_0 \pi / l) \cos(\pi x / l)$, на резонансной частоте

$$T_{\max} = Y \frac{\pi \dot{\xi}_0}{\omega_{roc} l}, \quad (5.321)$$

где Y был бы модулем Юнга материала, если бы упругие свойства вдоль механической системы были однородными. В нашем примере модуль упругости равен $1 / s_{11}^E$ в пределах одной половины стержня и $1 / s_{33}^D$ в другой. Для оценок, включающих значение предельно допустимого динамического напряжения T_{pd} , которое известно приблизительно, приемлемо использовать среднее значение модуля Юнга $Y_{av} = 0.5[(1 / s_{11}^E) + (1 / s_{33}^D)]$. Таким образом, максимальная мощность, ограниченная механической прочностью

$$\dot{W}_{mT} = \dot{\xi}_0^2 r_{mL} = \frac{\omega_{roc}^2 l^2}{\pi^2 Y_{av}^2} r_{mL} T_{pd}^2. \quad (5.322)$$

Следует отметить, что здесь \dot{W}_{mT} определена на механической стороне эквивалентной схемы, т. к. r_{mL} это сопротивление согласованной нагрузки, преобразованное в механический контур. Оно равно

$$r_{mL} = \frac{\omega_{roc} M_{eqv}}{Q_m} = \frac{\pi f_{roc} \tilde{V} \rho}{Q_m}, \quad (5.323)$$

где \tilde{V} — объем пьезоэлемента. Полагая также, что $f_{roc} \approx (1 / 2l) \sqrt{Y_{av} / \rho}$, мы в конечном итоге получим выражение для максимальной плотности мощности в виде

$$(\dot{W}_{mT} / \tilde{V}) = \frac{\pi}{Q_m Y_{av}} f_{roc} T_{pd}^2 \text{ Вт/м}^3. \quad (5.324)$$

Согласно работе [2] (см. также Главу 11) можно принять, что предельно допустимое механическое напряжение равно $T_{pd} \approx 25$ МПа. Для керамики PZT-4 и PZT-8 $Y_{av} \approx 10^{11}$ Н/м². В результате получим оценку

$$(\dot{W}_{\max} / \tilde{V}) \leq \frac{20}{Q_m} f_{r(kHz)} \text{ Вт/см}^3. \quad (5.325)$$

Следует помнить, что эта величина мощности определена при условии оптимально

согласованной нагрузки, т. е. при КПД преобразования $\eta_{ee} = 0.5$. Это может привести к значительному перегреву пьезоэлемента. Увеличения КПД можно достигнуть за счет рас-согласования нагрузки и как следствие уменьшения величины мощности. Компромисс между КПД и величиной предельной мощности это дело проектирования конкретного пьезоэлектрического трансформатора.

5.7.4.3.7 Радиально колеблющийся круглый диск

Пьезоэлементы в виде круглых дисков с электродами различной конфигурации показаны на Рис. 5.32 (b) и (c). Электромеханические параметры радиально колеблющегося круглого диска с частичными электродами определены в Разделе 5.7.4.2. Здесь ограничимся рассмотрением только тех характеристик диска, которые важны с точки зрения анализа, аналогичного выполненному выше для стержневого пьезоэлемента. Будем полагать, что диск колеблется в первой форме колебаний и электроды разделены по окружности переменного радиуса r (Рис. 5.32 (b)). Параметры диска были рассмотрены в Разделе 5.7.4.2 при условии, что на пассивной части диска электроды есть, но они закорочены. Специфика пьезоэлемента для ЭМЭ преобразования состоит в том, что эти электроды принадлежат выходу преобразователя и они разомкнуты (поскольку режим холостого хода мы рассматриваем в качестве основного). В варианте круглого диска как на входной, так и на выходной частях пьезоэлемента действует поперечный пьезоэффект, поэтому эквивалентная схема на Рис. 5.30 может быть упрощена до представленной на Рис. 5.34.

Режим противоположных электрических сторон не влияет на значения их коэффициентов электромеханической трансформации и емкостей. Согласно выражению (5.278) для входной части, заключенной между центральными электродами,

$$n_I = \frac{2\pi d_{31} a Y_1^E}{1 - \sigma_1^E} \frac{r}{a} \theta_1 \left(\frac{r}{a} \right), \quad (5.326)$$

и для внешней части

$$n_{II} = \frac{2\pi d_{31} a Y_1^E}{1 - \sigma_1^E} \left[1 - \frac{r}{a} \theta_1 \left(\frac{r}{a} \right) \right]. \quad (5.327)$$

Соответствующие значения емкостей равны

$$C_{el}^{S_{1,2}} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \pi r^2 / t \text{ и } C_{ell}^{S_{1,2}} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \pi (a^2 - r^2) / t. \quad (5.328)$$

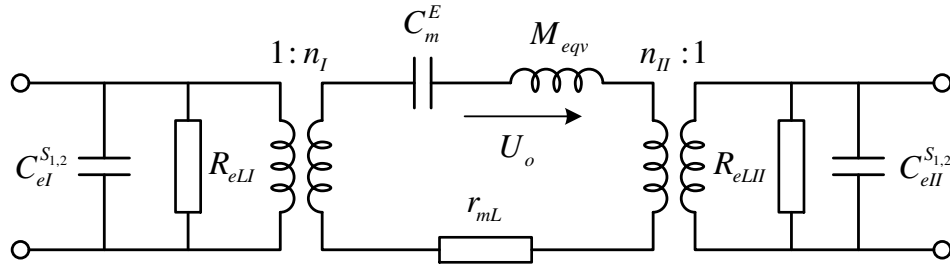


Рисунок 5.34: Эквивалентная схема ЭМЭ преобразователя в виде диска в режиме холостого хода на выходе.

Эквивалентная жесткость для случая, в котором противоположные пары электродов коротко замкнуты, в соответствии с (5.271) равна

$$K_m^E = \frac{10tY_1^E}{1 - \sigma_1^{E2}}. \quad (5.329)$$

При разомкнутых электродах на противоположной стороне

$$K_{m\ oclI} = K_m^E + \frac{n_{II}^2}{C_{ell}^{S_{1,2}}} = K_m^E \left(1 + \frac{n_{II}^2}{C_{ell}^{S_{1,2}} K_m^E} \right). \quad (5.330)$$

С учетом выражений для коэффициентов

$$\alpha_{cl} = \frac{n_I^2}{C_{el}^{S_{1,2}} K_m^E} \text{ и } \alpha_{cII} = \frac{n_{II}^2}{C_{ell}^{S_{1,2}} K_m^E}, \quad (5.331)$$

Формулы для жесткостей приобретают вид

$$K_{m\ ocl} = K_m^E \left(1 + \frac{n_{II}^2}{C_{ell}^{S_{1,2}} K_m^E} \right) = K_m^E (1 + \alpha_{cII}), \quad (5.332)$$

$$K_{m\ ocII} = K_m^E \left(1 + \frac{n_I^2}{C_{el}^{S_{1,2}} K_m^E} \right) = K_m^E (1 + \alpha_{cl}).$$

Здесь $K_{m\ oci}$ ($i = I, II$) — жесткость, определяемая при условии, что электроды на противоположной стороне разомкнуты. (Отметим, что коэффициенты α_{ci} , определенные при условии, что противоположные клеммы разомкнуты, в варианте со стержнем были маркированы α_{ci}^{oc}). Следуя выражениям (5.326)- (5.329),

$$\alpha_{cl} = A\theta_1^2\left(\frac{r}{a}\right), \quad \alpha_{cll} = A\frac{1}{1-(r/a)^2}\left[1-\frac{r}{a}\theta_1\left(\frac{r}{a}\right)\right]^2, \quad (5.333),$$

где

$$A = \frac{\pi}{5}(1 + \sigma_1^E)\frac{k_p^2}{1 - k_p^2}. \quad (5.334)$$

Для керамики PZT-4 и PZT-8 $A = 0.42$ и 0.29 .

Резонансная частота пьезоэлемента, измеренная на входных клеммах с разомкнутыми клеммами на выходе

$$\omega_{rI} = \sqrt{\frac{K_{mocl}}{M_{eqv}}} = \sqrt{\frac{K_m^E}{M_{eqv}}(1 + \alpha_{cll})} = \omega_{rsc}\sqrt{1 + \alpha_{cll}}, \quad (5.335)$$

где ω_{rsc} — резонансная частота диска, полностью покрытого электродами, а именно

$$\omega_{rsc} = \frac{2.05}{a}\sqrt{\frac{Y_1^E}{\rho(1 - \sigma_1^{E2})}}. \quad (5.336)$$

Резонансная частота, измеренная на выходных клеммах при разомкнутых электродах на входе,

$$\omega_{rII} = \omega_{rsc}\sqrt{1 + \alpha_{cl}}. \quad (5.337)$$

Коэффициенты α_{ci} соотносятся с эффективными коэффициентами связи так же как и при условии, что противоположные клеммы коротко замкнуты, т.е. по формуле (5.280). Эффективному коэффициенту связи центральной части диска соответствует α_{cl} , а периферийной части - α_{cll} .

На Рис. 5.35 представлены графики зависимостей коэффициентов α_{cl} и α_{cll} нормированных к множителю A от относительного радиуса центральных электродов. Следует помнить, что

$$\xi(r/a) = \xi_o\theta_1(r/a) = \xi_o\frac{J_1(2.05r/a)}{J_1(2.05)} = 1.74\xi_o J_1(2.05r/a). \quad (5.338)$$

Как видим, соотношение между эффективными коэффициентами связи входной и выходной секций диска можно изменять в широких пределах путем изменения радиуса центральных электродов. При $r/a \approx 0.46$ эффективные коэффициенты связи равны. Для

PZT-4 это $k_{eff} \approx 0.43$.

Выражение для коэффициента трансформации ЭМЭ преобразователя на резонансной частоте, полученное из общей формулы (5.314), в этом случае имеет вид

$$N_{tr}(f_{roc}) = Q_m \frac{n_I n_{II}}{C_{ell}^{S_{1,2}} K_m^E (1 + \alpha_{cl})} = Q_m \sqrt{\frac{C_{el}^{S_{1,2}}}{C_{ell}^{S_{1,2}}}} \frac{\sqrt{\alpha_{cl} \cdot \alpha_{clI}}}{1 + \alpha_{cl}}. \quad (5.339)$$

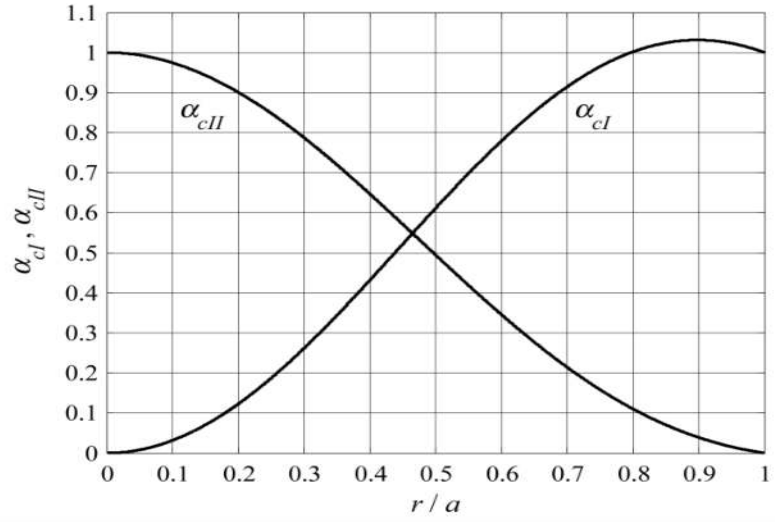


Рисунок 5.35: Зависимости коэффициентов α_{cl} и α_{clI} нормированных к фактору A от относительного радиуса центральных электродов.

После подстановки выражений (5.328) для емкостей и (5.333) для коэффициентов α_{cl} (при $r = 0.46a$ $\alpha_{cl} = \alpha_{clI} = 0.53A$) получим

$$N_{tr}(f_{roc}) = 0.52Q_m \frac{0.53A}{1 + 0.53A}. \quad (5.340)$$

При применении керамики PZT-4 или PZT-8 ($A = 0.42$ и 0.29) $N_{tr}(f_{roc}) \approx 9 \cdot 10^{-2} Q_m$ и $7 \cdot 10^{-2} Q_m$, соответственно.

При определении величины максимальной мощности на выходе преобразователя воспользуемся тем же приемом, что и в случае стержневого пьезоэлемента. При этом надо только внести изменения в значения эквивалентных параметров. Так в формуле (5.323) для r_{mL} значение эквивалентной массы согласно (5.265) надо заменить на $M_{eqv1} = 0.76M$, а резонансную частоту ω_{roc} следует определить по формуле (5.335). Из выражения (5.338) следует, что максимальное механическое напряжение в центре диска

$$T_{\max} = Y_1^E \left. \frac{d\xi(r/a)}{dr} \right|_{r=0} = \frac{3.6}{a} Y_1^E \xi_o. \quad (5.341)$$

В заключение заметим, что в зависимости от применений преимуществом могут обладать ЭМЭ преобразователи, реализующие вторые формы колебаний рассматриваемых пьезоэлементов. Соответствующие эквивалентные параметры, включая зависимости эффективные коэффициенты связи от относительной ширины $\Delta r / r_{in}$ электродов, расположенных вокруг узловых линий форм колебаний (см. Рис. 5.32 (с)) определены в предыдущих разделах. Поэтому провести анализ подобный выполненному для первых форм колебаний не должно составить труда.

Рассмотрение вопросов, связанных с принципами проектирования ЭМЭ преобразователей, выходит за рамки данной работы. Целью проведенного анализа являлось предложить метод оценки свойств пьезоэлементов, применяемых в таких преобразователях.

Информацию о различных аспектах проектирования пьезоэлектрических трансформаторов можно найти в обширной литературе, например, в работе [9] и в библиографии к ней.

5.8 Уравнения колебаний пьезоэлементов в геометрических координатах

Решение задачи о колебаниях пьезокерамического тела в обобщенных координатах носит достаточно общий характер и, по существу, сводится к формальной процедуре определения эквивалентных параметров, если известно решение задачи о колебаниях аналогичного тела, изготовленного из пассивного материала. Тем не менее, в ряде случаев предпочтительнее выводить уравнения колебаний пьезокерамических тел непосредственно в геометрических координатах. Для этого будем применять вариационный принцип так же, как это было сделано в Главе 4 для тел, изготовленных из пассивных материалов. Первоначально предположим, что весь объем тела заключен между сплошными электродами, чтобы избежать усложнений, вызванных отсутствием электродов на части тела или разницей в электрических условиях на частях электродов, которые электрически изолированы друг от друга.

Применение вариационного принципа к выводу уравнений движения для

пьезокерамических тел имеет ряд особенностей.

Во-первых, вместо потенциальной энергии w_{pot} следует рассматривать плотность внутренней энергии w_{int} и, следовательно, выражение для Лагранжиана принимает вид (см. (1.96))

$$L = w_{kin} - w_{int} + w_e. \quad (5.342)$$

Рассматривая выражение (5.34) для внутренней энергии $w_{int} = w_e^{S_i} + w_{mech}^E$. Для краткости будем применять нижний индекс m вместо $mech$, и формула для внутренней энергии примет вид $w_{int} = w_e^{S_i} + w_m^E$. Следует помнить, что при определении электрической энергии $w_e^{S_i} = \varepsilon_{33}^{S_i} E_3^2 / 2$ для элемента объема, расположенного внутри пьезокерамического тела, E_3 необходимо заменить на E'_3 в соответствии с соотношением (5.133).

Во-вторых, механические граничные условия следует формулировать с учетом пьезоэлектрического эффекта. Кроме того, следует также учитывать электрические граничные условия.

Для тел, движение которых подчиняется уравнению (4.41) (продольные и крутильные колебания стержней, пластины, колеблющиеся в их плоскости), в случае, если они выполнены из активных материалов, будем пользоваться уравнениями Эйлера в виде (4.2)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w_{kin}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{int}}{\partial \xi'_x} \right) = \frac{\partial w_e}{\partial \xi}, \quad (5.343)$$

где смещение ξ является функцией геометрических координат.

5.8.1 Продольные и крутильные колебания пьезокерамических стержней

5.8.1.1 Уравнения движения

Рассмотрим одномерные колебания стержней. Согласно формулам (5.132) и (5.133), в прямоугольных координатах получим

$$D_3 = \frac{C_{e\Delta}^{S_i} V}{l_e} + \frac{n_{\Delta}}{l_e} \int_0^{l_e} S_i(x_i) dx_3, \quad (5.344)$$

$$E'_3 = E_3 + \frac{n_{\Delta}}{C_{e\Delta}^{S_i} l_e} \int_0^{l_e} S_i(x_i) dx_3 - \frac{n_{\Delta}}{C_{e\Delta}^{S_i}} S_i(x_i), \quad (5.345)$$

где $S_i(x_i) = \xi'(x_i)$ это рабочая деформация и l_e расстояние между электродами. При поперечном пьезоэффекте $S_i(x_i) = S_1(x_1)$, $l_e = t$, $E'_3 = E_3$. При продольном пьезоэффекте $S_i(x_i) = S_3(x_3)$, $l_e = l$, $E'_3 \neq E_3$. Внутри стержня, секционированного в направлении электрических силовых линий, выражение для E'_3 в прямоугольных координатах в пределах секции длиной Δx_3 при условии что $\Delta x_3 \rightarrow 0$ приобретает вид

$$E'_3 = E_3 + \frac{n_\Delta}{C_{e\Delta}^{S_3} \Delta x_3} \int_{x_3}^{x_3 + \Delta x_3} S_3(x_3) dx_3 - \frac{n_\Delta}{C_{e\Delta}^{S_3}} S_3(x_3) \approx E_3 + \frac{n_\Delta}{C_{e\Delta}^{S_3}} [S_3(x_3) - S_3(x_3)] = E_3. \quad (5.346)$$

(Как было показано в Разделе 5.5.2, для выполнения этого условия на практике достаточно иметь не менее 6 секций на половине длины волны деформации.)

Таким образом, принципиально отличаются два варианта распределения деформаций вдоль силовых линий электрического поля:

1. Отсутствует распределение деформации $S = \xi'$ вдоль силовых линий, $E'_3 = E_3$. (Поперечный пьезоэффект и продольный пьезоэффект в теле, секционированном вдоль силовых линий при достаточном количестве секций.) В этом случае

$$\frac{\partial w_{\text{int}}}{\partial \xi'} = \frac{\partial}{\partial \xi'} (w_e^{S_i} + w_m^E) = \frac{\partial w_m^E}{\partial \xi'} = K_\Delta^E \xi'. \quad (5.347)$$

Для всех тел такого рода уравнение (5.343) совпадает с уравнением (4.2) для аналогичного тела, изготовленного из пассивного материала, если в это уравнение вместо w_{pot} подставить выражение для внутренней энергии w_{int} . Поэтому все уравнения вида уравнения (4.40) также совпадают, если жесткости K_Δ в них заменить на соответствующие величины K_Δ^E , приведенные в Таблице 5.3, и положить

$$c^2 = K_\Delta^E / m_\Delta = (c^E)^2. \quad (5.348)$$

2. Существует распределение деформаций вдоль силовых линий, E'_3 и $w_{el}^{S_i}$ зависят от деформаций ξ' . Таковы варианты колебаний пластин по толщине и колебаний сплошных стержней при продольном пьезоэффекте. Подставив значение E'_3 из формулы (5.346) в выражение для энергии $w_e^{S_i}$ и воспользовавшись при преобразованиях соотношениями (5.95) и (5.100), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{\text{int}}}{\partial \xi'} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial (w_e^{S_i} + w_m^E)}{\partial \xi'} \right] = K_{\Delta}^E \xi'' + \frac{n_{\Delta}^2}{C_{e\Delta}^{e_i}} \xi'' = K_{\Delta}^D \xi'' . \quad (5.349)$$

Таким образом, в этом случае уравнения движения также совпадают с уравнениями для аналогичных пассивных тел под действием той же системы внешних сил, если K_{Δ} в них заменить на K_{Δ}^D , что означает, что c^2 нужно заменить на

$$(c^D)^2 = K_{\Delta}^D / m_{\Delta} . \quad (5.350)$$

Поскольку силы электромеханического происхождения оказались не учтенными в уравнениях движения, они должны появиться в граничных условиях, так как имеет место электромеханическое преобразование.

5.8.1.2 Граничные условия

5.8.1.2.8 Механические граничные условия

Вначале рассмотрим идеальные механические граничные условия, при которых через границы тела не протекает поток механической энергии, т.е. $W_e = 0$. Эти условия следуют из соотношений $W_e = f \xi \Big|_{x=0,l} = 0$ при продольных и $W_e = M_f \varphi \Big|_{x=0,l} = 0$ при крутильных колебаниях. На свободном от воздействий участке границы возможны смещения и вращения, значит должны быть выполнены условия $f = 0$, $M_f = 0$. В случае продольных колебаний стержня на его торцах

$$f = S_{cs} T \Big|_{x=0,l} = S_{cs} (K_{\Delta}^E \xi' - n_{\Delta} E_3) \Big|_{x=0,l} , \quad (5.351)$$

из чего следует, что

$$\xi' \Big|_{x=0,l} = E_3 n_{\Delta} / K_{\Delta}^E . \quad (5.352)$$

Значения $n_{\Delta} / K_{\Delta}^E$ для соответствующих случаев приведены в Таблице 5.3. Так для стержня $(n_{\Delta} / K_{\Delta}^E) = d_{33}$ или d_{31} при продольном или поперечном пьезоэффекте, и e_{33} / c_{33}^E для пластины, колеблющейся по толщине.

С целью генерирования крутильных колебаний пьезокерамический стержень квадратного сечения должен быть поляризован вдоль оси x_3 перпендикулярной к поперечному сечению, как это показано на Рис. 5.36 (а). Выражение для крутильного момента

$$M_f = w \int_{-w/2}^{w/2} T_4 x_1 dx_1 + w \int_{-w/2}^{w/2} T_5 x_2 dx_2 . \quad (5.353)$$

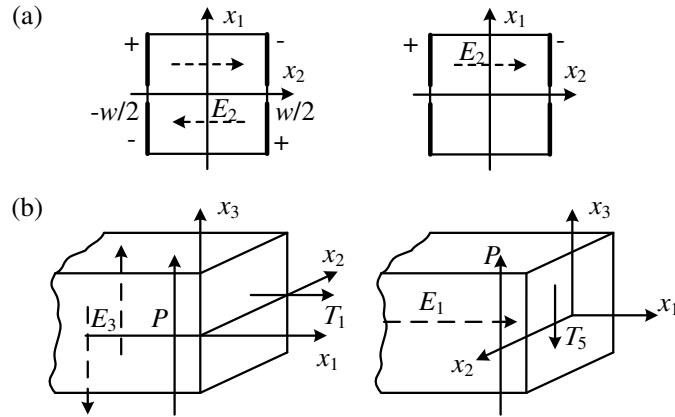


Рисунок 5.36: К формулировке граничных условий для пьезокерамического стержня при возбуждении колебаний: а) крутильных (слева - полностью активный стержень, справа - полупассивный); б) изгибных (слева – вариант продольных деформаций, справа – вариант деформаций сдвига).

Энергетическое состояние элемента объема пассивного стержня при крутильной деформации рассмотрено в Разделе 4.2.2, пример 6. В этом случае (электроды на боковых поверхностях стержня отсутствуют) $T_4 = S_4 / s_{44}^D$ и $T_5 = S_5 / s_{44}^D$. Согласно уравнению (4.24) $S_4 = -x_1 \phi'_{x_3}$ и $S_5 = x_2 \phi'_{x_3}$. Таким образом,

$$M_f = (\phi'_{x_3} / s_{44}^D) w \left(\int_{-w/2}^{w/2} x_1^2 dx_1 + \int_{-w/2}^{w/2} x_2^2 dx_2 \right) = \phi'_{x_3} (J_p / s_{44}^D) . \quad (5.354)$$

Из условия $M_f = 0$ следует, что $\phi'_{x_3} = 0$. В активном варианте, если электроды нанесены на боковые поверхности $x_2 = \pm w/2$ и $E_2 \neq 0$, то

$$T_4 = S_4 / s_{44}^E - (d_{15} / s_{44}^E) E_2, \quad T_5 = S_5 / s_{44}^D . \quad (5.355)$$

Подставив эти выражения для напряжений в формулу (5.353), получим

$$M_f = \phi'_{x_3} \frac{J_p}{2} \left(\frac{1}{s_{44}^E} + \frac{1}{s_{44}^D} \right) + M_{em} = G^E \phi'_{x_3} + M_{em} , \quad (5.356)$$

где

$$M_{em} = - \frac{w d_{15}}{s_{44}^E} \int_{-w/2}^{w/2} E_2 x_1 dx_1 \quad (5.357)$$

представляет собой момент электромеханического происхождения и G^E - жесткость при кручении пьезокерамического стержня квадратного сечения ($G^E = J_p (s_{44}^E + s_{44}^D) / 2s_{44}^E s_{44}^D$ и $J_p = w^4 / 6$). (Знак минус у момента показывает, что в положительном направлении вектора E_2 генерируемый момент действует в направлении против часовой стрелки). Если электроды нанесены таким образом, что $E_2(x_1)$ не является четной функцией, как это показано на Рис. 5.36 (а), то $M_{em} \neq 0$. В частности, если половины электродов соединены в противофазе, то $M_{em} = -w^3 d_{15} E_2 / 4s_{44}^E$. В результате, при отсутствии механического воздействия на торце (при $M_f = 0$) получим граничное условие в виде

$$\varphi'_{x_3} = 3s_{44}^D d_{15} E_2 / w(s_{44}^E + s_{44}^D). \quad (5.358)$$

Таким образом, эффект электромеханического преобразования эквивалентен тому, который создает сила $f_{em} = S_{cs} n_{\Delta} E_3$ при продольных колебаниях или момент M_{em} при крутильных, которые действуют на торце пьезокерамического стержня.

Примечательно, что электрическая энергия, которая на самом деле поступает в преобразователь через электроды, формально вследствие электромеханического преобразования оказывается, как бы превращенной в механическую энергию, которая поступает через торцы в силу граничных условий. Правда, эта энергия ($W_{em} = S_{cs} n_{\Delta} E_3 \xi|_{x=0,l}$ при продольных и $W_{em} = M_{em} \varphi|_{x=0,l}$ при крутильных колебаниях), являясь по природе электромеханической, может быть равно истолкована как механическая, так и как электрическая.

На заторможенной границе условия $\xi = 0$ и $\varphi = 0$ совпадают с условиями для пассивного тела. Преобразования электрической энергии в механическую, втекающую через заторможенную границу, не происходит, потому что в этом случае $W_{em} = 0$ ($f_{em} \xi = 0$, и $M_{em} \varphi = 0$). Таким образом, пьезокерамический стержень с заторможенными торцами и однополярными электродами, полностью покрывающими боковые грани, является электромеханически пассивным. Этот факт был также отмечен в Разделе 5.8, где его объяснение дано на основе анализа величины W_{em} через представление деформаций в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний (см. Рис. 5.23). Для того чтобы электромеханическое преобразование сделать эффективным в условиях заторможенных границ, следует изменить конфигурацию электродов, как это было рекомендовано в

Разделе 5.8. А именно, либо разделить электроды по узловым линиям распределения деформаций и соединить соседние участки в противофазе, либо просто удалить части электродов вблизи торцов.

В обоих случаях при выводе уравнений колебаний в геометрических координатах это следует сделать для каждого участка, заключенного между электродами одной полярности, лишенного электродов или выполненного из пассивного материала. Кроме того, на границах между участками должны быть выполнены условия механического сопряжения. Так, например, в вариантах стержней, представленных на Рис. 5.22, уравнения колебаний для участков 1 и 3 следует сформулировать как для пассивных со скоростью распространения $c = \sqrt{Y/\rho}$, где Y и ρ , строго говоря, параметры неполяризованной керамики. Для сегмента 2 скорость распространения следует определить, как для активного пьезоэлемента: c^E для вариантов на Рис. 5.22 (а) и (с), и c^D для варианта на Рис. 5.22 (b). (Рис. 5.22 (а) повторен как Рис. 5.37 (а)).

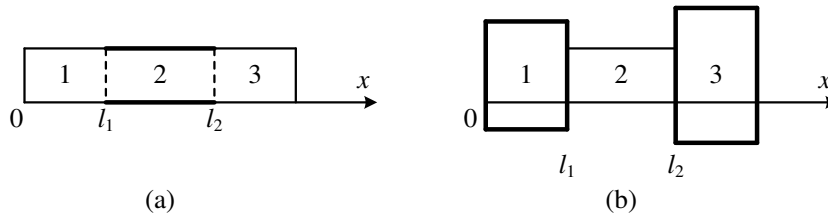


Рисунок 5.37: Примеры преобразователей с пассивными частями, имеющими площади поперечных сечения равные (а) и отличающиеся (b) от сечения пьезоэлемента.

В более общем варианте конфигурации преобразователя пассивные части стержня могут иметь отличные от пьезоэлемента поперечные сечения, как это показано на Рис. 5.37(b), и могут быть выполнены из различных материалов. В этом случае на границах между активной и пассивными частями должны быть выполнены условия сопряжения. Если все эти части совершают поршневые колебания (равномерные в плоскости поперечного сечения), при продольных колебаниях эти условия имеют вид:

$$\xi_1(l_1) = \xi_2(l_1), \quad \xi_2(l_2) = \xi_3(l_2), \quad (5.359)$$

$$S_{cs1}T_1(l_1) = S_{cs2}T_2(l_2), \quad S_{cs2}T_2(l_2) = S_{cs3}T_3(l_2). \quad (5.360)$$

В примере на Рис. 5.37 (а) площади поперечных сечений $S_{cs1} = S_{cs2} = S_{cs3}$. В силу

пьезоэффекта в активной части стержня следует применить для T_2 выражение (5.84).

Если это принять во внимание, то условия (5.360) примут вид

$$S_{cs1} K_{\Delta} \xi_1'(x) \Big|_{x=l_1} = S_{cs2} \left[K_{\Delta}^E \xi_2'(x) \Big|_{x=l_1} - n_{\Delta} E_3' \right], \quad (5.361)$$

$$S_{cs3} K_{\Delta} \xi_3'(x) \Big|_{x=l_2} = S_{cs2} \left[K_{\Delta}^E \xi_2'(x) \Big|_{x=l_2} - n_{\Delta} E_3' \right]. \quad (5.362)$$

В примере с продольным пьезоэффектом в активной части, показанном на Рис. 5.22 (b), в этих выражениях K_{Δ}^E следует заменить на K_{Δ}^D .

В варианте крутильных колебаний смещение ξ в условиях сопряжения следует заменить углом φ , а силу $f = S_{cs} T$ моментом M_f . При этом для поперечного сечения с координатой $x = l_1$ условие (5.362) приобретет вид

$$(J_{p1} / s_{44}) \varphi_1'(x) \Big|_{x=l_1} = \left[J_{p2} (s_{44}^E + s_{44}^D) / 2s_{44}^E s_{44}^D \right] \varphi_2'(x) \Big|_{x=l_1} + M_{em}, \quad (5.363)$$

где $(1/s_{44}) = \mu$ — модуль сдвига пассивного материала.

5.8.1.2.9 Электрические граничные условия

Электрические граничные условия в режиме электромеханического преобразования (в режиме излучения) вытекают из того, что $W_{el} \neq 0$. При механоэлектрическом преобразовании (при приеме в режиме холостого хода) $\bar{W}_{el} = VI^* = 0$ и имеют место идеальные граничные условия.

При одномерных продольных колебаниях сплошного стержня, применив соотношение (5.344), получим

$$I = \int_{S_{el}} \dot{D}_3 dS_{el} = C_e^{S_i} \dot{V} + \frac{n_{\Delta} S_{el}}{l_e} \left[\dot{\xi}(l_2) - \dot{\xi}(l_1) \right] = j\omega C_e^{S_i} V + \frac{n_{\Delta} S_{el}}{l_e} [U(l_2) - U(l_1)], \quad (5.364)$$

где $l_e = l_2 - l_1$ и S_{el} — площадь электрода.

При крутильных колебаниях деформации S_4 не изменяются в направлении силовых линий электрического поля E_2 , следовательно $E_2' = E_2$, и выражение для D_2 совпадает с таковым в местных пьезоэлектрических уравнениях, а именно:

$$D_2 = (d_{24} / s_{44}^E) S_4 + \varepsilon_{11}^T E_2 = (d_{24} / s_{44}^E) \varphi'(x_3) x_1 + \varepsilon_{11}^T E_2. \quad (5.365)$$

Учитывая, что половины электродов на Рис. 5.36 (a) соединены параллельно, получим

$$I = \int_{S_{el}} \dot{D}_2 dS_{el} = \frac{\varepsilon_{11}^T S_{el}}{w} \dot{V} + \frac{w^2 d_{24}}{4s_{44}^E} [\dot{\phi}(l_2) - \dot{\phi}(l_1)]. \quad (5.366)$$

Результаты для идеальных электрических граничных условий получим из выражений (5.364) и (5.366). Так при разомкнутых электродах $I = 0$ и подставив $V = V_{oc}$ в соотношение (5.364), получим

$$V_{oc} = -\frac{n_{\Delta} S_{el}}{l_e C_e^{S_i}} [\dot{\xi}(l_2) - \dot{\xi}(l_1)] = \frac{n_{\Delta} S_{el}}{l_e C_e^{S_i}} [U(l_1) - U(l_2)] \xi. \quad (5.367)$$

Отметим, что условие $I = 0$ не эквивалентно $D_3 = \text{const.}$, так как в пьезоэлементе с разомкнутыми электродами могут протекать уравнивающие токи, как это происходит в случае поперечного пьезоэффекта. При коротком замыкании электродов следует предположить, что $V = 0$ в формуле (5.364). В этом случае $E_3 = 0$ (напомним, что E_3 это напряженность электрического поля, создаваемого в заторможенном теле приложенным напряжением). При поперечном пьезоэффекте и в достаточно секционированном стержне $E'_3 = E_3 = 0$. При продольном пьезоэффекте в сплошном стержне $E'_3 \neq 0$ в предположении что $E_3 = 0$, как это следует из соотношения (5.133).

5.8.2 Уравнения изгибных колебаний и радиальных колебаний круглого диска

Уравнения изгибных колебаний пьезокерамических прямоугольных стержней и пластин и радиальных колебаний пьезокерамических дисков могут быть выведены непосредственно из вариационного принципа (4.42) с Лагранжианом, принятым в виде (5.342), подобно тому, как были получены уравнения (4.48) и (4.188) для изгибных колебаний стержней и круглых пластин и уравнение (4.160) для радиальных колебаний круглого диска, выполненных из пассивных материалов. В результате придем к выводу, что в этих случаях уравнения колебаний для пьезокерамических тел полностью совпадут с уравнениями для пассивных тел той же конфигурации, если заменить в последних K_{Δ} на K_{Δ}^E (c на c^E) при поперечном пьезоэффекте и при продольном пьезоэффекте в стержнях в случае, если они достаточно секционированы вдоль электрических силовых линий. Во всех случаях в уравнениях колебаний отсутствуют силы электромеханического происхождения. Их следует учесть в граничных условиях, которые должны быть сформулированы с учетом пьезоэлектрического эффекта.

5.8.2.1 Механические граничные условия

Идеальные механические граничные условия для уравнения (4.160) радиальных колебаний пьезокерамического диска получим при условии, что поток энергии через контур диска отсутствует, т. е. $W_e = f \xi_r(a) = 0$, из чего следует, что либо $\xi_r(a) = 0$, если контур заторможен, либо $f = S_b T_{rr} = 0$, если он свободен. Здесь S_b — площадь граничной поверхности диска. С учетом уравнений (5.11) и (5.12) получим выражение для напряжения $T_{rr} = T_1$ в форме

$$T_1 = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^{E2} - s_{12}^{E2}} \left(S_1 - \frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} S_2 \right) - \frac{d_{31} E_3}{s_{11}^E + s_{12}^E} = T_{em} - \frac{d_{31} E_3}{s_{11}^E + s_{12}^E} = 0. \quad (5.368)$$

Таким образом, на контуре свободном от внешнего воздействия действует сила электромеханического происхождения $f_{em} = S_b T_{em}$. Часть электрической энергии, подводимой к диску, оказалась как бы преобразованной в механическую

$$W_{em} = S_b d_{31} E_3 \xi_r(a) / (s_{11}^E + s_{12}^E), \quad (5.369)$$

втекающую через контур диска. При заторможенной границе $W_{em} = 0$, так как $\xi_r(a) = 0$, и диск электромеханически пассивен.

Рассмотрим теперь граничные условия для пьезокерамического стержня, совершающего колебания изгиба (уравнение (4.48)). Идеальные механические граничные условия на концах стержня следуют из условия отсутствия внешнего потока механической энергии, т. е. из условия (см. выражение (4.52))

$$W_e = M_f \xi' + Q \xi = 0. \quad (5.370)$$

Значения момента и перерезывающей силы M_f и Q (Рис. 5.36 (b)) связаны с механическими напряжениями на концах стержня в соответствии с формулами

$$M_f = w \int_{-l/2}^{l/2} T_1 x_3 dx_3, \quad Q = w \int_{-l/2}^{l/2} T_5 dx_3, \quad (5.371)$$

где T_1 и T_5 — нормальное и сдвиговое напряжения. Из уравнения (5.84) следует, что при поперечном пьезоэффекте $T_1 = S_1 / s_{11}^E - d_{31} E_3(x_3) / s_{11}^E$, где $S_1 = -x_3 \xi_3''$ (см. формулу (4.28)). Таким образом, выражение для момента получим в виде

$$M_f = (J / s_{11}^E) \xi_3'' - \frac{w d_{31}}{s_{11}^E} \int_{-l/2}^{l/2} E_3(x_3) x_3 dx_3. \quad (5.372)$$

Второй член исчезает, и электромеханическое преобразование не происходит, если $E_3(x_3)$ — четная функция. Функция $E_3(x_3)$ должна быть несимметричной относительно центральной плоскости стержня. Если стержень механически однороден, эта функция должна быть нечетной. Для этого направления векторов E и P должны совпадать в одной половине стержня по толщине и быть противоположными в другой, например, как показано на Рис. 5.36 (b). Предполагая, что $E_3(x_3) = E_3(-x_3)$, получим

$$M_f = (J / s_{11}^E) \xi_3'' - d_{31} E_3 t^2 / 4 s_{11}^E = (J / s_{11}^E) \xi_3'' - M_{em}. \quad (5.373)$$

В выражении (5.371) для Q напряжение T_5 следует подставить из уравнения (5.8) в виде

$$T_5 = c_{44}^E S_5 - e_{15} E_1, \quad (5.374)$$

где

$$S_5 = (t^2 / 4 - x_3^2) \xi_3''' / 2 \quad (5.375)$$

в соответствии с уравнением (4.33). В итоге

$$Q = J c_{44}^E \xi_3''' - e_{15} w t E_1, \quad (5.376)$$

т. е. перерезывающая сила возникает в результате электромеханического преобразования только в том случае, если $E_1 \neq 0$, как показано на Рис. 5.36 (b). Для этого при условии, что пьезоэлемент поляризован в направлении x_3 , рабочие электроды должны быть нанесены на поверхности перпендикулярные оси x_1 .

В случае свободно опертого ($M_f = 0, \xi_3 = 0$) и свободного ($M_f = 0, Q = 0$) конца стержня граничное условие на нем

$$\xi_3'' = 3 d_{31} E_3 / w t. \quad (5.377)$$

как это следует из формулы (5.373) (для стержня с прямоугольным сечением $J = w t^3 / 12$). Таким образом, приходим к такому же выводу, что и при продольных колебаниях, будто бы электрическая энергия, поступающая через электроды, оказывается преобразованной в электромеханическую энергию $W_{em} = M_{em} \xi_3'$, втекающую через границу стержня.

На заторможенном конце ($\xi_3 = 0, \xi_3' = 0$) $W_{em} = 0$, и преобразования энергии не происходит. Пьезокерамический стержень с двумя заторможенными концами

электромеханически пассивен. Граничные условия для уравнения (4.187) изгибных колебаний круглых пластин можно сформулировать аналогично условиям для стержней.

5.8.2.2 Электрические граничные условия

Электрические граничные условия сформулируем на основе выражения для тока через преобразователь. Для каждого конкретного случая плотность заряда D определяется по формуле (5.132). Так, в случае осесимметричных колебаний в плоскости круглого диска (поперечный пьезоэффект),

$$D_3 = \varepsilon_{33}^{s_{1,2}} E_3 + \frac{d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\xi_r}{r} \right). \quad (5.378)$$

При изгибных колебаниях прямоугольного стержня на половину его толщины

$$D_3 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) E_3 + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{t^2}{4} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_3^2}. \quad (5.379)$$

При изгибных колебаниях круглой пластины на одну половину пластины

$$D_3 = \varepsilon_{33}^{s_{1,2}} E_3 + \frac{t}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E} \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_3}{\partial r} \right). \quad (5.380)$$

Подставив решения уравнений колебаний для перемещений ξ_3 в выражения для плотностей заряда, получим электрические граничные условия в виде выражения для тока

$$I = \int_{S_{el}} \dot{D}_3 dS_{el}. \quad (5.381)$$

Вычисление этого интеграла не представляет трудностей, и полученные результаты могут быть проанализированы аналогично тому, как это сделано в Разделе 5.8.1.2.2.

Заметим, что, рассматривая задачи колебаний преобразователей в геометрических координатах, трудно определить, какие меры можно предпринять для повышения эффективности электромеханического преобразования, не прибегая к концепции решения через обобщенные координаты, как это было проиллюстрировано ранее. Например, трудно предсказать, как следует изменить размеры электродов и способ соединения их частей для оптимизации эффективности электромеханического преобразования. Еще более

сложным является то, что в этих случаях нам пришлось бы выводить и решать уравнения типа (4.47), (4.187) и (4.159) для участков механической системы, ограниченных частичными электродами, и согласовывать решения на границах участков. Из-за этих сложностей гораздо проще с самого начала решать соответствующие задачи в обобщенных координатах.

В этом отношении выгодно отличается решение уравнения (4.40), которое применимо к широко используемым конструкциям стержневых преобразователей, вид которых в общем случае схематично показан на Рис. 5.37(b). Это решение допускает удобную интерпретацию в виде эквивалентной электромеханической схемы, которая позволяет учитывать различные варианты нагрузки на торцах и изменять размеры и способы подключения электродов на поверхности стержня. Такое решение для пассивных механических систем проиллюстрировано в Разделе 4.3.3 с помощью механической эквивалентной Т-образной схемы, представленной на Рис. 4.6 (а). Произведем аналогичный анализ по отношению к стержневым преобразователям, совершающим продольные колебания, механические системы которых полностью или частично состоят из пьезоэлементов.

5.8.3 Эквивалентная шестиполусная схема стержневого преобразователя

Вернемся к уравнению (4.90) гармонических продольных колебаний. Общее решение этого уравнения для пассивного стержня имеет вид уравнения (4.91). Чтобы получить решение для пьезокерамического стержня, следует заменить в нем волновое число k : на k^E (c на c^E) для сплошных стержней при поперечном пьезоэффекте и для секционированных стержней (с достаточным числом секций согласно Разделу 5.5.2) при продольном пьезоэффекте; и на k^D (c^D) для сплошных стержней при продольном пьезоэффекте. Кроме того, следует учитывать электромеханические граничные условия (5.352), а также механические граничные условия. Последние возникают при наличии нагрузок и сил, действующих на торцы стержней, в виде выражений (4.96) и (4.97).

Вначале рассмотрим продольные колебания сплошных пьезокерамических стержней. Результаты анализа будут справедливы для всех механических систем, для которых справедливо уравнение (4.90), если применять соответствующие значения коэффициентов n_Δ , $C_{e\Delta}^{S_i}$ и K_Δ^E . Для пьезокерамических стержней с полномерными электродами (

$l_e = l$) при поперечном пьезоэффекте граничные условия, полученные объединением выражений (4.96), (4.97) и (5.352), приобретают вид

$$K_{\Delta}^E S_{cs} \xi'(x)|_{x=0} = -Z_0 \dot{\xi}_0 - F_0 + n_{\Delta} S_{cs} E_3'|_{x=0}, \quad (5.382)$$

$$K_{\Delta}^E S_{cs} \xi'(x)|_{x=l} = -Z_l \dot{\xi}_l - F_l + n_{\Delta} S_{cs} E_3'|_{x=l}. \quad (5.383)$$

Обратите внимание, что знак деформации на левом торце стержня (при $x = 0$) должен быть изменен на противоположный в соответствии с принятым правилом знаков (см. Разделы 1.5.2 и 4.3.3), и соответственно следует изменить знаки смещения и силы. В варианте продольного пьезоэффекта следует применять K_{Δ}^D вместо K_{Δ}^E . Варианты с поперечным и продольным пьезоэффектами будут рассмотрены отдельно несколько позднее, так как в этих случаях значения $E_3'|_{x=0,l}$ различаются. А именно, для поперечного пьезоэлектрического эффекта $E_3' = E_3 = V/t$ и для продольного пьезоэффекта

$$E_3' = \frac{V}{l} + \frac{n_{\Delta}}{C_{e\Delta}^{S_3} l} (\xi_l + \xi_0) = \frac{V}{l} + \frac{N_3}{j\omega C_e^{S_3}} (U_l + U_0), \quad (5.384)$$

как это следует из общего соотношения (5.346) с учетом того, что $n_{\Delta} = d_{33} / s_{33}^E$ и $C_{e\Delta}^{S_3} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$. (Обратите внимание, что знаки смещения ξ_0 и скорости U_0 уже изменены на противоположные.) В уравнении (5.384)

$$N_3 = wtd_{33} / s_{33}^E l \text{ и } C_e^{S_3} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) wt / l. \quad (5.385)$$

Выражение для тока, протекающего через преобразователь, можно представить в виде, аналогичном уравнению (5.364)

$$I = j\omega C_e^{S_i} V + N_i (U_l + U_0), \quad (5.386)$$

где при поперечном пьезоэффекте ($i = 1$)

$$N_1 = wd_{31} / s_{11}^E, \quad C_e^{S_1} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) wl / t, \quad (5.387)$$

при продольном пьезоэффекте ($i = 3$) N_3 и $C_e^{S_3}$ определены формулами (5.385). Подставляя выражения для $\xi(x)$ из уравнения (4.94) и для E_3' в граничные условия (5.382), получаем соотношения, аналогичные уравнениям (4.98) и (4.99). После введения обозначений для импедансов, согласно формулам (4.100), получим уравнения:

$$Z_1^E (U_l + U_0) + Z_2^E U_0 + Z_0 U_0 + F_0 = VN_1, \quad (5.388)$$

$$Z_1^E (U_l + U_0) + Z_2^E U_l + Z_l U_l + F_l = VN_1, \quad (5.389)$$

при поперечном пьезоэффекте, и

$$\left(Z_1^D - \frac{N_3^2}{j\omega C_e^{S_3}} \right) (U_l + U_0) + Z_2^D U_0 + Z_0 U_0 + F_0 = VN_3, \quad (5.390)$$

$$\left(Z_1^D - \frac{N_3^2}{j\omega C_e^{S_3}} \right) (U_l + U_0) + Z_2^D U_l + Z_l U_l + F_l = VN_3, \quad (5.391)$$

при продольном пьезоэффекте. Обозначения импедансов в этих уравнениях аналогичны обозначениям, введенным соотношениями (4.100) для пассивных стержней. А именно,

$$Z_1^E = -j\rho c^E S_{cs} / \sin(k^E l), \quad Z_2^E = j\rho c^E S_{cs} \tan(k^E l / 2) \quad (5.392)$$

$$Z_1^D = -j\rho c^D S_{cs} / \sin(k^D l), \quad Z_2^D = j\rho c^D S_{cs} \tan(k^D l / 2). \quad (5.393)$$

Уравнения (5.388) – (5.391) для вариантов с поперечным и продольным пьезоэффектом в сочетании с уравнением (5.386) для электрической стороны решают задачу расчета преобразователей. Сравнивая эти уравнения с аналогичными уравнениями для пассивного стержня, которые представлены четырехполюсной схемой, показанной на Рис. 4.6, приходим к выводу, что эквивалентные электромеханические схемы, описывающие колебания в пьезокерамических стержнях, могут быть представлены таким же образом. Различие состоит в том, что к этой схеме должен быть добавлен еще один вход, отвечающий за эффект электромеханического преобразования. Так измененные схемы приведены на Рис. 5.38 (a) и (b).

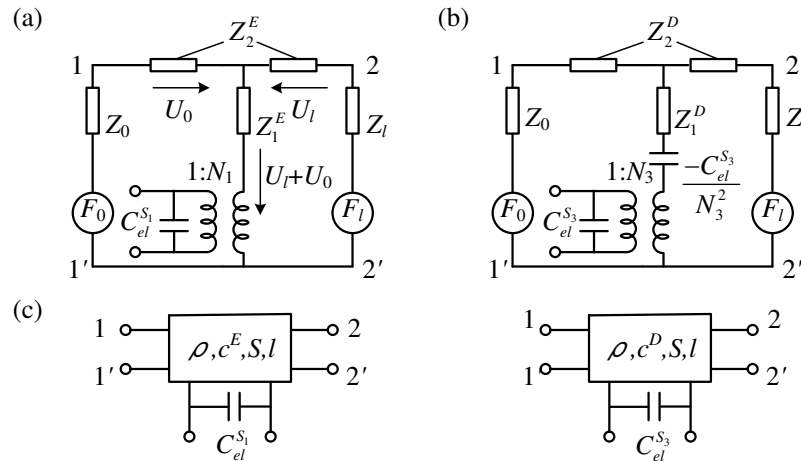


Рисунок 5.38: Эквивалентные электромеханические схемы: а) поперечный пьезоэффект, б) продольный пьезоэффект, в) условные изображения эквивалентных схем.

Эффект электромеханического преобразования в них производят идеальные трансформаторы с коэффициентами электромеханической трансформации N_i и появление «отрицательной податливости» $C = -C_e^{S_3} / N_3^2$ в случае продольного пьезоэффекта в сплошном стержне. Для секционированного стержня при продольном пьезоэффекте с числом секций более 6 справедлива схема Рис. 5.38 (а), если в ней заменить N_1 на N_3 и $C_e^{S_1}$ на $C_e^{S_3}$.

Вместо реальных шестиполюсных схем, представленных на Рис. 5.38 (а) и (б), будем для краткости применять их условные изображения в виде блоков с тремя входами, которые показаны на Рис. 5.38 (с). Соотношения между входными электрическими (V, I) и выходными механическими (U_l, U_0) величинами при различных механических нагрузках и электрических условиях могут быть определены с помощью каскадного соединения таких блоков. Приведем примеры применения каскадного соединения блоков к анализу вариантов пьезоэлементов, представленных на Рис. 5.39 и 5.40, которые ранее были рассмотрены в обобщенных координатах.

В этих примерах показано, как вместо решения новых уравнений движения с учетом условий сопряжения на границах частей, обладающих разными упругими и электромеханическими свойствами, можно применить каскадное соединение уже известных эквивалентных схем в виде их условных изображений, как это представлено на рисунках.

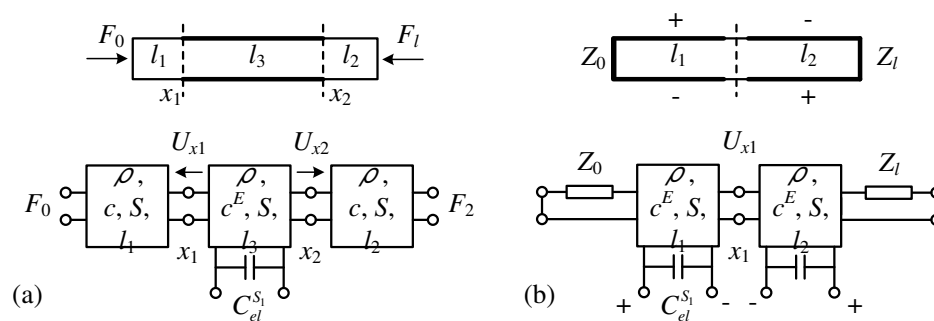


Рисунок 5.39: Варианты пьезоэлементов и соответствующие им каскадные эквивалентные схемы: (а) пьезоэлемент с частичными электродами, (б) пьезоэлемент с разделенными электродами.

Пример на Рис. 5.39 (а) соответствует преобразователю в виде пьезокерамического стержня с пассивными частями, а пример на Рис. 5.39(б) - пьезоэлементу с электрически

разделенными электродами, на которые можно подавать разные напряжения. Нет необходимости аналитически рассматривать условия сопряжения (5.361), (5.362), которые должны быть выполнены в поперечных сечениях с координатами x_1 и x_2 . В схемах, представленных на рисунке, они выполняются автоматически. Скорости колебаний этих поперечных сечений соответствуют «токам» $\underline{U}(x_1)$ и $\underline{U}(x_2)$ в соответствующих ветвях эквивалентной схемы. На отдельные части электродов на Рис. 5.39 (b) могут быть поданы разные напряжения. Вариант электрического соединения частей электродов в противоположной полярности, представленный на рисунке, показывает, как можно проанализировать влияние разного расположения электродов на частотную характеристику и качество электромеханического преобразования преобразователя.

На Рис. 5.40 представлена эквивалентная схема ЭМЭ преобразователя, которая рассмотрена в Разделе 5.7.4.3 в обобщенных координатах.

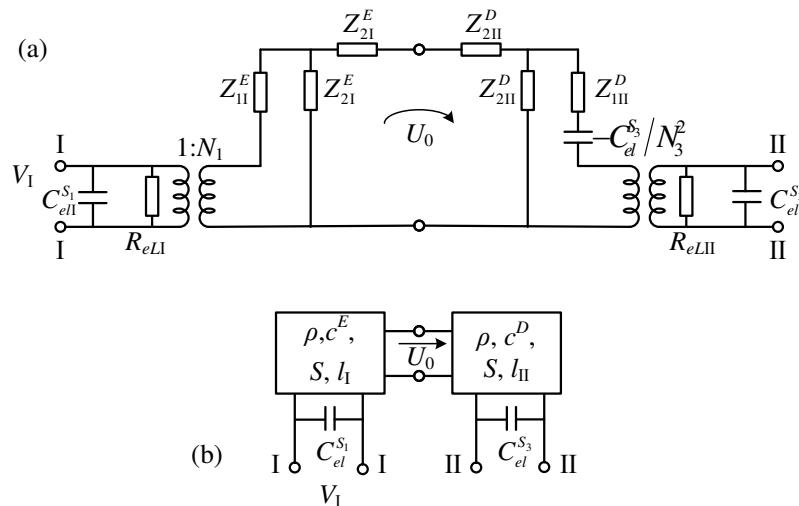


Рисунок 5.40: Эквивалентная схема ЭМЭ преобразователя: (a) полная эквивалентная схема, (b) каскадное представление эквивалентной схемы.

В этом случае половина стержня, в которой реализован продольный пьезоэффект, представляет собой механическую нагрузку для входной половины стержня, работающей при поперечном пьезоэффекте.

Достоинство метода анализа в геометрических координатах состоит в его универсальности: формально он дает возможность рассматривать работу преобразователя в широком диапазоне частот с учетом выполнения условий сопряжения между частями

механической системы преобразователя и граничных условий. Но универсальный характер этого метода получен за счет физической ясности и простоты вычислений, присущих анализу в обобщенных координатах во многих практически важных случаях, в которых эта универсальность не является необходимой. В частности, это работа преобразователей в частотных диапазонах вблизи резонансных частот и в широком диапазоне частот ниже первого резонанса, которые типичны для применений преобразователей в качестве излучателей и приемников.

5.9 Литература

31. G. A. Smolensky, V. A. Bokov, V. A. Isupov, N. N. Krainik, R. E. Pasynkov, A. I. Sokolov, and N. K. Yushin, *Ferroelectrics and Related Materials* (Gordon and Breach, New York, 1984).
32. Д. А. Берлинкур, Д. Р. Курран и Г. Жаффе, *Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их функции в преобразователях*, в *Физической Акустике*, под редакцией У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т.1, Часть
33. B. S. Aronov, "Energy analysis of a piezoelectric body under nonuniform deformation," *J. Acoust. Soc. Am.* 113(5), 2638-2646 (2003).
34. W. G. Cady, *Piezoelectricity* (McGraw-Hill, New York, 1946).
35. R. Holland, E. P. EeR Nisse, *Design of Resonant Piezoelectric Devices*, (MIT, Cambridge, 1969).
36. B. S. Aronov, "On the optimization of the effective electromechanical coupling coefficients of a piezoelectric body," *J. Acoust. Soc. Am.* 114(2), 792-800 (2003).
37. А. Ф. Улитко, "О теории электромеханического преобразования энергии в неоднородно деформированных пьезокерамических телах", *Прикладная механика* **13(10)**, 115–123 (1977)
38. J. A. Lewis, "The Effect of Driving Electrode Shape on the Electrical Properties of Piezoelectric Crystals," *Bell System Tech. J.* 40(5), 1259-1280 (1961).
39. E. M. Syed, F. P. Dawson, and E. S. Rogers, "Analysis and modeling of a Rozen type piezoelectric transformer," *Proc. IEEE PESC*, 4, 1761-1766 (2001).

ГЛАВА 6

АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

6.1 Введение

6.1.1 О содержании главы

В этой главе рассмотрены характеристики акустического поля, знание которых необходимо для расчета электромеханических преобразователей в качестве электроакустических. Приведены типичные варианты геометрии и волновые размеры излучающих поверхностей преобразователей, и общие выражения для их параметров, связанных с акустическим полем (6.1.3). При существовании большого количества прекрасных работ, посвященных решению различных задач излучения, нет такого литературного источника, в котором можно было бы непосредственно найти все сведения необходимые для расчета акустических характеристик преобразователей. Для того чтобы облегчить использование имеющихся результатов, в данной главе представлена краткая информация относительно общей теории излучения и методов решения задач излучения (6.2), а также конкретные результаты расчета акустических характеристик для наиболее применяемых конфигураций излучающих поверхностей (6.3–6.5).

В этой работе мы рассматриваем электроакустический преобразователь как часть передающей или приемной системы, которая работает с одним усилителем мощности или предусилителем (как часть изучающего или приемного канала). «Преобразователь» может быть изготовлен из одного пьезоэлемента или из нескольких механически изолированных элементарных преобразователей. Последний вариант применяют либо из технологических соображений, либо во избежание вредного эффекта связанных колебаний в механической системе пьезоэлемента. В том случае, если преобразователь состоит из нескольких механически изолированных частей, может возникнуть необходимость учитывать эффект акустического взаимодействия между ними. В еще большей степени эффект акустического взаимодействия может влиять на работу смежных каналов излучения в составе антенн. Поэтому в данной главе так же уделено специальное внимание методам

оценки акустического взаимодействия между преобразователями (6.6).

6.1.2 Геометрия и волновые размеры излучающих поверхностей

Типичные конфигурации излучающих поверхностей преобразователей можно разделить на несколько групп, как показано на Рис. 6.1.

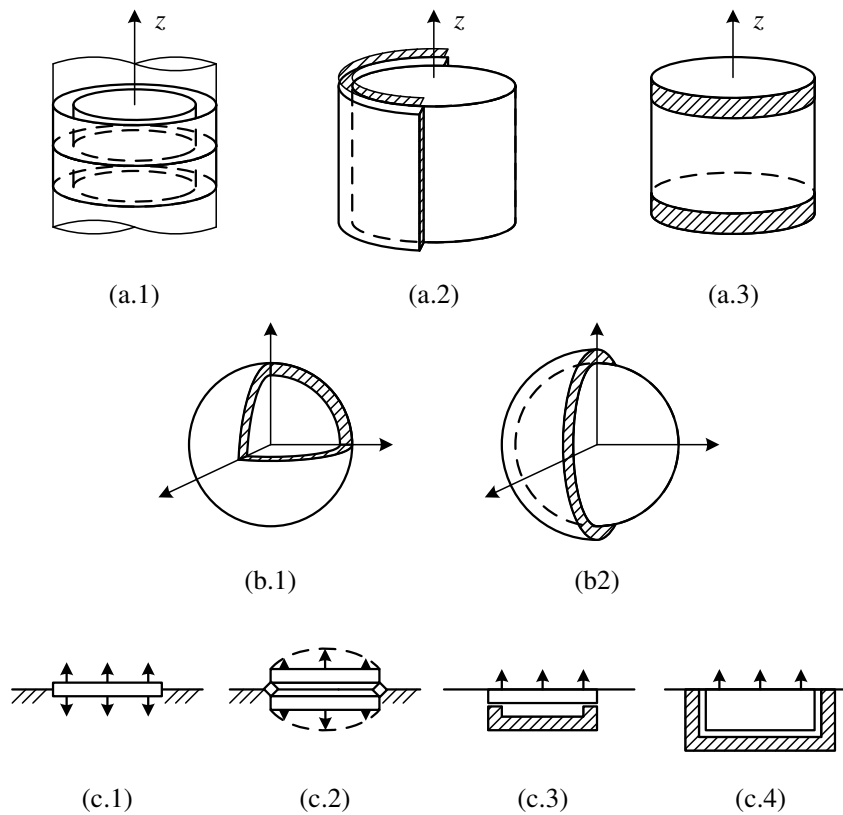


Рисунок 6.1: Конфигурации излучающих поверхностей преобразователей: а) цилиндрические поверхности, б) сферические поверхности, в) плоские поверхности.

Будем рассматривать следующие типы механических систем преобразователей и конфигурации их излучающих поверхностей.

Цилиндрические преобразователи, изготовленные из сплошных пьезокерамических цилиндров или состоящие из элементарных кольцевых преобразователей (Рис. 6.1 (а.1)). Преобразователи могут реализовывать различные формы колебаний по окружности, среди которых наиболее широкое применение находят «пульсирующие» (нулевая форма) и «осциллирующие» (первая форма) колебания. Преобразователи, состоящие из колец, которые совершают изгибные колебания (сплошные и с разрезом), и из неполных

колец также подпадают под эту категорию. Часть излучающей поверхности преобразователей такого рода может быть покрыта экраном для получения однонаправленного излучения в горизонтальной плоскости (Рис. 1 (а.2)). Для приблизительной оценки параметров цилиндрических преобразователей, связанных с акустическим полем, полезны модели бесконечно длинного цилиндрического излучателя и преобразователя конечной высоты, встроенного в бесконечно длинный жесткий цилиндрический экран того же диаметра, хотя реальные преобразователи имеют конечную высоту, как показано на Рис. 6.1 (а.3).

Сферические преобразователи представляют собой пьезокерамические тонкие сферы (Рис. 6.1 (b.1)), совершающие пульсирующие и осциллирующие колебания (в виде исключения также можно себе представить применение и более высоких форм колебаний). Сферические преобразователи могут быть частично экранированы с целью получения однонаправленного излучения (Рис. 6.1 (b.2)). Полусферический преобразователь так же подпадает под эту категорию.

Преобразователи с плоской излучающей поверхностью. Это пульсирующий поршневой излучатель (Рис. 6.1 (с.1)) и пластинчатые преобразователи изгибного типа, совершающие колебания с неравномерным распределением скорости по поверхности (Рис. 6.1 (с.2)). Двухсторонние преобразователи в силу симметрии можно рассматривать как встроенные заподлицо в бесконечный абсолютно жесткий экран. Размеры одного элементарного преобразователя изгибного типа обычно невелики по сравнению с длиной акустической волны. Преобразователи этого типа, имеющие одностороннюю конструкцию, применяют с тыльным экраном конечного размера (Рис. 6.1 (с.3)). Широкое применение находят стержневые излучатели типа Topriz с излучающей поверхностью в форме круглых или квадратных поршней, как правило, имеющих поперечные размеры меньше $\lambda/2$. При применении в качестве одиночного излучателя преобразователь может быть встроен в экран, как показано на Рис. 6.1 (с.4).

Другую разновидность преобразователей с плоской излучающей поверхностью, совершающей поршневые колебания, представляют собой прямоугольные пьезокерамические стержни или круглых пластины, колеблющихся по толщине. При этом преобразователи имеют большие рабочие частоты и размеры их излучающих поверхностей могут

достигать многих длин волн, как, например, в преобразователе для гидролокатора бокового обзора. (Вообще такие волновые размеры более характерны для антенных решеток, но мы рассматриваем эти излучающие системы, поскольку конструктивно они выполнены из единого пьезоэлемента и подпадают под категорию преобразователей согласно нашей классификации.) Тыльная поверхность таких преобразователей подлежит экранированию, как это показано на (Рис. 6.1 (с.4)).

6.1.3 Параметры преобразователей, связанные с акустическим полем

Частично содержание этого раздела было рассмотрено в Главе 1.

6.1.4 Преобразователи, имеющие одну механическую степень свободы

Преобразователям такого рода свойственно фиксированное распределение скоростей на излучающей поверхности в диапазоне рабочих частот, которое можно представить в виде

$$U(\mathbf{r}_\Sigma, \omega) = U_o(\omega) \cdot \theta(\mathbf{r}_\Sigma, \omega), \quad (6.1)$$

где \mathbf{r}_Σ — радиус-вектор, определяющий положение точки на поверхности преобразователя Σ , представленной на Рис. 6.3, и U_o — скорость опорной точки с радиус-вектором \mathbf{r}_o . Отметим, что все величины в Главе 6 будут представлены в комплексной форме.

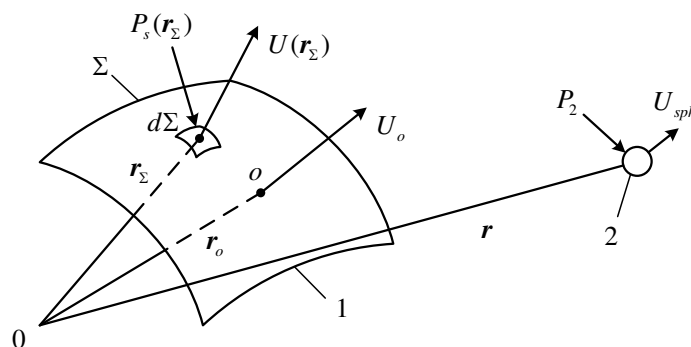


Рисунок 6.2: Иллюстрация механоакустической системы, состоящей из поверхности излучающего преобразователя (1) и пульсирующей сферы малого радиуса (2).

Следует определить звуковое давление в излучаемом акустическом поле $P(\mathbf{r})$ и, в частности, на поверхности преобразователя $P(\mathbf{r}_\Sigma)$. Это известная задача теории

акустического излучения при распределении скорости на поверхности преобразователя заданном в качестве одного из граничных условий.

6.1.4.1 Звуковое давление и коэффициент дифракции

Звуковое давление, создаваемое колеблющейся поверхностью, представим в виде

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\rho c}{r} U_o e^{-j(kr - \pi/2)} \chi(\mathbf{r}, \omega), \quad (6.2)$$

где функция $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ зависит от конфигурации излучающей поверхности и формы колебаний. Будем называть ее функцией дифракции преобразователя в режиме излучения. В дальнем поле эта функция не зависит от расстояния r и в нормированном виде представляет собой характеристику направленности преобразователя $H(\mathbf{r}, \omega)$

$$H(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\chi(\mathbf{r}, \omega)}{\chi(\mathbf{r}_n, \omega)} \Big|_{|r| \rightarrow \infty}. \quad (6.3)$$

Здесь \mathbf{r}_n — радиус-вектор, направленный вдоль акустической оси преобразователя.

Для равномерно колеблющегося (пульсирующего) сферического излучателя радиусом a (см. Раздел 2.2)

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\rho c}{r} e^{-j(kr - \pi/2)} U_o \frac{ka^2}{1 + jka} e^{-jka}, \quad (6.4)$$

и функция дифракции

$$\chi = \frac{ka^2}{1 + jka} e^{-jka}. \quad (6.5)$$

Введем понятие относительной объемной скорости $U_{\tilde{v}r}$ для произвольным образом колеблющейся поверхности, которую определим в виде

$$U_{\tilde{v}r} = U_o S_\Sigma, \quad (6.6)$$

где S_Σ — общая площадь излучающей поверхности. Эта величина не зависит от формы колебаний в отличие от «реальной» объемной скорости или силы источника

$$U_{\tilde{v}} = U_o \int_{\Sigma} \theta(\mathbf{r}) d\Sigma = U_o S_{av}. \quad (6.7)$$

где

$$S_{av} = \int_{\Sigma} \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma \quad (6.8)$$

— средняя площадь излучающей поверхности. Таким образом, для осциллирующей сферы $U_{\dot{V}_r} = U_o 4\pi a^2$, тогда как $U_{\dot{V}} = 0$. В случае, если волновой размер сферы мал ($ka \rightarrow 0$), из выражений (6.4) и (6.6) следует, что звуковое давление, создаваемое сферой, равно

$$P_o = \frac{\rho c}{r} e^{-j(kr-\pi/2)} U_o ka^2 = \frac{\rho c}{r} e^{-j(kr-\pi/2)} U_{\dot{V}_r} \frac{1}{2\lambda}. \quad (6.9)$$

Отношение звукового давления, создаваемого произвольным преобразователем, к звуковому давлению, создаваемому малой пульсирующей сферой, которая имеет ту же относительную объемную скорость, определим как коэффициент дифракции преобразователя в режиме передачи $k_{dif,t}$. Используя выражения (6.2) и (6.9), получим

$$\frac{P(\mathbf{r}, \omega)}{P_o(U_{\dot{V}_r})} = \frac{2\lambda \chi(\mathbf{r}, \omega)}{S_{\Sigma}} = k_{dif,t}(\mathbf{r}, \omega) \quad (6.10)$$

В случае сферического преобразователя

$$k_{dif,t} = \frac{1}{1 + jka} e^{jka}. \quad (6.11)$$

6.1.4.2 Комплексная величина сопротивления излучения

Акустическую мощность, излучаемую преобразователем, определим путем интегрирования плотности акустической мощности $P(\bar{\mathbf{r}}_{\Sigma}) U^*(\bar{\mathbf{r}}_{\Sigma}) d\Sigma$ по излучающей поверхности преобразователя Σ . В комплексной форме мощность акустического излучения

$$\bar{W}_{ac} = \int_{\Sigma} P(\mathbf{r}_{\Sigma}) U^*(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = U_o^* \int_{\Sigma} P(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma, \quad (6.12)$$

где звуковое давление $P(\mathbf{r}_{\Sigma})$ на поверхности преобразователя следует определять с помощью выражения (6.2). Излучаемую акустическую мощность представим в виде формулы

$$\bar{W}_{ac} = Z_{ac} |U_o|^2, \quad (6.13)$$

в которой Z_{ac} представляет собой комплексную величину сопротивления излучения (для

краткости импеданс излучения) преобразователя. Приравняв выражения (6.12) и (6.13), получим определение для импеданса излучения в виде

$$Z_{ac} = \frac{1}{U_0} \int_{\Sigma} P(\mathbf{r}_{\Sigma}) \cdot \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma. \quad (6.14)$$

В случае если излучатель состоит из нескольких элементарных преобразователей, соединенных параллельно (например, цилиндр, состоящий из колец), импедансы излучения элементарных преобразователей могут оказаться разными в силу акустического взаимодействия между ними. Эффекты взаимодействия будут рассмотрены подробно в Разделе 6.6. Здесь же отметим только, что в предположении, что скорости колебаний преобразователей равны, распределение звукового давления на их поверхностях в общем случае не равномерно. Если механическая система преобразователя представляет собой единое целое, то звуковое давление на ее поверхности усредняется, что приводит к некоторому значению импеданса излучения, определяемому формулой (6.14). Для элементарных преобразователей усреднение давления по их поверхностям может привести к различным значениям импедансов излучения. В результате, при одинаковых приложенных напряжениях скорости колебаний элементарных преобразователей окажутся различными, что противоречит первоначальному предположению об их равенстве. Для того чтобы в этом случае иметь возможность определять реальное распределение скоростей между элементарными преобразователями, вводят понятие о взаимном сопротивлении (импедансе) излучения между ними. По определению (см. Раздел 6.6) взаимный импеданс между двумя элементарными преобразователями, колеблющимися с одинаковым распределением скоростей $U = U_0 \theta(\mathbf{r})$, равен

$$z_{12} = \frac{1}{U_0} \int_{\Sigma_2} P_1(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma, \quad (6.15)$$

где $P_1(\mathbf{r}_{\Sigma_2})$ — звуковое давление, создаваемое одним преобразователем на заторможенной поверхности другого при условии, что все окружающие преобразователи также заторможены.

6.1.4.3 Коэффициент концентрации преобразователя.

Свойство преобразователя создавать в дальнем поле большую интенсивность в

направлении акустической оси по сравнению с интенсивностью, которую в той же точке создал бы ненаправленный преобразователь, излучающий ту же акустическую мощность, называют коэффициентом концентрации преобразователя (D). Согласно этому определению

$$D = \frac{|P_{tr}(\mathbf{r}_n, \omega)|^2}{|P_{omni}(\mathbf{r}_n, \omega)|^2}, \quad (6.16)$$

где $P_{tr}(\mathbf{r}_n, \omega)$ можно определить по выражению (6.2), \mathbf{r}_n — радиус-вектор, направленный вдоль акустической оси преобразователя (в направлении максимума характеристики направленности) и P_{omni} — звуковое давление, создаваемое в той же точке ненаправленным преобразователем. Значения звуковых давлений должны быть такими, чтобы излучаемые активные акустические мощности были равны. Для направленного преобразователя

$$\dot{W}_{ac tr} = \frac{|P_{tr}(\mathbf{r}_n, \omega)|^2 r^2}{\rho c} \int_{4\pi} |H(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\Omega, \quad (6.17)$$

где Ω — телесный угол и интегрирование следует выполнять по поверхности сферы радиусом r . Для ненаправленного преобразователя после интегрирования по сфере того же радиуса получим

$$\dot{W}_{ac omni} = \frac{4\pi r^2}{\rho c} |P_{omni}(\mathbf{r}_n, \omega)|^2. \quad (6.18)$$

Приравняв соотношения (6.17) и (6.18) и применив определение (6.16), получим следующее выражение для коэффициента концентрации

$$D = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} |H(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\Omega}. \quad (6.19)$$

Выполнение интегрирования в этой формуле за исключением некоторых частных случаев представляет значительные трудности. Существует полезное соотношение между активным сопротивлением излучения r_{ac} , коэффициентом концентрации и значением функции дифракции в направлении акустической оси $\chi(\mathbf{r}_n, \omega)$, которое позволяет эти трудности обойти. Согласно выражению (6.2),

$$|P_r(\mathbf{r}_n, \omega)|^2 = \left(\frac{\rho c}{r}\right)^2 |U_o|^2 |\chi(\mathbf{r}_n, \omega)|^2. \quad (6.20)$$

Объединив это выражение с (6.17), (6.19) и выражением для акустической мощности

$$\dot{W}_{actr} = r_{ac} |U_o|^2, \quad (6.21)$$

получим соотношение

$$r_{ac} = 4\pi\rho c \frac{1}{D} \cdot |\chi(\mathbf{r}_n, \omega)|^2. \quad (6.22)$$

Эта формула позволяет определить коэффициент концентрации в том случае, если известно активное сопротивление излучения и значение функции дифракции на акустической оси преобразователя, которые может быть относительно легко получить экспериментально.

6.1.4.4 Эквивалентная сила и коэффициент дифракции в режиме приема

В режиме приема акустическое поле представляет собой источник энергии W_{am} , поступающей в преобразователь. При условии, что механическая система преобразователя имеет одну степень свободы, форма ее колебаний под действием акустического поля остается той же, что и для режима передачи, т. е. определяется формулой (6.1). Поэтому выражение для акустомеханической мощности имеет вид

$$\bar{W}_{am} = \int_{\Sigma} P(\mathbf{r}_{\Sigma}) U^*(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma = U_o^* \int_{\Sigma} P(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma, \quad (6.23)$$

где $P(\mathbf{r}_{\Sigma})$ — звуковое давление на поверхности преобразователя. Представим звуковое давление в виде

$$P(\mathbf{r}_{\Sigma}) = P^U(\mathbf{r}_{\Sigma}) - P_{br}(\mathbf{r}_{\Sigma}). \quad (6.24)$$

Здесь $P^U(\mathbf{r}_{\Sigma})$ — звуковое давление на заторможенной поверхности преобразователя (при $U = 0$) и $P_{br}(\mathbf{r}_{\Sigma})$ — звуковое давление, обусловленное обратным излучением (индекс *br* от *back radiation*), которое создают колебания поверхности преобразователя, возникающие под воздействием акустического поля. После подстановки выражения (6.24) для $P(\mathbf{r}_{\Sigma})$ в уравнение (6.23) получим выражение для акустомеханической энергии в виде

$$\bar{W}_{am} = U_o^* \int_{\Sigma} P^U(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma - U_o^* \int_{\Sigma} P_{br}(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma \quad (6.25)$$

или, в сокращенной форме,

$$\bar{W}_{am} = \bar{W}_{am}^U - \bar{W}_{acbr}. \quad (6.26)$$

Второй член в правой стороне соотношения (6.25) представляет собой акустическую энергию обратного излучения, и его можно представить в виде

$$\bar{W}_{acbr} = Z_{ac} |U_o|^2, \quad (6.27)$$

где Z_{ac} это импеданс излучения преобразователя по формуле (6.14).

Интеграл в первом члене имеет размерность силы. Назовем ее эквивалентной силой F_{eqv} . Таким образом,

$$F_{eqv} = \int_{\Sigma} P^U(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma, \quad (6.28)$$

и в соотношении (6.26)

$$\bar{W}_{am}^U = U_o^* F_{eqv}. \quad (6.29)$$

В результате выражение (6.26) для акустомеханической мощности представим в виде

$$\bar{W}_{am} = (F_{eqv} - Z_{ac} U_o) U_o^*. \quad (6.30)$$

С другой стороны, если обозначить входное сопротивление (импеданс) механической системы Z_m , то мощность, поступающая в механическую систему, равна

$$\bar{W}_{am} = Z_m U_o U_o^*. \quad (6.31)$$

Сравнив соотношения (6.29) и (6.30), получим

$$(Z_m + Z_{ac}) U_o = F_{eqv}. \quad (6.32)$$

Это соотношение показывает, что действие акустического поля на преобразователь можно рассматривать как действие на его входное сопротивление «акустомеханического генератора» с механодвижущей силой F_{eqv} и внутренним сопротивлением Z_{ac} . Особенность этого «генератора» состоит в том, что его параметры зависят от геометрии и формы колебаний нагрузки, которую представляет собой преобразователь. Вычисление

эквивалентной силы F_{eqv} является предметом теории излучения.

В случае если размеры преобразователя малы по сравнению с длиной звуковой волны, $P^U(\mathbf{r}_\Sigma) \approx P_0$, где P_0 — звуковое давление в распространяющейся волне, и

$$F_{eqv} = P_0 \int_{\Sigma} \theta(\bar{\mathbf{r}}_\Sigma) d\Sigma = P_0 S_{av}. \quad (6.33)$$

Если размеры преобразователя сопоставимы с длиной волны, эквивалентную силу можно представить в виде

$$F_{eqv} = P_0 k_{dif r} S_\Sigma, \quad (6.34)$$

где $k_{dif r}$ — коэффициент дифракции преобразователя в режиме приема и S_Σ — общая площадь поверхности излучения. Коэффициент дифракции $k_{dif r}$ определим, приравняв формулы (6.34) и (6.28) после того, как в результате решения задачи дифракции на заторможенной поверхности преобразователя будет найдено распределение звукового давления $P^U(\mathbf{r}_\Sigma)$. На самом деле, если уже решена задача излучения, то коэффициент дифракции $k_{dif r}$ можно определить применяя принцип взаимности к механоакустической системе, показанной на Рис. 6.3, которая состоит из рассматриваемого преобразователя с поверхностью Σ и пульсирующей сферы малого радиуса a , расположенной на большом расстоянии от преобразователя. Анализ соотношений взаимности выполнен в Разделе 2.2, и результат представлен в виде формулы

$$F_{eqv} = 2\lambda \chi(\mathbf{r}, \omega) P_0. \quad (6.35)$$

Функция $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ была представлена в решении задачи излучения (уравнение (6.2)). Сравнив выражения (6.34) и (6.35), получим выражение для коэффициента дифракции преобразователя в режиме приема

$$k_{dif r} = \frac{2\lambda \chi(\mathbf{r}, \omega)}{S_\Sigma}. \quad (6.36)$$

Оно совпадает с выражением (6.10) для коэффициента дифракции $k_{dif t}$, введенным для преобразователя в режиме передачи, что является одним из проявлений принципа взаимности. Поэтому нижние индексы t и r у коэффициентов дифракции будут в дальнейшем опущены.

6.1.4.5 Преобразователи с механическими системами, имеющими несколько степеней свободы

В общем случае механические системы электроакустических преобразователей следует рассматривать как имеющие несколько степеней свободы. Другими словами, распределение скоростей на поверхности механической системы в общем случае является функцией ряда независимых переменных (обобщенных скоростей). Так, если фактическое распределение скоростей на поверхности преобразователя представить в виде ряда

$$U(\mathbf{r}_\Sigma, \omega) = \sum_{i=1}^N U_i(\omega) \cdot \theta_i(\mathbf{r}_\Sigma), \quad (6.37)$$

где $\theta_i(\mathbf{r}_\Sigma)$ — множество линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям для механической системы, то величины $U_i(\omega)$ можно рассматривать как обобщенные скорости. В этом случае параметры преобразователя, связанные с акустическим полем, следует выразить через обобщенные скорости.

Звуковое давление, создаваемое преобразователем, распределение скорости по поверхности которого имеет вид ряда (6.37), представим в виде

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{i=1}^N P_i(\mathbf{r}, \omega), \quad (6.38)$$

где $P_i(\mathbf{r}, \omega)$ — звуковое давление, которое создает преобразователь с формой колебаний θ_i и обобщенной скоростью U_i . В соответствии с уравнением (6.2)

$$P_i(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\rho c}{r} U_i e^{-j(kr - \pi/2)} \chi_i(\mathbf{r}, \omega), \quad (6.39)$$

и $\chi_i(\mathbf{r}, \omega)$ — функция дифракции, соответствующая распределению скорости $\theta_i(\mathbf{r})$ на поверхности преобразователя.

Выражение для коэффициентов дифракции при форме колебаний θ_i аналогично формуле (6.10), а именно

$$k_{dif i} = \frac{P_i(\mathbf{r}, \omega)}{P_0(U_{\bar{v}_r})} = \frac{2\lambda \chi_i(\mathbf{r}, \omega)}{S_\Sigma}. \quad (6.40)$$

Излучаемую преобразователем акустическую мощность после подстановки распределения скорости (6.37) и звукового давления, выраженного рядом (6.38), под интеграл

в формуле (6.12) представим в виде

$$\bar{W}_{ac} = \int_{\Sigma} \left[\sum_{l=1}^N P_l^*(\mathbf{r}_{\Sigma}, \omega) \right] \left[\sum_{i=1}^N U_i \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) \right] d\Sigma = \sum_{i=0}^N Z_{acii} U_i \cdot U_i^* + \sum_{i \neq l}^N z_{acil} \cdot U_i \cdot U_l^* . \quad (6.41)$$

В этом выражении Z_{acii} представляет собой собственное сопротивление излучения формы колебаний θ_i и z_{acil} — взаимное сопротивление излучения между формами колебаний θ_i и θ_l . В случае если опорные функции θ_i ортогональны на поверхности преобразователя (такой выбор системы опорных функций является предпочтительным), то взаимные сопротивление излучения исчезают.

Эквивалентную силу F_{eqvi} , соответствующую форме колебаний θ_i , можно определить из выражения для акустомеханической энергии \bar{W}_{am}^U в форме

$$F_{eqvi} = \frac{\partial \bar{W}_{am}^U}{\partial U_i} . \quad (6.42)$$

Здесь выражение для акустомеханической энергии после подстановки $U(\mathbf{r}_{\Sigma})$ в формуле ряда (6.37) в формулу (6.23) имеет вид

$$\bar{W}_{am}^U = \int_{\Sigma} P^U(\mathbf{r}_{\Sigma}) \left[\sum_{i=0}^N U_i \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) \right]^* d\Sigma . \quad (6.43)$$

Таким образом, эквивалентная сила, соответствующая форме колебаний θ_i , равна

$$F_{eqvi} = \int_{\Sigma} P^U(\mathbf{r}_{\Sigma}) \theta_i(\mathbf{r}_{\Sigma}) d\Sigma . \quad (6.44)$$

6.2 Постановка задачи излучения

6.2.1 Акустическое волновое уравнение

Теория акустического излучения рассматривает акустические процессы как линейные и происходящие в идеальной (невязкой) жидкости. Хотя реальные жидкости обладают некоторой вязкостью, она достаточно мала, чтобы ее можно было не учитывать в линейном акустическом уравнении движения. Некоторые вращательные эффекты и связанные с ними деформации сдвига в реальной жидкости ограничены тонким слоем вблизи границ (пограничный слой), где они могут привести к потере энергии. Исходя из

предположения линейности, акустическое поле можно описать одной скалярной функцией, потенциалом скорости $\Phi(\mathbf{r}, t)$, с которым скорость частиц $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и звуковое давление $p(\mathbf{r}, t)$ в поле связаны следующим образом:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{grad} \Phi = -\nabla \Phi, \quad (6.45)$$

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (6.46)$$

где ρ_0 — плотность жидкости в состоянии равновесия.

Заметим, что в некоторых работах ([1], [2]) приняты соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi = \nabla \Phi, \quad (6.47)$$

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (6.48)$$

В векторном анализе принято считать, что направление вектора совпадает с направлением самого быстрого уменьшения потенциала (т.е. должно быть $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$), и описания электрических полей через электрический потенциал соответствуют этому определению. Для акустических полей соотношения (6.45), (6.46) и (6.47), (6.48) можно применять взаимозаменяемо, если этого придерживаться последовательно на протяжении всей работы. В этом смысле показательно, что направление вектора потока акустической энергии

$$\mathbf{\Omega} = p\mathbf{v} = -\rho \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.49)$$

инвариантно к этому выбору. Фактически, выбор системы соотношений связан с правилом знаков для используемых независимых переменных.

Вывод акустического волнового уравнения (см. работы [1], [2]) предполагает знание соотношений между основными величинами, характеризующими акустическое поле в элементарном объеме жидкости, а именно скоростью частиц \mathbf{v} ; звуковым давлением $p = \tilde{P} - \tilde{P}_o$, где \tilde{P} — мгновенное и \tilde{P}_o — равновесное значения давления; и «сжатостью» (при сжатии и расширении) $s = (\rho_0 - \rho) / \rho_o$, где ρ — мгновенное и ρ_o — равновесное значения плотности жидкости. Это следующие соотношения:

Уравнение состояния

$$p = B s , \quad (6.50)$$

где $B = \rho_0 (\partial \tilde{P} / \partial \rho)_{\rho_0}$ — адиабатический объемный модуль (все акустические процессы в жидкости можно считать адиабатическими в применяемом на практике диапазоне частот). Предполагается, что $|s| \ll 1$. Отметим, что в фазе сжатия (при $\rho / \rho_0 > 1$) и сжатость, и звуковое давление отрицательны, а в фазе расширения (при $\rho / \rho_0 < 1$) они положительны. Это аналог правила знаков для деформации и напряжения в механических системах (см. Раздел 1.5.2).

Линеаризованное (при $|s| \ll 1$) уравнение непрерывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{div}(\rho_0 \mathbf{v}) , \quad (6.51)$$

или
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (6.52)$$

Из закона сохранения массы следует, что

$$d(\rho \tilde{V}) = \rho_0 d\tilde{V} + \tilde{V} d\rho = 0 , \quad (6.53)$$

и учитывая, что $ds = -d\rho / \rho_0$, из уравнения (6.53) получим

$$p = B \frac{d\tilde{V}}{\tilde{V}} . \quad (6.54)$$

Это уравнение представляет собой акустический эквивалент закона Гука.

Применив второй закон Ньютона к элементу объема идеальной жидкости, получим уравнение (линеаризованное уравнение Эйлера)

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p . \quad (6.55)$$

Объединив уравнения (6.45), (6.46) и (6.55), для потенциала скорости получим волновое уравнение

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 . \quad (6.56)$$

Здесь ∇^2 — дифференциальный оператор (оператор Лапласа), который в прямоугольных координатах имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (6.57)$$

и c — скорость звука в жидкости

$$c = \sqrt{B / \rho_0}. \quad (6.58)$$

Это выражение аналогично выражению для скорости распространения продольных колебаний в стержне $c = \sqrt{Y / \rho}$. Таким образом, объемный модуль B можно рассматривать как аналог модуля Юнга. Применяв выражения (6.50) и (6.58), получим связь между звуковым давлением и сжатостью

$$p = c^2 \rho_0 s. \quad (6.59)$$

Альтернативой продемонстрированному ньютоновскому подходу является способ вывода волнового уравнения, основанный на применении вариационного принципа наименьшего действия³. Приведем этот вывод, поскольку он соответствует общему применению энергетического метода для анализа электроакустических преобразователей, включая и связанные с этим задачи излучения.

Представим Лагранжиан для малых колебаний элемента объема невязкой жидкости в виде

$$L = w_{kin} - w_{pot}, \quad (6.60)$$

где w_{kin} и w_{pot} — плотности кинетической и потенциальной энергии элемента объема.

Плотность кинетической энергии жидкости с учетом выражения (6.45) равна

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 [(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 + (\Phi'_z)^2]. \quad (6.61)$$

Потенциальная энергия элемента объема — это работа, необходимая для изменения его состояния из состояния равновесия ($s = 0$) в состояние, характеризующееся сжатостью s , то есть

$$w_{pot} = \int_0^s p ds. \quad (6.62)$$

После подстановки давления из выражения (6.59) получим

$$w_{pot} = \int_0^s \rho_0 c^2 s ds = \frac{\rho_0 c^2 s^2}{2} = \frac{p^2}{2\rho_0 c^2}, \quad (6.63)$$

Или, со ссылкой на выражение (6.46),

$$w_{pot} = \frac{\rho_0}{2c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (6.64)$$

Таким образом, выражение (6.60) для Лагранжиана приобретает вид

$$L = \frac{\rho_0}{2} \left\{ [(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 + (\Phi'_z)^2] - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right\}. \quad (6.65)$$

Процедура вывода уравнения Эйлера задачи в геометрических координатах та же, что и для продольно колеблющихся стержней (см. Главу 4).

Уравнение Эйлера для этого случая

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi'_z} \right) = 0. \quad (6.66)$$

Волновое уравнение (6.56) вытекает из этого уравнения в результате выполнения соответствующих дифференцирований.

В режиме установившихся колебаний потенциал скорости может быть представлен в комплексной форме $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$, и волновое уравнение приобретает вид уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) \Phi = 0, \quad (6.67)$$

или, с учетом соотношения (6.46),

$$(\nabla^2 + k^2) P = 0, \quad (6.68)$$

где $k = \omega / c$ — волновое число.

Временной множитель $e^{j\omega t}$ далее опущен. Заметим, что во многих работах по теории излучения временной множитель применяют в форме $e^{-j\omega t}$. Поскольку физический смысл имеет только реальная часть решения, это различие не влияет на конечные результаты анализа. Для того чтобы привести результаты, полученные в этих работах, к форме, применяемой в нашем случае, следует просто заменить в них $(-j)$ на $(+j)$.

Лапласиан ∇^2 в осесимметричных цилиндрических и сферических координатах имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (6.69)$$

и

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (6.70)$$

соответственно.

6.2.2 Источники акустического излучения, граничные условия

В акустических приложениях электромеханического преобразования акустические поля создают колеблющиеся поверхности. Это может быть вся поверхность преобразователя или ее часть, если на поверхности имеются пассивные элементы конструкций преобразователей, например, такие как экраны. В идеальной жидкости только нормальная составляющая скорости колебаний поверхности производит акустическое излучение. В реальной жидкости влияние небольшой вязкости ограничено очень тонким слоем на границе поверхности (пограничный слой), внутри которого происходят некоторые вращательные эффекты и связанные с ними деформации сдвига. Эти эффекты сопровождаются потерями энергии, но не влияют на процесс излучения. Потери энергии в пограничном слое оценим отдельно там, где они могут оказать заметное влияние на характеристику преобразователя.

В наиболее типичном случае задача излучения заключается в определении акустического поля (потенциала скорости $\Phi(\mathbf{r})$, удовлетворяющего уравнению (6.67)) при условии, что нормальная составляющая скорости поверхности U_n представляет собой известную функцию $f_1(\mathbf{r}_\Sigma)$, т.е.

$$U_n(\mathbf{r}_\Sigma) = - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_\Sigma = f_1(\mathbf{r}_\Sigma), \quad (6.71)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности. Эта задача называется задачей Неймана, или краевой задачей второго рода. Такова задача излучения цилиндрическими

преобразователями, имеющими большую высоту (Рис. 6.1 (а)), и сферами (Рис. 6.1 (b)) без экранов и с идеально жесткими экранами на части их поверхностей, а также преобразователями с плоскими поверхностями (Рис. 6.1 (с)), встроенными в жесткий экран большого размера. (Предполагаем, что на жестких экранах скорость колебаний равна нулю $[U(\mathbf{r}_{\Sigma b}) = 0]$.)

В случае если на поверхности задан потенциал (или звуковое давление P , которое соотносится с потенциалом как $P = j\omega\rho_0\Phi$), т.е.

$$\Phi|_{\Sigma} = f_2(\mathbf{r}_{\Sigma}), \quad (6.72)$$

определение звукового поля представляет собой задачу Дирихле, или краевую задачу первого рода. Можно полагать, что давление равно нулю $[f_2(\mathbf{r}_{\Sigma}) = 0]$ на абсолютно податливой поверхности. Эта задача не характерна для излучения преобразователей как таковых. Она может возникнуть, как задача дифракции звуковой волны на податливом теле, расположенном близко к поверхности преобразователя.

В самом общем случае на одной части поверхности преобразователя может быть задана нормальная скорость, а на другой - звуковое давление или значение локального входного сопротивления. Соответствующее условие может быть представлено в виде

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \alpha\Phi \right)_{\Sigma} = f_3(\mathbf{r}_{\Sigma}), \quad (6.73)$$

где α — постоянная, заданная на части поверхности. Это смешанная краевая задача или краевая задача третьего рода. Такая ситуация имеет место, например, если экраны в случае преобразователей, представленных на Рис. 6.1, изготовлены из податливого (в идеале из абсолютно мягкого) материала. Из формулировки (6.73) вытекают все краевые задачи при разных значениях коэффициента α . В частности, задачи Неймана и Дирихле - при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. На части поверхности, на которой $\alpha(\mathbf{r}_{\Sigma}) = const.$, должно быть задано локальное значение входного сопротивления $Z_b(\mathbf{r}_{\Sigma})$ (индекс b означает *baffle* - экран)

$$Z_b(\mathbf{r}_{\Sigma}) = \frac{P(\mathbf{r}_{\Sigma})}{U_n(\mathbf{r}_{\Sigma})} = -j\omega\rho\Phi / (\partial\Phi / \partial n) \Big|_{\Sigma}. \quad (6.74)$$

Понятие локального значения входного сопротивления применимо в том случае, если части экрана могут перемещаться под действием звукового давления независимо в

направлении нормальном к поверхности экрана. Такова, например, конструкция экрана с тяжелыми включениями, герметизированными полиуретаном, показанная на Рис. 6.3. Обычно структурные элементы конструкции преобразователя (в частности, фланцы) представляют собой упругие тела, и формулирование смешанных граничных условий на их поверхностях усложняется.

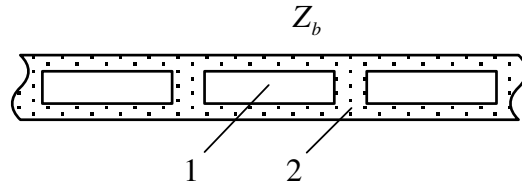


Рисунок 6.3: Пример конструкции экрана: фрагменты свинца (1), герметизирующий материал (2).

6.2.3 Условие излучения Зоммерфельда

Для того чтобы решение уравнения Гельмгольца было единственным, оно должно удовлетворять условию излучения на больших расстояниях от излучающего тела. Это условие было сформулировано Зоммерфельдом. Смысл его состоит в том, что энергия, которая излучается источниками, должна рассеиваться в бесконечности, и никакая энергия не может быть излучена в поле из бесконечности. Аналитическое выражение этого утверждения для трехмерного (3D) поля (в сферических координатах)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + jk\Phi \right) = 0 \quad (6.75)$$

или, в эквивалентной форме,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi \Big|_{r \rightarrow \infty} = A(\varphi, \theta) \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (6.76)$$

Это условие означает, что звуковое поле на больших расстояниях от любого излучающего тела представляет собой расходящуюся сферическую волну. Первый множитель в уравнении (6.76) не зависит от расстояния и представляет собой направленность излучателя.

Для двумерного (2D) акустического поля (в цилиндрических координатах) условие излучения принимает форму

$$\lim \Phi = A(\varphi) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}, \quad (6.77)$$

и поле представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну с давлением, изменяющимся по закону $1/\sqrt{r}$ в дальнем поле (на самом деле, это справедливо только в идеальном случае, поскольку все излучатели имеют конечную высоту).

6.2.4 Решение задач излучения методом разделения переменных

Метод разделения переменных в уравнении Гельмгольца удобен для решения задач излучения в том случае, если излучающая поверхность преобразователя совпадает с координатной поверхностью системы координат, в которой переменные в уравнении Гельмгольца могут быть разделены. Волновые размеры одиночных преобразователей обычно относительно невелики, и ряды функций, представляющих решения краевой задачи, быстро сходятся. Часто оказывается, что сохранение нескольких членов ряда достаточно для получения достаточно точных результатов (это будет показано ниже на примерах).

Вначале рассмотрим уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах, в которых Лапласиан задается выражением (6.69),

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k^2 P = 0. \quad (6.78)$$

Представим предполагаемое решение уравнения в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной координаты, $P = F_1(r) \cdot F_2(\varphi) \cdot F_3(z)$. Благодаря 2π периодичности системы координат по координате φ можно предположить, что

$$F_2(\varphi) = A_2 e^{jn\varphi}, \quad (6.79)$$

где n — целое число. После подстановки $P = F_1(r)F_3(z)A_2 e^{jn\varphi}$ в уравнение (6.78) и деления всех членов на функцию P , получим уравнение

$$\left[\frac{1}{F_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right] + \frac{1}{F_3} \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (6.80)$$

Выражение в квадратных скобках зависит только от координаты r , а второе выражение зависит только от координаты z . Уравнение (6.80) остается справедливым во всем диапазоне изменения координат только в том случае, если каждое из этих выражений

равно некоторой постоянной величине. Обозначим эти постоянные для первого и второго выражений $(-k_r^2)$ и $(-k_z^2)$, соответственно. В результате для функций F_1 и F_3 получим уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) + \left(k_r^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_1 = 0 \quad (6.81)$$

и

$$\frac{d^2 F_3}{dz^2} + k_z^2 F_3 = 0, \quad (6.82)$$

где $k_r^2 + k_z^2 = k^2$.

Общее решение уравнения (6.82)

$$F_3(z) = A_3 e^{-jk_z z} + B_3 e^{jk_z z}, \quad (6.83)$$

где A_3 и B_3 — произвольные постоянные. Решение представляет собой две плоские волны, распространяющиеся в разных направлениях оси z . В том случае, если цилиндрическая оболочка бесконечно длинная, а величина скорости колебаний точки приведения в первой форме колебаний не зависит от z , $k_z = 0$.

Уравнение (6.81) преобразуем к более распространенному виду

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dF_1}{dy} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{y^2} \right) F_1 = 0, \quad (6.84)$$

где $y = k_r r$. Это уравнение Бесселя. Решениями уравнения являются комбинации функций Бесселя $J_n(k_r r)$ и Неймана $N_n(k_r r)$. Нижний индекс n указывает на порядок функций. Решения для волн, распространяющихся от цилиндра, представляют собой функции Ханкеля второго рода (в виду зависимости $e^{j\omega t}$ от времени)

$$H_n^{(2)}(k_r r) = J_n(k_r r) - jN_n(k_r r). \quad (6.85)$$

В случае если цилиндрическая оболочка имеет бесконечную длину и скорость ее колебаний не зависит от координаты z (двумерная акустическая волна), $k_r = k$ и частные решения уравнения (6.78) для расходящихся волн представляют собой функции

$$P_n(r, \varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) H_n^{(2)}(kr). \quad (6.86)$$

В общем случае, если на бесконечно длинной оболочке существует распределение скорости в осевом направлении,

$$P_n(r, \varphi) = (A_n \cos m\varphi + B_n \sin n\varphi) H_n^{(2)} \left(\sqrt{k^2 - k_z^2} \cdot r \right) e^{\pm jk_z z} \quad (6.87)$$

Рассмотрим теперь уравнение Гельмгольца в осесимметричных сферических координатах (Лапласиан определяется выражением (6.70))

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + k^2 P = 0 \quad (6.88)$$

Если представить звуковое давление в виде произведения двух функций $P(r, \varphi) = R_1(r)R_2(\varphi)$, то после подстановки этого выражения в уравнение (6.88) получим следующее разделение уравнений для функций R_1 и R_2 :

$$\frac{1}{R_1} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) + k^2 R_1 = - \frac{1}{R_2} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial R_2}{\partial \varphi} \right) \quad (6.89)$$

Здесь левое выражение не зависит от φ , а правое - от r . Значит оба они должны быть равны одной и той же постоянной величине. В работе [5] показано, что эта постоянная должна быть равна $m(m+1)$. При этом левое выражение становится уравнением типа

$$\frac{d^2 R_1}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dR_1}{dz} + \left[1 + \frac{m(m+1)}{z^2} \right] R_1 = 0 \quad (6.90)$$

где $z=kr$ и $m = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом, получим два уравнения для определения функций R_1 и R_2 :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_1}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right] R_1 = 0 \quad (6.91)$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial R_2}{\partial \varphi} \right) + m(m+1) R_2 = 0 \quad (6.92)$$

После подстановки $\cos \varphi = x$ это уравнение приобретает вид уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dR_2}{dx} \right] + m(m+1) R_2 = 0 \quad (6.93)$$

Частные решения уравнения (6.90), где $z = kr$, представляют собой сферические функции Бесселя порядка m :

первого рода

$$j_m(z) = \sqrt{\pi/2z} J_{m+1/2}(z) \quad (6.94)$$

и второго рода

$$n_m(z) = \sqrt{\pi/2z} N_{m+1/2}(z); \quad (6.95)$$

и сферические функции Ханкеля, которые для расходящейся волны равны

$$h_m^{(2)}(z) = j_m(z) - jn_m(z) = \sqrt{\pi/2z} H_{m+1/2}^{(2)}(z). \quad (6.96)$$

Частные решения уравнения (6.93) представляют собой полиномы Лежандра порядка m

$$P_m(x) = P_m(\cos \varphi). \quad (6.97)$$

Таким образом, частные решения уравнения (6.87) для расходящихся волн получим в виде

$$P_m(r, \varphi) = C_m P_m(\cos \varphi) \cdot h_m^{(2)}(kr). \quad (6.98)$$

Свойства специальных функций: цилиндрических функций Бесселя, сферических функций Бесселя и полиномов Лежандра можно найти в работах [5] и [6]. Некоторые сведения о свойствах этих функций, которые находят применение в этой работе, приведены в Приложении С.

Для получения единственного решения для конкретной задачи излучения необходимо, чтобы комбинация частных решений, определяемых выражениями (6.86) и (6.98), удовлетворяла граничным условиям на поверхностях соответствующих преобразователей.

6.3 Излучение цилиндрических преобразователей.

Проанализируем излучение цилиндрических преобразователей при различных граничных условиях. Вначале рассмотрим акустическое поле, излучаемое идеализированной моделью бесконечно длинного преобразователя. Предположим, что скорость колебаний его поверхности не зависит от координаты z и имеет осесимметричное распределение по окружности относительно оси $\varphi = 0$, как это показано на Рис. 6.4. Это

распределение скоростей представим в виде:

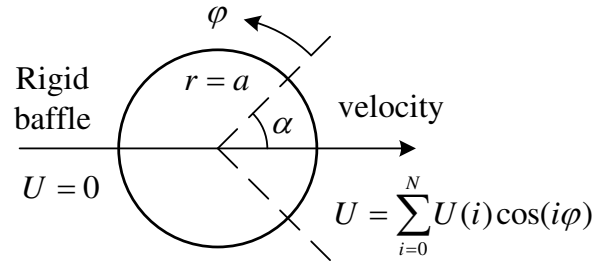


Рисунок 6.4: Иллюстрация цилиндрической оболочки (двумерный случай), колеблющейся с произвольным осесимметричным относительно оси $\varphi = 0$ распределением скорости по окружности.

$$U(\varphi) = \sum_{i=0}^N U_i \cos i\varphi \text{ при } |\varphi| \leq \alpha, \quad U(\varphi) = 0 \text{ при } |\varphi| > \alpha, \quad (6.99)$$

где $U(\varphi)$ — комплексная амплитуда скорости колебаний и α — угол «раскрытия» излучающей части поверхности. Задача излучения двумерна, и ее общее решение для звукового давления в соответствии с выражением (6.86) имеет вид

$$P(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi. \quad (6.100)$$

Здесь A_n — произвольные постоянные, которые следует определить из условия, что на поверхности цилиндра

$$U(r, \varphi)|_{r=a} = -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{k}{j\omega\rho} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)'}(ka) \cos n\varphi. \quad (6.101)$$

Представив $U(\varphi)$ в виде разложения в ряд Фурье

$$U(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_n}{2\pi} U_i a_{ni}(\alpha) \right] \cos n\varphi, \quad (6.102)$$

где $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$, $\varepsilon_n = 2$ при $n \geq 1$ и

$$a_{00}(\alpha) = 2\alpha, \quad a_{nn}(\alpha) = \alpha + \frac{\sin 2n\alpha}{2n}, \quad (6.103)$$

$$a_{ni}(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos i\varphi \cos n\varphi d\varphi = \alpha \left[\frac{\sin(n+i)\alpha}{(n+i)\alpha} + \frac{\sin(n-i)\alpha}{(n-i)\alpha} \right].$$

Приравняв соотношения (6.102) и (6.101), получим выражение для значений

постоянных A_n в виде формулы

$$A_n = -j\rho c \sum_{i=0}^N \frac{\varepsilon_n U_i a_{ni}(\alpha)}{2\pi H_n^{(2)'}(ka)} \quad (6.104)$$

Все величины, связанные с излучением, зависят от волнового размера преобразователей ka . Поэтому для краткости волновой размер будем опускать среди обозначений аргументов, которые эти величины определяют. Так, звуковое давление, создаваемое преобразователем, будем обозначать $P_i(r, \varphi, \alpha)$ вместо $P_i(ka, r, \varphi, \alpha)$. Аналогичные сокращения введем в отношении величин сопротивлений излучения, коэффициентов дифракции и характеристик направленности.

После подстановки выражения (6.104) в уравнение (6.100) получим

$$P(r, \varphi, \alpha) = -j\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^N \frac{\varepsilon_n U_i a_{ni}(\alpha)}{2\pi} \right] \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\varphi = \sum_{i=0}^N P_i(r, \varphi, \alpha), \quad (6.105)$$

где

$$P_i(r, \varphi, \alpha) = -j\rho c \frac{U_i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}(\alpha) \frac{\varepsilon_n H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\varphi \quad (6.106)$$

это звуковое давление, создаваемое одиночной формой колебаний (модальное давление), определенное при значениях угла φ в интервале $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$. На больших расстояниях от цилиндра (при $r \rightarrow \infty$)

$$H_n^{(2)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-j(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad (6.107)$$

и получим следующее выражение для модального звукового давления

$$P_i(r, \varphi, \alpha) = -j\rho c \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-j(kr - \pi/4)} U_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ni}(\alpha) \varepsilon_n}{2\pi} \frac{e^{j\pi n/2}}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\varphi. \quad (6.108)$$

Звуковое поле на больших расстояниях от цилиндра (в «дальней зоне») согласно условию излучения Зоммерфельда (6.77) может быть представлено в виде произведения двух функций, одна из которых является безразмерной и зависит только от координаты φ (характеристика направленности преобразователя $H(\varphi)$), а другая является функцией расстояния r (звуковое давление на акустической оси преобразователя $P(r, 0)$). Согласно выражениям (6.105) и (6.108) звуковое давление на акустической оси

преобразователя равно

$$P(r, 0, \alpha) = -j\rho c \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-j(kr - \pi/4)} \sum_{i=0}^N U_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ni}(\alpha) \varepsilon_n}{2\pi} \frac{e^{j\pi n/2}}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (6.109)$$

Таким образом, характеристика направленности преобразователя

$$H(\varphi, \alpha) = \frac{\sum_{i=0}^N U_i \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}(\alpha) \varepsilon_n \frac{e^{-j\pi n/2}}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\varphi}{\sum_{i=0}^N U_i \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}(\alpha) \varepsilon_n \frac{e^{j\pi n/2}}{H_n^{(2)'}(ka)}}. \quad (6.110)$$

Полную мощность, излучаемую на единицу длины цилиндра, определим с помощью выражения

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ac} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} P(a, \varphi, \alpha) U^*(\varphi) a d\varphi = \\ &= -j \frac{\rho c a}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\sum_{i=0}^N U_i a_{ni}(\alpha) \right] \left[\sum_{l=0}^N U_l^* \cos l\varphi \right] \cos n\varphi d\varphi = \\ &= -j \frac{\rho c a}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^N \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}^2(\alpha) \frac{\varepsilon_n H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} |U_i|^2 + \sum_{l \neq i}^N U_l U_i^* \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl}(\alpha) a_{ni}(\alpha) \frac{\varepsilon_n H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \right]. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Запишем это выражение в виде

$$\bar{W}_{ac} = \sum_{i=0}^N \left[Z_{acii}(\alpha) + \sum_{l \neq i}^N z_{acil}(\alpha) \frac{U_l}{U_i} \right] |U_i|^2 = \sum_{i=0}^N Z_{acil}(\alpha) |U_i|^2. \quad (6.112)$$

Здесь

$$Z_{acii}(\alpha) = -j \frac{\rho c a}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}^2(\alpha) \frac{\varepsilon_n H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)}, \quad (6.113)$$

это комплексная величина сопротивления излучения, соответствующего i -ой форме колебаний (модальный импеданс излучения), определенного при значениях угла φ в интервале $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$, и

$$z_{acil}(\alpha) = -j \frac{\rho c a}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl}(\alpha) a_{ni}(\alpha) \frac{\varepsilon_n H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)}, \quad (6.114)$$

— взаимное сопротивление излучения между формами колебаний i и l ($i \neq l$). Таким

образом, импеданс излучения, связанного с обобщенной скоростью U_i , равен

$$Z_{aci}(\alpha) = Z_{acii}(\alpha) + \sum_{l \neq i}^N z_{acil}(\alpha) \frac{U_l}{U_i}. \quad (6.115)$$

Применительно к используемым на практике цилиндрическим конструкциям преобразователей приравнивание к нулю скорости колебаний на части поверхности преобразователя можно представить как результат покрытия этой части поверхности бесконечно тонким абсолютно жестким экраном. В этом случае угол α указывает величину сектора поверхности преобразователя, свободного от экрана. Рассмотрим наиболее важные варианты распределения скоростей колебаний, которые соответствуют отсутствию экрана и экранированию половины поверхности преобразователя, т.е. при значениях $\alpha = \pi$ и $\alpha = \pi/2$, соответственно.

6.3.1 Излучение цилиндрической оболочки без экрана

В соответствии с формулой (6.103) при $\alpha = \pi$ все коэффициенты $a_n(\pi) = 0$ при $n \neq i$, $a_m(\pi) = \pi$ при $n \neq 0$, и $a_{00}(\pi) = 2\pi$. Рассмотрим акустические параметры преобразователей, соответствующие одиночным формам колебаний их поверхностей (модальные параметры).

Звуковое давление, создаваемое при пульсирующих колебаниях $U(\varphi) = U_0$ равно

$$P_0(r, \pi) = -j\rho c U_0 \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_0^{(2)'}(ka)}. \quad (6.116)$$

Модальные давления для форм колебаний $U(\varphi) = U_n \cos n\varphi$ при $n \neq 0$

$$P_n(r, \pi) = -j\rho c U_n \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\varphi. \quad (6.117)$$

Модальные характеристика направленности цилиндра имеют вид $H(\varphi, \pi) = \cos n\varphi$.

Характеристики направленности при $n = 1$ и $n = 3$ представлены на Рис. 6.5.

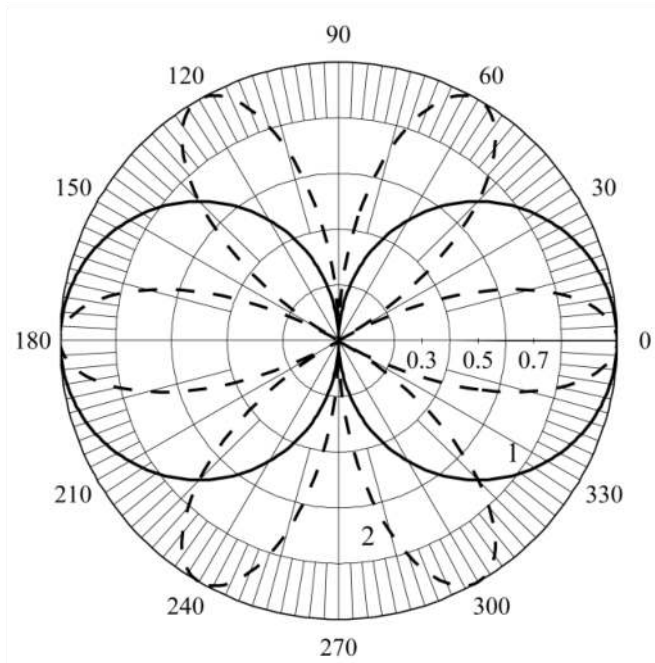


Рисунок 6.5: Модальные характеристики направленности цилиндрических преобразователей без экрана: при $n = 1$ (сплошная линия) и при $n = 3$ (пунктирная линия).

Рассмотрим величину звукового давления, создаваемого пульсирующим цилиндром малого радиуса (при $ka \ll 1$). Принимая во внимание, что $H_0^{(2)'}(ka) = -H_1^{(2)}(ka)$, и при малых ka $H_1^{(2)}(ka) \approx j2/\pi ka$ (см. Приложение С.1), из выражения (6.116) получим

$$P_0(r, \pi) = \rho c \frac{k}{4} U_{\dot{v}_r} H_0^{(2)}(kr), \quad (6.118)$$

где $U_{\dot{v}_r} = 2\pi a U_0$ — относительная объемная скорость (см. уравнение (6.6)) на единицу длины пульсирующего цилиндра. Это выражение для звукового давления, создаваемого цилиндрическим (двумерным) простым источником.

Модальные коэффициенты дифракции в соответствии с определением (6.10) равны

$$k_{dif\ n}(\pi) = \frac{P_n(r, 0, \pi)}{P_0(r, ka \ll 1)} = -j^{n+1} \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (6.119)$$

На Рис. 6.6 представлены модальные коэффициенты дифракции для цилиндрических преобразователей в зависимости от волнового размера ka .

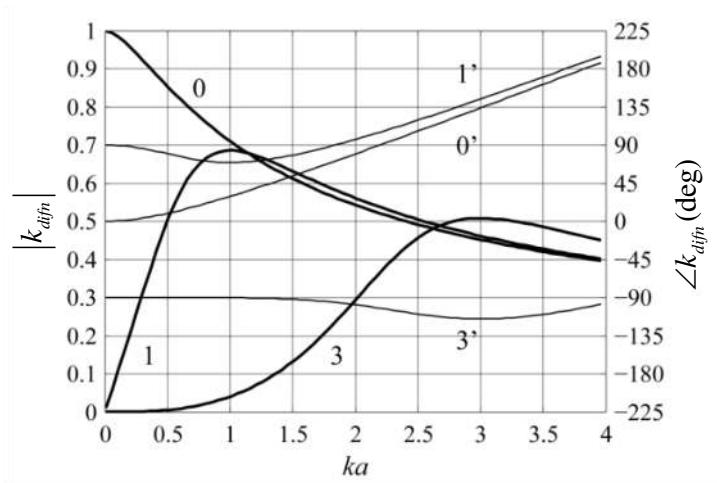


Рисунок 6.6: Модальные коэффициенты дифракции цилиндрических преобразователей без экрана при $n = 0, 1, 3$. Номера графиков для модуля 0, 1, 3, соответственно, для фазы $-0', 1', 3'$.

Таким образом, модальное звуковое давление на акустической оси может быть представлено в виде

$$P_n(r, 0, \pi) = \frac{k \rho c}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} 2\pi a U_n k_{dif.n}(ka) e^{-j(kr - \pi/4)}. \quad (6.120)$$

Рассмотрим сопротивления излучения цилиндрического преобразователя на единицу высоты, относящиеся к обобщенным координатам U_i . Поскольку коэффициенты $a_{ni}(\pi) = 0$ при $n \neq i$, все взаимные сопротивления излучения между формами колебаний $z_{acil}(\pi)$ в выражении (6.115) исчезают и импеданс $Z_{aci}(\pi) = Z_{acii}(\pi)$ (т. е. модальному импедансу). Согласно формуле (6.113), в этом случае модальный импеданс излучения равен

$$Z_{acii}(\pi) = -j \rho c a \frac{a_{ii}^2(\pi) \varepsilon_i H_i^{(2)}(ka)}{2\pi H_i^{(2)'}(ka)}. \quad (6.121)$$

Из этого соотношения можно сделать вывод, что

$$-j \frac{\rho c a H_n^{(2)}(ka)}{2\pi H_n^{(2)'}(ka)} = \frac{1}{a_{nn}^2(\pi) \varepsilon_n} Z_{acnn}(\pi), \quad (6.122)$$

и после замены в выражении (6.113) множителя, соответствующего левой стороне этого равенства, его правой стороной, получим

$$Z_{acii}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ni}^2(\alpha)}{a_{nn}^2(\pi)} Z_{acnn}(\pi). \quad (6.123)$$

Таким образом, если определены модальные импедансы излучения для незранированной цилиндрической оболочки (при $\alpha = \pi$), то расчет импедансов при произвольном угле раскрытия α сводится к простому вычислению коэффициентов $a_{ni}(\alpha)$.

Рассмотрим более подробно сопротивления излучения для наиболее широко применяемых 0 и 1 форм колебаний.

Для нулевой («пульсирующей») формы колебаний $U(\varphi) = U_0$ и

$$Z_{ac00}(\pi) = -j\rho c a \frac{a_{00}^2(\pi) \varepsilon_0}{2\pi} \frac{H_0^{(2)}(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)} = -j\rho c 2\pi a \frac{H_0^{(2)}(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)}. \quad (6.124)$$

(Напомним, что $a_{00}(\pi) = 2\pi$ и $\varepsilon_0 = 1$). Преобразуем выражение (6.124) следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{ac00}(\pi) &= j\rho c 2\pi a \frac{J_0(ka) - jN_0(ka)}{J_1(ka) - jN_1(ka)} = r_{ac00}(\pi) + jx_{ac00}(\pi) = \\ &= \rho c 2\pi a [\alpha_{00}(\pi) + j\beta_{00}(\pi)] \end{aligned} \quad (6.125)$$

Здесь r_{ac00} и x_{ac00} — активная и реактивная составляющие сопротивления излучения, а α_{00} и β_{00} — безразмерные коэффициенты. Если принять во внимание, что

$$J_{n+1}(x)N_n(x) - J_n(x)N_{n+1}(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (6.126)$$

(см. Приложение С.1), то безразмерные коэффициенты сопротивления излучения представим в виде

$$\alpha_{00}(\pi) = \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{J_1^2(ka) + N_1^2(ka)}, \quad (6.127)$$

$$\beta_{00}(\pi) = \frac{J_0(ka)J_1(ka) + N_0(ka)N_1(ka)}{J_1^2(ka) + N_1^2(ka)}. \quad (6.128)$$

В «длинноволновом» приближении (при $ka \ll 1$) $J_0(ka) \approx 1$, $N_0(ka) \approx (2/\pi) \ln ka$, $J_1(ka) \approx ka/2$, $N_1(ka) \approx -2/\pi ka$, и из уравнений (6.127) и (6.128) получим $\alpha_{00}(\pi) \doteq \pi ka/2$, $\beta_{00}(\pi) \doteq ka \ln(1/ka)$ или

$$r_{ac00}(\pi) \approx \frac{\pi}{2} \rho c \frac{(2\pi a)^2}{\lambda}, \quad (6.129)$$

$$x_{ac00}(\pi) \approx [2\rho\pi a^2 \ln(1/ka)] \omega = m_{ac} \omega, \quad (6.130)$$

где $m_{ac} = 2M_w \ln(1/ka)$ и $M_w = \rho\pi a^2$ — масса воды в объеме цилиндра на единицу длины.

В «коротковолновом» приближении (при $ka \rightarrow \infty$) следует применить асимптотическое выражение (6.107) для функций Ханкеля (с заменой kr на ka .) В результате найдем, что $\alpha_{00} \rightarrow 1$ и $\beta_{00} \rightarrow 0$. Таким образом, при $ka \rightarrow \infty$

$$r_{ac00}(\pi) \approx \rho c 2\pi a, \quad x_{ac00}(\pi) \rightarrow 0. \quad (6.131)$$

Для первой («осциллирующей») формы колебаний $U(\varphi) = U_1 \cos \varphi$ после подстановки $a_{11}(\pi) = \pi$ и $\varepsilon_1 = 2$, из формулы (6.121) получим

$$Z_{ac11}(\pi) = -j\rho c \pi a \frac{H_1^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)'}(ka)}, \quad (6.132)$$

где

$$H_1^{(2)'}(x) = H_0^{(2)}(x) - \frac{1}{x} H_1^{(2)}(x). \quad (6.133)$$

В длинноволновом приближении (при $ka \ll 1$)

$$H_1^{(2)}(ka) \approx \frac{ka}{2} + j \frac{2}{\pi ka}, \quad H_1^{(2)'}(ka) \approx -j \frac{2}{\pi(ka)^2} \quad (6.134)$$

и

$$Z_{ac11}(\pi) = \rho c \pi a \left[\frac{\pi}{4} (ka)^3 + jka \right]. \quad (6.135)$$

Таким образом,

$$r_{ac11}(\pi) \approx \rho c \pi^2 a (ka)^3 / 4, \quad (6.136)$$

$$x_{ac11}(\pi) \approx \rho c \pi a (ka) = \rho \pi a^2 \omega = M_w \omega. \quad (6.137)$$

Соотношение активных компонентов сопротивлений излучения для преобразователей малого размера в первой и нулевой формах колебаний составляет

$$r_{ac11}(\pi) / r_{ac00}(\pi) = (ka)^2 / 4. \quad (6.138)$$

В коротковолновом пределе, при $ka \rightarrow \infty$, учитывая асимптотические приближения для функций $H_1^{(2)}(ka)$ и $H_1^{(2)'}(ka)$, получим

$$r_{ac11}(\pi) \approx \rho c \pi a = \rho c S_{eff1}, \quad x_{ac11}(\pi) \approx 0. \quad (6.139)$$

В выражение для активного сопротивления излучения введена величина эффективной площади излучающей поверхности на единицу длины S_{eff} . Определением для этой величины служит формула

$$S_{eff} = \int_{\Sigma} \theta^2(r_{\Sigma}) d\Sigma, \quad (6.140)$$

где Σ — площадь излучающей поверхности и $\theta(r_{\Sigma})$ — форма колебаний поверхности.

Для цилиндрических преобразователей с формами колебаний $\theta_n(\varphi) = \cos n\varphi$

$$S_{effn} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 n\varphi a d\varphi, \quad (6.141)$$

и при $\alpha = \pi$

$$S_{eff0} = 2\pi a, \quad S_{effn} = \pi a. \quad (6.142)$$

Безразмерные коэффициенты модальных сопротивлений излучения на единицу длины цилиндрических оболочек в зависимости от ka представлены на Рис. 6.7.

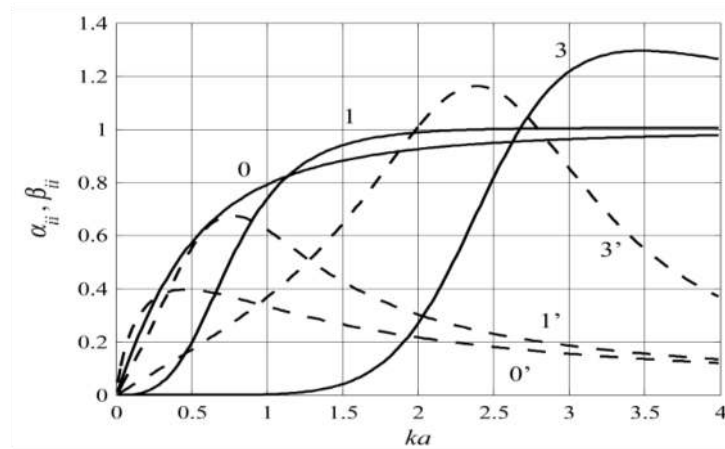


Рисунок 6.7: Безразмерные коэффициенты модальных сопротивлений излучения цилиндрических преобразователей без экранов. Номера графиков для α_{ii} 0, 1, 3, соответственно значению i , для β_{ij} — 0', 1', 3'.

6.3.2 Излучение цилиндрической оболочки с жестким экраном при $\alpha = \pi/2$

В предположении, что распределение скоростей колебаний $\theta(\varphi) = \cos i\varphi$ имеет место только в интервале углов $[-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2]$, а на остальной части поверхности скорость равна нулю, коэффициенты a_{ni} , определяемые формулой (6.103), равны

$$a_{00}(\pi/2) = \pi, \quad a_{ii}(\pi/2) = \pi/2, \quad a_{ni}(\pi/2) = \frac{1}{n+i} \sin(n+i) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n-i} \sin(n-i) \frac{\pi}{2}. \quad (6.143)$$

Таким образом, все коэффициенты при $n+i=2l$ ($n \neq i, l=1,2,\dots$) обращаются в ноль. Для нулевой и первой форм колебаний коэффициенты равны:

$$a_{00}(\pi/2) = \pi, \quad a_{01}(\pi/2) = 2, \quad a_{02}(\pi/2) = 0, \quad a_{03}(\pi/2) = -2/3, \dots \quad (6.144)$$

$$a_{10}(\pi/2) = 2, \quad a_{11}(\pi/2) = \pi/2, \quad a_{12}(\pi/2) = -2/3, \quad a_{13}(\pi/2) = 0, \dots \quad (6.145)$$

Модальное звуковое давление $P_i(r, \varphi, \pi/2)$ следует определять по формуле (6.108) с коэффициентами $a_{ni}(\pi/2)$, рассчитанными по формулам (6.144). Соответствующие модальные коэффициенты дифракции равны (см. примечание к выражению (6.119))

$$k_{dif.i}(\pi/2) = \frac{P_i(r, 0, \pi/2)}{P_0(r, ka \ll 1)} = \frac{2}{\pi^2 ka} \sum_{n=0}^{\infty} j^{n-1} \frac{a_{in}(\pi/2) \varepsilon_n}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (6.146)$$

При расчете звукового давления $P_0(r, ka \ll 1)$, создаваемого пульсирующим цилиндром малого радиуса, относительная объемная скорость на единицу длины равна $U_{\bar{v}_r} = U_i \pi a$. В общем случае, если определены коэффициенты дифракции для экранированного цилиндра при произвольном угле раскрытия экрана, значение модального звукового давления на акустической оси может быть рассчитано по формуле

$$P_i(r, 0, \alpha) = k_{dif.i}(\alpha) P_0(r, ka \ll 1), \quad (6.147)$$

причем относительная объемная скорость при расчете P_0 по формуле (6.118) должна быть принята в виде $U_{\bar{v}_r} = 2a \cdot \alpha$.

Модальные коэффициенты дифракции для экранированных цилиндров в зависимости от ka представлены на Рис. 6.8.

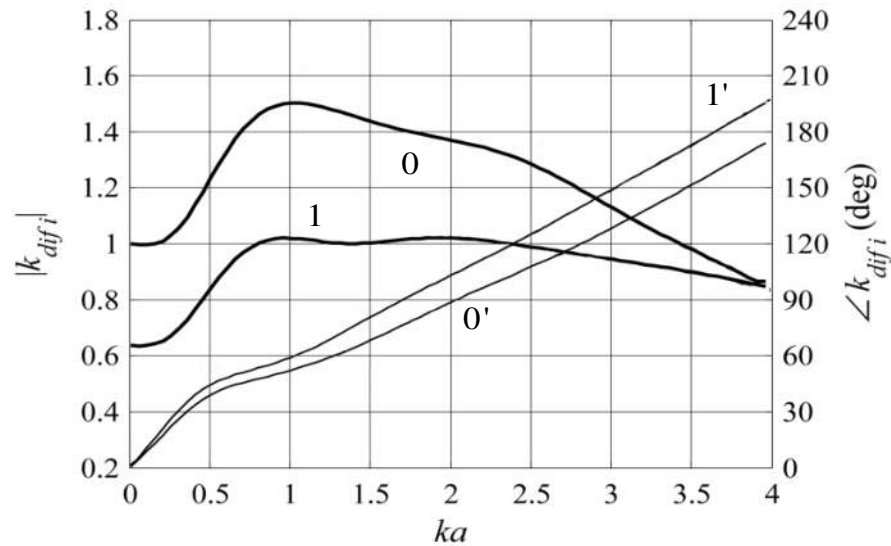


Рисунок 6.8: Коэффициенты дифракции цилиндрических преобразователей с экранами при $\alpha = \pi/2$ для 0 и 1 форм колебаний: модули обозначены 0 и 1, фазы - $0'$ и $1'$.

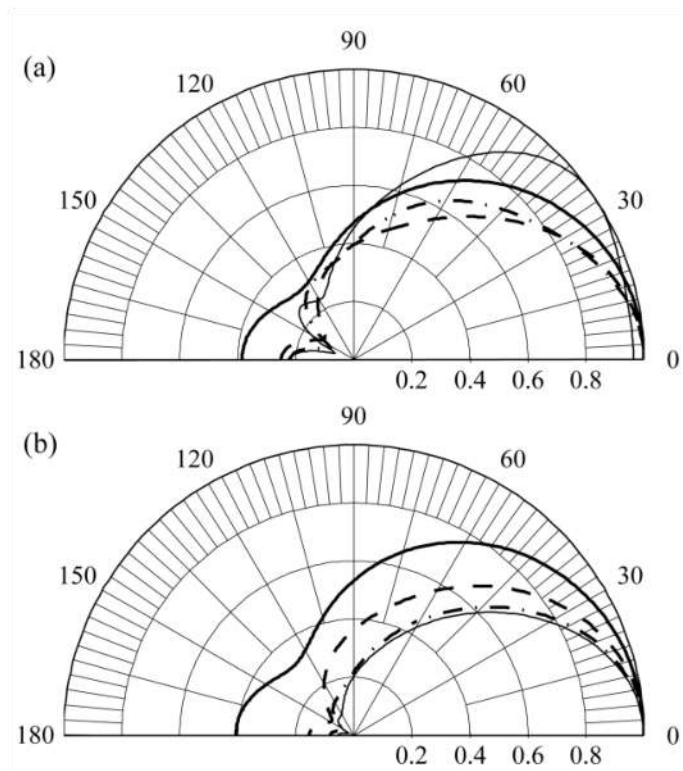


Рисунок 6.9: Характеристики направленности преобразователей с экраном на половине окружности ($\alpha = \pi/2$) при различных волновых размерах: (а) нулевая и (б) первая форма колебаний. Волновые размеры: $ka = 1$ (сплошная линия), $ka=2$ (штриховая линия), $ka=3$ (штрихпунктирная линия), $ka = 4$ (тонкая сплошная линия).

Характеристики направленности цилиндров при $\alpha = \pi/2$ определим с помощью формулы

$$H_i(\varphi, \pi/2) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (j)^n a_{in}(\pi/2) \varepsilon_n \cos n\varphi / H_n^{(2)'}(ka)}{\sum_{n=0}^{\infty} (j)^n a_{in}(\pi/2) \varepsilon_n / H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (6.148)$$

На Рис. 6.9 приведены характеристики направленности цилиндров, колеблющихся в нулевой и первой формах, для нескольких значений ka .

Модальные импедансы излучения определим, подставив коэффициенты $a_{ni}(\pi/2)$, рассчитанные по формулам (6.143), в выражение (6.113) или (6.123). Таким образом, импедансы для нулевой и первой форм получим в виде

$$Z_{ac00}(\pi/2) = \frac{1}{2} Z_{ac00}(\pi) + \frac{2}{\pi} Z_{ac11}(\pi) - \frac{2}{3} Z_{ac33}(\pi) + \dots \quad (6.149)$$

$$Z_{ac11}(\pi/2) = \frac{1}{\pi} Z_{ac00}(\pi) + \frac{1}{2} Z_{ac11}(\pi) + \frac{2}{3\pi} Z_{ac22}(\pi) + \dots \quad (6.150)$$

На Рис. 6.10 представлены безразмерные коэффициенты сопротивлений излучения с учетом того, что $S_{eff0}(\pi/2) = \pi a$ и $S_{eff1}(\pi/2) = \pi a/2$.

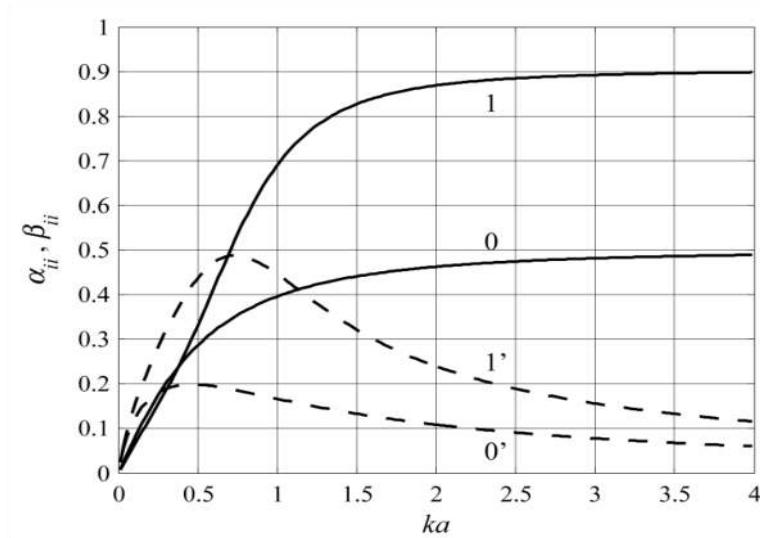


Рисунок 6.10: Безразмерные коэффициенты сопротивлений излучения форм колебаний для нулевой (0) и первой (1) форм колебаний при $\alpha = \pi/2$ (β_{ii} обозначен').

Рассмотрим теперь излучение цилиндра при наложении нескольких форм

колебаний. Предположим, что распределение скоростей имеет вид

$$U(\varphi) = \sum_{i=0}^N U_i \cos i\varphi \text{ при } |\varphi| \leq \pi/2 \text{ и } U(\varphi) = 0 \text{ когда } |\varphi| > \pi/2. \quad (6.151)$$

Величины скорости колебаний точки приведения U_i можно рассматривать как обобщенные скорости в задаче расчета цилиндрических преобразователей. Их следует определить путем решения уравнений Лагранжа, описывающих работу преобразователей.

Согласно уравнению (6.105), звуковое давление, создаваемое цилиндрической оболочкой в этом случае, представляет собой суперпозицию модальных звуковых давлений $P_i(r, \varphi, \pi/2)$, представленных формулой (6.108). Рассматривая выражения (6.146) и (6.147) для коэффициента дифракции и звукового давления, соответственно, в итоге получим

$$P_i(r, \varphi, \pi/2) = \rho c \frac{\pi k a}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-j(kr - \pi/4)} U_i k_{dif.i}(\pi/2) \cos i\varphi, \quad (6.152)$$

и выражение для характеристики направленности получим в виде:

$$H(\varphi, \pi/2) = \frac{\sum_{i=0}^N U_i k_{dif.i}(\pi/2) \cos i\varphi}{\sum_{i=0}^N U_i k_{dif.i}(\pi/2)}. \quad (6.153)$$

Импеданс излучения, связанного со скоростью U_i , в соответствии с общей формулой (6.115) найдем в виде

$$Z_{aci}(\pi/2) = Z_{acii}(\pi/2) + \sum_{l \neq i}^N z_{acil}(\pi/2) \frac{U_l}{U_i}, \quad (6.154)$$

где собственные (модальные) импедансы излучения $Z_{acii}(\pi/2)$ уже рассмотрены ранее (см. Рис. 6.10). Взаимные сопротивления излучения между формами колебаний z_{acil} , определяемые общей формулой (6.114), после применения соотношения (6.122) преобразуем следующим образом:

$$z_{acil}(\pi/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ni}(\pi/2) a_{nl}(\pi/2)}{a_{nn}^2(\pi)} Z_{acnn}(\pi). \quad (6.155)$$

Так, например,

$$z_{ac01}(\pi/2) = \frac{a_{00}(\pi/2)a_{01}(\pi/2)}{a_{00}^2(\pi)} Z_{ac00}(\pi) + \frac{a_{10}(\pi/2)a_{11}(\pi/2)}{a_{11}^2(\pi)} Z_{ac11}(\pi) + \frac{a_{20}(\pi/2)a_{21}(\pi/2)}{a_{22}^2(\pi)} Z_{ac22}(\pi) + \dots, \quad (6.156)$$

или, принимая во внимание выражения (6.143)-(6.145) и то, что все коэффициенты $a_{ni}(\pi/2)$, для которых $n \neq i$ и $n+i$ четные, равны нулю, получаем

$$z_{ac01}(\pi/2) = \frac{1}{2\pi} Z_{ac00}(\pi) + \frac{1}{\pi} Z_{ac11}(\pi). \quad (6.157)$$

После подстановки выражений для модальных импедансов излучения $Z_{ac00}(\pi) = (\rho c)_w 2\pi a [\alpha_{00}(\pi) + j\beta_{00}(\pi)]$ и $Z_{ac11}(\pi) = (\rho c)_w \pi a [\alpha_{11}(\pi) + j\beta_{11}(\pi)]$ (6.158)

можно сделать вывод, что

$$z_{ac01}(\pi/2) = (\rho c)_w \pi a \{ [\alpha_{00}(\pi) + \alpha_{11}(\pi)] / \pi + j[\beta_{00}(\pi/2) + \beta_{11}(\pi/2)] / \pi \}. \quad (6.159)$$

Таким образом, безразмерные коэффициенты взаимного сопротивления излучения между формами колебаний $z_{ac01}(\pi/2)$ равны

$$\alpha_{01}(\pi/2) = \frac{1}{\pi} [\alpha_{00}(\pi) + \alpha_{11}(\pi)] \text{ и } \beta_{01}(\pi/2) = \frac{1}{\pi} [\beta_{00}(\pi) + \beta_{11}(\pi)]. \quad (6.160)$$

Эти коэффициенты приведены на Рис. 6.11 в функции от ka .

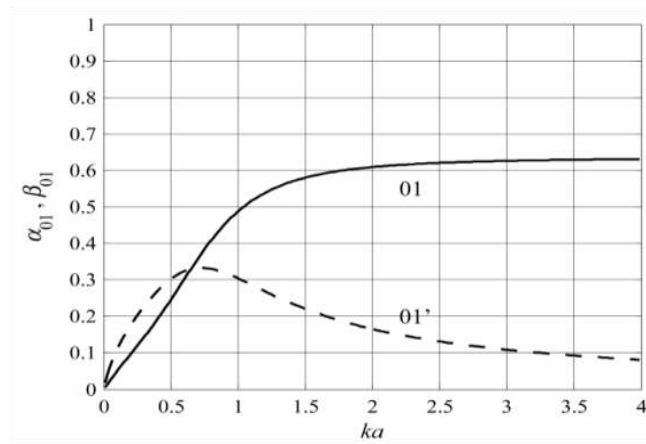


Рисунок 6.11: Безразмерные коэффициенты взаимных сопротивлений излучения между формами колебаний при $\alpha = \pi/2$: α_{01} обозначен 01, β_{01} обозначен 01'.

6.3.3 Излучение бесконечной цилиндрической оболочки с акустически мягким экраном

В случае если экраны, нанесенные на цилиндрическую поверхность преобразователя, сделаны из податливого материала, лучшее приближение к реальной ситуации дает предположение, что эта часть поверхности является абсолютно мягкой, т.е. на ней звуковое давление равно нулю. Это предположение приводит к задаче излучения со смешанными граничными условиями: на одной части поверхности задана радиальная скорость колебаний, а на остальной части звуковое давление равно нулю, как показано на Рис. 6.12.

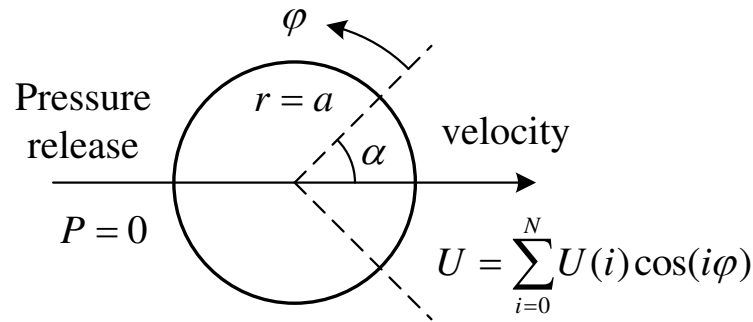


Рисунок 6. 12: К смешанным граничным условиям.

Смешанные граничные условия для потенциала скорости на поверхности цилиндра имеют вид

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = -U(\varphi), \quad \alpha \leq |\varphi| < \pi, \quad (6.161)$$

$$\Phi(a, \varphi) = 0, \quad |\varphi| < \alpha. \quad (6.162)$$

Задача излучения при таких граничных условиях была рассмотрена в работах [7, 8]. Краткое описание процедуры получения решения, примененной в работе [7], выглядит следующим образом.

При осесимметричном распределении скорости общее решение волнового уравнения $\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$ представим в форме

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi, \quad (6.163)$$

где коэффициенты A_n следует определить воспользовавшись граничными условиями

(6.161) и (6.162).

Для получения приближенного решения задачи введем в рассмотрение многочлены

$$\Phi_N(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi. \quad (6.164)$$

Эти функции удовлетворяют волновому уравнению, но не удовлетворяют граничным условиям. Значения коэффициентов A_n надо определить таким образом, чтобы наилучшим образом приблизиться к выполнению граничных условий. Наилучшим будем считать такое приближение функций Φ_N к решению задачи, которое минимизирует функционал

$$F_N(A_0, A_1, \dots, A_N) = \int_0^\alpha |\Phi(a, \varphi) - \Phi_N(a, \varphi)|^2 d\varphi + \int_\alpha^\pi \left| U(\varphi) - \left(\frac{\partial \Phi_N}{\partial r} \right)_{r=a} \right|^2 d\varphi \quad (6.165)$$

при правильном выборе коэффициентов A_n . В общем случае эти коэффициенты являются комплексными величинами. Представим их в виде $A_n = a_n + jb_n$.

Условия минимума для функционала F_N формулируются следующим образом

$$\frac{\partial F_N}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F_N}{\partial b_i} = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, N). \quad (6.166)$$

В результате выполнения условий (6.166) получим систему уравнений для определения коэффициентов A_n

$$\sum_{n=0}^N c_{ni}(\alpha, ka) A_n = \frac{k\pi}{2} d_i(\alpha) H_i^{*}{}^*(ka), \quad (i = 0, 1, \dots, N). \quad (6.167)$$

В этих уравнениях (*) — знак комплексного сопряжения, верхний индекс ⁽²⁾ у функций Ханкеля опущен для краткости, а коэффициенты c_{ni} и d_i должны быть определены с помощью следующих выражений

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U(\varphi) d\varphi, \quad d_i = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U(\varphi) \cos i\varphi d\varphi \\
c_{00}(\alpha, ka) &= \alpha |H_0(ka)|^2 + k^2(\pi - \alpha) |H_0'(ka)|^2; \\
c_{ii}(\alpha, ka) &= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\sin 2i\alpha}{2i} \right) |H_i(ka)|^2 + \frac{k^2}{2} \left(\pi - \alpha - \frac{\sin 2i\alpha}{2i} \right) |H_i'(ka)|^2, \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, N); \\
c_{ni}(\alpha, ka) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+i)\alpha}{n+i} + \frac{\sin(n-i)\alpha}{n-i} \right] \times \\
&\quad \times [H_n(ka) H_i^*(ka) - k^2 H_n'(ka) H_i'^*(ka)], \quad (n \neq i).
\end{aligned} \tag{6.168}$$

В качестве примера первого приближения рассмотрим характеристики преобразователя с податливым экраном на половине поверхности ($\alpha = \pi/2$) при $N=3$.

В соответствии с формулами (6.168)

$$\begin{aligned}
d_0 &= 1, \quad d_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad d_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad d_2 = d_4 = 0, \\
c_{00}(\pi/2, ka) &= \frac{\pi}{2} |H_0(ka)|^2 + k^2 \frac{\pi}{2} |H_0'(ka)|^2, \\
c_{ii}(\pi/2, ka) &= \frac{\pi}{4} |H_i(ka)|^2 + k^2 \frac{\pi}{4} |H_i'(ka)|^2, \\
c_{ni} &= 0 \text{ at } n+i = 2p, \quad (p = 1, 2, \dots), \\
c_{01} &= H_0(ka) H_1^*(ka) - k^2 H_0'(ka) H_1'^*(ka), \\
c_{03} &= -\frac{1}{3} [H_0(ka) H_3^*(ka) - k^2 H_0'(ka) H_3'^*(ka)], \\
c_{12} &= \frac{1}{3} [H_1(ka) H_2^*(ka) - k^2 H_1'(ka) H_2'^*(ka)], \\
c_{23} &= \frac{3}{5} [H_2(ka) H_3^*(ka) - k^2 H_2'(ka) H_3'^*(ka)], \\
c_{32} &= c_{23}, \quad c_{30} = c_{03}.
\end{aligned} \tag{6.169}$$

Первое приближение для потенциала скорости получим в форме

$$\Phi_3(r, \varphi) = \sum_{n=0}^3 A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi, \tag{6.170}$$

где коэффициенты A_n должны быть определены из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 c_{00} A_0 + c_{10} A_1 + 0 + c_{30} A_3 &= \frac{k\pi}{2} H_0^{**}(ka), \\
 c_{01} A_0 + c_{11} A_1 + c_{21} A_2 + 0 &= -k H_1^{**}(ka), \\
 0 + c_{12} A_1 + c_{22} A_2 + c_{32} A_3 &= 0, \\
 c_{03} A_0 + 0 + c_{23} A_2 + c_{33} A_3 &= \frac{k}{3} H_3^{**}(ka).
 \end{aligned}
 \tag{6.171}$$

На Рис. 6.13 - 6.15 представлены результаты расчетов характеристик цилиндрических преобразователей, выполненных для случая применения податливых экранов в сравнении с полученными при жестких экранах.

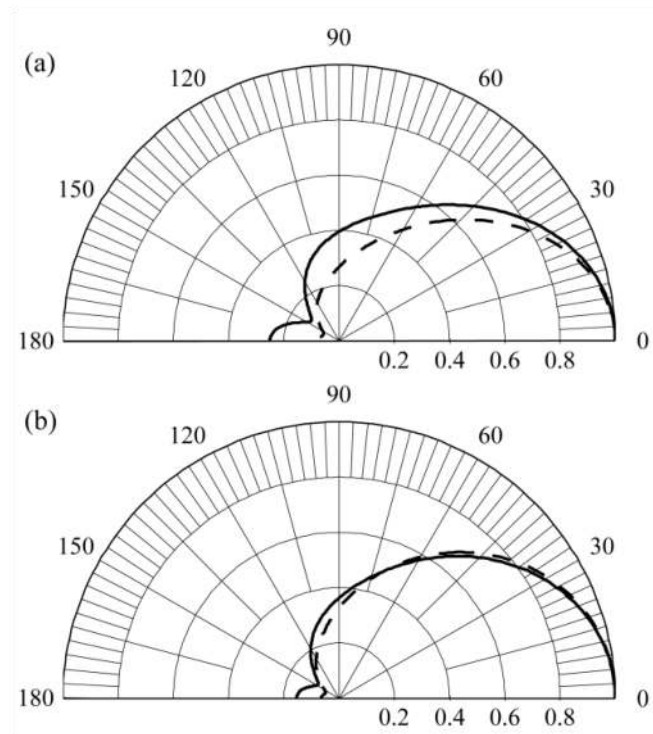


Рисунок 6.13: Характеристики направленности экранированных на 180° цилиндрических преобразователей с жесткими (сплошная линия) и податливыми (пунктирная линии) экранами при $ka = 2.0$: (а) нулевая форма колебаний, (б) первая форма колебаний.

Результаты расчетов показывают, что существенная разница между двумя вариантами экранов для сопротивлений излучения и коэффициентов дифракции существует при малых волновых размерах ($ka < 0.3 - 0.5$). При больших волновых размерах результаты достаточно близки. Отметим, что экраны применяют в основном для создания

однонаправленного излучения. Поэтому наибольший интерес представляют их свойства при волновых размерах вблизи резонансных частот преобразователей. Для цилиндрического преобразователя, изготовленного из пьезокерамики PZT-4, низшая резонансная частота имеет место при $ka \approx 2.2$. Как видно из Рис. 6.13, при $ka = 2.0$ (а стало быть, и при больших значениях) основное различие между характеристиками направленности состоит в том, что при податливом экране тыльное излучение намного меньше.

Эти выводы важны для расчета характеристик преобразователей, поскольку реальные конструкции экранов близки к податливым, например, изготовленные из «софрене'а» (композиция из пробки и резиноподобного материала) герметизированного полиуретаном, тогда как жесткие экраны можно себе представить только теоретически. В то же время расчеты с жесткими экранами несравненно проще. Таким образом, расчеты параметров акустического поля экранированных преобразователей можно выполнить с использованием относительно простых выражений, которые справедливы для жестких экранов.

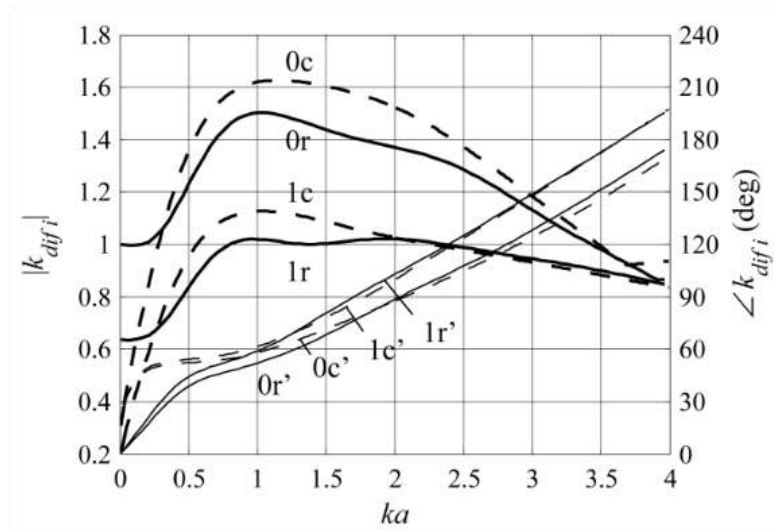


Рисунок 6.14: Коэффициенты дифракции экранированных на 180° цилиндрических преобразователей с жесткими (r – сплошная линия) и податливыми (c – пунктирная линия) экранами при $ka = 2.0$: (a) нулевая (0), (b) первая (1) форма колебаний (фаза обозначена '). (Здесь r – от *rigid* и c – от *compliant*.)

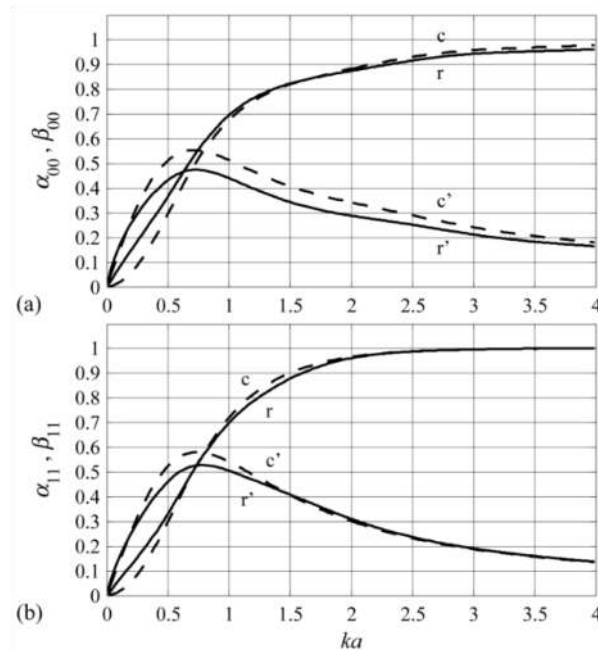


Рисунок 6.15: Безразмерные коэффициенты сопротивлений излучения экранированных на 180° цилиндрических преобразователей с жесткими (r , r') и податливыми (c , c') экранами: (a) нулевая, (b) первая форма колебаний.

Следует иметь в виду, что выводы относительно сравнения эффектов жесткого и податливого экранов не означают, что практические результаты, полученные при реальных экранах (имеющего конечное сопротивление), могут находиться где-то между ними. И идеально жесткий и идеально податливый экраны не пропускают акустическую энергию, тогда как сквозь реальные экраны часть акустической энергии распространяется, и это может изменить ситуацию.

6.3.4 Излучение цилиндра конечного размера в бесконечно длинном жестком цилиндрическом экране

Рассмотренная модель бесконечно длинного цилиндра при произвольном распределении скоростей колебаний по окружности очень полезна. Оказывается, что результаты, полученные для сопротивлений излучения на единицу длины, с достаточной точностью применимы для преобразователей конечной высоты в том случае, если их высота сопоставима с длиной звуковой волны. В применении к преобразователям меньшей высоты более точной является модель цилиндра конечной высоты, встроенного в бесконечно

длинный жесткий цилиндрический экран, являющийся продолжением цилиндра в обоих направлениях, как это показано на Рис. 6.16.

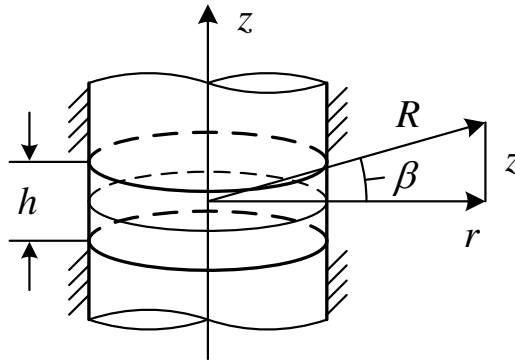


Рисунок 6.16: Цилиндр конечной высоты, встроенный в жесткий цилиндрический экран.

Проблема излучения таким цилиндром была рассмотрена в работах [9-12]. Краткое описание решения задачи, приведенного в работе [9], выглядит следующим образом.

Частное решение для трехмерного уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах представим согласно выражениям (6.83) - (6.87) в виде

$$P_m(r, \varphi, z) = (A_1 e^{-jm\varphi} + B_1 e^{jm\varphi}) H_m^{(2)}(k_r r) (A_2 e^{-jk_z z} + B_2 e^{jk_z z}), \quad (6.172)$$

где $k_r^2 + k_z^2 = k^2$. Таким образом, общее решение для произвольного распределения скорости вдоль оси z можно представить в виде

$$P(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_z) H_m^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r) e^{jk_z z} dk_z. \quad (6.173)$$

Здесь a_m и $A(k_z)$ следует определить из граничных условий для конкретного распределения скоростей. Функция

$$H_m^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r) e^{\pm jk_z z} \quad (6.174)$$

в выражении (6.173) описывает две цилиндрические волны с волновыми числами k_z , которые распространяются в положительном и отрицательном направлениях оси z . При вещественной величине k_z (т.е. при $k > k_r$) они представляют собой бегущие волны, распространяющиеся от источника. При мнимом k_z ($k < k_r$) они образуют неоднородные волны, которые затухают в радиальном направлении. Эти волны вносят свой вклад в звуковое давление в ближнем поле и в реактивную (инерционную) составляющую

сопротивления излучения. Предположим, что произвольное распределение скорости на поверхности при $r = a$ может быть представлено в виде произведения функций от φ и от z ,

$$U(\varphi, z) = U_0 \theta_1(\varphi) \theta_2(z), \quad (6.175)$$

где U_0 — скорость колебаний точки приведения при $\varphi = 0$, θ_1 и θ_2 — нормированные распределения скоростей по окружности и вдоль оси z . Таким образом, граничное условие на поверхности цилиндра

$$U|_{r=a} = U_0 \theta_1(\varphi) \theta_2(z) = -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (6.176)$$

Введем обозначения

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_1(\varphi) e^{-jm\varphi} d\varphi \quad \text{и} \quad B(k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(z) e^{-jk_z z} dz \quad (6.177)$$

для коэффициентов Фурье и преобразования Фурье распределений скоростей по окружности и в направлении оси z , соответственно. Для простоты предположим, что цилиндр, имеющий высоту h , колеблется равномерно по окружности и по высоте (такой излучатель представляет наибольший интерес), т.е.

$$\theta_1(\varphi) = 1, \quad \theta_2(z) = \begin{cases} 1 & \text{at } |z| < h/2 \\ 0 & \text{at } |z| > h/2 \end{cases}. \quad (6.178)$$

В соответствии с формулами (6.177)

$$b_0 = 1, \quad b_m = 0 \quad \text{при } m \neq 0; \quad B(k_z) = h \cdot \frac{\sin(k_z h/2)}{k_z h/2} = h \cdot H_h(k_z), \quad (6.179)$$

где для краткости введено обозначение $[\sin(k_z h/2)/k_z h/2] = H_h(k_z)$.

После подстановки выражений (6.179) в граничные условия и определения неизвестных коэффициентов a_m и $A(k_z)$, получаем следующее выражение для звукового давления, создаваемого цилиндрическим преобразователем, встроенным в жесткий цилиндрический экран,

$$P(r, z) = \frac{-j\omega\rho h U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_h(k_z) \frac{H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r) e^{-jk_z z}}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_0^{(2)'}(\sqrt{k^2 - k_z^2} a)} dk_z = \frac{-j\omega\rho h U_0}{2\pi} \cdot I. \quad (6.180)$$

В принципе, с помощью этой функции могут быть рассчитаны все связанные с акустическим полем параметры преобразователей, встроенных в бесконечный жесткий цилиндрический экран, по формулам, представленным Разделе 6.1.3. Но вычислить интеграл в выражении (6.180) не просто. Желательно преобразовать его таким образом, чтобы получить формулы, которыми легко пользоваться для расчета акустического поля в ближней зоне (что необходимо для расчета сопротивлений излучения) и в дальней зоне (что необходимо для расчета характеристик направленности и коэффициентов дифракции).

В работе [9] это было сделано следующим образом.

Рассмотрим интеграл I из выражения (6.180),

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_h(k_z) \frac{H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r) e^{-jk_z z}}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_0^{(2)'}(\sqrt{k^2 - k_z^2} a)} dk_z. \quad (6.181)$$

Выражение под интегралом стремится к бесконечности в точках $k_z = \pm k$. Изменим переменную интегрирования, введя обозначение $k_z = k \sin \alpha$. Так как интегрирование проводится по интервалу $-\infty < k_z < \infty$ (Рис. 6.17), то сделаем предположение, что $|\sin \alpha| = |(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) / 2j| > 1$ и переменная α должна быть комплексной. Пусть $\alpha = \alpha' + j\alpha''$. Тогда

$$k_z = k(\sin \alpha' \cosh \alpha'' + j \cos \alpha' \sinh \alpha''). \quad (6.182)$$

Дальнейшее интегрирование будем производить в комплексной плоскости в координатах α' и α'' , как это показано на Рис. 6.17.

Так как k_z должно быть вещественным числом, то $\cos \alpha' \sinh \alpha'' = 0$ и

$$k_z = k \sin \alpha' \cosh \alpha''. \quad (6.183)$$

При $|k_z| < k$ из этого условия следует, что $\alpha'' = 0$ и α' изменяется в интервале $(-\pi/2) < \alpha' < (\pi/2)$. При больших значениях $|k_z| > k$ очевидно, что $\alpha'' \neq 0$ (в противном случае было бы $|\sin \alpha'| > 1$) и из условия (6.183) следует, что $\alpha' = \pm(\pi/2)$, и $k_z = \pm k \cosh \alpha''$. Функция $\cosh \alpha''$ четная, и возникает вопрос о знаке α'' (о направлении, в котором в комплексной плоскости идут ветви $\alpha' = \pm(\pi/2)$).

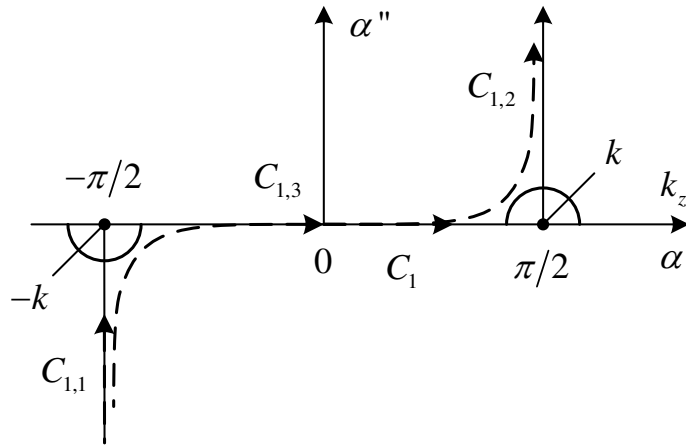


Рисунок 6.17: Контур интегрирования в комплексной плоскости.

Рассматривая сходимость функции Ханкеля при $kr \gg 1$ можно показать, что эти ветви будут идти так, как показано на Рис. 6.17. Особые точки $\pm k$ ($\alpha' = \pm(\pi/2)$) следует обходить по дугам бесконечно малого радиуса ε . Таким образом, интеграл (6.181) приобретает вид

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_h(k \sin \alpha) \frac{H_0^{(2)}(kr \cos \alpha) e^{-jkz \sin \alpha}}{H_0^{(2)'}(ka \cos \alpha)} d\alpha, \quad (6.184)$$

где интегрирование идет вдоль контура C_1 в комплексной плоскости, показанного на Рис. 6.17, который включает в себя следующие ветви (интервалы):

Интервал $C_{1,1}$, на котором $-\infty < \alpha'' < 0$, $\alpha' = -\pi/2$, $\sin \alpha = -\cosh \alpha''$, $\cos \alpha = \sinh \alpha''$;

Интервал $C_{1,2}$, на котором $0 < \alpha'' < \infty$, $\alpha' = \pi/2$, $\sin \alpha = \cosh \alpha''$, $\cos \alpha = -\sinh \alpha''$;

Интервал $C_{1,3}$, на котором $\alpha'' = 0$, $-\pi/2 < \alpha' < \pi/2$.

Можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграл (6.148) над дугами с этим радиусом исчезает. Таким образом, интеграл (6.148) оказывается представленным в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_h(k \cosh \alpha'') \frac{H_0^{(2)}(kr \sinh \alpha'') e^{-jkz \cosh \alpha''}}{H_0^{(2)'}(ka \sinh \alpha'')} d\alpha'' + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_h(k \sin \alpha) \frac{H_0^{(2)}(kr \cos \alpha) e^{-jkz \sin \alpha}}{H_0^{(2)'}(ka \cos \alpha)} d\alpha. \quad (6.185)$$

В ходе дальнейших операций с составляющими интеграла будем использовать следующие соотношения для функций Бесселя (см. Приложение С.3):

$$H_m^{(2)}(-jx) = -\frac{2}{j\pi} e^{j\frac{\pi m}{2}} K_m(x), \quad (6.186)$$

где $K_m(z)$ — модифицированная функции Бесселя второго рода,

$$H_0^{(2)'}(x) = -H_1^{(2)}(x), \quad K_0'(x) = -K_1(x). \quad (6.187)$$

После преобразований, включающих в себя приведенные соотношения, в конечном счете получим выражение для интеграла (6.185) в виде

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} H_h(ka \cosh \alpha'') \frac{K_0(kr \sinh \alpha'')}{K_1(ka \sinh \alpha'')} e^{-jkz \cosh \alpha''} d\alpha'' - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_h(ka \sin \alpha') \frac{H_0^{(2)}(kr \cos \alpha')}{H_1^{(2)}(ka \cos \alpha')} e^{-jkz \sin \alpha'} d\alpha'. \quad (6.188)$$

Это выражение может быть использовано для расчета акустического поля независимо от расстояния от источника, но оно наиболее подходит для определения параметров ближнего поля. Для вычисления звукового давления в дальнем поле интеграл (6.184) следует дополнительно преобразовать, применив асимптотическое представление функции Ханкеля. Рассмотрим результаты определения характеристик преобразователей в ближнем и дальнем полях.

6.3.4.1 Ближнее поле цилиндра и сопротивления излучения

Формула (6.180) для звукового давления, создаваемого цилиндром, после подстановки выражения (6.188) для интеграла I приобретает вид

$$P(r, z) = \frac{j\omega\rho h U_0}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H_h(ka \cosh \alpha'') \frac{K_0(kr \sinh \alpha'')}{K_1(ka \sinh \alpha'')} e^{-jkz \cosh \alpha''} d\alpha'' + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_h(ka \sin \alpha') \frac{H_0^{(2)}(kr \cos \alpha')}{H_1^{(2)}(ka \cos \alpha')} e^{-jkz \sin \alpha'} d\alpha' \right]. \quad (6.189)$$

Комплексную величину сопротивления излучения найдем с помощью соотношения

$$Z_{ac} = \frac{2\pi a}{U_0} \int_{-h/2}^{h/2} P(a, z) dz = r_{ac} + jx_{ac} \quad (6.190)$$

После выполнения интегрирования по интегралам в выражении (6.189) и некоторых операций, которые включают в себя: замену переменных $\alpha' \rightarrow \theta$ и $\alpha'' \rightarrow \psi$,

подстановку H_h из выражения (6.179) и представление функций Ханкеля через функции Бесселя и Неймана, получим следующие выражения для активного и реактивного сопротивлений излучения:

$$r_{ac} = \frac{16\omega\rho}{\pi k^3} \int_0^{\pi/2} A d\theta, \quad (6.191)$$

где
$$A = \frac{\sin^2[(kh/2)\sin\theta]}{\sin^2\theta \cdot \cos\theta [J_1^2(ka\cos\theta) + N_1^2(ka\cos\theta)]}; \quad (6.192)$$

$$x_{ac} = \frac{8a\omega\rho}{k^2} \left[\int_0^{\pi/2} B d\theta + \int_0^{\infty} C d\psi \right], \quad (6.193)$$

где

$$B = \frac{\sin^2[(kh/2)\sin\theta] [J_0(ka\cos\theta)J_1(ka\cos\theta) + N_0(ka\cos\theta)N_1(ka\cos\theta)]}{\sin^2\theta \cdot \cos\theta [J_1^2(ka\cos\theta) + N_1^2(ka\cos\theta)]}, \quad (6.194)$$

$$C = \frac{\sin^2[(kh/2)\cosh\psi] K_0(ka\sinh\psi)}{\cosh^2\psi K_1(ka\sinh\psi)}. \quad (6.195)$$

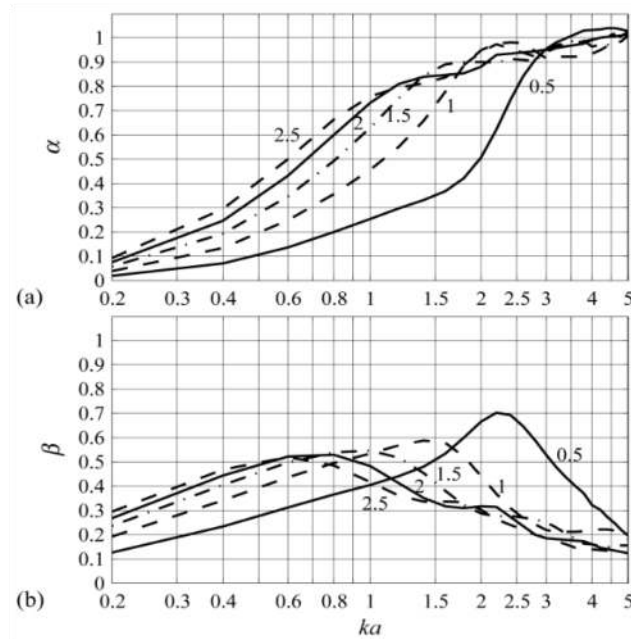


Рисунок 6.18: Зависимости безразмерных коэффициентов активного (а) и реактивного (б) сопротивлений излучения от ka при соотношениях размеров: $h/2a = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$.

Выражения (6.191) - (6.195) совпадают с выражениями для комплексной величины

сопротивления излучения, полученными иным способом в работе [10]. Следует отметить, что функция C быстро стремится к нулю с увеличением аргумента ψ в силу существования в знаменателе функции $\cosh^2 \psi$.

Результаты расчета безразмерных (нормированных к площади поверхности цилиндра) коэффициентов активного и реактивного сопротивлений излучения от ka представлены на Рис. 6.18.

При малых ka

$$J_1(ka \cos \theta) \rightarrow 0, \quad N_1(ka \cos \theta) \approx 2 / \pi ka \cos \theta, \quad (6.196)$$

и после подстановки $\sin \theta = x$, выражение (6.191) можно преобразовать к виду

$$r_{ac} = \frac{\rho c}{\pi h^2} S_{cyl}^2 \int_0^1 \frac{\sin^2(kh/2)x}{x^2} dx. \quad (6.197)$$

После интегрирования по частям (с постановкой $u = \sin^2(kh/2)x$ и $dv = x^{-2} dx$), в итоге можно получить следующее выражение для активного сопротивления излучения

$$r_{ac} = \rho c S_{cyl} \frac{2a}{h} [kh \cdot Si(kh) - 2 \sin^2(kh/2)], \quad (6.198)$$

где функция

$$Si(kh) = \int_0^{kh} \frac{\sin y}{y} dy \quad (6.199)$$

представляет собой интегральный синус (таблицы см. в справочниках [5, 6]). На Рис. 6.19 представлены зависимости безразмерного коэффициента активного сопротивления излучения от kh при малых ka для разных соотношений размеров цилиндров.

При анализе результатов расчета сопротивлений излучения следует иметь в виду, что особенно важно, чтобы они были как можно более точными для диапазонов волновых размеров преобразователей в области их резонансных частот. Так, для цилиндрических преобразователей, изготовленных из PZT композиций, при продольных колебаниях колец это примерно диапазон $ka > 2.0$, для преобразователей изгибного типа (включая кольца с разрезами) $ka \approx (0.2 - 0.4)$.

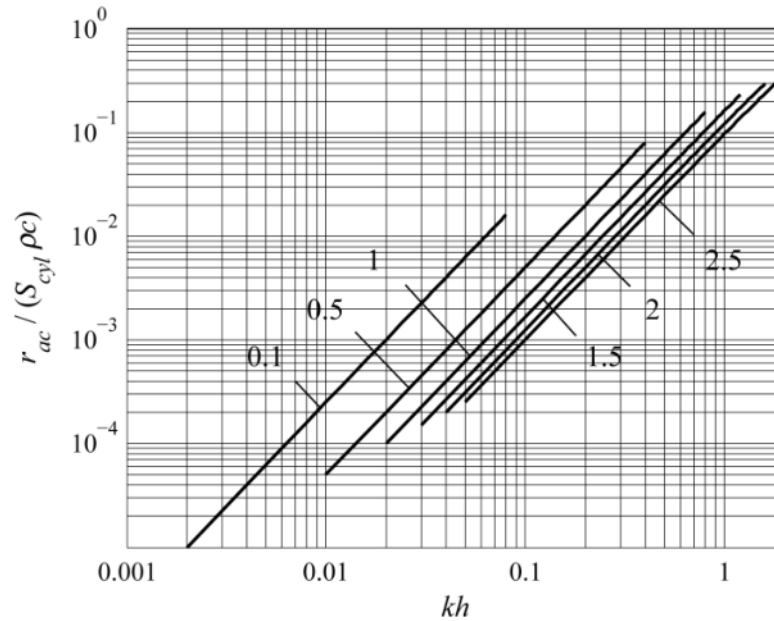


Рисунок 6.19: Зависимости активного сопротивления излучения при малых ka от kh для соотношений размеров цилиндра: $h/2a = 0,1, 0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5$.

6.3.4.2 Дальнее поле цилиндра и характеристики направленности

Для вычисления звукового давления в дальнем поле интеграл (6.184) можно преобразовать с помощью асимптотического представления функции Ханкеля

$$H_m^{(2)}(kr \cos \alpha) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \alpha}} e^{-jkr \cos \alpha} e^{jm\pi/2 + j\pi/4}. \quad (6.200)$$

После подстановки этого выражения в интеграл (6.184) получим при $m = 0$

$$I \approx e^{j\pi/4} \int_{C_1} H_h(k \sin \alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \alpha}} \frac{e^{-jk(r \cos \alpha + z \sin \alpha)}}{H_0^{(2)'}(ka \cos \alpha)} d\alpha. \quad (6.201)$$

Экспоненциальный множитель в числителе соответствует плоской волне, распространяющейся под углом α относительно перпендикуляра к оси цилиндра. Таким образом, интеграл суммирует множество волн, распространяющихся под разными углами. К ним относятся бегущие волны, распространяющиеся от источника (они соответствуют вещественным значениям α) и неоднородные волны, которые затухают в направлении, перпендикулярном оси (им соответствуют мнимые значения α). Действительно, при интегрировании вдоль ветвей $C_{1,1}$ и $C_{1,2}$ на Рис. 6.17 [$\alpha = -(\pi/2) - j\alpha''$ и $\alpha = (\pi/2) + j\alpha''$]

, соответственно] $\cos \alpha = -j \sinh \alpha''$ и множитель $e^{-jkr \cos \alpha} = e^{-kr \sinh \alpha''}$ исчезает с увеличением r . Соответствующие волны распространяются вдоль оси цилиндра и затухают в радиальном направлении. Кстати, это показывает, что направление вертикальных ветвей на Рис. 6.17 выбрано правильно. В противном случае этот множитель был бы $e^{kr \sinh \alpha''}$, и волна бесконечно увеличивалась бы с увеличением r в нарушение принципа излучения.

В приближении дальнего поля мы предполагаем, что расстояние до точки наблюдения очень велико ($R \gg h$). При таком допущении для приближенного вычисления интеграла (6.201) можно использовать метод стационарной фазы. Этот метод применим к вычислению интегралов следующего вида

$$I = \int_C F(y) e^{jp f(y)} dy, \quad (6.202)$$

где параметр p велик, $f(y)$ — аналитическая функция. Точка стационарной фазы y_0 является корнем уравнения $f'(y) = 0$. Если $F(y)$ изменяется медленно вблизи точки $y = y_0$, то можно получить асимптотическую формулу для интеграла (6.202) в виде

$$I \approx \frac{\sqrt{2\pi} F(y_0) e^{jp f(y_0)}}{\sqrt{p e^{j\pi} f''(y_0)}}. \quad (6.203)$$

При $kr \gg 1$ интеграл (6.201) имеет вид (6.202) с $p = kr$ и $f(\alpha) = \cos \alpha + (z/r) \sin \alpha$. Экспоненциальный множитель колеблется быстро, в то время как остальная часть подынтегральной функции медленно изменяется в непосредственной близости от стационарной точки,

$$\alpha_0 = \arctan \frac{z}{r} = \beta, \quad (6.204)$$

которая определена из условия $f'(\alpha_0) = 0$. Стационарная точка соответствует направлению на точку наблюдения (см. Рис. 6.16). Воспользовавшись формулой (6.203), получим приближенное значение интеграла (6.201) (обратите внимание, что $r = R \cos \beta$, $z = R \sin \beta$)

$$I \approx \frac{2e^{j\pi/4}}{k \cos \beta H_0^{(2)'}(ka \cos \beta)} H_h(k \sin \beta) \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (6.205)$$

Чем дальше точка наблюдения находится от источника, тем точнее это

приближение.

Рассмотрим теперь выражение (6.180) для звукового давления в дальнем поле. Подставив в него выражения (6.205) для интеграла I и (6.179) для функции $H_h(k \sin \beta)$, и учитывая, что $H_0^{(2)'} = -H_1^{(2)}$, получим

$$P(R, \beta) = \frac{\rho ch}{\pi} U_0 e^{j\pi/4} \left[\frac{1}{\cos \beta H_1^{(2)}(ka \cos \beta)} \cdot \frac{\sin[(kh/2) \sin \beta]}{(kh/2) \sin \beta} \right] \frac{e^{-j(kR - \pi/2)}}{R}. \quad (6.206)$$

Выражение в скобках не зависит от расстояния до точки наблюдения и представляет собой характеристику направленности цилиндра. Последний множитель описывает расходящуюся сферическую волну. Этот результат соответствует формулировке принципа излучения.

Характеристика направленности цилиндра в вертикальной плоскости

$$H_{cb}(\beta) = \frac{P(R, \beta)}{P(R, 0)} = \frac{H_1^{(2)}(ka)}{\cos \beta H_1^{(2)}(ka \cos \beta)} \cdot \frac{\sin[(kh/2) \sin \beta]}{(kh/2) \sin \beta}. \quad (6.207)$$

При $ka \ll 1$

$$H_1^{(2)}(ka \cos \beta) \approx \frac{2j}{\pi ka \cos \beta}, \quad (6.208)$$

и характеристика направленности тонкого цилиндра в жестком экране такая же, как для линейного отрезка длиной h в свободном пространстве,

$$H_h(\beta) = \frac{\sin[(kh/2) \sin \beta]}{(kh/2) \sin \beta}. \quad (6.209)$$

При $kh \ll 1$ из формулы (6.207) следует, что множитель

$$H_{rb}(\beta) = \frac{H_1^{(2)}(ka)}{\cos \beta H_1^{(2)}(ka \cos \beta)} \quad (6.210)$$

определяет направленность в вертикальной плоскости короткого кольца, встроенного в жесткий цилиндрический экран. Для сравнения, выражение для характеристики направленности короткого кольца в свободном пространстве имеет вид

$$H_{rf}(\beta) = J_0(ka \cos \beta). \quad (6.211)$$

На Рис. 6.20 представлены характеристики направленности короткого кольца в

вертикальной плоскости при различных значениях ka в сравнении с таковыми для кольца в свободном пространстве.

Таким образом, характеристика направленности цилиндрического преобразователя в вертикальной плоскости $H_{cb}(\beta)$ является произведением характеристик направленности короткого кольца, встроенного в жесткий экран, и линейного отрезка, имеющего высоту преобразователя, в свободном пространстве.

$$H_{cb}(\beta) = H_{rb}(\beta)H_h(\beta) \quad (6.212)$$

Продемонстрированная для простоты на примере равномерно колеблющегося цилиндра, эта теорема произведения справедлива для произвольного распределения скорости на поверхности цилиндра, поскольку распределение скорости представлено в виде $U(\varphi, z) = U_0 \theta_1(\varphi)\theta_2(z)$. Такой вывод вытекает из процедуры получения результата, хотя и требует более громоздких преобразований.

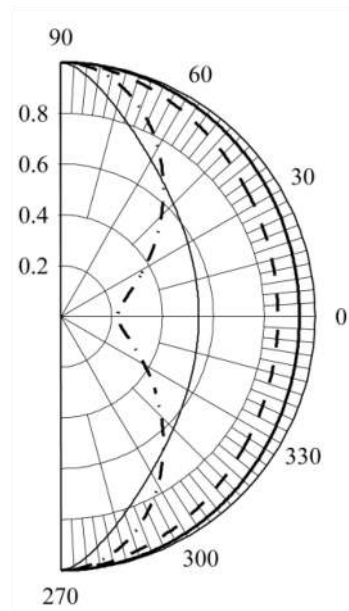


Рисунок 6.20: Характеристики направленности короткого кольца в вертикальной плоскости: при $ka = 0.5$ в свободном пространстве (сплошная линия) и встроенного в жесткий экран (штриховая линия); при $ka = 2.0$ в свободном пространстве (штрихпунктирная линия) и встроенного в жесткий экран (тонкая сплошная прямая).

Цилиндр конечного размера, колеблющийся в жестком экране с произвольным

распределением скорости по окружности (при $\beta = 0$), имеет такую же направленность в горизонтальной плоскости, как и бесконечно длинный цилиндр с таким же распределением скоростей.

Что касается характеристики направленности экранированного кольца в вертикальной плоскости, то можно предположить, что направление ее максимума отклонится от оси $\beta = \pi/2$ в плоскости симметрии экрана, а относительная величина максимума уменьшится.

Произведенные сравнения показывают, что при волновых размерах цилиндра приблизительно $(h/\lambda) > 0.8$ и $(h/2a) > 1$ результаты, полученные для модели цилиндра конечной высоты, колеблющегося в жестком цилиндрическом экране, достаточно близки (для сопротивлений излучения на единицу высоты) к тем, которые получены для гораздо более простой модели бесконечного цилиндра. При меньшей волновой высоте и соотношении размеров модель цилиндра конечного размера более уместна (хотя и сложнее). Но неясно, в какой степени эта модель может быть достаточно точной для коротких цилиндров. Чтобы получить эту оценку и обеспечить средства для моделирования акустических параметров коротких колец, следует рассмотреть проблему излучения цилиндрами при их колебаниях в свободном пространстве. Эта задача гораздо сложнее для аналитического решения. Она не допускает разделения переменных в уравнении Гельмгольца и, строго говоря, для ее решения требуется применить численные методы. В завершение анализа излучения цилиндрами, имеющими конечные размеры, рассмотрим метод решения этой задачи и результаты, полученные с его помощью для цилиндров с представительными соотношениями размеров.

6.3.5 Излучение цилиндра с конечными размерами в свободном пространстве

Решению задачи излучения для цилиндров конечного размера был посвящен ряд работ. Обзор библиографии по этому поводу можно найти в работах [13] и [14], в которых представлено, вероятно, наиболее полное, простое в реализации и физически ясное решение задачи. Метод, представленный в работах [13] и [14] и более подробно в работе [15], обеспечивает достаточную точность в широком диапазоне волновых чисел ka и соотношений размеров $h/2a$ при произвольных граничных условиях. Полученные

результаты сходятся к предельным случаям длинных ($h/2a \gg 1$) и коротких ($h/2a \ll 1$) цилиндров и проверены экспериментально в работе [16] для нескольких вариантов цилиндрических преобразователей, имеющих промежуточные соотношения размеров. Краткое описание метода, примененного в этих работах, выглядит следующим образом.

Конфигурация цилиндра в цилиндрической системе координат представлена на Рис.

6.21 (а). Рассмотрим интегральное уравнение Гельмгольца

$$\varepsilon \Phi(x) - \iint_S K(x, x_0) \Phi(x_0) dS_0 = f(x), \quad (6.213)$$

где

$$K(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial g(x, x_0)}{\partial n_0}, \quad (6.214)$$

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S U(x_0) g(x, x_0) dS_0, \quad (6.215)$$

$$g(x, x_0) = \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad R = |x - x_0|, \quad (6.216)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & x \in D_{out}, \\ 1/2, & x \in S, \\ 0, & x \in D_{in}. \end{cases} \quad (6.217)$$

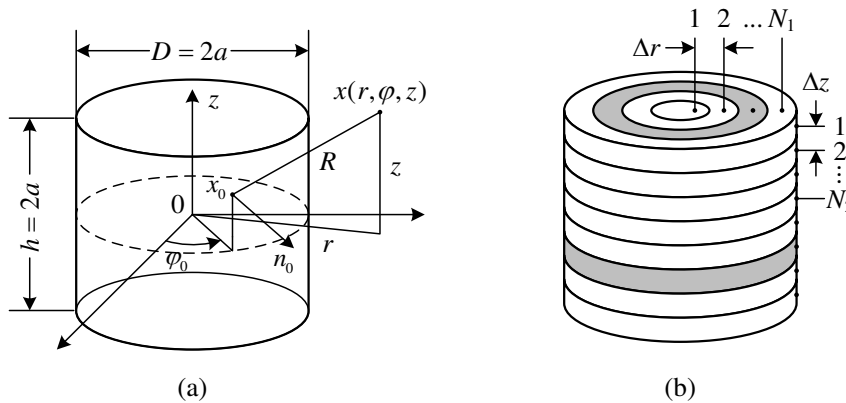


Рисунок 6.21: (а) Конфигурация цилиндра и система координат, (б) разделение поверхности цилиндра на кольца и полосы.

В этих выражениях: $\Phi(x)$ — потенциал скорости, $g(x, x_0)$ — трехмерная функция

Грина, U — скорость колебаний элемента поверхности, S — поверхность цилиндра, x и x_0 — координаты точки наблюдения и точки на поверхности, R — расстояние между точкой наблюдения и точкой на поверхности; ε — коэффициент, значение которого зависит от того, где взята точка наблюдения (снаружи поверхности, на поверхности, либо внутри поверхности), n_0 — внешняя нормаль к поверхности.

В результате подстановки выражений (6.214)–(6.217) в уравнение (6.213) получим

$$4\pi\varepsilon\Phi(x) - \iint_S \frac{\partial}{\partial n_0} \left[\frac{e^{-jkR}}{R} \right] \Phi(x) dS_0 = \iint_S U(x_0) \left[\frac{e^{-jkR}}{R} \right] dS_0, \quad (6.218)$$

где расстояние R , выраженное в цилиндрических координатах, равно

$$R = |x - x_0| = \sqrt{(r^2 - r_0^2) - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2}. \quad (6.219)$$

В большинстве преобразователей, предназначенных для ненаправленного излучения в горизонтальной плоскости, колебания поверхности осесимметричны, что значительно уменьшает объем численных вычислений. Будем рассматривать именно этот случай во избежание сложностей, ненужных для изложения подхода к решению задачи.

Первый шаг в решении уравнения (6.218) — разделение цилиндрической поверхности на верхнюю, нижнюю и боковую поверхности ($S = S_t + S_b + S_s$) для оценки поверхностных интегралов в уравнении (6.218). Учтем, что в силу осевой симметрии задачи $\Phi(r, \varphi, x) = \Phi(r, x)$ и $U(r, \varphi, x) = U(r, x)$. После некоторых преобразований уравнение (6.218) представим в виде

$$\begin{aligned} & 4\pi\varepsilon\Phi(r, z) - \int_0^a \Phi(r_0, b)(z - b) \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_t}}{R_t^3} (1 + jkR_t) r_0 d\varphi_0 dr_0 + \\ & \quad + \int_0^a \Phi(r_0, -b)(z + b) \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_b}}{R_b^3} (1 + jkR_b) r_0 d\varphi_0 dr_0 + \\ & \quad + \int_{-b}^b \Phi(a, z_0) a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_s}}{R_s^3} (1 + jkR_s) (a - r \cos \varphi_0) d\varphi_0 dz_0 = \\ & = \int_0^a U(r_0, b) \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_t}}{R_t} r_0 d\varphi_0 dr_0 + \int_0^a U(r_0, -b) \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_b}}{R_b} r_0 d\varphi_0 dr_0 + \\ & \quad + \int_{-b}^b U(a, z_0) a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_s}}{R_s} d\varphi_0 dz_0. \end{aligned} \quad (6.220)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R_t &= \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0 + (z-b)^2}, \\
R_b &= \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0 + (z+b)^2}, \\
R_s &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi_0 + (z-z_0)^2}.
\end{aligned} \tag{6.221}$$

Следующий шаг — разделение поверхности цилиндра на дискретные кольца (на верхней и нижней поверхностях) и полосы (на боковой поверхности), как это показано на Рис. 6.21(b), для последующего численного интегрирования.

Следует отметить, что в общем случае, если существует распределение скоростей колебаний (или потенциалов) по окружности цилиндра (т.е. колебания не являются осесимметричными), то кольца и полосы потребуется дополнительно разделить в азимутальном направлении. Это приведет к увеличению объема вычислений, но принципиально дела не изменит.

При осесимметричных колебаниях потенциал скорости и скорость колебаний постоянны в каждом кольце и полосе (закрашены серым цветом). Имеем по N_1 колец на верхней и нижней поверхностях (в интервале $[0, a]$) и $2N_2$ полосы на боковой поверхности (в интервале $[-b, b]$), что в целом дает $N = 2(N_1 + N_2)$ дискретных элементов. Решение интегрального уравнения Гельмгольца найдем, решив N линейных уравнений вида

$$(4\pi\varepsilon - Y_{ij})\Phi_i = V_{ij}U_j \quad \text{где } i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots N \tag{6.222}$$

Комплексные $N \times N$ матрицы Y_{ij} и V_{ij} должны быть определены путем суммирования вкладов от всех элементов для каждой точки наблюдения.

Для того чтобы вычислить сопротивление излучения цилиндра, точки наблюдения следует располагать на поверхности в центре каждого кольца или полосы. Комбинированное воздействие на точку наблюдения всех остальных колеблющихся элементов деления поверхности образует каждый элемент матрицы. Для получения более точных результатов следует увеличить количество разделений поверхности (уменьшить размеры колец и полос).

Применение дискретизации уравнения (6.220) для расчета сопротивления излучения цилиндров может быть осуществлено в соответствии с выражением

$$\begin{aligned}
 Z_{ac} &= \frac{1}{U_0 U_0^*} \iint_S P(x_0) U^*(x_0) dS_0 = \\
 &= \frac{2\pi}{|U_0|^2} \left[\int_0^a P(r_0, b) U^*(r_0, b) r_0 dr_0 + \int_0^a P(r_0, -b) U^*(r_0, -b) r_0 dr_0 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-b}^b P(a, z_0) U^*(a, z_0) a dz_0 \right], \quad (6.223)
 \end{aligned}$$

где U_0 — скорость точки приведения в центре боковой поверхности и $P = jk(\rho c)_w \Phi$ — звуковое давление.

Зависимости от ka безразмерных коэффициентов сопротивления излучения равномерно колеблющегося цилиндра ($U/U_0 = 1$ на боковой поверхности) с жесткими фланцами ($U(r_0, b) = 0$ на верхней и нижней поверхностях) для соотношений высоты к диаметру $h/2a = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0$ в сравнении с аналогичными зависимостями для бесконечно длинного цилиндра ($h/2a \rightarrow \infty$) приведены на Рис. 6.22.

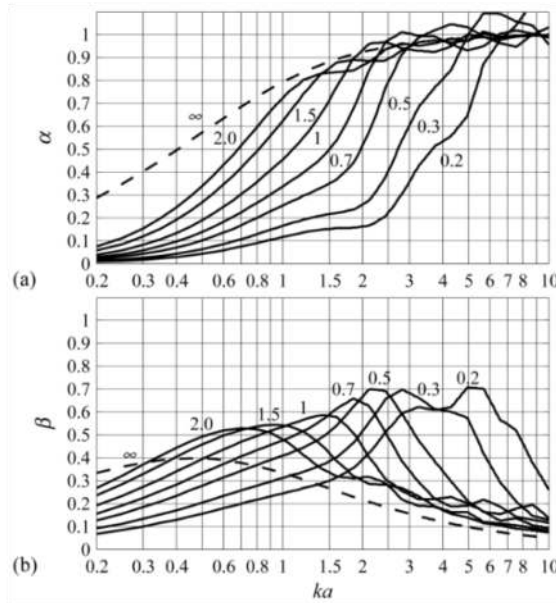


Рисунок 6.22: Безразмерные коэффициенты излучения цилиндров с жесткими фланцами для различных соотношений размеров: $h/2a = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0, \infty$.

На Рис. 6.23 представлено сравнение графиков безразмерных коэффициентов сопротивления излучения цилиндров, колеблющихся в жестком цилиндрическом экране (Рис. 6.18) и в свободном пространстве при одинаковых соотношениях размеров.

В дополнение к графикам на Рис. 6.23 следует отметить, что при $h/\lambda > 0.8$

безразмерный коэффициент $\alpha(ka, h/\lambda)$ можно принять равным $\alpha(ka)$ для бесконечно длинного цилиндра того же диаметра с точностью до 10%. С увеличением ka значение h/λ , для которого это приближение справедливо, уменьшается и при $ka \rightarrow \infty$ это значение стремится к $h/\lambda \approx 0.3$.

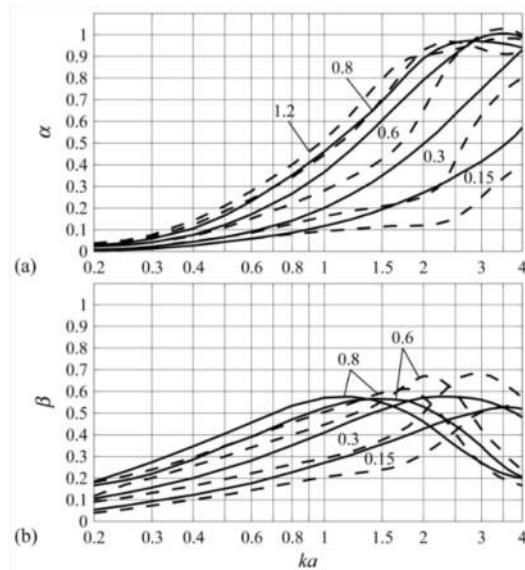


Рисунок 6.23: Сравнение значений безразмерных коэффициентов сопротивления излучения пульсирующих цилиндров в жестком цилиндрическом экране (сплошные линии) и без экрана с неподвижными фланцами (пунктирная линия). $h/2a = 0.15$ (1); 0.3 (2); 0.6 (3); 0.8 (4); 1.2 (5).

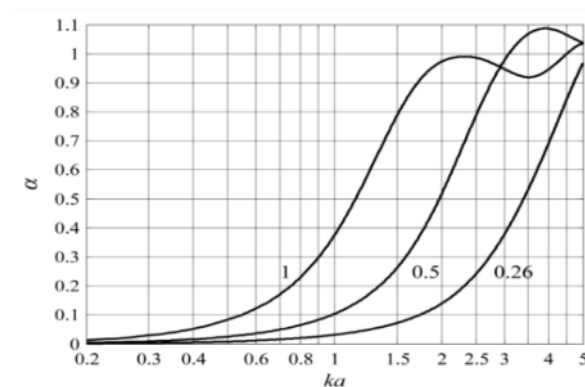


Рисунок 6.24: Безразмерные коэффициенты активного сопротивления излучения преобразователя с податливыми фланцами для $h/2a = 0.26, 0.5, 1.0$.

На практике при расчете преобразователей представляет интерес сравнение значений сопротивления излучения преобразователей с различными условиями на торцах,

например, с жесткими и податливыми фланцами. В последнем случае на торцах должно быть $P(r_0, |b|) = 0$ вместо $U(r_0, |b|) = 0$ при жестких фланцах. Результаты расчета сопротивления излучения податливых концов приведены на Рис. 6.24.

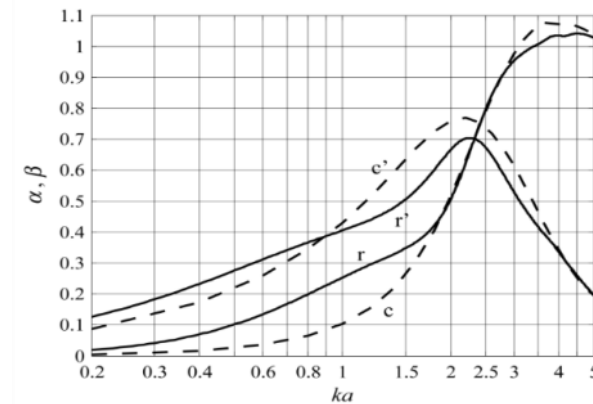


Рисунок 6.25: Безразмерные коэффициенты активного и реактивного сопротивления излучения при $h/2a = 0.5$. Жесткие фланцы (r, r' — сплошные линии), податливые фланцы (c, c' — пунктирные линии). Штрих относится к реактивному сопротивлению.

Сравнение сопротивлений излучения преобразователей с жесткими и с податливыми фланцами при соотношении размеров $h/2a = 0.5$ представлено на Рис. 6.25.

6.4 Излучение сферических преобразователей

Предварительно напомним, что общее решение задачи изучения сферической поверхностью приведено в Разделе 6.4, а в Разделе 4.4 рассмотрены свободные колебания сферических оболочек.

6.4.1 Общий случай

Рассмотрим акустическое поле, излучаемое сферической оболочкой (Рис. 6.26), колеблющейся с произвольным осесимметричным распределением скоростей по ее поверхности (для тонкостенной сферы можно считать, что $r_{out} = a + t/2 \approx a$)

$$U(a, \varphi) = \dot{\xi}_r(\varphi) = \sum_{i=0}^N U_i P_i(\cos \varphi), \quad (6.224)$$

где $\xi_r(\varphi)$ — радиальное смещение сферической оболочки, $U_i = \dot{\xi}_i$ — обобщенная скорость.

В общем случае часть поверхности сферы может быть покрыта экраном. Предположим, что экран абсолютно жесткий и покрывает сегмент сферы при углах $\varphi \geq \varphi_b$, как это показано на Рис. 6.26. Поэтому условия на поверхности имеют вид

$$U(a, \varphi) = \sum_{i=0}^N U_i P_i(\cos \varphi) \text{ при } \varphi \leq \varphi_b; \quad U(\varphi) = 0 \text{ при } \varphi > \varphi_b. \quad (6.225)$$

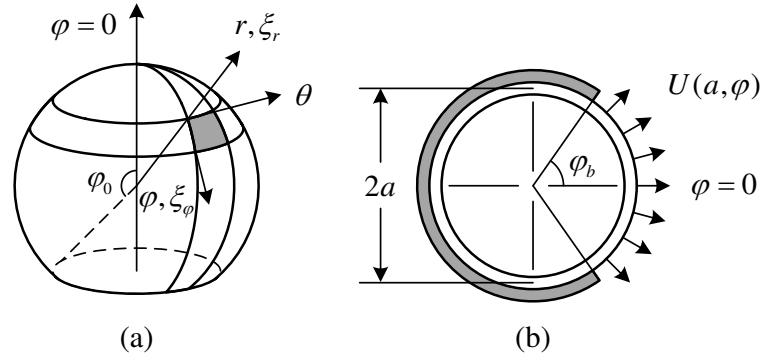


Рисунок 6.26: (а) Геометрия сферической оболочки и система координат, (б) иллюстрация сферической оболочки с конформным экраном.

Общее решение задачи излучения (см. Раздел 6.2.4)

$$P(r, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l^{(2)}(kr) P_l(\cos \varphi). \quad (6.226)$$

Здесь $h_l^{(2)}(kr)$ — сферические функции Ханкеля второго рода, $P_l(\cos \varphi)$ — полиномы Лежандра порядка l . Произвольные постоянные A_l следует определить из условия соответствия решения граничным условиям (6.225), т.е.

$$U(a, \varphi) = -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{k}{j\omega\rho} \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l^{(2)'}(ka) P_l(\cos \varphi), \quad (6.227)$$

где штрих (') в верхнем индексе обозначает производную по ka . Представив $U(a, \varphi)$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$U(a, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^N U_i a_{il} \right] P_l(\cos \varphi), \quad (6.228)$$

где

$$a_{il} = (l+1/2) \int_0^{\varphi_b} P_l(a, \varphi) P_l(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (6.229)$$

и приравняв этот ряд к ряду в правой части соотношения (6.227), найдем коэффициенты A_l

$$A_l = -j\rho c \sum_{i=0}^N \frac{U_i a_{il}(\varphi_b)}{h_l^{(2)'}(ka)}. \quad (6.230)$$

После подстановки A_l в выражение (6.226) получим

$$P(r, \varphi, \varphi_b) = -j\rho c \sum_{i=0}^N U_i \left[\sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{h_l^{(2)}(kr)}{h_l^{(2)'}(ka)} P_l(\cos \varphi) \right] = \sum_{i=0}^N P_i(r, \varphi, \varphi_b), \quad (6.231)$$

где $P_i(r, \varphi, \varphi_b)$ — звуковое давление, соответствующее одиночной i -ой форме колебаний (модальное давление), определенное при $\varphi \leq \varphi_b$. На достаточно больших расстояниях от сферы (при $kr \rightarrow \infty$)

$$h_l^{(2)}(kr) \rightarrow \frac{j}{kr} e^{-j(kr - l\pi/2)}, \quad (6.232)$$

и получаем следующее выражение для модального звукового давления:

$$P_i(r, \varphi, \varphi_b) = \rho c \frac{1}{kr} e^{-jkr} U_i \sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{e^{j\pi l/2}}{h_l^{(2)'}(ka)} P_l(\cos \varphi). \quad (6.233)$$

Используя выражения (6.231) и (6.233) получаем выражения для звукового давления на акустической оси преобразователя $P(r, 0, \varphi_b)$ и для его характеристики направленности преобразователя $H(\varphi, \varphi_b)$

$$P(r, 0, \varphi_b) = \rho c \frac{1}{kr} e^{-jkr} \sum_{i=0}^N U_i \sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{e^{j\pi l/2}}{h_l^{(2)'}(ka)}, \quad (6.234)$$

$$H(\varphi, \varphi_b) = \frac{\sum_{i=0}^N U_i \sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{e^{j\pi l/2}}{h_l^{(2)'}(ka)} P_l(\cos \varphi)}{\sum_{i=0}^N U_i \sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{e^{j\pi l/2}}{h_l^{(2)'}(ka)}}. \quad (6.235)$$

Ранее были определены модальные коэффициенты дифракции сферического преобразователя относительно плоской волны, распространяющейся в направлении оси $\varphi = 0$ (см. уравнение (6.10)) как отношение модального звукового давления (уравнение (6.233)) к звуковому давлению, создаваемому малой пульсирующей сферой, имеющей такую же

относительную объемную скорость (уравнение (6.9)). Его можно найти в форме

$$k_{dif i} = \frac{P_i(r, 0, \varphi_b)}{P_0(r)} = -j \frac{1}{(ka)^2} \sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{e^{j\pi l/2}}{h_l^{(2)'}(ka)}. \quad (6.236)$$

Напомним, что относительная объемная скорость для i -ой формы колебаний равна $U_{\bar{v}i} = 4\pi a^2 U_i$, а звуковое давление, создаваемое малой пульсирующей сферой, имеющей такую объемную скорость, равно

$$P_0(r) = j(\rho c) k U_{\bar{v}i} e^{-jkr} / 4\pi r. \quad (6.237)$$

Коэффициент дифракции изменяется в соответствии с характеристикой направленности.

Акустическую мощность, создаваемую колеблющейся сферой, найдем с помощью выражения

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ac} &= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} P(a, \varphi, \varphi_b) U^*(a, \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ &= -j\rho c 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \left[\sum_i^N U_i \sum_{l=0}^{\infty} a_{il}(\varphi_b) \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(2)'}(ka)} P_l(\cos \varphi) \right] \times \\ &\quad \times \left[\sum_{p=0}^N U_p^* \sum_{l=0}^{\infty} a_{pl}(\varphi_b) P_l(\cos \varphi) \right] \sin \varphi d\varphi = \\ &= -j\rho c 2\pi a^2 \sum_{i=0}^N \left\{ \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} a_{il}^2(\varphi_b) \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(2)'}(ka)} \right] |U_i|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p \neq i}^N \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} a_{pl}(\varphi_b) a_{il}(\varphi_b) \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(2)'}(ka)} \right] U_p^* U_i \right\}. \end{aligned} \quad (6.238)$$

Запишем это выражение в виде

$$\bar{W}_{ac} = \sum_{i=0}^N \left[Z_{acii}(\varphi_b) + \sum_{p \neq i}^N z_{acip}(\varphi_b) \frac{U_p}{U_i} \right] |U_i|^2 = \sum_{i=0}^N Z_{aci}(\varphi_b) |U_i|^2, \quad (6.239)$$

где

$$Z_{acii}(\varphi_b) = -j\rho c 4\pi a^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} a_{il}^2(\varphi_b) \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(2)'}(ka)}, \quad (6.240)$$

— собственное сопротивление излучения i -ой формы колебаний при секторе излучения

в пределе углов $\varphi \leq \varphi_b$, и

$$z_{acip}(\varphi_b) = -j\rho c 4\pi a^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} a_{pl}(\varphi_b) a_{il}(\varphi_b) \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(2)'}(ka)}, \quad (6.241)$$

— взаимное сопротивление излучения между формами колебаний i и m ($m \neq i$). Таким образом, сопротивление излучения, связанное с обобщенной скоростью U_i , равно

$$Z_{aci}(\varphi_b) = Z_{acii}(\varphi_b) + \sum_{p \neq i}^N z_{acip}(\varphi_b) \frac{U_p}{U_i}. \quad (6.242)$$

Удобно представлять собственные и взаимные сопротивления излучения в виде

$$Z_{acii} = \rho c S_{effi}(\alpha_{ii} + j\beta_{ii}), \quad z_{acip} = \rho c S_{effi}(\alpha_{ip} + j\beta_{ip}), \quad (6.243)$$

где α и β — безразмерные коэффициенты активной и реактивной составляющих сопротивления и

$$S_{effi} = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi_b} P_i^2(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (6.244)$$

Представляет собой эффективную площадь излучающей поверхности.

6.4.2 Излучение сферических преобразователей без экранов

При расчете акустических характеристик сферических преобразователей без экранов, т.е. при $\varphi_b = \pi$, в соответствии с формулой (6.229) все коэффициенты a_{ip} при $i \neq p$ исчезают в силу ортогональности полиномов Лежандра, и $a_{ii} = 1$. Формы колебаний, которые могут быть генерированы преобразователем, зависят от конфигурации электродов на его поверхности (см. Главу 8). Будем рассматривать два наиболее распространенных варианта: униполярные электроды на всей поверхности преобразователя и электроды, разделенные на половины, которые соединены в противофазе (биполярные электроды).

6.4.2.1 Преобразователи с униполярными электродами на всей поверхности

В этом варианте генерируется только изолированная нулевая форма колебаний [$U(a, \varphi) = U_0$, $a_{00} = 1$, $S_{eff0} = 4\pi a^2$]. Это классический пример преобразователя с одной механической степенью свободы, который был рассмотрен в Главе 2. Выражения для коэффициента дифракции, звукового давления, создаваемого в дальнем поле, и

сопротивления излучения имеют вид

$$k_{dif0} = e^{jka} \frac{1}{1 + jka} = \frac{1}{\sqrt{1 + (ka)^2}} e^{j(ka - \arctan ka)}, \quad (6.245)$$

$$P_0(r, 0, \pi) = \frac{\rho c}{2\lambda r} 4\pi a^2 U_0 e^{j(kr - \pi/2)} k_{dif0}, \quad (6.246)$$

$$Z_{ac0} = \rho c 4\pi a^2 (\alpha_0 + j\beta_0), \quad (6.247)$$

где безразмерные коэффициенты сопротивления излучения равны

$$\alpha_0 = \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \text{ и } \beta_0 = \frac{ka}{1 + (ka)^2}. \quad (6.248)$$

Зависимости от ka безразмерных коэффициентов сопротивления излучения и коэффициента дифракции при $i = 0$ изображены на Рис. 6.27 и Рис. 6.28. На низких частотах (при $ka < 0.2$)

$$\alpha_0 \approx (ka)^2 \text{ и } \beta_0 \approx ka. \quad (6.249)$$

Акустическая масса пульсирующей сферы малого волнового размера равна $m_{ac0} = \tilde{V}_{sph} \rho$, т.е. равна массе воды в объеме сферы.

6.4.2.2 Преобразователи с биполярными электродами

При этом варианте электродов преобразователь генерирует формы колебаний при $i = 1, 3, 5, \dots$. Из выражения (6.244) следует, что $S_{effi} = 4\pi a^2 / (2i + 1)$. При первой форме колебаний выражения для коэффициента дифракции и сопротивления излучения имеют вид

$$k_{dif1} = 1 / (ka)^2 h_1^{(2)'}(ka), \quad (6.250)$$

$$Z_{ac1} = (\rho c) \frac{4\pi a^2}{3} (-j) \frac{h_1^{(2)}(ka)}{h_1^{(2)'}(ka)} = (\rho c) S_{eff1} (\alpha_{11} + j\beta_{11}). \quad (6.251)$$

Подробную информацию о свойствах сферических функций Бесселя и табличные данные для функций можно найти в работе [5]. Сводка свойств приведена в Приложении С.2. В частности,

$$h_1^{(2)'}(ka) = \frac{1}{3}[h_0^{(2)}(ka) - 2h_2^{(2)}(ka)]. \quad (6.252)$$

где $h_i^{(2)}(ka) = j_i(ka) - jy_i(ka)$.

Зависимости модальных коэффициентов дифракции $k_{diff i}$ и безразмерных коэффициентов α_{ii} и β_{ii} от ka для преобразователей без экранов представлены на Рис. 6.27 и 6.28.

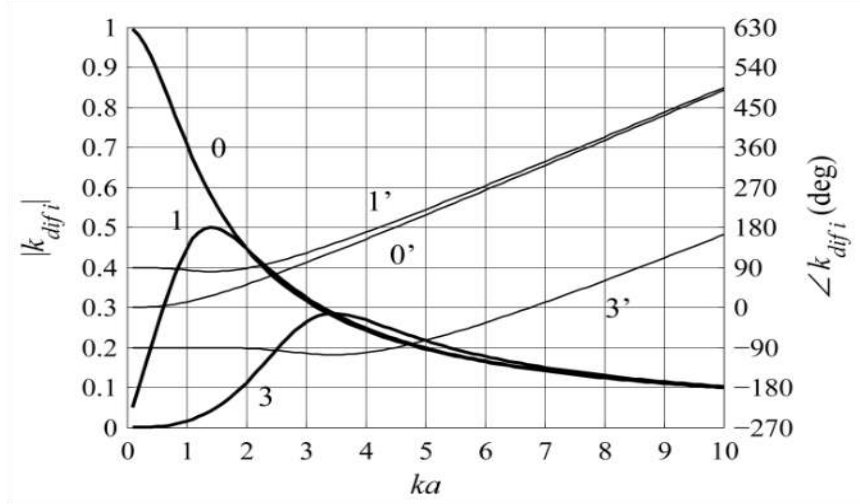


Рисунок 6.27: Зависимости модальных коэффициентов дифракции $k_{diff i}$ сфер без экранов при $i=0, 1, 3$ (обозначения для модуля). Фазы обозначены $0', 1', 3'$.

При $ka < 0.3$

$$j_m(ka) \approx \frac{(ka)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}, \quad (6.253)$$

$$y_m(ka) \approx -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{(ka)^{m+1}}, \quad (6.254)$$

$$h_1^{(2)} \approx \frac{1}{3} \left[ka + j \frac{3}{(ka)^2} \right], \quad h_1^{(2)'}(ka) \approx \frac{1}{3} \left[1 - j \frac{6}{(ka)^3} \right], \quad (6.255)$$

и с помощью уравнения (6.251) получим

$$\alpha_1 \approx \frac{(ka)^4}{4}, \quad \beta_1 \approx \frac{ka}{2}. \quad (6.256)$$

Акустическая масса колеблющейся сферы малого радиуса (простого дипольного источника)

$$m_{ac} = \frac{1}{\omega} \rho c \cdot \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \frac{ka}{2} = \frac{1}{2} \tilde{V}_{sph} \rho, \quad (6.257)$$

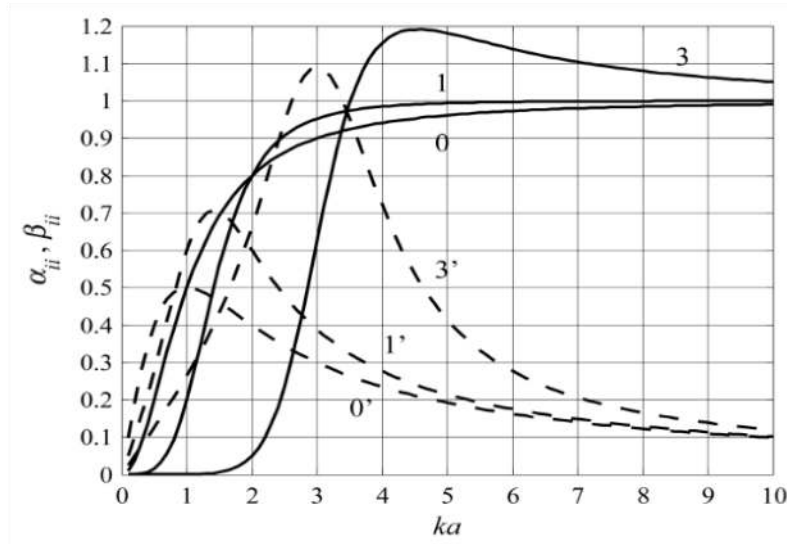


Рисунок 6.28: Зависимости модальных безразмерных коэффициентов сопротивления излучения сфер без экранов при $i = 0, 1, 3$ (обозначения для α_{ii}). β_{ii} обозначены $0', 1', 3'$.

т.е. половина массы воды в объеме сферы. Сравнение активных сопротивлений излучения осциллирующего и пульсирующего простых источников приводит к величине

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{(ka)^2}{4}. \quad (6.258)$$

Таким образом, осциллирующий источник является значительно менее эффективным, чем пульсирующий.

6.4.3 Излучение сферических преобразователей с экранами

Целью экранирования части поверхности сферических преобразователей является получение однонаправленного излучения. Наиболее интересными для практического применения являются варианты экранирования полусферы (при $\varphi_b = \pi/2$) и сегмента, соответствующего углу $\varphi_b = \pi/3$. Будем предполагать, что экраны идеально жесткие, т.е. что скорость на поверхности экрана равна нулю.

В общих выражениях (6.234), (6.236) и (6.240) для звукового давления, коэффициента дифракции и комплексной величины сопротивления излучения угол φ_b должен

соответствовать покрытию экрана. Таким образом, если экран покрывает полусферу (вариант, который мы для иллюстрации рассмотрим с числовыми примерами), то $U(\varphi) = 0$ при $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$. Для того чтобы применить общие выражения к расчету параметров излучения для конкретного покрытия экраном и формы колебаний поверхности следует определить коэффициенты a_{il} с помощью формулы (6.229).

Так, в варианте, при котором электроды однополярны, возбуждается только нулевая форма колебаний и при $\varphi_b = \pi/2$ получим: $a_{11} = 1/2$, $a_{00} = 1/2$, $a_{01} = 3/4$, $a_{03} = -7/16$, $a_{05} = 11/32$, Для нечетных l $a_{0l} = 0$.

В варианте с биполярными электродами возбуждаются нечетные 1, 3, 5... формы колебаний и получим $a_{12} = 5/16$, $a_{10} = 1/4$, Для четных l $a_{1l} = 0$.

Примечательно, что в обоих вариантах существуют ненулевые «взаимные» коэффициенты a_{il} . Это означает, что имеет место акустическое взаимодействие между электромеханически активной нулевой формой и пассивными нечетными формами в варианте колебаний униполярной сферы, что следует из уравнения (6.241). А в варианте биполярного возбуждения активная первая форма колебаний через акустическое взаимодействие генерирует электромеханически пассивную нулевую форму.

Результаты расчетов для обоих вариантов экранирования представлены здесь для того, чтобы на них можно было сослаться в Главе 8. Аналогичные расчеты и выводы можно сделать для варианта экранирования при $\varphi_b = \pi/3$.

Зависимости от ka модальных коэффициентов дифракции и характеристик направленности, а также безразмерных коэффициентов собственных и взаимных сопротивлений излучения экранированных сферических преобразователей при $\varphi_b = \pi/2$ представлены на Рис. 6.29-6.34 и при $\varphi_b = \pi/3$ - на Рис. 6.35-6.36.

Расчеты показывают, что величины взаимных сопротивлений между формами колебаний быстро уменьшаются по мере увеличения разнесения между формами, и особенно с увеличением порядка формы колебаний. Как следует из графиков, представленных на Рис. 6.31, существенное значение имеет только взаимное сопротивление z_{ac01} между нулевой и первой формами колебаний, и на практике z_{ac13} уже можно пренебречь.

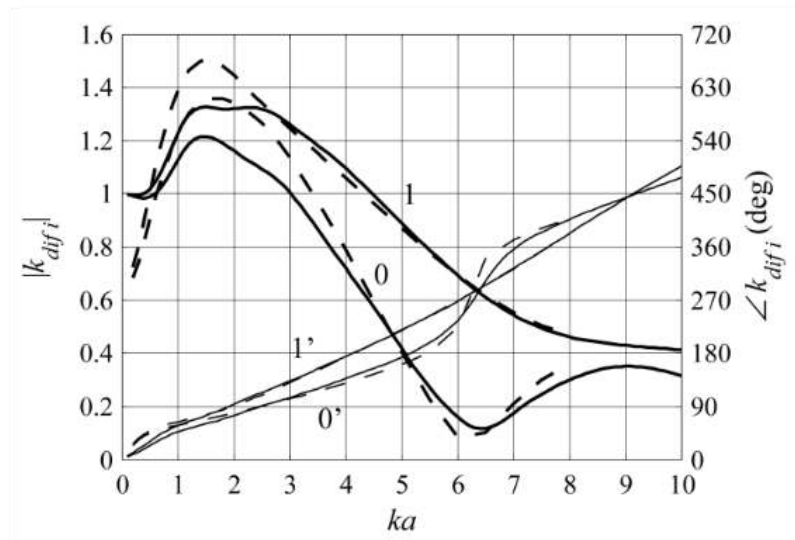


Рисунок 6.29: Зависимости модальных коэффициентов дифракции экранированной ($\varphi_b = \pi/2$) сферы: $|k_{dif i}|$ (толстые линии) и $\angle k_{dif i}$ (тонкие линии, помеченные ') для $i = 0, 1$ с жестким экраном (сплошные линии) и с податливым экраном (пунктирные линии).

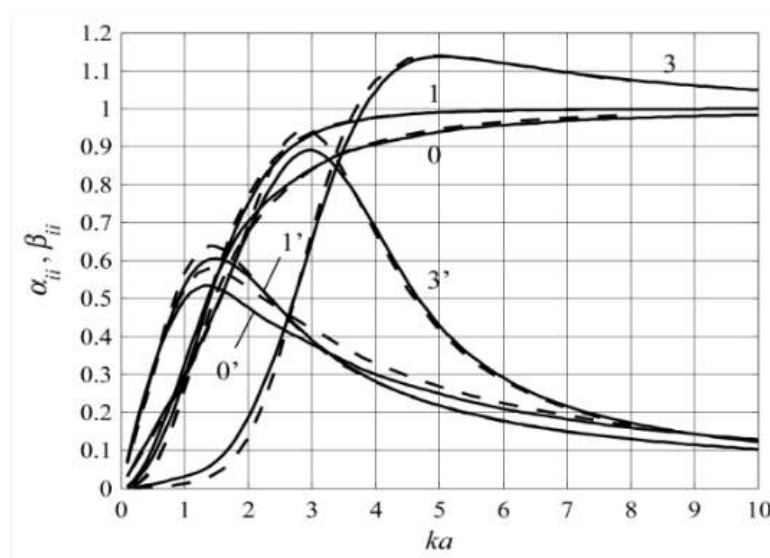


Рисунок 6.30: Безразмерные коэффициенты собственных (модальных) сопротивлений излучения экранированной ($\varphi_b = \pi/2$) сферы: α_{ii} и β_{ii} (обозначены ') для $i = 0, 1, 3$ с жестким экраном (сплошные линии) и с податливым экраном (пунктирные линии).

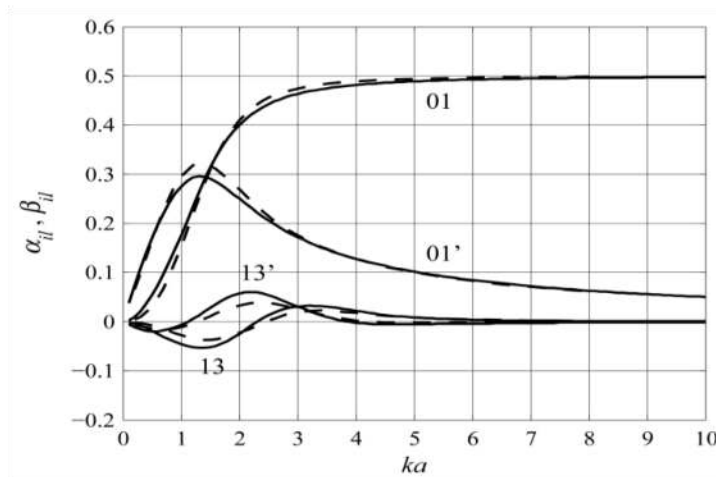


Рисунок 6.31: Безразмерные коэффициенты взаимных сопротивлений излучения между формами колебаний экранированной ($\varphi_b = \pi/2$) сферы: α_{il} и β_{il} (обозначены ') для $i=0, 1, 3$ с жестким экраном (сплошные линии) и с податливым экраном (пунктирные линии).

Характеристики направленности, соответствующие нулевой и первой формам колебаний при разных ka , представлены на Рис. 6.32 и Рис. 6.33, а для второй и третьей форм на Рис. 6.34.

Вариант экранирования при $\varphi_b = \pi/3$ может представлять практический интерес в том случае, если форма колебаний $U(\varphi) = U_r P_{1,6}(\cos \varphi)$, как это будет показано в Главе 8. Графики на Рис. 6.35 и Рис. 6.36 рассчитаны для этой формы колебаний. Эффективная площадь поверхности открытого сегмента сферы в этом случае $S_{eff} = 0.34 \pi a^2$.

Примечательное свойство характеристик направленности экранированных сферических преобразователей состоит в том, что они остаются почти неизменными в широком диапазоне частот вокруг рабочих резонансных частот преобразователей, как это видно из приведенных выше рисунков.

До сих пор было принято предположение, что скорость на экранированной части сферы равна нулю в силу применения идеально жесткого экрана. Хотя это и полезное приближение, но неясно, как практически реализовать такой экран. Более практично предположить, что экран идеально податлив, и что на экранированной части равно нулю звуковое давление. Это приводит нас к задаче излучения со смешанными граничными условиями.

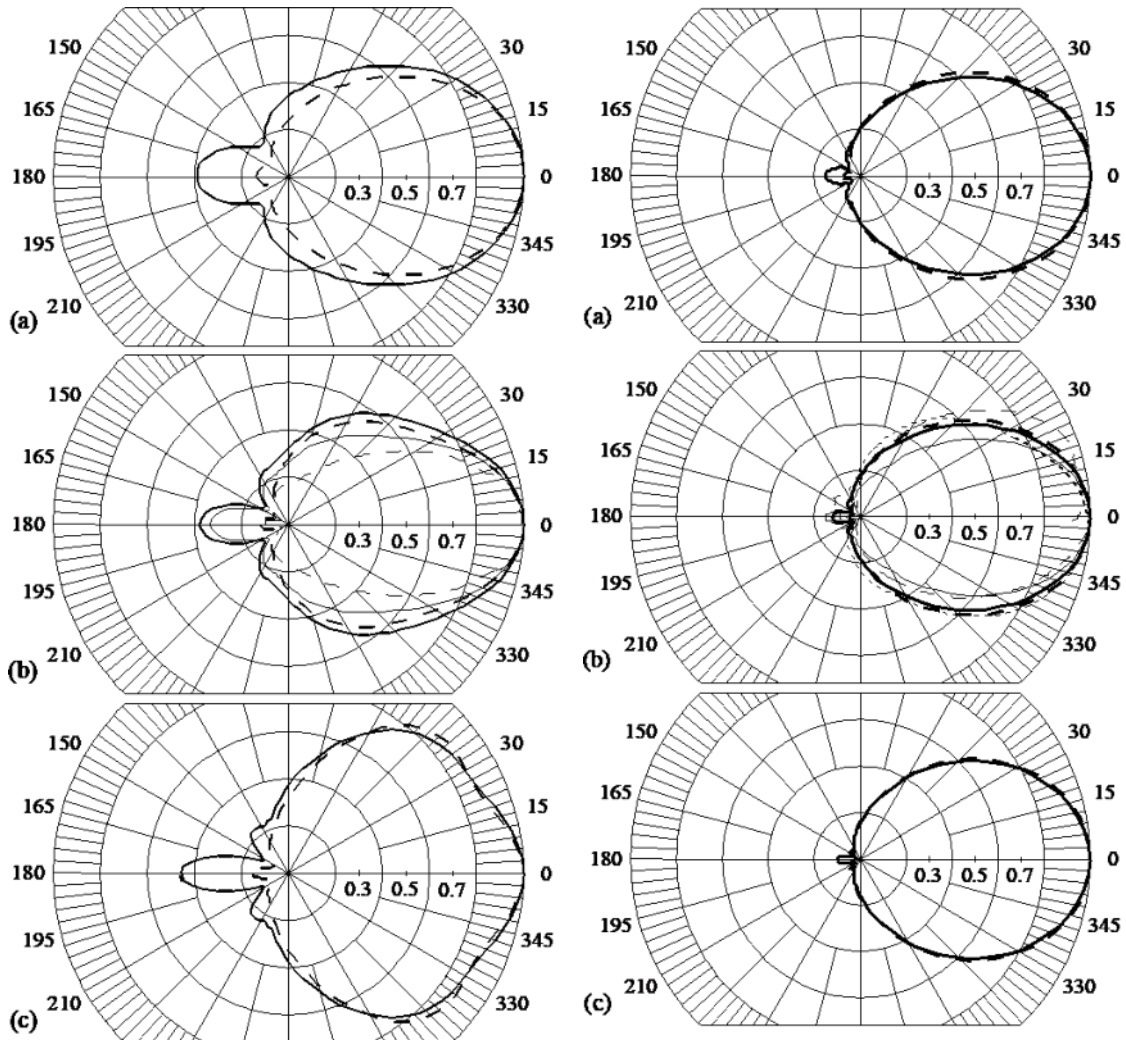


Рисунок 6.32 (слева): Характеристики направленности для нулевой формы колебаний экранированного ($\varphi_b = \pi/2$) сферического преобразователя при разных ka : (a) $ka=2.5$, (b) $ka=3.5$ и (c) $ka = 4.5$. Представлены характеристики направленности с жестким экраном (толстые сплошные линии) и с податливым экраном (толстые пунктирные линии). На графике (b) показаны характеристики направленности, рассчитанные для сферического преобразователя №1 с жестким экраном (тонкая сплошная линия) и измеренные при податливом экране (тонкая пунктирная линия).

Рисунок 6.33 (справа): Характеристики направленности для первой формы колебаний экранированного ($\varphi_b = \pi/2$) сферического преобразователя при разных ka : (a) $ka = 3.5$, (b) $ka = 4.5$ и (c) $ka=5.5$. Показаны характеристики направленности форм колебаний при наличии жесткого экрана (толстые сплошные линии) и податливого экрана (толстые пунктирные линии). На графике (b) показаны характеристики направленности, рассчитанные для сферического преобразователя №1 с жестким экраном (тонкая сплошная линия) и измеренные для полусферического преобразователя (тонкая пунктирная линия)

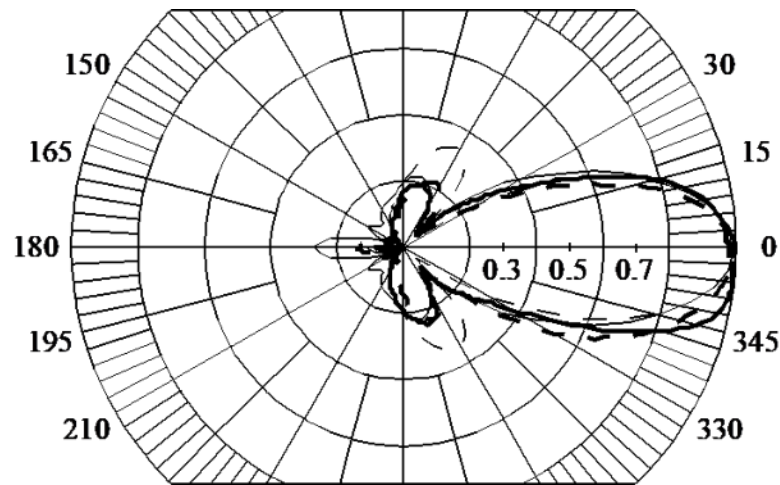


Рисунок 6.34: Характеристики направленности экранированной ($\varphi_b = \pi/2$) сферы, соответствующие второй и третьей формам колебаний: вторая форма при $ka = 6.5$ (тонкая сплошная линия), третья форма при $ka = 8.5$ (тонкая пунктирная линия). Для сравнения также представлены измеренная характеристика направленности сферического преобразователя, работающего в третьей форме (толстая сплошная линия) и измеренная характеристика направленности полусферического преобразователя, работающего в третьей форме колебаний (толстая пунктирная линия).

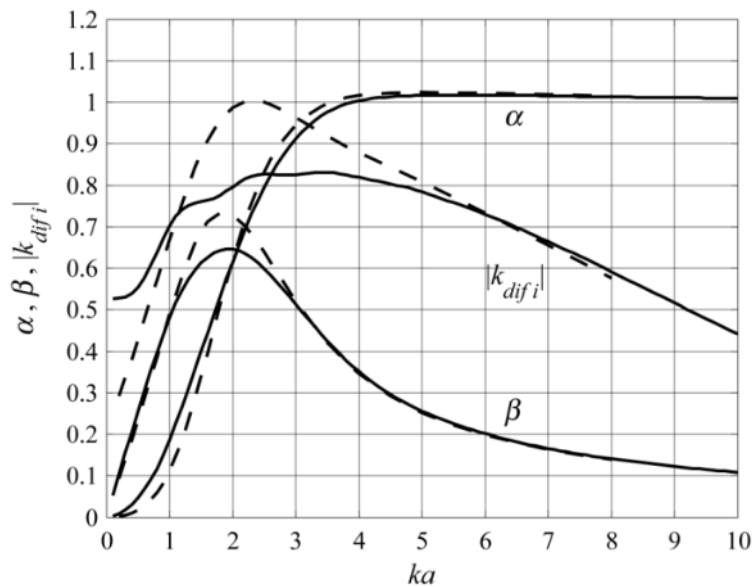


Рисунок 6.35: Коэффициенты дифракции и безразмерные коэффициенты сопротивления излучения для экранированной ($\varphi_b = \pi/3$) сферы при форме колебаний $U(\varphi) = U_r P_{1,6}(\cos \varphi)$

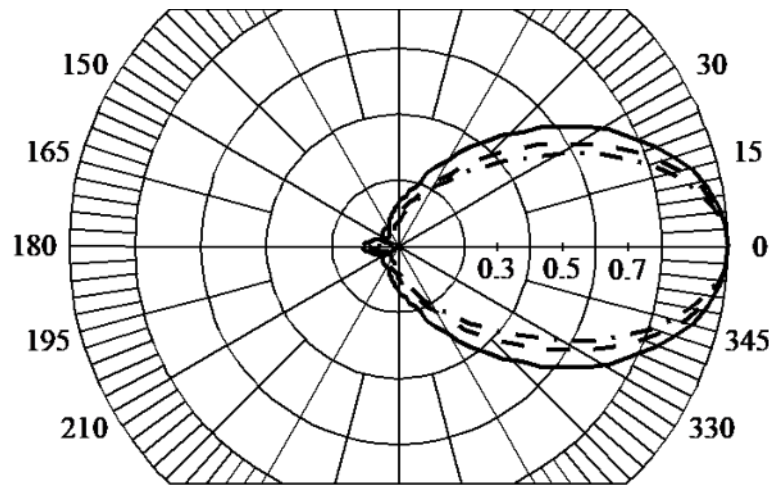


Рисунок 6.36: Характеристики направленности экранированной ($\varphi_b = \pi/3$) сферы при разных ka : 4.5 (сплошная линия), 5.5 (пунктирная линия) и 6.5 (пунктирная линия)

Для решения этой задачи для сферы может быть применен тот же метод, с помощью которого в Разделе 6.3.3 была решена аналогичная задача для цилиндрической оболочки. Опустив математические операции, приведем окончательные результаты расчетов акустических характеристик, полученные для вариантов экранирования при углах $\varphi_b = \pi/2$ и $\varphi_b = \pi/3$.

Эти результаты представлены на Рис. 6.29 -6.36 наряду с полученными для жестких экранов. Результаты очень близки к полученным при допущении абсолютно жесткого экрана (за исключением падения уровня обратного излучения, что особенно заметно для нулевой формы распределения скоростей). Результаты также хорошо согласуются с экспериментальными данными, которые были получены при применении экранов из корпена (композиция из резины и пробки), которая функционирует близко к идеально податливому материалу.

6.5 Излучение преобразователей, имеющих плоские поверхности

6.5.1 Общие положения

Решение большинства задач излучения для плоских поверхностей получено при предположении, что излучающая поверхность встроена заподлицо в бесконечный плоский жесткий экран (Рис. 6.1 (с)). Эти решения получены на основе применения принципа

Гюйгенса, одной из формулировок которого является интегральная формула (*интеграл Рэлея*)

$$P(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \int_{\Sigma} U_n(\mathbf{r}_{\Sigma}) \frac{e^{-jkr}}{r} d\Sigma. \quad (6.259)$$

Здесь Σ — поверхность бесконечной плоскости, $U_n(\mathbf{r}_{\Sigma})$ — нормальная составляющая скорости точек поверхности с координатами \mathbf{r}_{Σ} . Радиус вектор точки наблюдения $\mathbf{r}(x_1, y_1, z_1)$ и $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$. Скорость колебаний в этой формуле должна быть известна на поверхности всей бесконечной плоскости. Поскольку она задана только на поверхности преобразователя, существование бесконечного жесткого экрана, на котором скорость равна нулю, имеет принципиальное значение для применения формулы.

Существует другая формулировка принципа Гюйгенса

$$P(\mathbf{r}) = \frac{j \cos \theta}{\lambda} \int_{\Sigma} P(\mathbf{r}_{\Sigma}) \frac{e^{-jkr}}{r} d\Sigma, \quad (6.260)$$

где θ — угол между нормалью к плоскости и направлением в точке наблюдения.

Применение этой формулы требует знания звукового давления на всей поверхности бесконечной плоскости. Поэтому ее можно применять в том случае, когда преобразователь встроен в абсолютно податливый плоский экран. Множитель $\cos \theta$ показывает, что какого бы малого волнового размера ни был преобразователь, помещенный в податливый экран, он не излучает (не принимает) акустическую энергию с направления вдоль экрана.

Для задачи двумерного излучения, такой как определение поля бесконечной в направлении оси y полосы, встроеной в жесткую плоскость, формулировка принципа Гюйгенса для звукового давления на единицу длины вдоль оси y имеет вид

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\rho\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U_n(x) H_0^{(2)}(kr) dx. \quad (6.261)$$

Здесь $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + z_0^2}$, где x_0 и z_0 — координаты точки наблюдения.

В том случае, если преобразователь представляет собой двусторонний пульсирующий поршень малой (теоретически бесконечно малой) волновой толщины, плоскость его

симметрии выполняет функцию жесткого экрана заподлицо с поверхностью преобразователя, как это показано на Рис. 6.1(а). В тех случаях, когда толщина симметричных пульсирующих преобразователей значительна, или размеры реальных экранов малы по сравнению с длиной волны, или требуется рассматривать реальные преобразователи без экранов, задача излучения преобразователей с плоской поверхностью усложняется. Эти случаи требуют других подходов, включая применение численных методов, что будет продемонстрировано в Разделе 6.5.8.4.

6.5.2 Излучение круглого пульсирующего поршня

Сопротивление излучения тонкого пульсирующего поршня было впервые определено Рэлеем¹⁷. Ввиду особой важности этой задачи и оригинальности получения ее решения кратко воспроизведем его ход.

Рассмотрим встроенный в абсолютно жесткий плоский экран круглый диск (Рис. 6.37), который колеблется равномерно с нормальной составляющей скорости U_0 . Звуковое давление на поверхности диска определим, воспользовавшись формулой (6.259)

$$P(r_\Sigma) = \frac{j\omega\rho}{2\pi} U_0 \int_{\Sigma} \frac{e^{-jk r_\Sigma}}{r_\Sigma} d\Sigma. \quad (6.262)$$

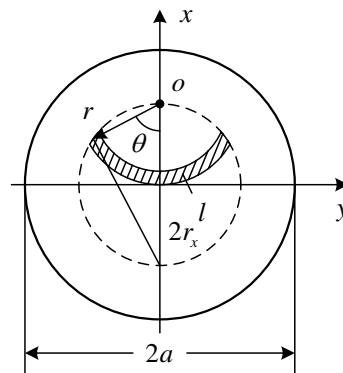


Рисунок 6.37: К определению расчета сопротивления излучения диска. «Кольцо» обозначено штриховой линией, l — дуга радиусом r .

Вначале вычислим звуковое давление на поверхности тонкого кольца радиуса r_x , создаваемое элементами диска этого радиуса, и обозначим его $P(r_x)$. Поместим центр полярной системы координат в некоторую точку кольца (точка o на Рис. 6.37). Давление

в этой точке $P_o(r_x)$ найдем по формуле (обратите внимание, что радиус дуги l равен $r = 2r_x \cos \theta$)

$$P_o(r_x) = \frac{j\omega\rho}{2\pi} U_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2r_x \cos \theta} e^{-jkr} dr d\theta = \frac{\rho c}{\pi} U_0 \int_0^{\pi/2} [1 - e^{-j2kr_x \cos \theta}] d\theta. \quad (6.263)$$

Принимая во внимание выражения для функций Бесселя и Струве (работы [5, 6], см. также Приложение С.1),

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos \theta) d\theta, \quad (6.264)$$

$$S_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos \theta) d\theta, \quad (6.265)$$

звуковое давление в каждой точке кольца (все они находятся в одинаковом положении) представим в виде

$$P_o(r_x) = \frac{\rho c}{2} U_0 \{ [1 - J_0(2kr_x)] + jS_0(2kr_x) \}. \quad (6.266)$$

Таким образом, сила, действующая на все кольцо, равна

$$F(r_x) = P_o(r_x) \cdot 2\pi r_x dr_x, \quad (6.267)$$

и суммарную силу, действующую на поверхность диска радиусом a , определим в виде

$$F_{disk} = 2\pi \int_0^a P_o(r_x) r_x dr_x = \pi \rho c U_0 \int_0^a \{ [1 - J_0(2kr_x)] + jS_0(2kr_x) \} r_x dr_x. \quad (6.268)$$

Произведя интегрирование с учетом того, что

$$\int z J_0(z) dz = z J_1(z) \quad \text{и} \quad \int z S_0(z) dz = z S_1(z), \quad (6.269)$$

получим выражение для комплексной величины сопротивления излучения в форме

$$Z_{ac} = \frac{F_{disk}}{U_0} = \rho c \pi a^2 \left\{ \left[1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka} \right] + j \frac{2S_1(2ka)}{2ka} \right\} = \rho c \pi a^2 (\alpha + j\beta). \quad (6.270)$$

Воспользовавшись разложением в ряд функций $J_1(z)$ и $S_1(z)$ (для краткости обозначим $2ka = z$), безразмерные коэффициенты сопротивления излучения α и β представим в виде

$$\alpha = 1 - \frac{2J_1(z)}{z} = \frac{z^2}{2^2 1! 2!} - \frac{z^4}{2^4 2! 3!} + \dots, \quad (6.271)$$

$$\beta = \frac{2S_1(z)}{z} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{z}{3} - \frac{z^3}{3^2 5} + \frac{z^5}{3^2 5^2 7} - \dots \right). \quad (6.272)$$

Их зависимости от ka приведены на Рис. 6.38.

При $ka < 0.5$

$$\alpha \approx \frac{1}{2}(ka)^2 \quad \text{и} \quad \beta \approx \frac{8}{3\pi}(ka) \quad (6.273)$$

с точностью не менее 5%.

Таким образом, активное сопротивление излучения равно

$$r_{ac} \approx \frac{1}{2} \pi a^2 \rho c (ka)^2 = 2\pi \rho c \frac{S^2}{\lambda^2}. \quad (6.274)$$

Такое выражение является общим для активного сопротивления излучения простого источника, учитывая, что в данном случае $S_{av} = S$.

Реактивное сопротивление излучения и акустическая масса диска равны

$$x_{ac} \approx \pi a^2 \rho c \frac{8}{3\pi} ka \quad \text{и} \quad m_{ac} \approx \pi a^2 \rho \frac{8}{3\pi} a = \frac{2}{\pi} \tilde{V}_{sph} \rho, \quad (6.275)$$

где \tilde{V}_{sph} — объём сферы того же радиуса.

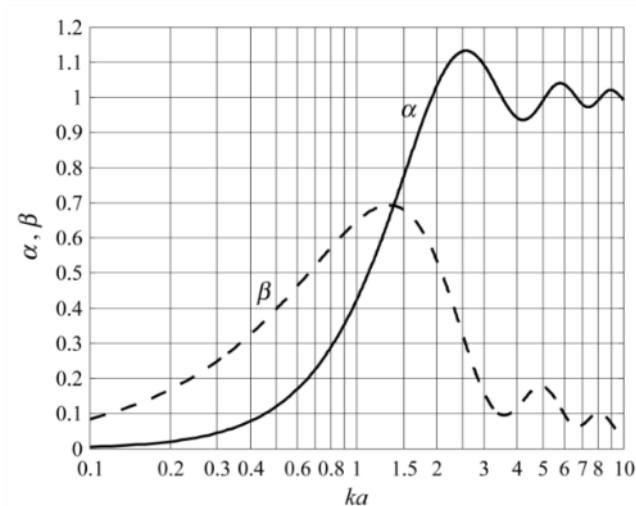


Рисунок 6.38: Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения пульсирующего диска, встроенного в бесконечный жесткий экран.

При определении звукового давления, создаваемого диском в дальнем поле, модуль радиус вектора точки наблюдения R , определенный по формуле (6.259), значительно больше радиуса диска $|R| \gg a$. Точка наблюдения находится в плоскости, перпендикулярной плоскости диска, как показано на Рис. 6.39.

Вначале рассмотрим звуковое давление, которое создает элементарное кольцо радиуса r . Звуковое давление элемента кольца, координаты которого x и φ , пропорционально его объемной скорости $U(x, \varphi) = U_0 r d\varphi dr$. Расстояние r_x между точкой наблюдения и точкой с координатой $x = r \cos \varphi$ на поверхности диска равно

$$r_x = \sqrt{(R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta - x)^2} \approx R \sqrt{1 - 2(x/R) \sin \theta} \quad (6.276)$$

или, учитывая, что $(x/R) \ll 1$,

$$r_x \approx R[1 - (x/R) \sin \theta]. \quad (6.277)$$

Звуковое давление, создаваемое элементом кольца в дальнем поле, согласно формуле (6.259) равно

$$P(r, \varphi) = \frac{j\omega\rho}{2\pi} U_0 r dr \frac{e^{-jkR}}{R} e^{jkr \sin \theta \cos \varphi} d\varphi. \quad (6.278)$$

Суммарное звуковое давление в точке наблюдения определим в результате интегрирования этого выражения по окружности кольца в виде

$$P(r, \varphi) = j\omega\rho U_0 r dr \frac{e^{-jkR}}{R} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jkr \sin \theta \cos \varphi} d\varphi \right]. \quad (6.279)$$

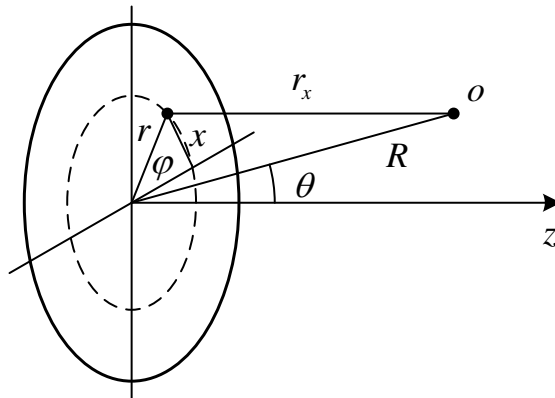


Рисунок 6.39: Геометрическая иллюстрация для определения звукового давления, создаваемого диском в дальнем поле.

Интеграл в скобках — это функция Бесселя $J_0(kr \sin \theta)$. Таким образом, выражение для звукового давления, создаваемого кольцом в дальнем поле, и характеристика направленности кольца приобретают вид

$$P(r, \theta) = j \rho c k r d r U_0 \frac{e^{-jkR}}{R} J_0(kr \sin \theta), \quad (6.280)$$

$$H_{ring}(\theta) = J_0(kr \sin \theta). \quad (6.281)$$

Для того чтобы получить звуковое давление, излучаемое всем диском, имеющим радиус a , выражение (6.280) следует проинтегрировать по радиусу. Учитывая, что

$$\int z J_0(z) = z J_1(z), \quad (6.282)$$

в результате интегрирования получим

$$P_{disk}(\theta) = j \rho c k a^2 U_0 \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}. \quad (6.283)$$

Характеристика направленности диска

$$H_{disk}(\theta) = \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}. \quad (6.284)$$

Коэффициент дифракции для всех преобразователей, встроенных в бесконечный жесткий плоский экран, равен $k_{dif} = 2$ так как звуковое давление в падающей плоской волне удваивается на поверхности экрана.

Применив формулу (6.22), выражение (6.270) для r_{ac} , и уравнение (6.283) для звукового давления на оси при $\theta = 0$, получим следующее соотношение для коэффициента концентрации диска

$$D = \frac{4\pi \cdot \pi a^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{2J_1(ka)}{ka} \right]^{-1}. \quad (6.285)$$

При $a > \lambda/2$ значение коэффициента концентрации отличается менее чем на 6% от значения, определяемого формулой

$$D = \frac{4\pi \cdot \pi a^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi \cdot S}{\lambda^2}. \quad (6.286)$$

6.5.3 Излучение тонкого кольца, пульсирующего в направлении оси

Излучение тонкого кольца, пульсирующего в осевом направлении в свободном пространстве, можно рассматривать как предельный случай излучения колеблющегося в радиальном направлении цилиндра малой высоты с жесткими фланцами. В силу симметрии оба излучателя представим себе встроенными в бесконечный жесткий экран, как это показано на Рис. 6.40. Полагаем, что $\Delta \ll a$, $\Delta \ll \lambda$, $h = 2\Delta$.

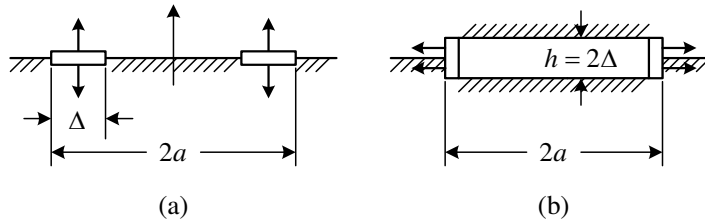


Рисунок 6.40: а) Тонкое кольцо, пульсирующее в осевом направлении, б) цилиндр малой высоты, колеблющийся в радиальном направлении. По соображениям симметрии их можно рассматривать как колеблющиеся в бесконечном жестком плоском экране.

Для расчета характеристик кольца могут быть применены процедуры, аналогичные тем, что продемонстрированы при расчете излучения диска. Собственно, звуковое давление, создаваемое кольцом в дальнем поле, и его характеристика направленности уже были получены в процессе определения этих характеристик для диска и выражены формулами (6.280), (6.281). Так что следует определить только величину сопротивления излучения кольца. Для этого требуется дополнительное действие. Геометрическое обоснование этого действия приведено на Рис. 6.41.

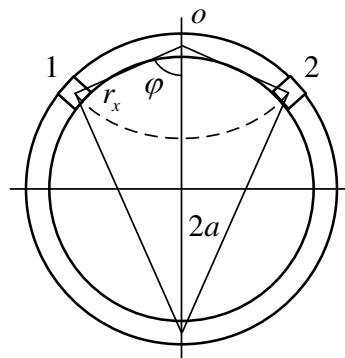


Рисунок 6.41: Геометрическое обоснование для определения сопротивления излучения кольца.

Звуковое давление на элемент кольца вокруг точки o , оказываемое элементами 1 и 2 с объемной скоростью $U_{\dot{v}} = U_0 r_x dr_x d\varphi$, удаленными от точки o на расстояние $r_x = 2a \cos \varphi$, составляет

$$P_o(r_x, \varphi) = \frac{j\omega\rho}{\pi} U_0 e^{-j2ka \cos \varphi} dr_x d\varphi. \quad (6.287)$$

Значит суммарное звуковое давление в произвольной точке кольца равно

$$P_o(r_x, \varphi) = \frac{j\omega\rho}{\pi} U_0 \int_0^{2a} \int_0^{\pi/2} e^{-j2ka \cos \varphi} dr_x d\varphi, \quad (6.288)$$

или, принимая во внимание определения (6.264) и (6.265) для функций Бесселя и Струве,

$$P_o = \rho c U_0 \cdot ka [S_0(2ka) + jJ_0(2ka)]. \quad (6.289)$$

Таким образом, сила, действующая на всю поверхность кольца, и сопротивление излучения кольца равны

$$F_{ring} = 2\pi a \Delta \cdot P_o, \quad (6.290)$$

$$Z_{ac} = \frac{F_{ring}}{U_0} = \rho c S_{ring} \cdot ka [S_0(2ka) + jJ_0(2ka)]. \quad (6.291)$$

Выражения для безразмерных коэффициентов сопротивления излучения имеют вид

$$\alpha = ka \cdot S_0(2ka), \quad (6.292)$$

$$\beta = ka \cdot J_0(2ka). \quad (6.293)$$

Для цилиндра высотой $h = 2\Delta$ с жесткими фланцами формула (6.291) для величины сопротивления излучения остается такой же с заменой S_{ring} на $S_{cyl} = 2\pi ah$ в силу того, что $h \ll \lambda$ и звуковое давление на поверхности цилиндра имеет такое же значение, как и на поверхности кольца. Следовательно, формулы (6.292) и (6.293) для безразмерных коэффициентов сопротивления излучения справедливы и для короткого цилиндра. Этот результат представляет собой предельные значения при $(h/2a) \rightarrow 0$ для зависимостей безразмерных коэффициентов сопротивления излучения цилиндров конечного размера, приведенных на Рис. 6.22.

6.5.4 Излучение бесконечно длинной пульсирующей полосы

Задача излучения полосы, имеющей бесконечную длину в направлении оси y , встроеной в жесткий плоский экран, является двумерной. Геометрия задачи приведена на Рис. 6.42.

Формулировка (6.261) принципа Гюйгенса для определения звукового давления, создаваемого элементом длины полосы Δy ,

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\rho\omega}{2} \cdot \Delta y \int_{-w/2}^{w/2} U_n(x) H_0^{(2)}(k\mathbf{r}) dx. \quad (6.294)$$

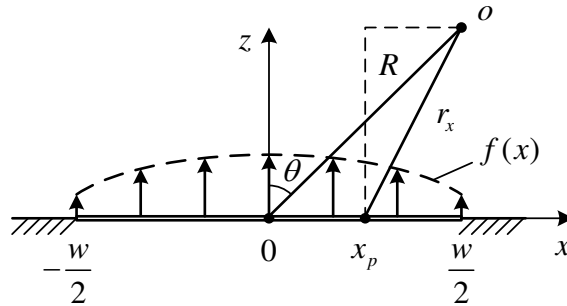


Рисунок 6.42: К излучению бесконечной полосы, встроеной в жесткий экран.

Здесь $U_n(x) = U_0 f(x)$ — распределение нормальной составляющей скорости колебаний по ширине полосы. В случае равномерных колебаний $f(x) = f_0(x) = 1$. Интерес также представляет распределение скорости $f(x) = f_1(x) = \cos(\pi x / W)$, если рассматривать излучение двухстороннего прямоугольного изгибного преобразователя большой длины.

В соответствии с определением величины сопротивления излучения

$$Z_{ac} = \frac{\bar{W}_{ac}}{|U|^2} = \frac{1}{U_0} \int_{-w/2}^{w/2} P(x_p) f(x_p) dx, \quad (6.295)$$

где $P(x_p)$ — звуковое давление, создаваемое колебаниями полосы в точке x_p на ее поверхности. Значение звукового давления в точке x_p по формуле (6.294) имеет вид

$$P(x_p) = \frac{\omega\rho}{2} U_0 \int_{-w/2}^{w/2} f(x) H_0^{(2)}[k|x - x_p|] dx. \quad (6.296)$$

Окончательное выражение для вычисления величины сопротивления излучения получим в форме

$$Z_{acil} = \frac{\omega \rho}{2} \int_{-W/2}^{W/2} \int_{-W/2}^{W/2} H_0^{(2)}(k|x-x_p|) f_i(x) f_l(x_p) dx dx_p, \quad i, l = 0, 1. \quad (6.297)$$

Следует иметь в виду, что при $x \rightarrow x_p$ $N_0[k|x-x_p|] \rightarrow \infty$ как $\ln k|x-x_p|$. Поэтому небольшой участок вокруг этой точки следует исключить из расчета. Нижние индексы $i, l = 0, 1$ соответствуют равномерному и косинусному распределениям скорости колебаний, соответственно. Таким образом, Z_{00} и Z_{11} — собственные сопротивления излучения при равномерном и косинусном распределениях скоростей, Z_{01} — взаимное сопротивление излучения между формами колебаний, которое существует в том случае, если распределение является суперпозицией равномерного и косинусного распределений колебаний, имеющих равные амплитуды. Сопротивления излучения на единицу длины представим в виде

$$Z_{acil} (kW) = \rho c S_{eff} [\alpha_{il} (kW) + j \beta_{il} (kW)], \quad (6.298)$$

где $\alpha_{il} (kW)$ и $\beta_{il} (kW)$ — безразмерные коэффициенты активного и реактивного сопротивлений излучения, S_{eff} — эффективная площадь излучающей поверхности на единицу длины,

$$S_{eff} = \int_{-W/2}^{W/2} f_i(x)^2 dx. \quad (6.299)$$

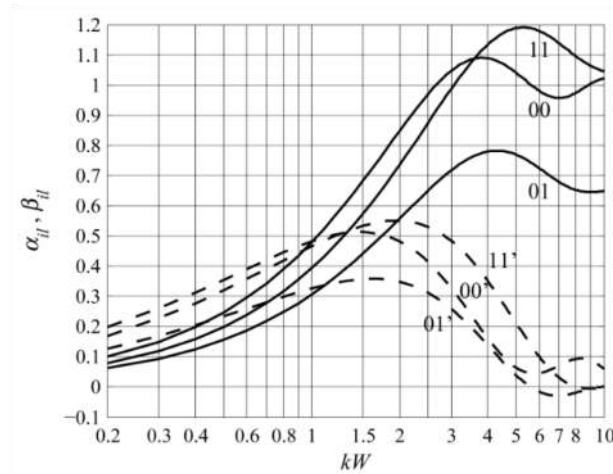


Рисунок 6.43: Зависимости от kW безразмерных коэффициентов активных (сплошные линии) и реактивных (штриховые линии) сопротивлений излучения бесконечно длинной полосы, колеблющейся в жесткой плоскости.

На Рис. 6.43 показаны зависимости от kW безразмерных коэффициентов собственных сопротивлений излучения при равномерном распределении ($S_{eff0} = W$ на единицу длины) и при косинусном распределении ($S_{eff1} = W/2$) колебаний, и коэффициентов взаимного сопротивления излучения между ними (при этом $S_{eff01} = W$).

Числовые значения коэффициентов при $kW < 2$ представлены в Таблице 6.1. Этот диапазон значений kW , при которых $W/\lambda < 1/3$, характерен для преобразователей в виде прямоугольных пластин, совершающих колебания изгиба.

Таблица 6.1: Безразмерные коэффициенты собственных сопротивлений излучения для вариантов равномерного и косинусного распределений скоростей, а также для взаимного сопротивления излучения между ними.

kW	Z_{ac00}		Z_{ac11}		Z_{ac01}	
	α_{00}	β_{00}	α_{11}	β_{11}	α_{01}	β_{01}
0.1	0.050	0.123	0.040	0.105	0.031	0.079
0.2	0.100	0.203	0.080	0.178	0.063	0.132
0.3	0.149	0.266	0.121	0.236	0.095	0.175
0.4	0.199	0.318	0.161	0.286	0.126	0.210
0.5	0.247	0.361	0.201	0.329	0.158	0.239
0.6	0.296	0.398	0.241	0.366	0.188	0.264
0.7	0.343	0.428	0.280	0.399	0.219	0.286
0.8	0.389	0.453	0.319	0.428	0.249	0.304
0.9	0.435	0.474	0.357	0.452	0.279	0.319
1.0	0.480	0.490	0.395	0.474	0.308	0.332
1.1	0.523	0.503	0.433	0.493	0.336	0.342
1.2	0.565	0.512	0.470	0.509	0.364	0.350
1.3	0.606	0.518	0.506	0.522	0.391	0.356
1.4	0.645	0.521	0.541	0.534	0.418	0.361
1.5	0.683	0.521	0.576	0.543	0.444	0.363

kW	Z_{ac00}		Z_{ac11}		Z_{ac01}	
	α_{00}	β_{00}	α_{11}	β_{11}	α_{01}	β_{01}
1.6	0.720	0.519	0.610	0.550	0.468	0.364
1.7	0.755	0.515	0.643	0.555	0.493	0.364
1.8	0.788	0.509	0.676	0.558	0.516	0.362
1.9	0.819	0.501	0.707	0.559	0.538	0.358
2.0	0.849	0.491	0.738	0.559	0.559	0.354

Звуковое давление в дальнем поле определим с помощью формулы (6.294) и асимптотического выражения для функции Ханкеля

$$H_0^{(2)}(kr)_{kr \rightarrow \infty} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-j\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (6.300)$$

В результате выражение для звукового давления, создаваемого элементом полосы Δy в нормальном направлении (при $\theta = 0$) в дальнем поле (при $R \gg W$), получим в виде

$$P(R, 0) = \frac{\rho c}{\sqrt{\lambda}} U_{\bar{v}} \cdot \frac{e^{-j\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{R}}. \quad (6.301)$$

Здесь $U_{\bar{v}}$ — объемная скорость, $U_{\bar{v}} = U_0 S_{av}$, и

$$S_{av} = \Delta y \cdot \int_{-W/2}^{W/2} f(x) dx \quad (6.302)$$

— средняя площадь поверхности элемента полосы. Для равномерных колебаний $S_{av} = W \cdot \Delta y$, для косинусного распределения $S_{av} = (2W / \pi) \cdot \Delta y$.

Характеристика направленности полосы в плоскости, перпендикулярной полосе, в силу симметрии имеет такой же вид, как и для отрезка длиной W . Применяя обозначения, приведенные на Рис. 6.42, представим звуковое давление в точке наблюдения в форме

$$P(R, \theta) = P(R, 0) \left[\int_{-W/2}^{W/2} f(x) dx \right]^{-1} \cdot \int_{-W/2}^{W/2} f(x) e^{-jk(r_x - R)} dx, \quad (6.303)$$

где $r_x = R - x \sin \theta$ аналогично (6.277). Таким образом, в общем случае выражение для

характеристики направленности имеет вид

$$H(\theta) = \left[\int_{-W/2}^{W/2} f(x) dx \right]^{-1} \cdot \int_{-W/2}^{W/2} f(x) e^{-jkx \sin \theta} dx. \quad (6.304)$$

В случае равномерного распределения скоростей ($f(x) = 1$) получаем хорошо известное выражение

$$H(\theta) = \frac{\sin[(kW/2) \sin \theta]}{(kW/2) \sin \theta}. \quad (6.305)$$

При косинусном распределении [$f(x) = \cos(\pi x / w)$]

$$H(\theta) = \frac{\cos[(kW/2) \sin \theta]}{1 - [(kW/\pi) \sin \theta]^2}. \quad (6.306)$$

6.5.5 Излучение прямоугольных пульсирующих поршней

Сопротивление излучения прямоугольного поршня, равномерно колеблющегося в бесконечном жестком плоском экране, рассматривалось в нескольких работах с численными расчетами на основе использования интеграла Рэлея (6.259). Наиболее полные результаты расчетов, произведенных для поршней в широком диапазоне соотношений их волновых размеров, представлены в работах [18, 19]. Рассмотрим эти результаты применительно к расчету характеристик излучения преобразователей.

Зависимости от волнового размера kW безразмерных коэффициентов сопротивления излучения прямоугольных поршней для разных соотношений их ширины к длине $R = W/L$ представлены на Рис. 6.44. Из анализа этих зависимостей можно сделать несколько выводов.

Сравнение с результатами, представленными на Рис. 6.38, показывает, что безразмерные коэффициенты сопротивления излучения квадратных поршней (при $R = 1$) с большой точностью совпадают с полученными для круглых поршней, имеющих такую же площадь поверхности, т.е. при $ka = kW / \sqrt{\pi}$.

Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения прямоугольных поршней с волновой шириной $kW > 1$ при $R = W/L > 4$ ведут себя так же, как и коэффициенты для бесконечных полос (при $R \rightarrow \infty$). Поэтому данные для полос, представленные на Рис.

6.43 и в Таблице 6.1, можно использовать для расчета сопротивлений излучения прямоугольных поршней с такими волновыми размерами.

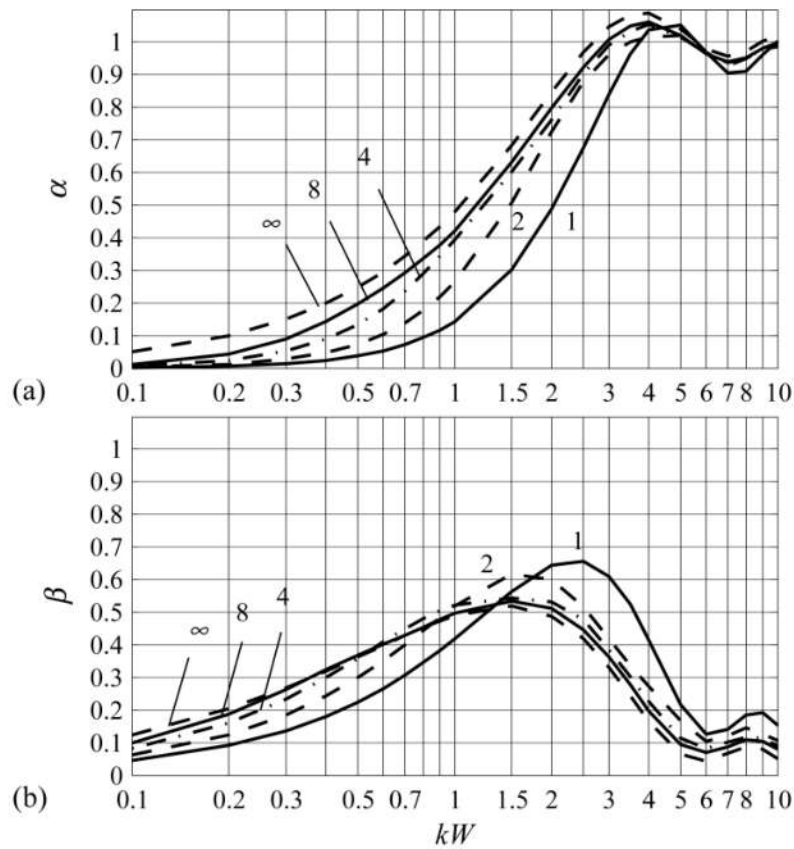


Рисунок 6.44: Безразмерные коэффициенты сопротивлений излучения прямоугольных излучающих поверхностей в зависимости от волновой ширины kW при разных соотношениях размеров $R = W/L$.

Звуковое давление, создаваемое прямоугольным поршнем в дальнем поле, можно определить непосредственно, применяя интегральную формулировку принципа Гюйгенса (6.259). Если на поверхности поршня существует неравномерное распределение скорости, его объемная скорость равна $U_{\bar{v}} = S_{av}U_o$, где S_{av} — средняя площадь поверхности. При равномерном распределении $U_{\bar{v}} = WLU_o$. В этом случае

$$P(0) = j \frac{k\rho c}{2\pi} WLU_o \cdot \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (6.307)$$

Выражения для характеристики направленности прямоугольного поршня,

конфигурация которого показана на Рис. 6.45, получим с помощью формул (6.305) и (6.306) для характеристик направленности отрезков без и с распределением скорости по длине.

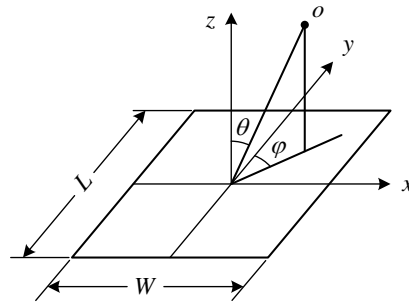


Рисунок 6.45: Прямоугольный поршень и сферическая система координат для представления его характеристики направленности (точка o - точка наблюдения).

Согласно теореме произведения, в случае, если колебания равномерны

$$H(\theta, \varphi) = \frac{\sin[(kW/2)\sin\theta]}{(kW/2)\sin\theta} \cdot \frac{\sin[(kL/2)\sin\varphi]}{(kL/2)\sin\varphi}. \quad (6.308)$$

В случае распределения скоростей по ширине $U(x) = U_o \cos(\pi x/W)$, что характерно для прямоугольных изгибных преобразователей,

$$H(\theta, \varphi) = \frac{\cos[(kW/2)\sin\theta]}{1 - [(kW/\pi)\sin\theta]^2} \cdot \frac{\sin[(kL/2)\sin\varphi]}{(kL/2)\sin\varphi}. \quad (6.309)$$

6.5.6 Излучение осциллирующего диска

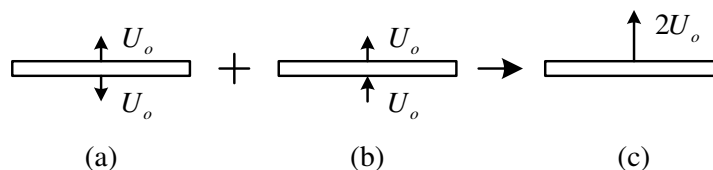


Рисунок 6.46: Типы колебаний круглых дисков: (а) пульсирующий диск, (б) осциллирующий диск, (с) односторонний (с одной колеблющейся стороной) диск как суперпозиция вариантов (а) и (б).

Поверхности осциллирующего диска колеблются синфазно, как показано на Рис 6.46 (б), где схематически изображены основные типы плоских поршневых

излучателей. Во всех вариантах толщина излучателей предполагается бесконечно малой, и в этом смысле правильнее было бы называть их мембранами. Реальные излучатели имеют конечную толщину. Влияние конечной толщины излучателя будет рассмотрено в Разделе 6.5.8.4.

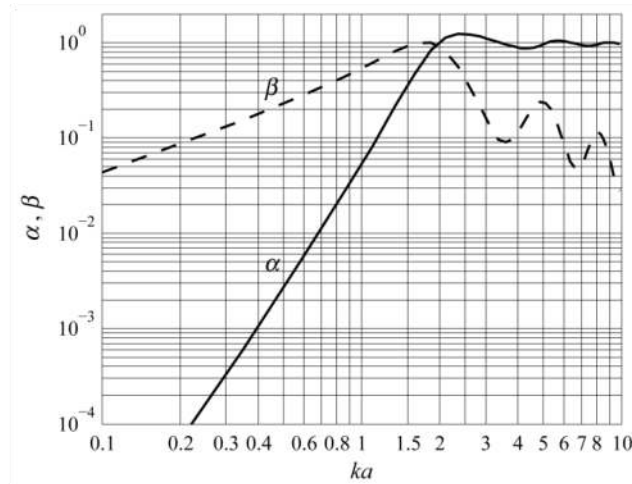


Рисунок 6.47: Безразмерные коэффициенты α и β сопротивления излучения осциллирующего круглого диска.

Звуковое давление на поверхностях осциллирующего диска (Рис. 6.46 (b)) находится в противофазе (при сжатии на одной стороне расширение на другой). В силу этого звуковое давление на плоскости, являющейся продолжением средней плоскости диска, равно нулю. Это означает, что осциллирующий диск можно представить как равномерно колеблющуюся мембрану, встроенную в бесконечный абсолютно податливый плоский экран. Задача излучения осциллирующего диска рассмотрена Л. Я. Гутиным в работе [20]. Решение было представлено в виде разложения в ряд по сплюснутым сфероидальным функциям. В работе [20] представлены коэффициенты для членов ряда в количестве достаточном для расчета параметров излучения в диапазоне волновых чисел ka , представляющем практический интерес при проектировании преобразователей.

Результаты расчета сопротивления излучения представлены в виде зависимостей безразмерных коэффициентов сопротивления излучения, которые приведены на Рис. 6.47. Некоторые значения этих коэффициентов даны в Таблице 6.2.

Таблица 6.2: Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения осциллирующего круглого диска.

ka	α	β	ka	α	β
0.1	4.4 e-6	0.044	3	1.12	0.17
0.5	3.7 e-3	0.23	5	0.96	0.23
1	0.06	0.54	8	0.95	0.11
2	1	0.9	10	0.97	0.03

Полученные результаты для осциллирующего диска в основном находят применения при расчете преобразователей градиента давления, которые преимущественно имеют небольшой волновой размер.

При $ka \ll 1$ (на практике до $ka \approx 0.3$)

$$\alpha \approx \frac{8}{27\pi^2}(ka)^4, \quad \beta \approx \frac{4}{3\pi}(ka). \quad (6.310)$$

Из выражения для реактивного сопротивления $x_{ac} = \rho c \pi a^2 \beta = \omega m_{ax}$ следует, что акустическая масса (соколеблющаяся масса) осциллирующего диска равна

$$m_{ac} = \frac{4}{3} a^3 \rho = \frac{1}{\pi} \tilde{V}_{sph} \rho, \quad (6.311)$$

где \tilde{V}_{sph} — объём сферы с таким же радиусом. Таким образом, акустическая масса в два раза меньше, чем у пульсирующего диска (см.(6.275)).

Выражение для активного сопротивления излучения

$$r_{ac} = \rho c \pi a^2 \frac{8}{27\pi^2}(ka)^4 \quad (6.312)$$

Существенно отличается от общего выражения для активного сопротивления излучения простых (имеющих малые волновые размеры) источников

$$r_{ac} = 2\pi\rho c \frac{S_{av}^2}{\lambda^2}. \quad (6.313)$$

Дело в том, что у осциллирующего диска $S_{av} = 0$. Это означает, что в первом приближении $r_{ac} = 0$, и осциллирующий диск является плохим излучателем на низких

частотах. Формула (6.312) представляет собой второе приближение для величины активного сопротивления излучения.

Выражение для звукового давления в дальнем поле представлено в виде²⁰

$$P(ka, \theta) = \frac{\rho c}{R} e^{-j(kR - \frac{\pi}{2})} U_o \frac{1}{k} F(ka) \cdot E(ka, \theta), \quad (6.314)$$

где при $ka < 4$

$$E(ka, \theta) = P_1(\cos \theta) + \gamma(ka)P_3(\cos \theta), \quad (6.315)$$

и функции $F(ka)$ и $\gamma(ka)$ имеют значения, приведенные в Таблице 6.3.

Таблица 6.3: Значения функций $F(ka)$ и $\gamma(ka)$.

ka	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$F(ka)$	$j0.027$	0,02 (1 + дж12,6)	0,36 (1 + дж3,2)	2.2(1+j0.9)	3.7(1+j0.45)	5,0 (1 + $j0,18$)
$\gamma(ka)$	0.01	0.04	0.09	0.15	0.23	0.32

При $ka \ll 1$ (практически при $ka < 0.5$)

$$P(ka, \theta) \approx \frac{\rho c}{R} e^{-j(kR - \frac{\pi}{2})} U_o \frac{j}{k} \cdot \frac{2}{3\pi} (ka)^3 \cos \theta \quad (6.316)$$

Характеристика направленности осциллирующего диска

$$H(ka, \theta) = \frac{E(ka, \theta)}{E(ka, 0)} = \frac{P_1(\cos \theta) + \gamma(ka)P_3(\cos \theta)}{1 + \gamma(ka)} \quad (6.317)$$

При $ka \ll 1$

$$H(ka, \theta) = H(\theta) = \cos \theta, \quad (6.318)$$

т.е. осциллирующий диск малого волнового радиуса имеет характеристику направленности диполя. Характеристика направленности практически не изменяется по крайней мере до $ka = 1$, как это следует из Рис. 6.48, на котором представлены характеристики направленности осциллирующего диска при разных значениях ka .

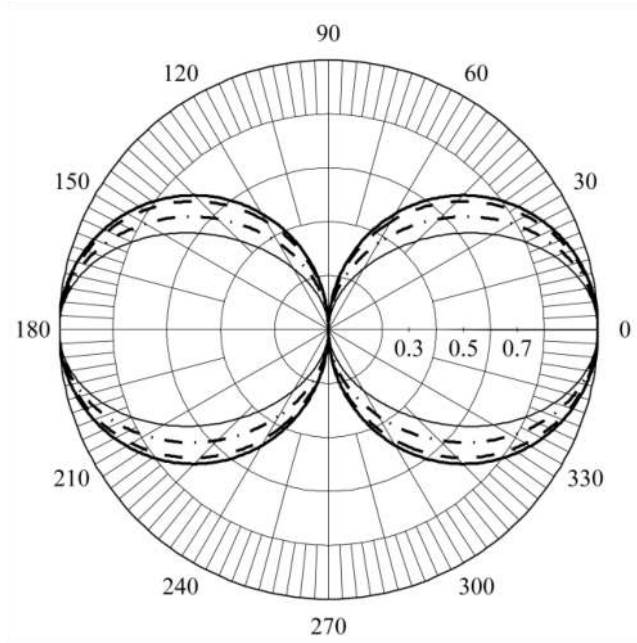


Рисунок 6.48: Характеристики направленности осциллирующего диска: $ka = 0.25$ (сплошная линия, $\cos \theta$), $ka = 1$ (штриховая линия), $ka = 2$ (штрихпунктирная линия), $ka = 3$ (тонкая сплошная линия).

Сравнив выражения (6.314) и (6.2) для звукового давления в дальнем поле, можно сделать вывод, что значение функции дифракции для осциллирующего диска в направлении акустической оси (при $\theta = 0$) равно

$$\chi(ka)|_{\theta=0} = \frac{1}{k} F(ka) \cdot E(ka, 0) = \frac{1}{k} F(ka) \cdot [1 + \gamma(ka)]. \quad (6.319)$$

Принимая во внимание, что общая площадь поверхности диска $S_{\Sigma} = 2\pi a^2$, из общей формулы для коэффициента дифракции (6.10) получим выражение для его значения на оси осциллирующего диска

$$k_{dif o} = \frac{2\lambda}{S_{\Sigma}} \cdot \chi(ka)_{\theta=0} = \frac{2}{(ka)^2} F(ka) \cdot [1 + \gamma(ka)]. \quad (6.320)$$

Поскольку из уравнения (6.316) следует, что при $ka < 0.5$

$$\chi(ka, \theta) = \frac{j}{k} \cdot \frac{2}{3\pi} (ka)^3 \cos \theta, \quad (6.321)$$

то общее выражение для коэффициента дифракции в этом диапазоне волновых размеров осциллирующего диска имеет вид

$$k_{dif}(\theta) = j \frac{4}{3\pi} (ka) \cos \theta. \quad (6.322)$$

Значения модуля коэффициента дифракции диска при $\theta = 0$ в широком диапазоне волновых размеров ka представлены на Рис. 6.49.

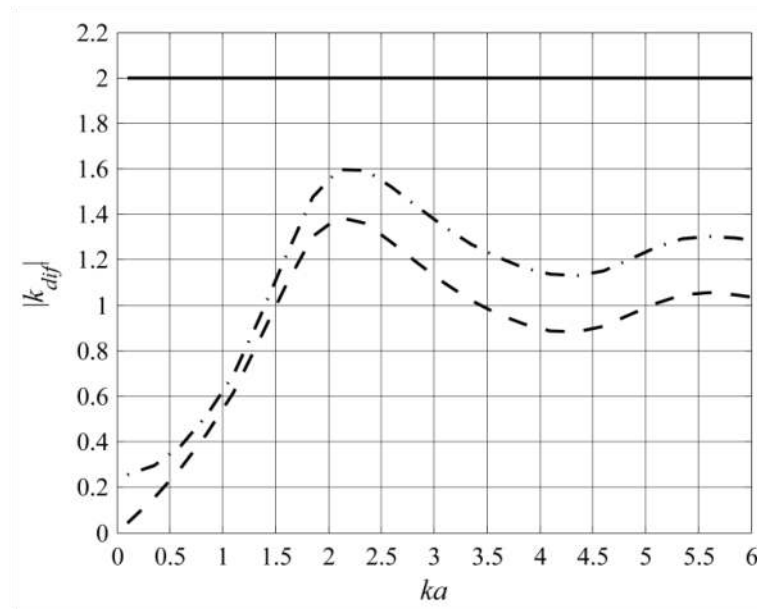


Рисунок 6.49: Модуль коэффициентов дифракции круглых дисков в функции от ka : пульсирующий диск в бесконечном плоском экране (сплошная линия), осциллирующий диск (штриховая линия), диск, излучающий одной стороной (штрихпунктирная линия).

6.5.7 Излучение диска, колеблющегося одной стороной (принцип суперпозиции Гутина)

Задача излучения диска, колеблющегося одной стороной, без плоского экрана, была решена путем наложения результатов уже имеющихся в работе [20] решений для пульсирующего и осциллирующего дисков. Идея метода продемонстрирована на Рис. 6.46. Идея стала очевидной после того, как она была впервые применена Л. Я. Гутиным в работе [20]. Иногда ее называют «принципом Гутина» (работа [21]), но чаще ее используют без каких-либо ссылок (например, в работе [22]).

Наложение потенциалов акустических полей, создаваемых пульсирующим и осциллирующим дисками, колеблющимися с равными скоростями, приводит к следующим результатам для диска, колеблющегося одной стороной с такой же скоростью.

Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения, обозначенные α_1 и β_1)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_p + \alpha_o) \text{ и } \beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_p + \beta_o) \quad (6.323)$$

где нижние индексы p и o соответствуют пульсирующему и осциллирующему дискам.

Коэффициенты α_p и β_p даны выражениями (6.271) и (6.272). Коэффициенты α_o , β_o представлены в Таблице 6.2 и на Рис. 6.47. Значения коэффициентов α_1 и β_1 приведены в Таблице 6.4.

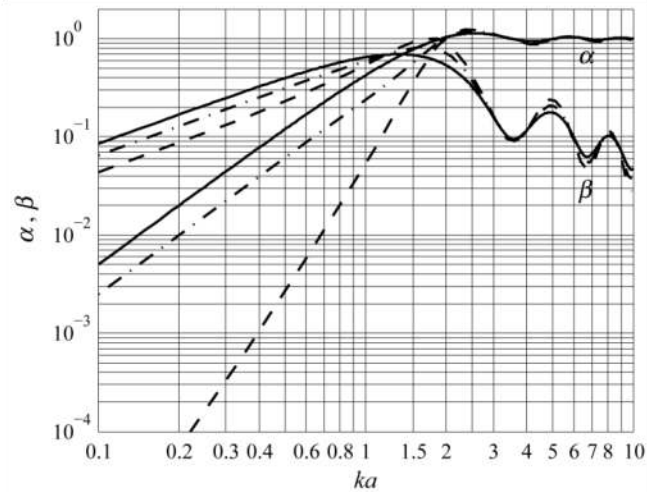


Рисунок 6.50: Безразмерные коэффициенты сопротивлений излучения круглых дисков: пульсирующего (сплошная линия), осциллирующего (штриховая линия) и одностороннего (штрихпунктирная линия).

Таблица 6.4: Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения диска, излучающего одной стороной.

ka	α_1	β_1	ka	α_1	β_1
0.1	$2.5 \cdot 10^{-3}$	0.065	2	1.02	0.71
0.5	0.065	0.31	5	0.98	0.21
1	0.24	0.59	10	0.98	0.037

При $ka \ll 1$

Зависимости от ka безразмерных коэффициентов колеблющихся дисков всех вариантов представлены на Рис. 6.50.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (ka)^2 + \frac{8}{27\pi} (ka)^4 \right] \approx \frac{1}{4} (ka)^2, \quad (6.324)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3\pi} (ka) + \frac{4}{3\pi} (ka) \right] = \frac{2}{\pi} (ka), \quad (6.325)$$

И акустическая масса равна

$$m_{ac} = \frac{3}{2\pi} \tilde{V}_{sph}. \quad (6.326)$$

Выражение для звукового давления в дальнем поле как суперпозиция выражений (6.283) и (6.314) имеет вид

$$P_1(ka, \theta) = \frac{\rho c}{R} e^{-j(kR - \frac{\pi}{2})} U_0 \frac{ka^2}{4} \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} + \frac{2}{(ka)^2} F(ka) \cdot E(ka, \theta) \right]. \quad (6.327)$$

При этом звуковое давление на оси (при $\theta = 0$)

$$P_1(ka, 0) = \frac{\rho c}{R} e^{-j(kR - \frac{\pi}{2})} U_0 \frac{ka^2}{4} \left\{ 1 + \frac{2}{(ka)^2} F(ka) \cdot [1 + \gamma(ka)] \right\}. \quad (6.328)$$

Характеристика направленности

$$H(ka, \theta) = \frac{P_1(ka, \theta)}{P_1(ka, 0)}. \quad (6.329)$$

Сравнение характеристик направленности круглых дисков при $ka = 3$ представлено на Рис. 6.51.

Коэффициент дифракции, определенный с помощью формулы (6.10)

$$k_{dif} = \frac{2\lambda}{S_\Sigma} \cdot \chi(ka)_{\theta=0}, \quad (6.330)$$

где $S_\Sigma = \pi a^2$ (диск излучает одной стороной) и

$$\chi(ka)_1 = \frac{(ka)^2}{4} \left\{ 1 + \frac{2}{(ka)^2} F(ka) \cdot [1 + \gamma(ka)] \right\}. \quad (6.331)$$

Таким образом,

$$k_{dif1} = 1 + \frac{2}{(ka)^2} F(ka) \cdot [1 + \gamma(ka)]. \quad (6.332)$$

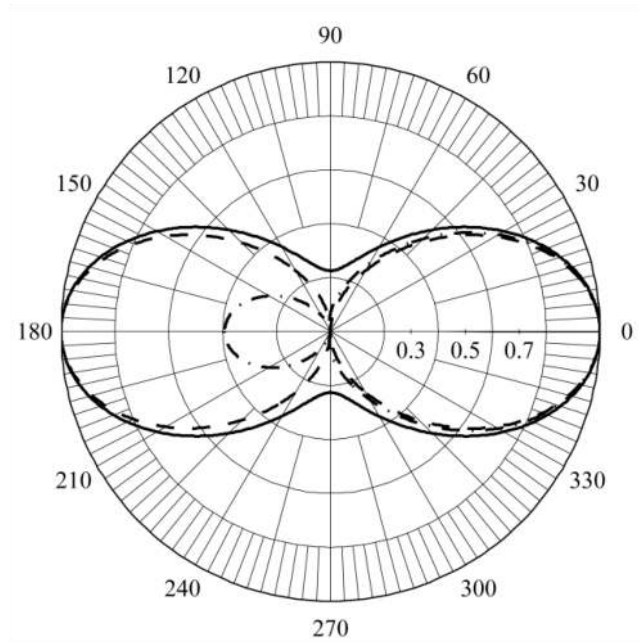


Рисунок 6.51: Характеристики направленности круглых дисков при $ka = 3$: пульсирующий диск (сплошная линия), осциллирующий диск (штриховая линия), диск, колеблющийся одной стороной (штрихпунктирная линия).

Принимая во внимание, что коэффициент дифракции пульсирующего диска равен $k_{dif p} = 2$, а для колеблющегося диска ($k_{dif o}$) задан выражением (6.320), можно сделать вывод, что

$$k_{dif 1} = \frac{k_{dif p} + k_{dif o}}{2}. \quad (6.333)$$

Значения коэффициента дифракции одностороннего диска в зависимости от ka приведены в Таблице 6.5.

Таблица 6.5: Коэффициент дифракции одностороннего диска в зависимости от ka .

ka	$ k_{диф} $	ka	$ k_{диф} $	ka	$ k_{диф} $
0.1	0.25	1	0.62	10	1.22
0.2	0.27	2	1.55		
0.5	0.34	5	1.23		

При $ka < 0.5$

$$k_{dif1} = 1 + j \frac{2}{3\pi} (ka). \quad (6.334)$$

6.5.8 Излучение дисков, встроенных в экраны конечного размера

6.5.8.1 Введение

Приведенный выше анализ показывает существенную разницу между характеристиками излучения акустической энергии в свободном пространстве круглых дисков малого волнового размера с разным распределением скоростей (пульсирующих, осциллирующих и односторонних). Это можно проиллюстрировать данными о безразмерных коэффициентах активного сопротивления излучения и соотношении излучаемой реактивной и активной мощности, которые приведены в Таблице 6.6. Сравнение показывает, что характеристики пульсирующего диска сопоставимы с характеристиками пульсирующей сферы, которую можно рассматривать как идеальный источник. Осциллирующий диск малого волнового размера является плохим источником излучения. При больших волновых размерах (на практике при $ka \geq 3$ (или при $(2a/\lambda) > 1$)) разница в характеристиках излучения всех дисков исчезает.

Таблица 6.6: Соотношение реактивной и активной мощности, излучаемой различными источниками.

Тип излучателя	ka	α	β / α
Пульсирующий диск	< 0.5	$(ka)^2 / 2$	$16 / 3\pi ka$
	0.5	0.125	3.4
	3	1.09	0.15
Осциллирующий диск	< 0.5	$8(ka)^4 / 27\pi^2$	$9\pi / 2(ka)^3$
	0.5	$1.9 \cdot 10^{-3}$	110
	3	1.17	0.18
Односторонний	< 0.5	$(ka)^2 / 4$	$8 / \pi ka$

Тип излучателя	ka	α	β / α
диск			
	0.5	0.062	5.1
	3	1.14	0.16
Сфера	< 0.5	$(ka)^2 / [1 + (ka)^2]$	$1 / ka$
	0.5	0.2	2
	3	0.9	0.3

Преобразователи с плоскими излучающими поверхностями, представленные на Рис 6.1 (с), обычно имеют размеры поверхностей относительно небольшие по сравнению с длиной волны на рабочих частотах. Так, у двухстороннего изгибного преобразователя, состоящего из двух круглых свободно опертых пластин, $D / \lambda < 0.2$. (это следует из формулы для его резонансной частоты $f_r = 0.45(t / a^2)c_{ceramic}$ при принятых обычно отношениях $t / a < 1/5$). Общая толщина такого преобразователя t_r составляет около двух толщин составляющих его пластин, т.е. $t_r / \lambda < 0.4$. Что касается изгибных преобразователей, изготовленных из прямоугольных пластин, имеющих малую ширину, то предположим, что один конструктивный блок преобразователя имеет примерно такой же волновой размер, как и круглая пластина с такой же резонансной частотой ($l = w = D$). Хотя это предположение не совсем строго, оно дает достаточно хорошую оценку порядка величин. Диаметры поверхностей стержневых преобразователей, совершающих поршневые колебания, конструкция которых схематично показана на Рис. 6.1 (с.2) и (с.3), обычно удовлетворяют неравенству $D / \lambda < 0.5$.

Таким образом, все перечисленные преобразователи при работе в качестве одиночных попадают под категорию преобразователей, излучающие поверхности которых малы по сравнению с длиной звуковой волны. Их характеристики излучения в этом случае могут быть улучшены путем установки жестких экранов заподлицо с их излучающими поверхностями. Возникает вопрос о минимальном приемлемом размере экрана.

Количественные оценки эффектов, которые жесткие экраны конечного размера оказывают на характеристики акустического излучения круглых дисков, были получены в

нескольких работах^{15,21,23}. В работе [23] Задача была решена с применением сплюснутых сфероидальных функций⁵ методом, аналогичным использованному в работе [20] для расчета характеристик излучения осциллирующего диска. Наиболее полный анализ проблемы выполнен в работе [15] с применением интегральных уравнений для расчета акустических полей. Численные результаты, которые приведены в этом разделе относительно характеристик излучения дисков, встроенных в жесткие круглые экраны, заимствованы из этой работы.

6.5.8.2 Излучение осциллирующего диска, встроенного в жесткий экран конечного размера

Качественно объяснить разницу в характеристиках излучения осциллирующих дисков малого и значительного волнового размера поможет Рис. 6.52.

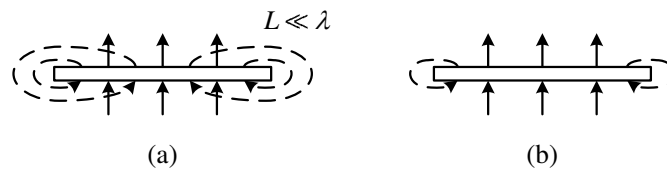


Рисунок 6.52: Качественная иллюстрация дифракции звуковой волны на осциллирующем диске: (a) при малых волновых размерах (низкие частоты), (b) на высоких частотах.

При малых волновых размерах излучение передней поверхности, распространяясь вокруг края диска, приходит на заднюю поверхность практически в той же фазе, в которой эта поверхность колеблется. Таким образом, в процессе колебаний основной поток звуковой энергии перетекает с одной стороны диска на другую, и лишь незначительная его часть излучается в бесконечность. Происходит акустическое короткое замыкание. С увеличением волнового размера диска часть излучения, которая приходит через край на заднюю поверхность в фазе с ее колебаниями, уменьшается и в конечном счете становится незначительной. Излучения от поверхностей дисков становятся независимыми и происходят в соответствующие полупространства. В варианте одностороннего диска излучение в заднее полупространство в силу дифракции через край так же существует, хотя оно гораздо менее выражено, чем в случае осциллирующего диска. Естественно ожидать, что вредное воздействие дифракции может быть уменьшено, если поместить диски в круглый жесткий экран и, таким образом, отодвинуть край всей конструкции от

источника излучения.

Что касается пульсирующего диска, то дифракция на его краю отсутствует, поскольку в силу симметрии его излучение эквивалентно излучению в полупространство диска, встроенного в бесконечный жесткий экран.

Как следует из Таблицы 6.6, характеристики излучения дисков всех конфигураций количественно становятся практически одинаковыми при $ka \geq 3$. Это позволяет предположить, что волновой диаметр экрана, достаточный для эффективного уменьшения влияния дифракции на результаты излучения акустической энергии, должен быть примерно $d/\lambda \geq 1$.

На Рис. 6.53 и 6.54 приведены зависимости безразмерных коэффициентов сопротивления излучения для дисков с разными волновыми радиусами ka от волновых радиусов жестких экранов kb . На Рис. 6.53 они представлены более подробно для дисков при $ka = 0.5$.

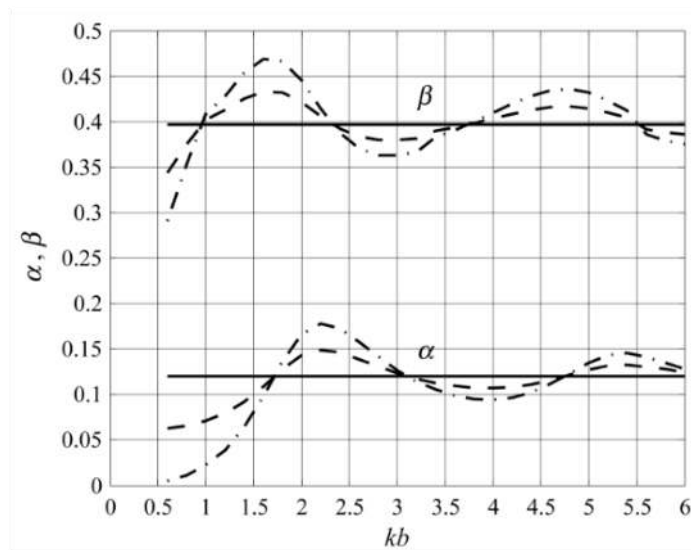


Рисунок 6.53: Зависимости безразмерных коэффициентов сопротивления излучения диска при $ka = 0.5$ от волнового радиуса жесткого экрана для осциллирующих дисков (штрихпунктирные линии) и односторонних дисков (штриховые линии). Сплошные линии соответствуют пульсирующему диску, характеристики которого не зависят от размера экрана.

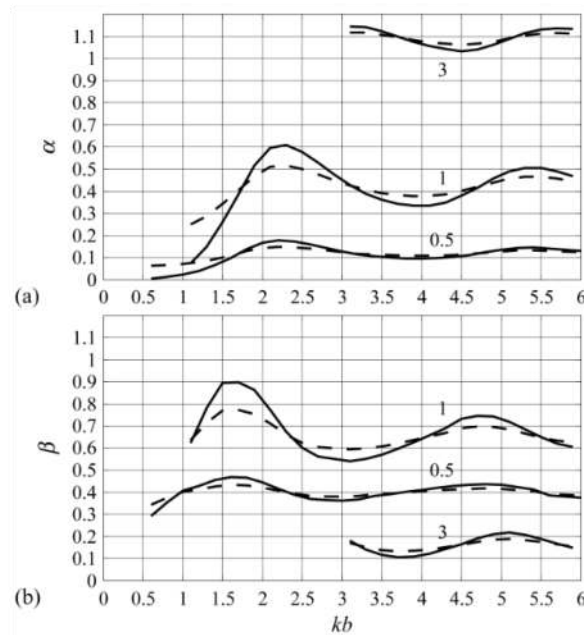


Рисунок 6.54: Зависимости безразмерных коэффициентов сопротивлений излучения дисков разного волнового размера от радиуса жесткого экрана: (а) α , (б) β для осциллирующих дисков (сплошные линии) и одностороннего диска (штриховые линии). Числа на линиях соответствуют волновым радиусам дисков (ka).

Как видно из Рис. 6.53, при $kb \approx 2$ нормированные компоненты сопротивления излучения с увеличением размера экрана достигают значений, соответствующих таковым для пульсирующего диска, вокруг которых они колеблются. Аналогичные зависимости для более широкого диапазона волновых размеров дисков представлены на Рис. 6.54. Они подтверждают, что волновой радиус жесткого экрана, достаточный для того, чтобы получить значения коэффициентов, вокруг которых они колеблются при дальнейшем увеличении размера экрана, составляет около $kb = 2 \div 3$. Зависимость безразмерных коэффициентов сопротивлений излучения по-разному колеблющихся дисков от волнового размера в случае, если они встроены в жесткий экран с волновым размером $kb = 3.0$, представлена на Рис. 6.55. Обе составляющие сопротивления излучения до $ka \approx 0.5$ и активного компонента до $ka \approx 1.0$ ведут себя как в случае бесконечного экрана. При $ka > 3.0$ активная составляющая излучения дисков практически не зависит от размера экрана (слегка колеблется вокруг ее значения при бесконечном экране, как показано на Рис. 6.54). Реактивная составляющая при $ka > 3.0$ колеблется более значительно, но ее

среднее значение становится небольшим.

Для дисков с экранами малых волновых размеров (при $kb < 0.5$) применимы следующие приближенные выражения для безразмерных коэффициентов сопротивления излучения, как это показано в работе [21]):

$$\alpha = \frac{8}{27\pi^2} \left\{ 1 + 2.26 \left[\frac{b^2}{a^2} - 1 \right] \right\} (ka)^4, \quad (6.335)$$

$$\beta = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{3(b/a) - 2}{3(b/a) - 1} (ka). \quad (6.336)$$

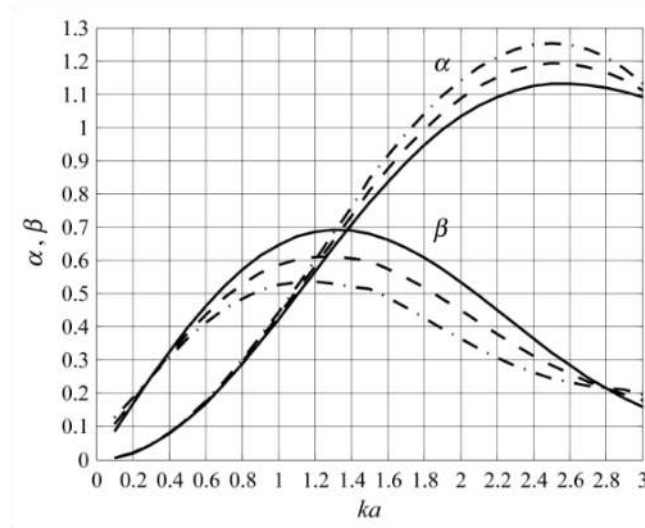


Рисунок 6.55: Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения дисков, встроенных в жесткий экран при $kb = 3.0$: пульсирующий диск (как и в бесконечном экране) (сплошная линия), односторонний диск (штриховая линия), осциллирующий диск (штрихпунктирная линия).

Алгоритмы, разработанные в работах [15] и [23], позволяют детально проанализировать особенности характеристик дальнего поля дисков, колеблющихся в жестких экранах, а именно звукового давления, создаваемого на акустической оси, и характеристик направленности.

Как показывают результаты расчетов, при малых волновых размерах дисков эти характеристики достаточно сильно зависят от волнового размера экрана. При $ka \geq 3$ они определяются в основном размерами самого излучателя. Как и сопротивление излучения, звуковое давление на оси резко возрастает с увеличением волнового размера экрана

до $kb \approx 3$ ($b \approx \lambda/2$), а затем его значение начинает колебаться. Колебания более выражены (примерно до 6 дБ) для осциллирующих дисков малого волнового размера (с $ka < 1.5$) и менее выражены для односторонних дисков того же размера. При значении $kb \approx 6.3$ ($b \approx \lambda$) звуковое давление достигает минимума. Качественно объяснить такое поведение, обусловленное дифракцией звука на краю дисков, можно с помощью Рис. 6.56.

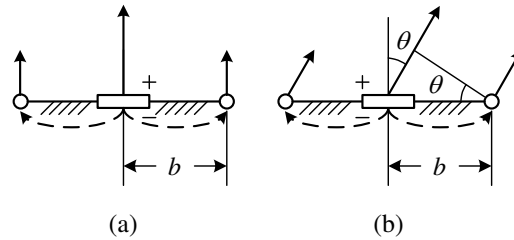


Рисунок 6.56 Иллюстрация влияния дифракции (а) на звуковое давление на оси и (б) на характеристику направленности диска малого волнового размера, встроенного в жесткий экран.

Звуковое давление на оси представляет собой суперпозицию прямого излучения передней поверхности диска и излучения его задней поверхности, которое приходит через край экрана. Это обратное излучение можно представить себе как производимое дополнительным кольцевым излучателем, расположенным на контуре экрана. Если радиус экрана $b \approx \lambda/2$, то, учитывая, что поверхности диска колеблются в противофазе, излучение дополнительного излучателя оказывается синфазным с излучением передней поверхностью. Это приводит к увеличению звукового давления на оси по сравнению с тем, что было бы при бесконечном экране. В случае если $b \approx \lambda$, фаза дополнительного излучателя изменяется на 180° , и звуковое давление на оси падает до минимума.

Влияние экрана на направленность зависит в основном от размеров излучателя. При небольшом волновом размере ($ka < 1.5$) это влияние очень сильно. Так, при $kb \approx 6.3$ появляется очень резкое уменьшение значений характеристики направленности в узком диапазоне углов, близких к ее оси, в дополнение к значительно уменьшенному значению звукового давления на оси. Эти углы (около $\theta \approx 7^\circ$ на Рис. 6.56 (б)) примерно соответствуют радиусу b , на котором фазовый сдвиг приводит излучение дополнительного излучателя на контуре экрана к противофазе с прямым излучением диска. При больших

размерах дисков их характеристики направленности практически не зависят от экранов.

Особенности поведения звукового давления на оси и характеристики направленности осциллирующих дисков малого размера ($ka < 1.5$), встроенных в экраны конечного размера, качественно проиллюстрированы графиками на Рис. 6.57. Значения параметров приближительные. Более точные результаты вычислений можно найти в работе [15].

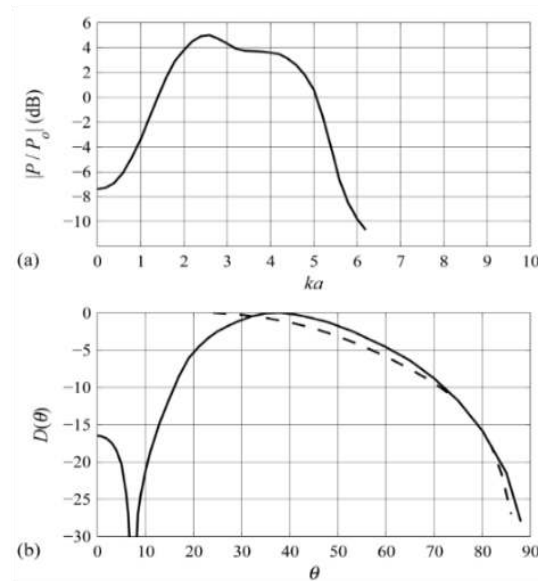


Рисунок 6.57: (а) Относительные значения звукового давления на оси осциллирующего диска малого размера ($ka < 1.5$), встроенного в экран конечного размера. P_0 - звуковое давление, создаваемое диском в бесконечном экране. (б) Характеристика направленности малого ($ka < 1.5$) осциллирующего диска, колеблющегося в жестком экране. Размер экрана $kb \approx 6.3$.

Надо отметить, что качественное понимание влияния экранов конечного размера, полученное на основе анализа, проведенного с идеальными экранами, может быть даже более важно, чем знание точных результатов, поскольку свойства реальных экранов обычно не известны с достаточной точностью. Между тем, влияние дифракции может оказаться меньше за счет конечной податливости и активных потерь, которыми обладают реальные экраны.

Выводы относительно больших колебаний звукового давления и глубоких перепадов характеристик направленности, которые сделаны для идеально жестких экранов круглой формы, обусловлены тем, что все точки дополнительного излучателя на контуре

экрана в виду симметрии колеблются синфазно. При экранах другой конфигурации (например, для квадратных или эллиптических экранов) эти эффекты могут быть значительно меньше.

6.5.8.3 Односторонний диск в жестком экране конечного размера

После определения зависимости характеристик излучения осциллирующего диска от размеров жестких экранов, применив принцип Гутина можно получить аналогичные характеристики одностороннего диска как результат наложения акустических полей, создаваемых пульсирующим и осциллирующим дисками, встроенными в экраны соответствующего размера, как это показано на Рис. 6.58.

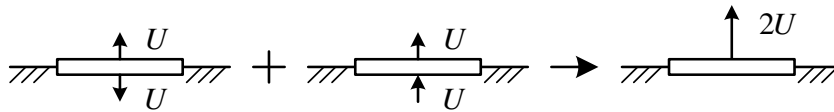


Рисунок 6.58: Иллюстрация наложения акустических полей, создаваемых дисками с жесткими экранами конечного размера.

Так же как для дисков без экранов в этом случае

$$P_{o-s,b} = \frac{1}{2}(P_{puls} + P_{osc,b}), \quad (6.337)$$

$$Z_{o-s,b} = \frac{1}{2}(Z_{puls} + Z_{osc,b}), \quad (6.338)$$

где нижние индексы "o-s,b" и "osc,b" обозначают параметры, относящиеся к одностороннему и осциллирующему дискам с экранами, соответственно. Зависимости безразмерных коэффициентов сопротивления излучения односторонних дисков от волнового размера экранов приведены на Рис. 6.53 и 6.54 пунктирными линиями. На Рис. 6.55 значения этих коэффициентов представлены как функции волновых размеров дисков для случая если $kb = 3.0$. Как следует из рисунков, значения безразмерных коэффициентов односторонних дисков являются промежуточными между значениями для пульсирующих и осциллирующих дисков с экранами вплоть до $kb \approx 2.0$. При $kb > 2.0$ они колеблются вокруг общего значения для всех дисков. Величина колебаний для одностороннего диска меньше, чем для осциллирующего.

Влияние экранов на характеристики направленности одностороннего диска наиболее выражено при $ka < 1.5$. Они приводят к значительному уменьшению обратного излучения под углами $\theta > 90^\circ$ по сравнению со случаем отсутствия экрана. При $ka > 3.0$ характеристики направленности имеют практически такой же вид, как и без экранов. Особенность в том, что во всех случаях максимум излучения находится под углом $\theta = 180^\circ$. Это связано с тем, что все точки дополнительного излучателя, который образуется в результате дифракции на краю экрана, излучают в этом направлении синфазно. Обратите внимание, что тот же эффект имеет место в случае одностороннего диска без экранов (см. Рис. 6.51).

6.5.8.4 Излучение дисков конечной толщины

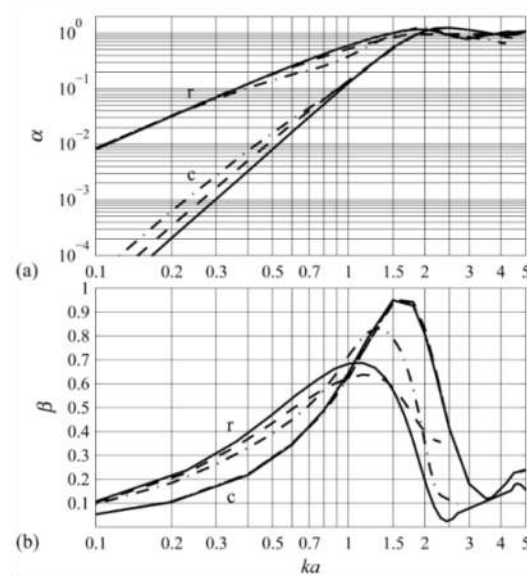


Рисунок 6.59: Безразмерные коэффициенты сопротивления излучения пульсирующих дисков конечной толщины при $h/a = 0.5$ (сплошная линия), $h/a = 1$ (штриховая линия), $h/a = 2$ (штрихпунктирная линия) с жесткими (r) и податливыми (c) боковыми поверхностями.

В этом случае излучатель можно представить как цилиндр конечного размера с колеблющимися торцами: пульсирующий (с торцами, колеблющимися синфазно) и осциллирующий (с торцами, колеблющимися в противофазе). Для решения этой задачи излучения в работе [15] применен тот же алгоритм, что и для расчета сопротивлений излучения цилиндра конечного размера, излучающего боковой поверхностью (см. Раздел

6.3.2.5). Излучение торцами рассмотрено при условиях, что боковая поверхность цилиндра жесткая ($U_r = 0$) или податливая ($P_r = 0$). Результаты, полученные для безразмерных коэффициентов сопротивления излучения в обоих вариантах представлены на Рис. 6.59 и 6.60.

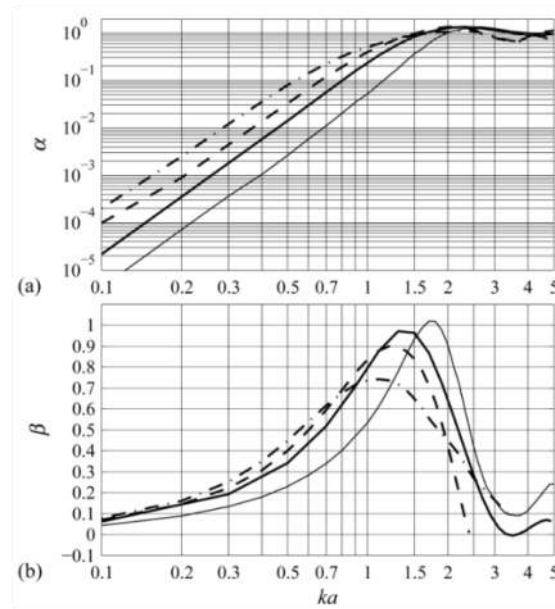


Рисунок 6.60: Безразмерные коэффициенты активной (а) и реактивной (б) составляющих сопротивления излучения осциллирующих дисков конечной толщины с жесткой боковой поверхностью для $h/a = 0.5$ (сплошная линия), $h/a = 1$ (штриховая линия), $h/a = 2$ (штрихпунктирная линия), $h/a = 0$ (тонкая сплошная линия).

Интересно отметить, что до значений $ka = 1$ активная составляющая сопротивления излучения пульсирующего диска с жесткой боковой поверхностью уменьшается с увеличением расстояния между колеблющимися торцами до $h/a = 2$, в то время как в случае осциллирующего диска она увеличивается. Можно дать ясное физическое объяснение этой разницы, если представить сопротивление излучения каждого торца состоящим из его собственного сопротивления и взаимного сопротивления излучения между торцами. (Акустическое взаимодействие между преобразователями см. в следующем разделе.) Знак активной составляющей взаимного сопротивления при этих расстояниях между торцами положителен для источников, колеблющихся синфазно, и отрицателен для источников, колеблющихся в противофазе, а величина активной составляющей

уменьшается с увеличением расстояния. При значениях $ka > 2$ взаимодействие между торцами становится незначительным, и они колеблются независимо. Безразмерный коэффициент активной составляющей приближается к единице. При меньшем ka ($ka < 1$) увеличение толщины от $h/a = 0$ (что соответствует тонкому диску, колеблющемуся в бесконечном жестком экране) до $h/a = 2$ (что близко к одностороннему диску, колеблющемуся в жестком цилиндрическом экране) приводит к уменьшению активного сопротивления излучения примерно в два раза.

В том случае, если боковая поверхность податливая, активное сопротивление излучения значительно меньше (до порядка величины при малых ka). При $ka > 2$ оно такое же, что и при жесткой боковой поверхности. Что касается безразмерных коэффициентов реактивного сопротивления излучения, то их величины остаются близкими при жесткой и при податливой боковых поверхностях.

При известных данных о сопротивлениях излучения пульсирующего и осциллирующего дисков конечной толщины, имеющих жесткую боковую поверхность, можно легко получить результат для диска, колеблющегося одним торцом в жестком цилиндрическом корпусе, применив концепцию суперпозиции Гутина. Такой вариант конструкции характерен для преобразователя типа Tonpitz, заключенного в жесткий корпус, как это схематично показано на Рис. 6.1 (с.4).

6.6 Акустическое взаимодействие между преобразователями

6.6.1 Введение

Механические системы преобразователей могут состоять из нескольких частей, механически изолированных и соединенных электрически. Это бывает сделано по технологическим причинам, когда трудно изготовить преобразователь в виде единого целого, или для того, чтобы избежать вредных последствий связанных колебаний, которые появляются из-за неблагоприятного соотношения размеров механической системы преобразователя. Типичные примеры механических систем, состоящих из нескольких частей, приведены на Рис. 6.61. Во всех этих случаях результат действия звукового давления, создаваемого на поверхности преобразователя при его равномерных колебаниях, не

усредняется, как это было бы на поверхности единой механической системы. Возникает ситуация, в которой при равных скоростях колебаний частей преобразователя усредненные на этих частях звуковые давления оказываются разными. Это приводит к различию сопротивлений излучения между ними и, в конечном счете, к нарушению равномерности распределения скоростей колебаний по поверхности преобразователя. Влияние взаимодействия между частями преобразователя, как правило, удается оценить аналитически, как это будет показано ниже.

Аналогичные эффекты акустического взаимодействия возникают между преобразователями в антенных антеннах. Аналитическое определение взаимодействий в антеннах значительно сложнее. Это особенно справедливо для антенн из преобразователей, имеющих не плоскую поверхность, снабженных элементами конструкций, необходимыми для их установки в антенне, а так же специальными экранами, которые, в частности, могут быть предназначены для уменьшения влияния взаимодействия между ними.

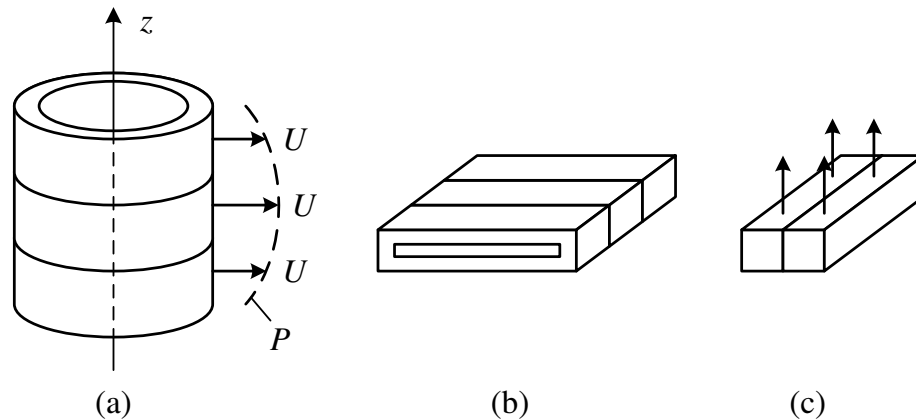


Рисунок 6.6.1: Примеры механических систем преобразователей, состоящих из отдельных элементов: (а) цилиндрический преобразователь, (б) прямоугольный изгибный пластинчатый, (с) преобразователь гидролокатора бокового обзора.

Наиболее практичным способом определения взаимных сопротивлений между преобразователями в этих случаях является экспериментирование. Процедура измерения взаимных сопротивлений присущи определенные особенности, которые связаны со свойствами преобразователей, участвующих в этом процессе. Поэтому одна из задач этого раздела состоит в рассмотрении методов измерения взаимных сопротивлений излучения.

6.6.2 Общие сведения и определения

Для того чтобы продемонстрировать эффект акустического взаимодействия между преобразователями и ввести определения для характеризующих его величин, которые необходимо знать при последующих расчетах, рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых преобразователей T_1 и T_2 (Рис. 6.62 (а)), которые колеблются со скоростями $U_1(r_{\Sigma 1})$ и $U_2(r_{\Sigma 2})$.

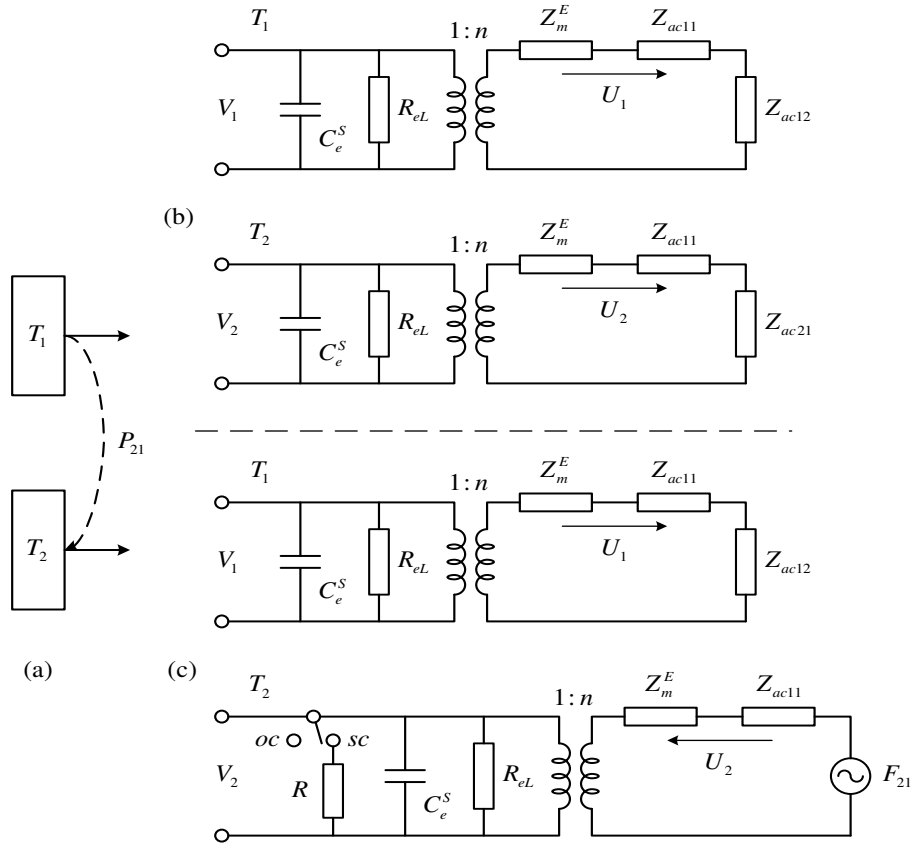


Рисунок 6.62: К взаимодействию преобразователей: (а) взаимодействующие преобразователи; (б) и (с) варианты эквивалентных схем взаимодействующих преобразователей с внешним сопротивлением излучения Z_{ac12} и эквивалентной силой $F_{21} = z_{21}U_1$, соответственно. Варианты (б) и (с) разделены пунктирной линией.

Учитывая, что взаимное влияние на параметры преобразователей наиболее значительно в частотной области, близкой к их резонансной частоте, предположим, что взаимодействующие преобразователи имеют одну степень свободы. Эквивалентные схемы преобразователей в этом случае можно представить в виде одноконтурных, а скорости

колебаний в виде $U_1(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) = U_1\theta(\mathbf{r}_{\Sigma_1})$ и $U_2(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) = U_2\theta(\mathbf{r}_{\Sigma_2})$.

Режим работы преобразователей можно представить, как суперпозицию двух режимов:

1. Преобразователь T_2 заторможен ($U_2 = 0$), преобразователь T_1 колеблется со скоростью $U_1(\mathbf{r}_{\Sigma_1})$ и создает акустическое давление $P_{11}(\mathbf{r}_{\Sigma_1})$ на собственной поверхности и $P_{21}(\mathbf{r}_{\Sigma_2})$ на заторможенной поверхности преобразователя T_2 .
2. Преобразователь T_2 колеблется со скоростью $U_2(\mathbf{r}_{\Sigma_2})$ и создает акустическое давление $P_{22}(\mathbf{r}_{\Sigma_2})$ на собственной поверхности и $P_{21}(\mathbf{r}_{\Sigma_1})$ на заторможенной поверхности преобразователя T_1 .

Суперпозиция этих двух режимов приводит к результирующим акустическим давлениям на поверхностях одновременно работающих преобразователей T_1 и T_2 . Величины давлений и мощности акустического излучения преобразователей представим следующим образом:

$$P_1(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) = P_{11}(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) + P_{12}(\mathbf{r}_{\Sigma_1}), \quad (6.339)$$

$$\bar{W}_{ac1} = \int_{\Sigma_1} P_{11}(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) U_1^* \theta(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} P_{12}(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) U_1^* \theta(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) d\Sigma_1; \quad (6.340)$$

$$P_2(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) = P_{22}(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) + P_{21}(\mathbf{r}_{\Sigma_2}), \quad (6.341)$$

$$\bar{W}_{ac2} = \int_{\Sigma_2} P_{22}(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) U_2^* \theta(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) d\Sigma_2 + \int_{\Sigma_2} P_{21}(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) U_2^* \theta(\mathbf{r}_{\Sigma_2}) d\Sigma_2. \quad (6.342)$$

Первые интегралы в выражениях (6.340) и (6.342) представляют собой величины $\bar{W}_{acii} = Z_{acii} |U_i|^2$, где Z_{acii} — собственные сопротивления излучения одного из преобразователей в присутствии заторможенного другого преобразователя. Принимая во внимание, что звуковое давление пропорционально скорости колебаний ($P_{12} \sim U_2$), второй интеграл в выражении (6.340) можно представить в виде $\bar{W}_{ac12} = z_{ac12} U_2 U_1^*$, где

$$z_{ac12} = \frac{1}{U_2} \int_{\Sigma_1} P_{12}(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma_1}) d\Sigma_1. \quad (6.343)$$

В силу взаимности $z_{ac12} = z_{ac21}$.

С учетом введенных обозначений выражения (6.340) и (6.342) запишем в виде

$$\bar{W}_{aci} = \left(Z_{acii} + z_{acil} \frac{U_l}{U_i} \right) |U_i|^2, \quad i, l = 1, 2. \quad (6.344)$$

Величина

$$z_{acil} = r_{acil} + jx_{acil} \quad (6.345)$$

представляет собой взаимное комплексное сопротивление излучения, а r_{acil} и x_{acil} являются активной и реактивной составляющими взаимного сопротивления излучения, соответственно. Сопротивление

$$Z_{acil} = z_{acil} \frac{U_l}{U_i} = R_{acil} + jX_{acil} \quad (6.346)$$

называют вносимым импедансом, а R_{acil} и X_{acil} — вносимыми активным и реактивным сопротивлениями.

Соотношение (6.344) иначе может быть выражено в виде

$$\bar{W}_{aci} = Z_{acii} |U_i|^2 + F_{acil} U_i^*, \quad (6.347)$$

где $F_{acil} = z_{acil} U_l$ — эквивалентная сила, с которой преобразователь T_l воздействует на преобразователь T_i при их одновременной работе. Сравнив с выражением (6.343), получим

$$F_{acil} = \int_{\Sigma_i} P_{il}(\mathbf{r}_{\Sigma_i}) \theta(\mathbf{r}_{\Sigma_i}) d\Sigma_i. \quad (6.348)$$

Таким образом, в соответствии с выражениями (6.344) и (6.347) взаимодействие между преобразователями T_1 и T_2 при расчете можно учесть путем включения в их эквивалентные схемы либо сопротивления излучения Z_{ac21} (как показано на Рис. 6.62 (b)), либо эквивалентной силы F_{ac21} (как показано на Рис. 6.62(c)). Оба представления взаимодействия эквивалентны. Первое из них более удобно при оценке изменений параметров преобразователя, работающего в режиме излучения в диапазоне частот близком к резонансу. Второе представление предпочтительнее в случае работы преобразователей в режиме приема в диапазоне частот ниже резонанса. Преобразователь T_2 либо генерирует дополнительную энергию, либо потребляет энергию акустического поля в процессе взаимодействия в зависимости от знака вносимого сопротивления излучения Z_{ac21} и силы

F_{ac21} .

Величина взаимного сопротивления z_{acil} зависит от геометрии преобразователей, от формы их колебаний и от относительного расположения преобразователей. Величина вносимого сопротивления сильно зависит также от отношения скоростей колебаний преобразователей. Величину вносимого сопротивления легко изменять путем изменения отношения между скоростями колебаний взаимодействующих преобразователей, как это следует из выражения (6.346). В случае если фаза между скоростями колебаний изменяется, изменяется соотношение между вносимым активным и реактивным сопротивлениями. В соответствии с выражением (6.346)

$$R_{acil} = r_{acil} \cdot \operatorname{Re}(U_l / U_i) - x_{acil} \cdot \operatorname{Im}(U_l / U_i), \quad (6.349)$$

$$X_{acil} = x_{acil} \cdot \operatorname{Re}(U_l / U_i) + r_{acil} \cdot \operatorname{Im}(U_l / U_i). \quad (6.350)$$

Особый интерес в процессе расчета преобразователей представляют активная составляющая его полного сопротивления излучения и, следовательно, активная составляющая вносимого сопротивления в связи с их влиянием на излучение акустической энергии. В том случае, если скорости колебаний преобразователей в антенне различаются по фазе (а эта разница может изменяться при сканировании характеристики направленности), для определения общего сопротивления излучения должны быть известны как активная, так и реактивная составляющие взаимного сопротивления. Так, например, если сдвиг фазы между скоростями равен 90° , т.е. $(U_2 / U_1) = -j|U_2 / U_1|$, то

$$R_{acil} = x_{acil} |U_l / U_i|, \quad (6.351)$$

$$X_{acil} = r_{acil} |U_l / U_i|. \quad (6.352)$$

С помощью эквивалентных схем взаимодействующих преобразователей, представленных на Рис. 6.62, удобно обосновать экспериментальные методы определения взаимных сопротивлений: на основе измерения входного сопротивления одного из взаимодействующих преобразователей (Z – метод), и путем измерения выходного напряжения одного из преобразователей при работе другого (V – метод). При этом возможность увеличения значения вносимого активного сопротивления и преобразования реактивной составляющей в активную (которую легче измерить) оказывается полезной с точки зрения

повышения точности экспериментов. Методы экспериментального исследования акустического взаимодействия будут рассмотрены в Разделе 6.4.10.

Общие свойства взаимных сопротивлений излучения рассмотрим на примерах акустического взаимодействия между двумя преобразователями, для которых имеются теоретические решения. Самыми простыми из них и в то же время достаточно информативными являются примеры с преобразователями, размеры которых малы по сравнению с длиной волны (простые источники).

6.6.3 Взаимодействие между простыми источниками

Рассмотрим два малых по сравнению с длиной волны одинаковых преобразователя, находящихся в свободном пространстве на расстоянии d друг от друга. Предположим, что их поверхности имеют произвольную форму и колеблются с объемными скоростями $U_{\bar{v}} = U_0 S_{av}$. Давление, создаваемое одним из преобразователей (№ 2) на поверхности другого (№ 1), равно (см. формулу (6.246) при $k_{dif0} = 1$)

$$P_{12} = \frac{\rho c}{2\lambda r} U_0 S_{av} e^{-j(kr - \pi/2)}, \quad (6.353)$$

где $r = d + \Delta r$ — расстояние между элементами поверхности преобразователей. Полагая, что в силу малости размеров преобразователей $|\Delta r| \ll d$ и $k \cdot \Delta r \ll 1$, величиной Δr можно пренебречь. В результате, применив формулу (6.343), получим выражение для взаимного сопротивления излучения в виде

$$z_{ac12} = j\pi\rho c \frac{S_{av}^2}{\lambda^2} \frac{e^{-jkd}}{kd}. \quad (6.354)$$

Учитывая, что активное сопротивление излучения преобразователя с малыми волновыми размерами равно

$$\pi\rho c \frac{S_{av}^2}{\lambda^2} = r_{ac11}, \quad (6.355)$$

получим нормированную величину взаимного сопротивления в форме

$$(z_{12} / r_{11}) = \frac{\sin kd}{kd} + j \frac{\cos kd}{kd}. \quad (6.356)$$

(В дальнейшем часть ac в нижнем индексе опускаем для краткости, поскольку всюду будем рассматривать только акустические величины.)

Характерно, что модуль взаимного сопротивления между простыми источниками уменьшается как $|z_{12} / r_{11}| = 1/kd$ с увеличением расстояния между ними. С физической точки зрения понятно, что уменьшение модуля взаимного сопротивления между излучателями конечного размера должно происходить быстрее.

В случае если один из размеров преобразователя значительно превышает другой, более целесообразно использовать для оценки взаимодействия между преобразователями выражения для взаимного сопротивления излучения, нормированного на единицу длины бесконечно длинных цилиндров, диаметр которых мал по сравнению с длиной волны (цилиндрические простые источники). Начиная с выражения (6.118) для звукового давления, создаваемого цилиндром малого волнового размера

$$P_0(r, \pi) = \rho c \frac{k}{4} U_{\tilde{v}_r} H_0^{(2)}(kr) , \quad (6.357)$$

и учитывая, что его собственное активное сопротивление излучения (6.129)

$$r_{ac11} = \frac{\pi}{2} \rho c \frac{S_{av}^2}{\lambda} \quad (6.358)$$

таким же образом, как и для трехмерного простого источника, мы получим

$$(z_{12} / r_{11}) = J_0(kd) - jN_0(kd) . \quad (6.359)$$

Графики активной и реактивной составляющих нормированных взаимных сопротивлений по формулам (6.356) и (6.359) представлены на Рис. 6.63 и Рис. 6.64.

Зависимости взаимных сопротивлений от расстояния между простыми источниками, расположенными на поверхности идеально жесткой плоскости, такие же, как и для источников в свободном пространстве. Это можно показать с помощью аналогичной процедуры их вывода. Но нормирующие сопротивления излучения источников (обозначим их r_{11}^*) отличаются.

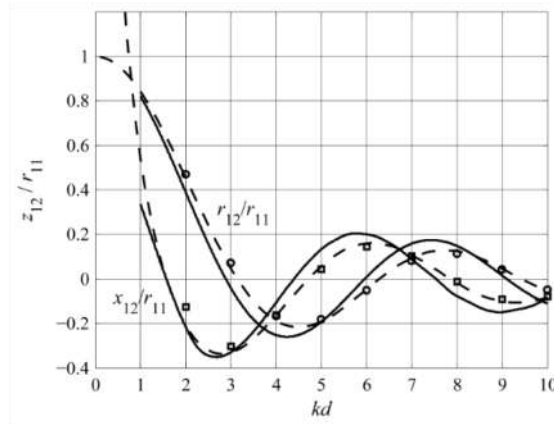


Рисунок 6.63: Зависимости от kd нормированных взаимных сопротивлений излучения для различных преобразователей: простые источники (формула (6.356)) (штриховые линии); круглые поршни при $2a/\lambda = 0.3$ в жестком плоском экране (кружки и квадратики); конечные цилиндры при $h/\lambda = 0.36$ и $2a/\lambda = 0.73$ в жестком цилиндрическом экране (сплошная линия).

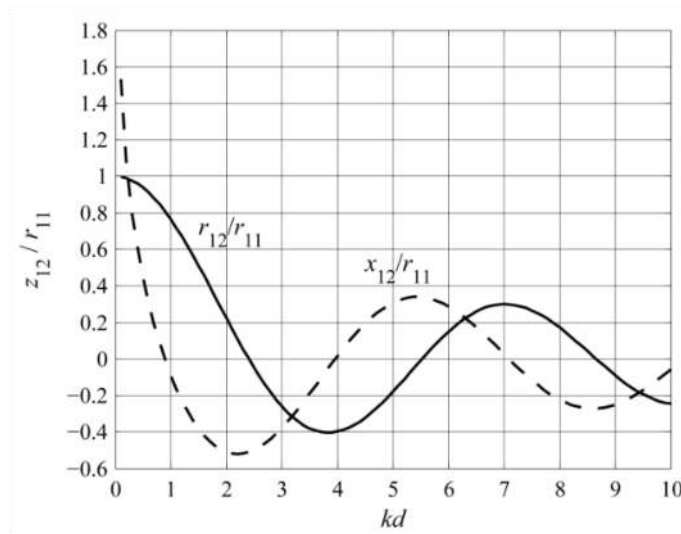


Рисунок 6.64: Нормированные взаимные сопротивления двумерных простых источников.

С точки зрения акустического поля, создаваемого источником, идеально жесткую плоскость можно заменить изображением источника, колеблющегося с той же скоростью, как показано на Рис. 6.65 (а).

Таким образом, величину сопротивления r_{11}^* можно получить как результат взаимодействия между источником и его изображением, а именно:

$$r_{11}^* = r_{11} \left(1 + \frac{\sin 2kd_1}{2kd_1} \right) \quad (6.360)$$

для 3D источника, и

$$r_{11}^* = r_{11} [1 + J_0(2kd_1)] \quad (6.361)$$

для цилиндрического (2D) источника.

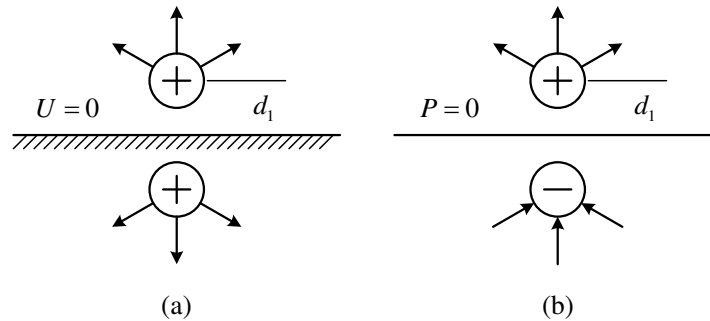


Рисунок 6.65: Простые источники, расположенные вблизи идеально жесткой (а) и податливой (b) плоскостей и их изображения.

При $kd_1 \rightarrow 0$ $r_{11}^* \rightarrow 2r_{11}$. Таким образом, для 3D источника

$$r_{11}^* = 2\pi\rho c \frac{S_{av}^2}{\lambda^2} \quad (6.362)$$

и для цилиндрического источника на единицу длины

$$r_{11}^* = \pi\rho c \frac{S_{av}^2}{\lambda} \quad (6.363)$$

Выражения (6.360) и (6.361) показывают, как изменяется активное сопротивление излучения источника с расстоянием от жесткого экрана. Они будут справедливы для варианта податливого экрана, если изменить знак плюс на минус, так как в этом случае скорость изображения имеет противоположный знак (Рис. 6.65 (b)).

Так, при определении предпочтительного расстояния от поверхности воды для измерения активного сопротивления излучения преобразователей может быть полезно выражение

$$r_{11}^* = r_{11} \left(1 - \frac{\sin 2kd_1}{2kd_1} \right) \quad (6.364)$$

При $2kd_1 = 0$, т.е. при $d_1 = \lambda / 4$, активное сопротивление излучения имеет ту же величину, что и в свободном пространстве ($r_{11}^* = r_{11}$). Таким образом, активные сопротивления излучения изгибных преобразователей, резонансные размеры которых невелики в сравнении с длиной волны, можно измерять на относительно небольшой глубине.

6.6.4 Взаимодействие между преобразователями конечного размера

Универсальность выражений (6.356) и (6.359) для нормированных взаимных сопротивлений состоит в том, что эти выражения в разумной степени применимы для преобразователей, размеры которых не очень малы, если в качестве сопротивления r_{11} принять собственное сопротивление излучения рассматриваемого преобразователя. Покажем это на примерах преобразователей, для конфигураций которых результаты расчетов взаимных сопротивлений излучения известны.

6.6.4.1 Взаимодействие между круглыми дисками

Один из методов расчета взаимных сопротивлений между плоскими излучателями, колеблющимися в бесконечном жестком плоском экране, и частные результаты для круглых дисков рассмотрены в работе [24]. Значения нормированных взаимных сопротивлений излучения при волновом размере $ka = 1$ ($2a / \lambda \approx 0.32$) приведены на Рис. 6.63. Они почти полностью согласуются со значениями для простых источников. Такое же приближение остается на практике справедливым и для больших значений ka .

В частности, равномерно колеблющиеся круглые диски имитируют излучающие поверхности стержневых преобразователей. При применении в составе антенн диаметры их излучающих поверхностей обычно не превышают половины длины волны из соображений сканирования характеристик направленности антенн. В пределах этих размеров формулу (6.356) можно с достаточной точностью применять для оценки эффектов взаимодействия между преобразователями.

Для круглых пластинчатых преобразователей, которые колеблются с распределением скоростей по поверхности, расчеты нормированных взаимных сопротивлений излучения произведены в работе [25]. Результаты, полученные для случая свободно опертого контура, полностью согласуются с формулой (6.356) до $ka = 1$, причем величина

нормирующего собственного сопротивления излучения была определена по формуле (6.362) для простого источника, где $S_{av} = 0.46\pi a^2$. Следует отметить, что размеры изгибных преобразователей обычно значительно меньше длины волны. Максимальный размер изгибного круглого диска обычно составляет $(2a / \lambda) < 0.2$ (см. комментарий под Таблицей 6.6.). Таким образом, аппроксимация простым источником для определения взаимных сопротивлений в этом случае также достаточно хороша для практического применения.

6.6.4.2 Взаимодействие между бесконечно длинными полосами

Задача взаимодействия между бесконечными полосами на единицу их длины в силу симметрии является двумерной. Она сводится к определению взаимодействия между отрезками, приведенными на Рис. 6.6б.

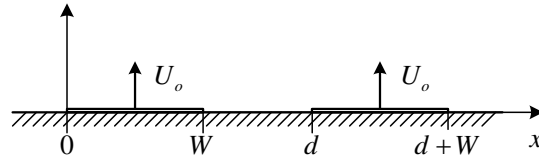


Рисунок 6.6б: К акустическому взаимодействию между бесконечно длинными полосами.

Та же процедура, которая применена для определения собственного сопротивления излучения полосы в Разделе 6.3. 4.4, приведет к выражению для взаимного сопротивления излучения

$$z_{12} = \frac{\omega\rho}{2} \int_0^W \int_d^{d+W} H_0^{(2)}(k|x_1 - x_2|) dx_1 dx_2, \quad (6.365)$$

где $d > W$. Формула (6.297) для собственного сопротивления излучения в случае, если колебания полосы равномерны ($f_i(x) = f_i(x) = 1$), имеет вид

$$Z_{acil} = \frac{\omega\rho}{2} \int_{-W/2}^{W/2} \int_{-W/2}^{W/2} H_0^{(2)}(k|x_1 - x_2|) dx_1 dx_2. \quad (6.366)$$

Таким образом, нормированное взаимное сопротивление излучения на единицу длины бесконечных полос равно

$$\frac{z_{12}}{r_{11}} = \frac{\int_0^W \int_0^{d+W} H_0^{(2)}(k|x_1 - x_2|) dx_1 dx_2}{\operatorname{Re} \left\{ \int_0^W \int_0^W H_0^{(2)}(k|x_1 - x_2|) dx_1 dx_2 \right\}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} + j \frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}}. \quad (6.367)$$

На Рис. 6.67 приведены зависимости коэффициентов $(\alpha_{12}/\alpha_{11})$ и (β_{12}/α_{11}) от kd при значениях $kW = 1, 2, 4, 8$.

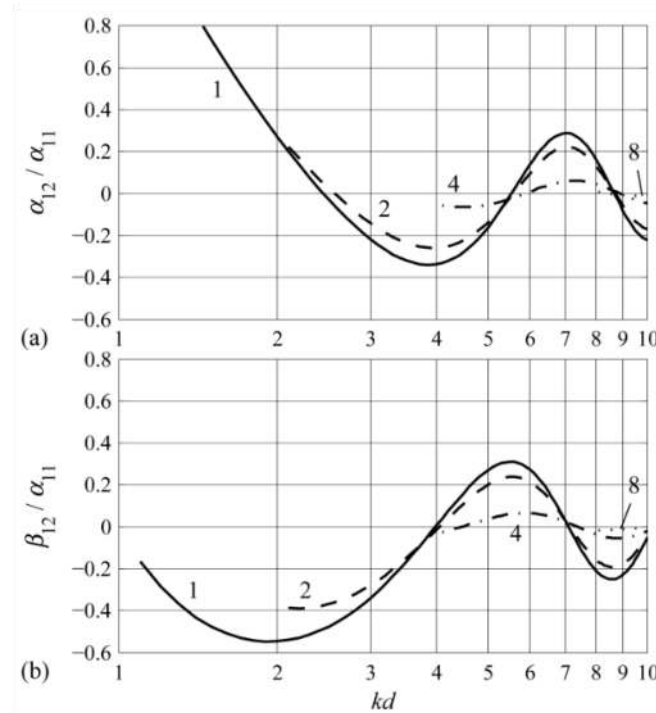


Рисунок 6.67: Нормированные активные (а) и реактивные (б) составляющие взаимного сопротивления излучения полос как функции расстояния между ними kd при различных значениях kW ($kW=1, 2, 4, 8$).

6.6.4.3 Взаимодействие между квадратными поршнями

Нормированные взаимные сопротивления излучения между квадратными поршнями были рассчитаны в работе [26]. Результаты для квадратных поршней практически совпадают с результатами для простых источников, представленными на Рис. 6.63, по крайней мере, до $kW \approx 3$. Особенно важным для расчета преобразователей является тот случай, когда поршни расположены рядом друг с другом. Влияние акустического взаимодействия в этом случае самое сильное и оно уменьшается с увеличением расстояния между

ними. Рассмотрим величину взаимного сопротивления излучения двух соседних квадратных поршней, приведенных на Рис. 6.68. После того, как определены собственные сопротивления излучения прямоугольных поршней при разных соотношениях их размеров (см. Раздел 6.5.5), это можно сделать следующим способом. Представим сопротивление излучения прямоугольного поршня, образованного двумя смежными поршнями, Z_{1+2} в виде

$$Z_{1+2} = 2Z_{11} + 2Z_{12}. \quad (6.368)$$

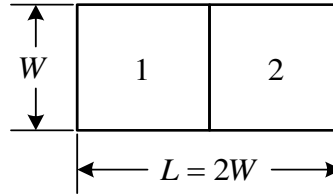


Рисунок 6.68: Смежные квадратные поршни, образующие прямоугольный поршень с соотношением размеров $L/W = 2$.

Значения нормированных безразмерных коэффициентов для $Z_{11} = Z_1$ и Z_{1+2} (в качестве собственных сопротивлений излучения при соотношениях размеров $kW = 1$ и 2) известны и представлены в Таблице 6.7.

Таблица 6.7: Значения безразмерных коэффициентов взаимных сопротивлений излучения для смежных излучающих поверхностей.

kd		1	2	3	4	5	6
	$\alpha_{12}/\alpha_{11r.}$	0.84	0.47	0.11	-0.09	-0.07	-0.01
	$\beta_{12}/\alpha_{11r.}$	0.54	-0.13	-0.26	-0.14	-0.03	0.02
	$\alpha_{12}/\alpha_{11r.}$	0.80	0.46	0.12	-0.02	-0.015	<0.005
	$\beta_{12}/\alpha_{11r.}$	0.66	-0.08	-0.22	-0.15	-0.028	<0,05

Вспомнив, что

$$Z_1 = S(\alpha_{11} + j\beta_{11}) \text{ и } Z_{1+2} = 2S(\alpha_{1+2} + j\beta_{1+2}) \quad (6.369)$$

из уравнения (6.368) получим

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\alpha_{1+2}}{\alpha_{11}} - 1, \quad (6.370)$$

$$\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\beta_{1+2}}{\alpha_{11}} - 1. \quad (6.371)$$

Значения этих функций в зависимости от $kW = kd$ представлены в Таблице 6.7. Для сравнения в Таблице также представлены значения аналогичных коэффициентов для расположенных рядом круглых дисков.

6.6.4.4 Взаимодействие между цилиндрами, встроенными в жесткий цилиндрический экран

Взаимные сопротивления излучения между цилиндрами, встроенными в жесткий цилиндрический экран, были рассмотрены в работе [10]. Выражения для активной и реактивной составляющих взаимного сопротивления между синфазно колеблющимися пульсирующими цилиндрами в этой работе представлены в виде

$$r_{12} = \frac{16\omega\rho}{\pi k^3} \int_0^{\pi/2} A \cos(kd_{12} \sin \theta) d\theta \quad (6.372)$$

и

$$x_{12} = \frac{8a\omega\rho}{k^2} \left[\int_0^{\pi/2} B \cos(kd_{12} \sin \theta) d\theta + \int_0^{\infty} C \cos(kd_{12} \cosh \psi) d\psi \right], \quad (6.373)$$

где функции A , B и C определяются формулами (6.192), (6.194) и (6.195), соответственно.

Применительно к цилиндрическим преобразователям особый интерес представляют два диапазона волновых размеров цилиндров, которые относятся к преобразователям из пьезокерамики PZT, реализующим продольные колебания, и к преобразователям изгибного типа, включая цилиндры с разрезом. Типичные значения ka для цилиндрических преобразователей, совершающих пульсирующие колебания вблизи их резонансных частот, находятся в диапазоне $ka \approx 2.2 \pm 0.2$. Рациональную высоту колец, составляющих преобразователь, выбирают так, чтобы избежать вредного воздействия связанных колебаний. Для этого желательно иметь соотношение размеров кольца $(h/2a) < 0.5$, т.е. $(h/\lambda) < (0.35 \div 0.40)$. Волновые размеры цилиндрических излучателей изгибного типа обычно имеют порядок $ka < (0.2 \div 0.3)$ и $(h/\lambda) < (0.1 \div 0.15)$.

Результаты расчетов, выполненных в соответствии с формулами (6.372) и (6.373) для цилиндров при $ka = 2.0$ и $(h/\lambda) = 0.36$ представлены на Рис. 6.69.

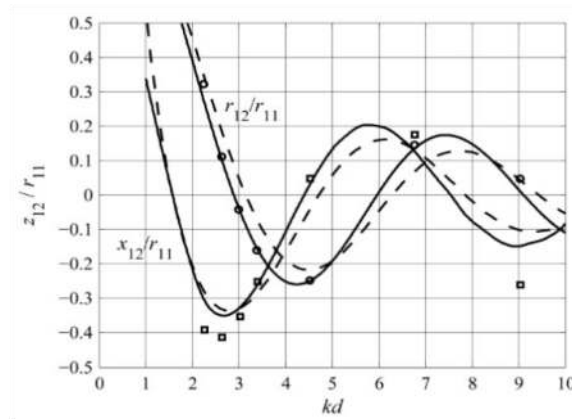


Рисунок 6.69: Сравнение нормированных взаимных сопротивлений излучения цилиндрических преобразователей, рассчитанных и измеренных в свободном пространстве: модель в жестком экране (сплошная линия), простые источники (штриховая линия), экспериментальные данные (кружки и квадратики). Волновые размеры цилиндров: $ka = 2.2$, $h/\lambda = 0.36$.

Они достаточно хорошо согласуются с результатами для простых источников, хотя модель для цилиндров предполагает, что они колеблются в жестком цилиндрическом экране, тогда как простые источники находятся в свободном пространстве. Естественно ожидать, что для цилиндров с меньшими волновыми размерами совпадение с результатами для простых источников должно быть еще лучше.

Чтобы проверить, насколько близки используемые модели к реальной ситуации, была проведена экспериментальная проверка результатов расчетов с помощью одного из методов определения взаимных сопротивлений, описанных в Разделе 6.4.6. На Рис. 6.69 и Рис. 6.70 представлены результаты сравнения расчетных и измеренных значений нормированных взаимных активного и реактивного сопротивлений для двух пар цилиндров, имеющих разные волновые размеры.

Как видим, все результаты достаточно близки.

Можно сделать вывод, что на практике в большинстве случаев для расчета рассмотренных в этом разделе видов цилиндрических преобразователей можно использовать модель взаимодействия простых источников.

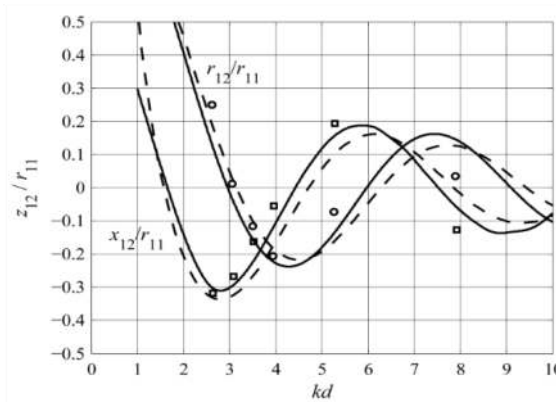


Рисунок 6.70: Сравнение нормированных взаимных сопротивлений излучения цилиндрических преобразователей, рассчитанных и измеренных в свободном пространстве: модель в жестком экране (сплошная линия), простые источники (штриховая линия), экспериментальные данные (кружки и квадратики). Волновые размеры цилиндров: $ka = 2.6$, $h/\lambda = 0,42$.

6.6.5 Методы измерения взаимных сопротивлений

6.6.5.1 Измерение взаимного сопротивления между двумя преобразователями в свободном поле Z методом

Рассмотрим два одновременно работающих преобразователя. Их эквивалентные схемы приведены на Рис. 6.62. Предположим, что преобразователи электромеханически идентичны. Все электромеханические параметры преобразователей, включая внутреннее механическое сопротивление Z_m^E , будем считать известными. В противном случае они могут быть определены посредством обычных измерений, выполняемых на ненагруженном преобразователе (в воздухе). Эквивалентные электромеханические схемы преобразователей приведем к форме, представленной на Рис. 6.71 (а), где механические ветви преобразованы на электрическую сторону.

На рисунке для преобразователей, пронумерованных 1 и 2, введены следующие обозначения: $C = C_m^E n^2$ для обоих преобразователей;

$$R_{\Sigma 1} = R_{11} + R_{12} + R_{mL}, \quad M_{\Sigma 1} = M + X_1 / \omega; \quad (6.374)$$

$$R_{\Sigma 2} = R_{11} + R_{21} + R_{mL}, \quad M_{\Sigma 2} = M + X_2 / \omega \quad (6.375)$$

для преобразователей номер 1 и 2, соответственно. В выражениях для масс

$$X_1 = X_{11} + X_{12}, \quad X_2 = X_{11} + X_{21}. \quad (6.376)$$

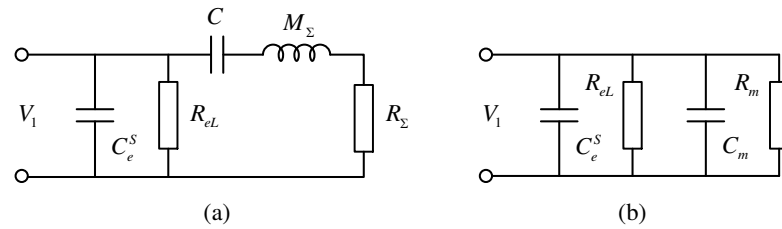


Рисунок 6.71: Эквивалентные схемы взаимодействующих преобразователей с механической ветвью, преобразованной на электрическую сторону: (а) с внутренним механическим (динамическим) сопротивлением и (б) после преобразования динамического сопротивления в проводимость.

Электрические аналоги акустических сопротивлений будем обозначать так же, как и их акустические аналоги, но без нижнего индекса «ас». Так, например, $Z_{il} = R_{il} + jX_{il}$ — электрический аналог акустического сопротивления Z_{acil} . Соотношение между акустическими сопротивлениями и их электрическими аналогами — $Z_{il} = Z_{acil} / n^2$.

Следует отметить, что нормированные вносимые сопротивления, определяемые на электрической стороне преобразователя, имеют те же значения, что и нормированные вносимые сопротивления на акустической стороне, а именно, $Z_{12} / R_{11} = Z_{ac12} / R_{ac11}$, и для оценки взаимных сопротивлений не обязательно знать их абсолютные значения в акустических единицах.

Величину собственного сопротивления излучения, обозначенного Z_{11} для обоих преобразователей, нельзя считать известной. Она отличается от величины сопротивления излучения одиночного преобразователя, измеренной в свободном пространстве, в силу присутствия взаимодействующего преобразователя. Более того, по определению собственное сопротивление излучения каждого из преобразователей следует определять при условии, что взаимодействующий преобразователь заторможен, т.е. в эквивалентных схемах на Рис. 6.62 (b) $U_2 = 0$ и $Z_{12} = z_{12} U_2 / U_1 = 0$.

Электрические аналоги акустических величин будем определять путем измерения входных сопротивлений преобразователей с помощью Анализатора Импеданса. Для интерпретации результатов измерения параметров преобразователя при этом удобно пользоваться электрической схемой преобразователя, приведенной на Рис. 6.71 (b), которая преобразована из схемы Рис. 6.71 (a) путем пересчета динамического сопротивления в проводимость.

На Рис. 6.71 (b) C_m это динамическая «емкость» преобразователя, которая на некоторых частотах может стать индуктивностью. Параметры схем, представленных на Рис. 6.71, связаны с результатами измерения компонентов полной проводимости преобразователя следующим образом:

$$R_{\Sigma i} = \frac{G_m}{(\omega C_m)^2 + G_m^2}, \quad X_{\Sigma i} = -\frac{\omega C_m}{(\omega C_m)^2 + G_m^2}, \quad (6.377)$$

где

$$X_{\Sigma i} = \omega M_{\Sigma i} [1 - (f_r / f)^2]. \quad (6.378)$$

При измерении в воздухе $M_{\Sigma i} = M = M_{eqv} / n^2$ и $f_r = f_a$. При измерении в воде $M_{\Sigma i} = M + X_i / \omega$ и $f_r = f_w$ (индексы *a* и *w* от *air* и *water*).

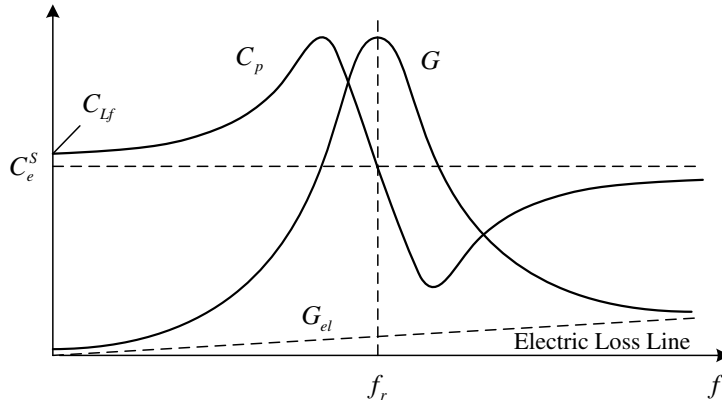


Рисунок 6.72: Типичный вид зависимостей входных параметров преобразователя от частоты.

Непосредственно с помощью Анализатора легко измерить величины полной проводимости $G = G_{eL} + G_m$ и параллельной емкости $C_p = C_e^S + C_m$ преобразователя. Типичные графики, по которым можно определить динамическую емкость C_m и проводимость G_m в зависимости от частоты, приведены на Рис. 6.72. На резонансной частоте $C_m = 0$ и $C_p = C_e^S$. Таким образом, емкость заторможенного преобразователя C_e^S можно считать известной. Если измерительный преобразователь имеет одну механическую степень свободы, эта величина также равна $C_e^S = C_{Lf} (1 - k_{eff}^2)$, где C_{Lf} и k_{eff} представляют собой емкость, измеренную на частоте много ниже резонанса, и эффективный коэффициент связи преобразователя. Динамическую проводимость $G_m = G_p - G_{eL}$ обычно можно найти как

показано на рисунке, хотя величина проводимости электрических потерь G_{eL} , как правило, намного меньше G_m и ею можно пренебречь.

Величины $C_m(f)$ и $G_m(f)$ представляют интерес в диапазоне частот около резонансной частоты. По результатам их измерений по формулам (6.377) и (6.378) могут быть рассчитаны значения $R_{\Sigma i}$ и $X_{\Sigma i}$. После этого с помощью соотношений (6.374) - (6.376) определим искомые значения собственных и взаимных сопротивлений излучения взаимодействующих преобразователей.

Далее для простоты продемонстрируем методику экспериментирования на резонансной частоте, поскольку в принципе это не меняет дела, а результаты при этом могут быть получены без сложных расчетов.

Для определения реактивной составляющей сопротивления излучения есть два альтернативных способа. Представим формулу (6.378) в виде

$$X_{\Sigma 1} = \omega M (1 - f_a^2 / f^2) + X_{11} + X_{12} = \omega (M + X_1 / \omega) (1 - f_w^2 / f^2). \quad (6.379)$$

Из уравнения (6.379) следует, что на частоте $f = f_w$

$$X_{11} + X_{12} = 2\pi f_w M (f_a^2 / f_w^2 - 1) = 2\pi M F(f_w), \quad (6.380)$$

где для краткости обозначено

$$F(f_w) = f_w (f_a^2 / f_w^2 - 1). \quad (6.381)$$

Принимая во внимание уравнения (6.379) и (6.377) найдем, что на частоте $f = f_a$

$$X_{11} + X_{12} = -\omega_a C_m(f_a) / \{[(\omega_a C_m(f_a))]^2 + G_m^2(f_a)\}. \quad (6.382)$$

Вспомнив, что $C_m(f_w) = 0$, из уравнения (6.377) найдем активную составляющую сопротивления излучения в форме

$$R_{\Sigma 1} = R_{11} + R_{12} + R_{mL} = 1 / G_m(f_w). \quad (6.383)$$

Чтобы определить все составляющие сопротивлений Z_{11} и Z_{12} , в дополнение к уравнениям (6.380) или (6.382) а так же (6.383) необходимо получить еще два уравнения. Для этого проведем следующие эксперименты.

Эксперимент I

(Обратите внимание, что нижние индексы в римских цифрах здесь и далее

соответствуют номеру эксперимента.)

Измерим входное сопротивление одного из преобразователей, подавая при этом на оба равные напряжения $V_2 = V_1$. В этом случае $U_1 = U_2$ и в силу симметрии $Z_{ac12} = z_{ac12}$. На резонансной частоте преобразователя f_{wl} , измеренной в воде, в соответствии с формулами (6.380) и (6.383) получим

$$R_{11} + r_{12} + R_{mL} = 1 / G_{mI} \quad (6.384)$$

и
$$X_{ac11} + x_{ac12} = 2\pi M F_I . \quad (6.385)$$

В уравнениях (6.384) и (6.385) обозначены

$$G_{mI} = G_m(f_{wl}), \quad F_I = F(f_{wl}) . \quad (6.386)$$

Эксперимент II

Измерим входное сопротивление одного из преобразователей при том, что напряжения приложенные к обоим равны по величине и противоположны по фазе, $V_2 = -V_1$. В этом эксперименте $U_2 = -U_1$ и $Z_{ac12} = -z_{ac12}$. На резонансной частоте f_{wII}

$$R_{11} - r_{12} + R_{mL} = 1 / G_{mII} \quad (6.387)$$

и

$$X_{ac11} - x_{ac12} = 2\pi M F_{II} . \quad (6.388)$$

Объединив результаты измерений, выраженные формулами (6.384) и (6.387), получим

$$R_{11} + R_{mL} = (G_{mI} + G_{mII}) / 2G_{mI}G_{mII} \quad (6.389)$$

и

$$r_{12} = (G_{mI} - G_{mII}) / 2G_{mI}G_{mII} . \quad (6.390)$$

Заметим, что у правильно спроектированных преобразователей, предназначенных для исследования акустических взаимодействий, сопротивление механических потерь R_{mL} должно быть значительно меньше активного сопротивления излучения и его величиной можно пренебречь (по крайней мере, именно такие преобразователи следует выбирать для исследования акустического взаимодействия). В противном случае

сопротивление потерь можно определить отдельно, измерив активную проводимость $G_m = 1/R_{mL}$ в воздухе. После этого примечания сопротивлением механических потерь в дальнейшем будем для краткости пренебрегать. Таким образом, из уравнений (6.389) и (6.390) следует, что

$$r_{12} / R_{12} = (G_{ml} - G_{mll}) / (G_{ml} + G_{mll}). \quad (6.391)$$

А из уравнений (6.385) и (6.388) следует, что

$$X_{11} = \pi M (F_I + F_{II}), \quad (6.392)$$

$$x_{12} = \pi M (F_I - F_{II}), \quad (6.393)$$

и

$$x_{12} / X_{11} = (F_I - F_{II}) / (F_I + F_{II}). \quad (6.394)$$

Для того чтобы пользоваться формулами (6.392) и (6.393) рассчитать абсолютные значения реактивного сопротивления, необходимо знать величину эквивалентной массы преобразователя. Поэтому может оказаться выгоднее для этой цели применить формулу (6.382), хотя внешне она выглядит более сложной. В этом случае все величины, необходимые для расчета, можно получить экспериментальным путем.

На практике оба эксперимента могут быть произведены путем измерения входного сопротивления преобразователей при их соединении синфазно и в противофазе, соответственно.

Поскольку Z метод определения сопротивлений излучения основан на их сравнении с внутренним сопротивлением измерительного преобразователя, полученные результаты оказываются менее точными, если отношение измеряемых составляющих сопротивления излучения к соответствующим параметрам сравнения преобразователя невелико. Ситуация становится особенно критической для определения реактивных сопротивлений, которые приходится сравнивать с большой величиной ωM_{eqv} . Положение может быть несколько улучшено, если в качестве измерительных выбрать преобразователи с меньшей массой. Так, например, в цилиндрическом преобразователе лучше применять более тонкие кольца.

Однако, с целью увеличения точности измерения взаимных сопротивлений

рассматриваемая экспериментальная методика может быть усовершенствована более радикально. Предположим, что при измерении входного сопротивления одного из преобразователей на другой подано большее напряжение $V_2 \gg V_1$. Качественно понятно, что при этом должно быть $U_2 \gg U_1$, а значит $Z_{ac12} \gg z_{ac12}$. Увеличенное значение Z_{12} может быть измерено с большей точностью. Но для того, чтобы вычислить величину z_{12} из полученных таким образом результатов, необходимо знать точное значение соотношения скоростей колебаний преобразователей $U_2 / U_1 = K_U$. Особенность состоит в том, что вносимые сопротивления в механических ветвях эквивалентных схем на Рис. 6.62 становятся разными, а именно, $Z_{ac21} = Z_{ac12} / K_U^2$. Поэтому $U_2 / U_1 \neq V_2 / V_1$, и значение K_U необходимо определять особо. Для этого предложим следующий эксперимент.

Эксперимент III

Измерение взаимного сопротивления между двумя преобразователями при условии, что подаваемые на них напряжения синфазны, но имеют разную величину и $V_2 \gg V_1$. Собственное сопротивление излучения преобразователя можно считать известным после выполнения экспериментов I и II (см. формулы (6.389) и (6.392)). Составляющие вносимого сопротивления $Z_{12} = z_{12} K_U$ определим, выполнив те же процедуры, что и в эксперименте I. А именно, на резонансной частоте f_{wIII} получим

$$R_{11} + R_{12} = 1 / G_{mIII} , \quad (6.395)$$

и

$$X_{11} + X_{12} = 2\pi M F_{III} . \quad (6.396)$$

Рассматривая выражения (6.389) и (6.392) для R_{11} и X_{11} (напомним, что сопротивлением R_{mL} мы пренебрегаем), найдем что

$$R_{12} = 1 / G_{mIII} - (G_{mI} + G_{mII}) / 2G_{mI}G_{mII} , \quad (6.397)$$

и

$$X_{12} = \pi M (2F_{III} - F_I - F_{II}) . \quad (6.398)$$

После этого следует определить активное и реактивное взаимные сопротивления, воспользовавшись соотношением

$$r_{12} + jx_{12} = (R_{12} + jX_{12}) / K_U . \quad (6.399)$$

Для этого предстоит найти отношение скоростей колебаний K_U . Блок схема одной из возможных установок для выполнения эксперимента III и определения K_U приведена на Рис. 6.73.

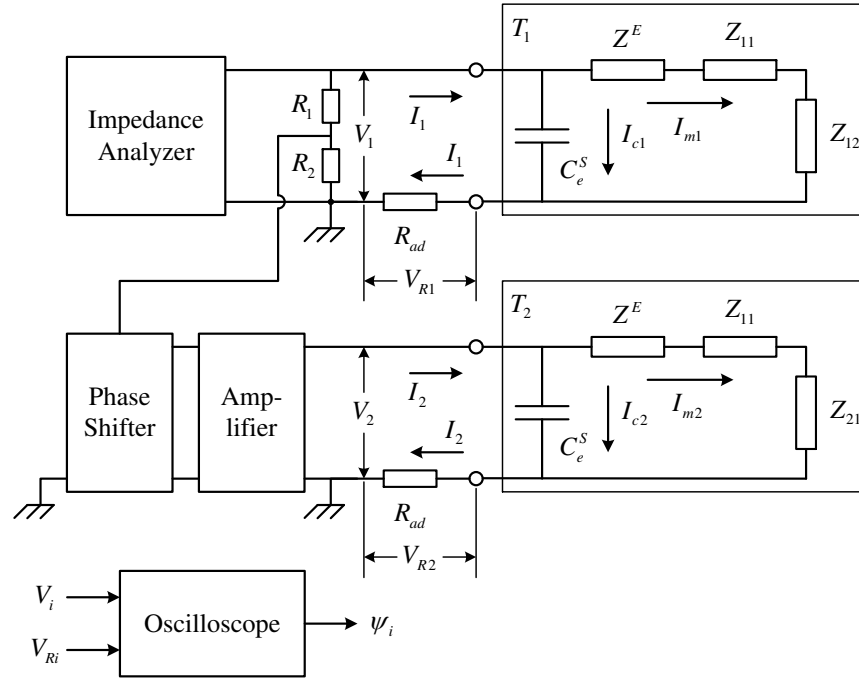


Рисунок 6.73: Блок схема экспериментальной установки для измерения взаимных сопротивлений Z методом в общем случае, при котором на взаимодействующие преобразователи могут быть поданы разные напряжения. В схемах преобразователей $Z^E = Z_m^E / n^2$.

В нее включены также эквивалентные схемы взаимодействующих преобразователей с их механическими ветвями, преобразованными на электрическую сторону. Чтобы исключить влияние делителя напряжения на результаты измерения сопротивления преобразователя, должно быть выполнено условие $(R_1 + R_2) \gg |Z_{input}|$.

Токи, протекающие через преобразователи, обозначены на Рис. 6.73 следующим образом: I_i — суммарный ток через преобразователь i ($i = 1, 2$), I_{C_i} — ток через заторможенный преобразователь и I_{m_i} — ток через электрический аналог механической ветви. Ток I_{m_i} пропорционален скорости колебаний механической системы $I_{m_i} = n U_i$, поэтому

$$K_U = U_2 / U_1 = I_{m2} / I_{m1} . \quad (6.400)$$

Таким образом, отношение скоростей колебаний можно определить

экспериментально, как отношение токов I_{m2} и I_{m1} . Полный ток через преобразователь

$$I_i = I_{Ci} + I_{mi} \quad (6.401)$$

можно измерить, как показано на Рис. 6.73. А именно

$$I_i = V_{Ri} / R_{ad}, \quad (6.402)$$

где V_{Ri} — напряжение на известном дополнительном сопротивлении R_{ad} , соединенном последовательно с преобразователем. Чтобы не изменять напряжение, подводимое к преобразователю, должно быть $R_{ad} \ll |Z_{input}|$. Одновременно необходимо измерять фазовый угол между полным током (или напряжением V_{Ri}) и приложенным напряжением V_i . Обозначим этот угол

$$\arg(V_{Ri} / V_i) = \psi_i. \quad (6.403)$$

Как предположено, преобразователи электромеханически идентичны и их параметры предварительно определены. Поэтому можно считать емкости заторможенных преобразователей известными и равными, $C_{e1}^s = C_{e2}^s$. Если же емкости несколько различны, их можно уравнивать, добавив необходимую емкость параллельно преобразователю с меньшим значением C_e^s . Таким образом, токи через емкости равны

$$I_{Ci} = j\omega C_e^s V_i. \quad (6.404)$$

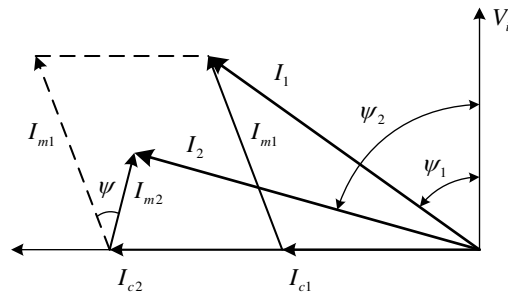


Рисунок 6.74: Векторная диаграмма для определения токов I_{mi}

После того, как токи I_i и I_{Ci} стали известны, токи I_{mi} могут быть определены с помощью векторной диаграммы, приведенной на Рис. 6.74. (Напомним, что в этом эксперименте напряжения, подаваемые на преобразователи, синфазны.)

Зная I_{m2} и I_{m1} , получим искомое отношение скоростей колебаний преобразователей

$$K_U = I_{m2} / I_{m1} = |I_{m2} / I_{m1}| e^{j\psi}, \quad (6.405)$$

где ψ — фазовый угол между векторами I_{m2} и I_{m1} . (Для повышения точности расчета токов I_{mi} по результатам измерения суммарных токов, в принципе, емкостные проводимости $1/\omega C_{ei}^s$ можно компенсировать на частоте измерения с помощью параллельных индуктивностей. В этом случае $I_{mi} = I_i$, хотя и ценой усложнения процедуры.)

При известном значении K_U составляющие взаимного сопротивления r_{12} и x_{12} получим из уравнения (6.399) в виде

$$r_{12} = (R_{12} \cos \psi + X_{12} \sin \psi) \left| \frac{I_{m1}}{I_{m2}} \right|, \quad (6.406)$$

$$x_{12} = (X_{12} \cos \psi - R_{12} \sin \psi) \left| \frac{I_{m1}}{I_{m2}} \right|. \quad (6.407)$$

Поскольку напряжения V_2 и V_1 синфазны, вполне вероятно, что сдвиг фазы ψ невелик и $\cos \psi \cong 1$, $\sin \psi \cong 0$. При этом

$$r_{12} \cong R_{12} / K_U, \quad x_{ac12} \cong X_{ac12} / K_U, \quad (6.408)$$

где R_{12} и X_{ac12} определены формулами (6.397) и (6.398).

Ранее было отмечено, что результаты измерений вносимых реактивных сопротивлений менее точны, чем полученные для вносимых активных сопротивлений. Точность этих измерений может быть существенно увеличена следующим образом. Как это следует из соотношения (6.407), реактивное взаимное сопротивление превращается во вносимое активное, если осуществить сдвиг фаз $\psi = -\pi/2$ между скоростями колебаний U_2 и U_1 , а именно, $R_{12} = x_{12} |U_2 / U_1|$. Таким образом, взаимное реактивное сопротивление становится вносимым активным, измерение которого отличается большей точностью.

Необходимый сдвиг фазы между скоростями колебаний получим, подав на преобразователи напряжения в квадратуре,

$$V_2 = jV_1. \quad (6.409)$$

Некоторый дополнительный сдвиг фазы между скоростями U_2 и U_1 , приводящий к менее точному приближению к сдвигу в 90° , может происходить из-за не равной акустической нагрузки преобразователей вносимыми сопротивлениями. В измерительной

схеме на Рис. 6.74 присутствует фазовращатель, с помощью которого эта неточность сдвига фаз между скоростями, а значит между токами I_{m2} и I_{m1} , может быть ликвидирована. После того, как это сделано, процедура измерения вносимого сопротивления R_{12} и, следовательно, определение взаимного реактивного сопротивления $x_{12} = R_{12} / |K_U|$ та же, что и в эксперименте III.

Экспериментальные данные, приведенные на Рис. 6.69 и Рис. 6.70 для системы из двух коаксиально ориентированных цилиндрических преобразователей в свободном пространстве, были получены с помощью Z метода.

6.6.5.2 Измерение взаимных сопротивлений V методом

Возвращаясь к эквивалентным схемам, приведенным на Рис. 6.62 (b), получим следующие соотношения между выходным напряжением V_2 преобразователя №2 и скоростью колебаний U_1 преобразователя №1 в зависимости от положения переключателя "ос" или "sc" (разомкнутый и коротко замкнутый выход):

$$V_{2oc} = z_{ac21} U_1 n / j\omega C_e^s (Z_{moc}^E + Z_{ac11}), \quad (6.410)$$

$$V_{2sc} = I_{m2} R = z_{ac21} U_1 n / (Z_m^E + Z_{ac11}). \quad (6.411)$$

В этих соотношениях: $Z_{moc}^E = Z_m^E + n^2 / j2\pi f C_e^s$ — механическое сопротивление преобразователя с разомкнутым выходом; $R \ll 1 / \omega C_e^s$; I_{m2} — ток на выходе преобразователя №2, замкнутом на сопротивление R. Поскольку $I_{m2} = U_2 n$, уравнение (6.411) можно записать в виде

$$z_{ac21} / (Z_m^E + Z_{ac11}) = I_{m2} R / I_{m1} = V_{sc} / I_{m1}. \quad (6.412)$$

Процедура определения величины тока I_{m1} описана в эксперименте III и поэтому ее можно считать известной при определении взаимного сопротивления z_{ac21} из уравнения (6.412). Взаимное сопротивление может быть найдено из этого уравнения в полосе частот вокруг резонансной частоты. Для этого должны быть известны параметры преобразователя в полосе частот, включая собственное сопротивление излучения Z_{ac11} , которое можно считать известным в результате измерений по Z методу.

На резонансной частоте f_a преобразователя в воздухе $Z_m^E \cong 0$ и уравнение (6.412) приобретает вид

$$(z_{ac21} / Z_{ac11})_{f_a} = (V_{sc} / I_{m1})_{f_a} . \quad (6.413)$$

На частотах ниже резонансной частоты, на которых механическую систему преобразователя можно рассматривать как управляемую жесткостью ($Z_m^E \cong 1 / j2\pi f C_m^E$, $Z_{ac11} \ll Z_m^E$, $z_{ac21} \ll Z_m^E$), из уравнения (6.410) получаем

$$z_{ac21} = (V_{2oc} / V_1) [(1 - k_{eff}^2) / j2\pi f C_m^E k_{eff}^2] . \quad (6.414)$$

Здесь принято, что $n^2 C_m^E / C_e^s = k_{eff}^2 / (1 - k_{eff}^2)$. После того, как измерено отношение

$$V_{2oc} / V_1 = |V_{2oc} / V_1| e^{j\psi_{1oc,2}} , \quad (6.415)$$

где $\psi_{1oc,2}$ — фазовый угол между напряжениями, как активную, так и реактивную составляющие взаимного сопротивления можно определить из уравнения (6.414).

Блок-схема экспериментальной установки для реализации V метода приведена на Рис. 6.75.

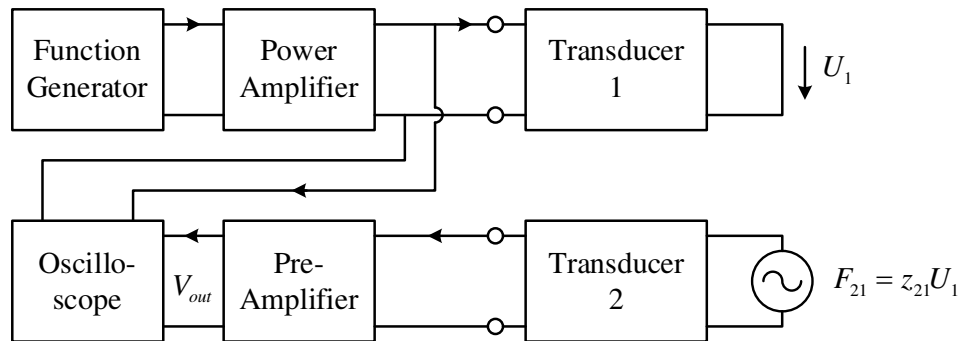


Рисунок 6.75: Блок-схема экспериментальной установки для реализации V метода.

V метод особенно выгоден для оценки относительного изменения взаимного сопротивления в зависимости от расстояния между преобразователями. Предположим, что напряжение, приложенное к излучающему преобразователю №1, остается постоянным ($V_1 = \text{const}$), исходное расстояние между преобразователями d , и выходные напряжения преобразователя №2 измерены при переменных расстояниях y между ними. При этом из выражений (6.413) и (6.414) следует, что на резонансной частоте

$$|z_{ac21} / Z_{ac11}|_y / |z_{ac21} / Z_{ac11}|_d = |V_{2sc} / I_{m1}|_y / |V_{2sc} / I_{m2}|_d \quad (6.416)$$

и на частотах ниже резонанса

$$|z_{ac21}(y)| / |z_{ac21}(d)| = |V_{2oc}(y)| / |V_{2oc}(d)| . \quad (6.417)$$

Важной особенностью V метода является то, что он позволяет применять для исследования взаимных сопротивлений излучения измерительные преобразователи, работающие намного ниже их резонансной частоты. Единственное требование состоит в том, что конфигурация излучающих поверхностей измерительных преобразователей должна быть такой же, как конфигурация преобразователей, для которых предназначены результаты исследования.

Методы Z и V можно рассматривать как дополняющие друг друга. Z метод дает возможность определять абсолютные значения собственных и взаимных сопротивлений излучения на частотах, близких к резонансу преобразователей. V методом можно производить измерения в диапазоне частот ниже резонансной частоты измерительных преобразователей, применяемых для исследования взаимных сопротивлений. Но этот метод имеет недостатки при применении для измерения абсолютных значений сопротивлений излучения вблизи резонансных частот. Более того, для реализации V метода на этих частотах собственное сопротивление излучения преобразователя должно быть известно заранее.

6.6.5.3 Определение взаимных сопротивлений между преобразователями в антенне.

Типичные примеры конфигураций преобразователей и антенн, для которых единственным разумным способом определения взаимных сопротивлений между преобразователями является экспериментирование, представлены на Рис. 6.76. Экспериментальные методы исследования акустического взаимодействия в подобных случаях рассмотрены в работе [27]. Здесь представлены основные результаты этой работы.

Описанные выше методы измерения взаимных сопротивлений излучения между двумя преобразователями в свободном пространстве нельзя напрямую применить к аналогичным измерениям в антенне. При измерении в антенне приходится иметь дело с несколькими одновременно колеблющимися преобразователями, хотя интерес представляет взаимодействие только между двумя из них.

В силу общего свойства взаимных сопротивлений уменьшаться с увеличением разнесения между преобразователями, вкладом достаточно удаленных преобразователей в результаты измерений двух исследуемых можно пренебречь, и достаточным оказывается

рассматривать только часть антенны. Так, например, в антенне преобразователей, схематично представленной на Рис. 6.76,

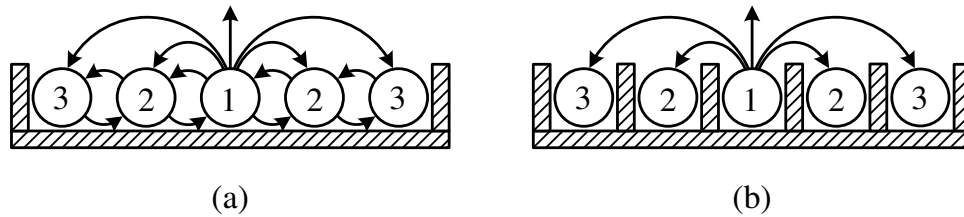


Рисунок 6.76: Примеры конфигураций фрагментов антенн, для которых необходимо определить взаимные сопротивления излучения между преобразователями: (а) с параллельными цилиндрическими преобразователями, работающими на изгибных (включая кольцо с разрезом) или продольных колебаниях; (б) с экранами, установленными между преобразователями.

цель - определять взаимные сопротивления между преобразователями z_{ac21} , z_{ac31} и далее до тех пор, пока взаимное сопротивление не достигнет уровня, который можно считать незначительным, т.е. пока отношение $|z_{acil}|/|z_{acil}|$ не станет достаточно малым. При этом количество преобразователей, которое можно считать представительным для проведения измерений, можно ограничить группой i элементов антенны с каждой стороны от центрального преобразователя № 1. Для проведения такого исследования наиболее удобно воспользоваться V методом измерений взаимных сопротивлений в диапазоне частот ниже резонансной частоты измерительных преобразователей. Ограничения этого метода вытекают из того, что на практике нас интересуют значения взаимных сопротивлений в частотном диапазоне вокруг резонансной частоты фактических преобразователей в антенне. Поэтому измерительные преобразователи, имеющие излучающую поверхность той же формы, что и фактические преобразователи, должны иметь более высокую резонансную частоту.

Что касается антенн преобразователей с плоскими излучающими поверхностями (такими, например, как стержневые или изгибные пластинчатые преобразователи), то размер их поверхности может не зависеть от резонансной частоты преобразователя. В случае если антенна состоит из кольцевых преобразователей, диаметр излучающей поверхности обратно пропорционален резонансной частоте. Поэтому результаты, полученные

ниже резонансной частоты измерительного преобразователя, можно применить к фактическому преобразователю в диапазоне частот вокруг его резонанса только в том случае, если резонансная частота измерительного преобразователя выше. Таким образом, результаты, полученные ниже резонанса измерительных преобразователей из PZT керамики, можно использовать для кольцевых преобразователей, изготовленных из материала с меньшей скоростью звука.

Поскольку в диапазоне частот ниже резонансной частоты измерительных преобразователей их механические системы можно рассматривать как управляемые жесткостью, то $Z_m^E \approx 1/j\omega C_m^E$ и по сравнению с этим сопротивлением всеми сопротивлениями излучения можно пренебречь. Влияние взаимодействия между преобразователем №1 и преобразователями №2 и №3 представим силами $F_{ac12} = 2z_{ac12}U_2$ и $F_{ac13} = 2z_{ac13}U_3$, внесенными в их эквивалентные схемы. (Заметьте, что при этом симметричные относительно преобразователя №1 одноименные преобразователи соединены параллельно.) После этого предположим, что центральный преобразователь №1 переведен в режим приема, а напряжения подаются попеременно на пары преобразователей №2 и №3.

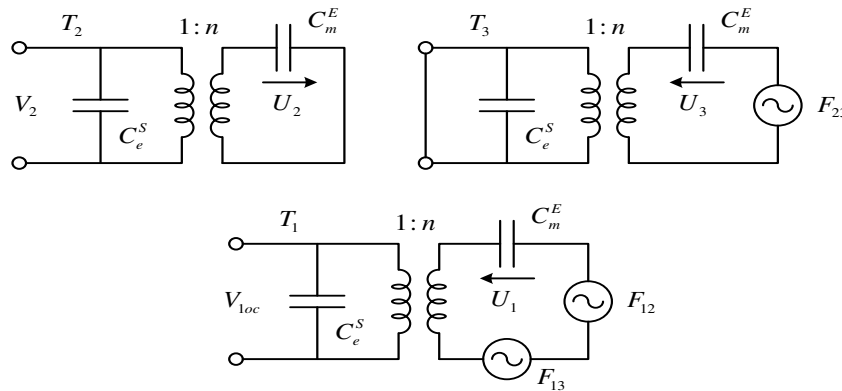


Рисунок 6.77: К применению V метода для определения взаимных сопротивлений между преобразователями в антенне

Применение V метода выглядит следующим образом. Подаем напряжение V_2 на преобразователь №2. Вход преобразователя №3 коротко замкнут. Измеряем выходное напряжение V_{1oc} преобразователя №1. Из эквивалентных схем, представленных на Рис. 6.77, получим соотношения

$$U_2 = V_2 n j\omega C_m^E, \quad U_3 = z_{ac12} U_2 j\omega C_m^E. \quad (6.418)$$

После подстановки значений скоростей U_2 и U_3 в выражения для сил F_{ac12} и F_{ac13} , получим выражение для суммарной акустической силы, действующей на преобразователь № 1,

$$F_{ac1} = F_{ac12} + F_{ac13} = 2z_{ac12} \left[1 + z_{ac13} j\omega C_m^E \right] j\omega C_m^E n V_2. \quad (6.419)$$

Вторым членом в скобках можно пренебречь, потому что взаимное сопротивление излучения намного меньше $1/j\omega C_m^E$. С этого момента анализ аналогичен анализу с помощью V метода для двух преобразователей в свободном пространстве. В результате приходим к следующим выражениям для акустической силы F_{ac1} , напряжения на выходе преобразователя № 1 под действием этой силы и взаимного сопротивления между преобразователями 1 и 2:

$$F_{ac1} = 2z_{ac12} j\omega C_m^E n V_2, \quad (6.420)$$

$$(V_{loc})_2 = 2z_{ac12} j\omega C_m^E V_2 k_{eff}^2 / (1 - k_{eff}^2), \quad (6.421)$$

$$z_{ac12} = [(V_{loc})_2 / V_2] (1 - k_{eff}^2) / j2k_{eff}^2 \omega C_m^E. \quad (6.422)$$

Для определения взаимного сопротивления z_{i3} следует: напряжение V_3 подать на преобразователь № 3, выход преобразователей № 2 замкнуть и измерять напряжение на выходе преобразователя № 1. Применяв точно такую же процедуру, как и в предыдущем случае, получим выражение для взаимного сопротивления z_{ac13} , аналогичное выражению (6.422), а именно:

$$z_{ac13} = [(V_{loc})_3 / V_3] (1 - k_{eff}^2) / j2k_{eff}^2 \omega C_m^E. \quad (6.423)$$

На основании формул (6.422) и (6.423) можно сделать общий вывод о том, что если на последовательные (с № i) преобразователи подавать равные напряжения и при этом измерять напряжения $(V_{loc})_i$ на выходе преобразователя №1, то получим

$$|z_{ac1i}| / |z_{ac12}| = |(V_{loc})_i| / |(V_{loc})_2|. \quad (6.424)$$

Это соотношение дает оценку сравнительного вклада взаимных сопротивлений между преобразователями в антенне в общее сопротивление излучения одного преобразователя, в то время как формулы типа (6.420) и (6.421) удобно использовать для определения составляющих взаимных сопротивлений.

Для определения собственных и взаимных сопротивлений излучения преобразователей в антенне в полосе частот вокруг резонансной частоты можно использовать Z метод. Предположим, что все рассматриваемые преобразователи расположены внутри антенны и поэтому имеют равные собственные сопротивления излучения. Преобразователи, расположенные по краям антенны, как правило, имеют отличающиеся сопротивления излучения. Это может привести к дополнительной ошибке при определении взаимных сопротивлений. Чтобы избежать «краевого эффекта» и обеспечить примерное равенство собственных сопротивлений излучения измерительных преобразователей, к группе преобразователей, выбранных для измерений, с каждой стороны следует добавить еще, по крайней мере, по одному преобразователю, не предназначенному для активного участия в процедуре измерений. Таким образом, для моделирования реальной ситуации в антенне с точки зрения взаимодействия между соседними преобразователями можно использовать только ограниченный фрагмент антенны. Сохраняется требование идентичности электромеханических свойств преобразователей.

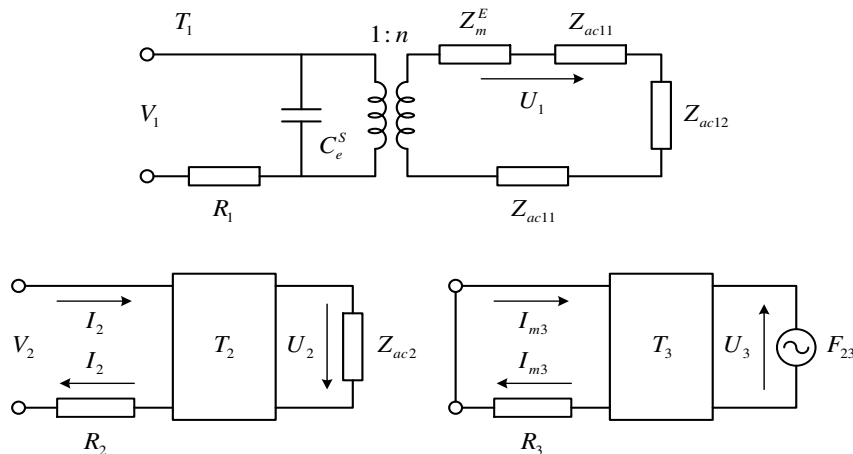


Рисунок 6.78: К применению Z метода для измерения взаимных сопротивлений в антенне

Величины Z_{ac11} , z_{ac12} и z_{ac13} можно определить путем измерения сопротивления на входе преобразователя №1. Эквивалентная схема этого преобразователя, в которой влияние взаимодействия с преобразователями №2 и №3 учтено вносимыми сопротивлениями $Z_{ac12} = 2z_{ac12} U_2 / U_1$ и $Z_{ac13} = 2z_{ac13} U_3 / U_1$, представлена на Рис. 6.78. Для определения требуемых сопротивлений излучения рассмотрим следующие эксперименты.

Эксперимент Ia

На преобразователи №1 и №2 синфазно приложены напряжения V_1 и V_2 такие, что $|V_2| \gg |V_1|$. Выходы преобразователей №3 замкнуты на небольшое сопротивление R_3 . Под действием силы акустического происхождения $F_{32} = z_{ac12}U_2$ через электрическую сторону преобразователя №3 течет ток $I_{m3} = U_3n$. Как следует из эквивалентной схемы, приведенной на Рис. 6.78, при $R_3 \ll 1/\omega C_e^S$

$$I_{m3} = V_{R_3} / R_3, \quad (6.425)$$

где V_{R_3} — напряжение на сопротивлении R_3 . Сопротивление излучения преобразователя №1 получим в виде

$$Z_{ac1a} = Z_{ac11} + 2z_{ac12}(U_2/U_1)_{1a} + 2z_{ac13}(U_3/U_1). \quad (6.426)$$

На электрической стороне преобразователей соотношения скоростей можно заменить соотношениями токов I_{mi} . При этом $U_2/U_1 = I_{m2}/I_{m1}$ и $U_3/U_1 = I_{m3}/I_{m1}$. Представим отношение токов I_{mi} в виде

$$I_{mi}/I_{m1} = |I_{mi}/I_{m1}| e^{j\psi_{li}}, \quad (6.427)$$

где ψ_{li} — сдвиг фаз между токами. Так же, как и в эксперименте I, получим следующие уравнения, аналогичные уравнениям (6.384) и (6.385) на частоте резонанса преобразователя №1 в воде, которую в этом эксперименте обозначим f_{w1a} :

$$R_{\Sigma 1a} = R_{11} + 2\operatorname{Re}\{z_{12}|I_{m2}/I_{m1}|_{1a} e^{j(\psi_{12})_{1a}} + z_{13}|I_{m3}/I_{m1}|_{1a} e^{j(\psi_{13})_{1a}}\} = 1/G_{m1a}, \quad (6.428)$$

$$X_{\Sigma 1a} = X_{11} + 2\operatorname{Im}\{z_{12}|I_{m2}/I_{m1}|_{1a} e^{j(\psi_{12})_{1a}} + z_{13}|I_{m3}/I_{m1}|_{1a} e^{j(\psi_{13})_{1a}}\} = 2\pi MF_{1a}. \quad (6.429)$$

Величины полного входного активного сопротивления $R_{\Sigma 1a}$, резонансной частоты f_{w1a} и токов I_{m1} , I_{m2} могут быть измерены с помощью экспериментальной установки, представленной на Рис. 6.74, и процедуры, описанной в эксперименте III. Величину тока I_{m3} найдем по формуле (6.425) после того, как измерена величина напряжения V_{R_3} .

Для того чтобы получить уравнения, необходимые для расчета всех сопротивлений излучения, потребуется провести еще несколько экспериментов.

Эксперимент II а

На преобразователи № 2 подано в противофазе напряжение V_2 той же величины, что и в эксперименте I а, а преобразователи №3 остаются замкнутыми на небольшое сопротивление R_3 . Так как $V_1/V_2 \ll 1$ и, следовательно, $U_1/U_2 \ll 1$, вносимыми сопротивлениями

$$Z_{ac21} = z_{ac12} U_1 / U_2, \quad Z_{ac23} = z_{ac12} U_3 / U_2 \quad (6.430)$$

в эквивалентной схеме преобразователя №2 можно пренебречь по сравнению с его собственным сопротивлением излучения. Таким образом, можно сделать вывод, что $(U_2)_{IIa} \cong -(U_2)_{Ia}$. Поскольку $U_3 \sim z_{ac12} U_2$, то из этого следует, что и $(U_3)_{IIa} \cong -(U_3)_{Ia}$. В результате получим, что

$$(I_{m2})_{IIa} \cong -(I_{m2})_{Ia}, \quad (I_{m3})_{IIa} \cong -(I_{m3})_{Ia}. \quad (6.431)$$

Токи $(I_{m1})_{Ia}$ и $(I_{m1})_{IIa}$ имеют разные величины, но синфазны с напряжением V_1 на частоте резонанса. Поэтому можно сделать вывод, что

$$(\psi_{12})_{Ia} \cong (\psi_{12})_{IIa}, \quad (\psi_{13})_{Ia} \cong (\psi_{13})_{IIa}. \quad (6.432)$$

Учитывая соотношения (6.431) и (6.432), величины входного активного и реактивного сопротивлений излучения преобразователя №1 на частоте резонанса f_{wIIa} представим в виде

$$R_{\Sigma IIa} = R_{11} - 2 \operatorname{Re} \{ z_{12} |I_{m2}|_{Ia} e^{j(\psi_{12})_{Ia}} / |I_{m1}|_{IIa} + z_{13} |I_{m3}|_{Ia} e^{j(\psi_{13})_{Ia}} / |I_{m1}|_{IIa} \} = 1 / G_{mIIa}, \quad (6.433)$$

$$X_{\Sigma IIa} = X_{11} - 2 \operatorname{Im} \{ z_{12} |I_{m2}|_{Ia} e^{j(\psi_{12})_{Ia}} / |I_{m1}|_{IIa} + z_{13} |I_{m3}|_{Ia} e^{j(\psi_{13})_{Ia}} / |I_{m1}|_{IIa} \} = 2\pi M F_{IIa}. \quad (6.434)$$

После умножения уравнений (6.428) и (6.433) на $|I_{m1}|_{Ia}$ и $|I_{m1}|_{IIa}$, соответственно, и суммирования и вычитания полученных результатов, найдем, что

$$R_{11} = (R_{\Sigma Ia} |I_{m1}|_{Ia} + R_{\Sigma IIa} |I_{m1}|_{IIa}) / (|I_{m1}|_{Ia} + |I_{m1}|_{IIa}), \quad (6.435)$$

$$\begin{aligned} & 4 \operatorname{Re} \{ z_{12} |I_{m2}|_{Ia} e^{j(\psi_{12})_{Ia}} + z_{13} |I_{m3}|_{Ia} e^{j(\psi_{13})_{Ia}} \} = \\ & = R_{\Sigma Ia} |I_{m1}|_{Ia} - R_{\Sigma IIa} |I_{m1}|_{IIa} - R_{11} (|I_{m1}|_{Ia} - |I_{m1}|_{IIa}). \end{aligned} \quad (6.436)$$

Аналогично, с помощью уравнений (6.429) и (6.434) получим

$$X_{11} = 2\pi M (F_{Ia} |I_{m1}|_{Ia} + F_{IIa} |I_{m1}|_{IIa}) / (|I_{m1}|_{Ia} + |I_{m1}|_{IIa}), \quad (6.437)$$

$$\begin{aligned}
& 4 \operatorname{Im} \{ z_{12} |I_{m2}|_{Ia} e^{j(\psi_{12})_{Ia}} + z_{13} |I_{m3}|_{Ia} e^{j(\psi_{13})_{Ia}} \} = \\
& = 2\pi M [F_{Ia} |I_{m1}|_{Ia} - F_{IIa} |I_{m1}|_{IIa}] - X_{11} (|I_{m1}|_{Ia} - |I_{m1}|_{IIa}).
\end{aligned} \tag{6.438}$$

Таким образом, собственное сопротивление излучения преобразователей можно рассчитать по уравнениям (6.435) и (6.437). Для определения четырех составляющих взаимных сопротивлений в дополнение к уравнениям (6.436) и (6.438) требуется еще 2 уравнения. Чтобы их получить, можно провести следующие эксперименты: эксперимент III *a*, в котором напряжение $V_3 \gg V_1$ приложено к преобразователям №3, а преобразователи №2 замкнуты на малое сопротивление; и эксперимент IV *a*, в котором напряжение той же величины приложено к преобразователям №3 в противофазе к напряжению V_1 . Два недостающих уравнения, аналогичных уравнениям (6.436) и (6.438), получим, повторив такую же процедуру, что и в экспериментах I *a* и II *a*. Вполне можно ожидать, что углы ψ_{12} и ψ_{13} малы на частоте резонанса преобразователя №1, на которой производятся измерения. В этом случае $\sin \psi_{1i} \approx 0$, $\cos \psi_{1i} \cong 1$ и уравнения типа (6.436) и (6.438) значительно упрощаются.

Следует отметить, что примененные для определения взаимных сопротивлений излучения эксперименты и сопутствующие им расчеты не обладают очень большой точностью. Но прецизионной точности в определении взаимных сопротивлений часто не требуется, поскольку они составляют только часть собственного сопротивления излучения преобразователя.

6.7 Литература

40. L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, 4th edn. (John Wiley & Sons, New York, 2000)
41. A. D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications* (Published by the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics, Woodbury, 1994)
42. P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Part I (McGraw-Hill, New York, 1953)
43. P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics* (McGraw-Hill, New York, 1968)
44. *Справочник по математическим функциям*, под редакцией М. Абрамовица и И. А. Стиган, - М.: Наука, 1979.
45. G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995)
46. М. И. Карповский, В. Г. Лозовик, "Акустическое поле бесконечного круглого цилиндрического излучателя со сложными граничными условиями на поверхности". *Сов. Физ. Акуст.* **10**(3), 265–268 (1965)
47. J. L. Butler, "Solution of acoustical-radiation problems by boundary collocation". *J. Acoust. Soc. Am.* **48**, 325–335 (1970)
48. Е. Л. Шендеров, *Волновые задачи в гидроакустике*, Л., Судостроение, 1972
49. D. H. Robey, "On the radiation impedance of an array of finite cylinders". *J. Acoust. Soc. Am.* **27**, 706–710 (1955)
50. D. P. Laird, H. Cohen, "Directionality patterns for acoustic radiation from a source on a rigid cylinder". *J. Acoust. Soc. Am.* **24**, 46–49 (1952)
51. J. L. Butler, A. L. Butler, "Fourier series solution for the radiation impedance of a finite cylinder". *J. Acoust. Soc. Am.* **104**(5), 2773–2778 (1998)
52. В. А. Козырев, Е. Л. Шендеров, "Сопротивление излучения цилиндра конечной высоты", *Акуст. журнал*, Т. 26, №3, 422–430, 1980

53. В. А. Козырев, Е. Л. Шендеров, "Сопrotивление излучения цилиндра с акустически мягкими торцами", *Акуст. журнал*, Т. 27, №3, 449–451, 1981
54. Е. Л. Шендеров, *Излучение и рассеяние звука*, Судостроение, Ленинград, 1989.
55. C. L. Bachand, *Electroacoustic Transducer and Transmit System Modeling for Performance Prediction*, Ph. D. Dissertation, Univ. of Massachusetts, Dartmouth, 2012
56. J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound* (Dover, New York, 1945)
57. A. Sauter, Jr., W. W. Soroka, "Sound transmission through rectangular slots of finite depth between reverberant rooms". *J. Acoust. Soc. Am.* **47**(1A), 5–11 (1970)
58. D. S. Bernett, W. W. Soroka, "Tables of rectangular piston radiation impedance functions, with application to sound transmission loss through deep apertures". *J. Acoust. Soc. Am.* **51**(5B), 1618–1623 (1972)
59. Л. Я. Гутин, "Звуковое поле поршнеобразных проекторов", *Журнал технической физики*, **7**(10), (1937). Избранные произведения в судостроении (Судостроение, Ленинград, 1977), с. 95
60. T. Mellow, L. Karkkainen, "On the sound field of an oscillating disk in a finite open and closed circular baffle". *J. Acoust. Soc. Am.* **118**(3) 1311–1325 (2005)
61. C. H. Sherman, J. L. Butler, *Transducers and Arrays for Underwater Sound* (Springer, New York, 2006)
62. R. V. DeVore, D. B. Hodge, R. G. Kouyoumjian, "Radiation by finite circular pistons imbedded in a rigid circular baffle". I. Eigenfunction solution. *J. Acoust. Soc. Am.* **48**(5B), 1128–1134 (1970)
63. R. L. Pritchard, "Mutual acoustic impedance between radiators in an infinite rigid plane". *J. Acoust. Soc. Am.* **32**(6), 730–737 (1960)
64. D. T. Porter, "Self- and mutual-radiation impedance and beam patterns for flexural disks in a rigid plane". *J. Acoust. Soc. Am.* **36**(6), 1154–1161 (1964)
65. E. M. Arise, "Mutual radiation impedance of square and rectangular pistons in a rigid infinite baffle". *J. Acoust. Soc. Am.* **36**(8), 1521–1525 (1964)

66. B. S. Aronov, "Experimental methods for investigating the acoustical interaction between transducers". *J. Acoust. Soc. Am.* **119**(6), 3822–3830 (2006)

СПИСОК СИМВОЛОВ

Символ	Описание
a	радиус
B	объемный модуль упругости
c, c_c, c_w	скорость звука, звук в пьезокерамике и в воде
c_{mi}^E	модуль упругости пьезокерамики при постоянном электрическом поле
C, C_e^S	емкость, емкость заторможенного преобразователя
C, C_{eqv}^E	гибкость, эквивалентная гибкость механической системы при постоянном электрическом поле
d, d_{mi}	расстояние, пьезоэлектрические модули
D	диаметр, жесткость при изгибе $D = Yh^3 / 12(1 - \sigma^2)$
D_i, D_i^E	плотность заряда, плотность заряда при постоянном электрическом поле
e_{mi}^E	пьезоэлектрические постоянные, $e_{mi} = d_{mj}c_{ji}^E, j=1...6$.
E, E_{op}, E_p	напряженность электрического поля, рабочая напряженность, допустимая напряженность
Ef	эффективность
$f, f_r, f_{ar}, \Delta f$	частота, резонансная частота, антирезонансная частота, отклонение частоты
f_{ip}	парциальные частоты связанных механических систем
F, F_{eqv}	сила, эквивалентная сила
G	крутильная жесткость
h	высота
$H(\theta, \varphi)$	характеристика направленности

Символ	Описание
I	ток
I_L, I_C, I_m	ток через индуктивность, ток через емкость, ток пропорциональный скорости колебаний механической системы
J, J_p	момент инерции, полярный момент инерции
$k; k_c, k_{eff}; k_{dif}$	волновое число; коэффициент электромеханической связи, эффективный коэффициент связи; коэффициент дифракции $k = \omega / c$
k_E, k_T	коэффициенты запаса электрической и механической прочности
K, K_{eqv}^E, K_{il}	жесткость, эквивалентная жесткость механической системы, взаимная жесткость связанных систем
ΔK	дополнительная жесткость, характеризующая электрическое взаимодействие между элементами в неоднородно деформированном пьезоэлектрическом теле
l, t, w	длина, толщина, ширина
$L; L_p, L_s$	Лагранжиан, индуктивность; параллельная и последовательная индуктивности
ms_w	коэффициент несоответствия, $ms_w = r_{ac} / r_{opt}$
ms_i	коэффициент формы колебаний
$M; M_{eqv}, M_{il}$	момент, общая масса; эквивалентная масса, взаимная масса связанных систем
n	коэффициент трансформации, коэффициент электромеханической трансформации
N, N_i	число сегментов в секционированной механической системе, коэффициенты электромеханической трансформации, $i = 1, 3$
o	нижний индекс, обозначающий точку приведения

Символ	Описание
$P, P_o; P_h$	звуковое давление, звуковое давление простого источника; гидростатическое давление
Q, Q_e, Q_m	добротность, электрическая и механическая добротности $Q = W_{kin} / W_{Loss}$
r, \mathbf{r}	расстояние, радиус вектор
$r, r_{mL}; r_{ac}, r_{opt}$	сопротивление, сопротивление механических потерь; сопротивление излучения, оптимальное значение сопротивления излучения
R, R_{eL}	сопротивление, сопротивление электрических потерь
S_{mi}^E	упругая податливость пьезокерамики при постоянном электрическом поле
S, S_{ik}, S_i	деформация, тензор деформации ($i, k = 1, 2, 3$), тензор деформации ($i = 1, \dots, 6$)
$S_{\Sigma}, S_{av}, S_{eff}$	площадь поверхности, средняя площадь поверхности, эффективная площадь поверхности
T, T_{ik}, T_i	механическое напряжение, тензор напряжений ($i, k = 1, 2, 3$), тензор напряжений ($i = 1, \dots, 6$)
T_{op}, T_p	рабочее напряжение, допустимое напряжение
u, U, U_o, U_i	скорость; скорость колебаний точки приведения, скорость колебаний точки приведения в i^{th} форме колебаний
$U_{\bar{v}}, U_{\bar{v}r}$	объемная скорость, относительная объемная скорость
v, V	электрическое напряжение
\tilde{V}	объем
$w, w_{int}, w_e, w_{mch}, w_{em}$	ширина, плотность энергии; плотности внутренней, электрической, механической и электромеханической энергий
W, \dot{W}, \bar{W}	энергия, поток энергии (мощность), комплексная мощность

Символ	Описание
W_{el}, W_e^S	полная электрическая энергия, электрическая энергия заторможенного пьезоэлемента
$W_{int}, W_m, W_{em}, W_{ac}$	внутренняя, механическая, электромеханическая и акустическая энергии
W_{kin}, W_{pot}^E	кинетическая энергия, потенциальная энергия при постоянном электрическом поле
W_{eL}, W_{mL}	энергии электрических и механических потерь
$\dot{W}_{mE}, \dot{W}_{mT}$	максимальная мощность, ограниченная электрическим полем и ограниченная механическими напряжениями
ΔW	дополнительная энергия, характеризующая электрическое взаимодействие между элементами в неоднородно деформируемом пьезоэлектрическом теле
$x; x_{ac}$	координата; реактивное сопротивление акустического излучения
$y; y = \delta / t$	координата; отношение толщины активного слоя к общей толщине механической системы
$Y, Y_i^E = 1 / s_{ii}^E$	модуль Юнга, модуль Юнга пьезокерамики ($i = 1, 3$)
Y_a^E, Y_p	модули Юнга активных и пассивных материалов
Y_σ	$Y_\sigma = Y / (1 - \sigma^2)$
$z; z_{il}$	координата; взаимный импеданс между формами колебаний
$Z, Z_{il} = z_{il} U_i / U_l$	импеданс, вносимый импеданс
Z_m, Z_m^E, Z_{in}	Механический импеданс, импеданс при постоянном электрическом поле, входной импеданс
Z_{ac}	сопротивление излучения
α_{ac}	безразмерный коэффициент активного сопротивления излучения
$\alpha_c = n^2 C_m^E / C_e^S$	коэффициент, связанный с эффективным коэффициентом связи, $k_{eff}^2 = \alpha_c / (1 + \alpha_c)$

Символ	Описание
β_{ac}	безразмерный коэффициент реактивного сопротивления излучения
$\beta = f_{1p} / f_{2p}$	коэффициент расстройки между парциальными частотами связанной системы
$\gamma, \gamma_m, \gamma_k$	коэффициент связи между парциальными системами, коэффициенты инерционной и упругой связи
γ_Y	$\gamma_Y = Y_p / Y_a^E$
γ_ρ	$\gamma_\rho = \rho_p / \rho_a$
$\eta, \eta_{em}, \eta_{ma}, \eta_{ea}$	кпд; электромеханический, механоакустический, электроакустический кпд
δ	расстояние между электродами
δ_e, δ_m	углы диэлектрических и механических потерь, $\tan \delta_e = 1 / Q_e$, $\tan \delta_m = 1 / Q_m$
$\varepsilon, \varepsilon_{ik}^T, \varepsilon_{ik}^S$	диэлектрическая проницаемость; тензоры диэлектрических постоянных пьезокерамики в свободном и заторможенном состоянии
$\theta; \theta(\mathbf{r})$	угол, форма колебаний
λ	длина волны, постоянная Ламе
μ	постоянная Ламе (модуль сдвига)
ξ, ξ_o	смещение, смещение точки приведения
ρ, ρ_a, ρ_p	плотность, плотность активных и пассивных материалов
σ, σ_i^E	коэффициент Пуассона; коэффициент Пуассона пьезокерамики, $\sigma_1^E = -s_{12}^E / s_{11}^E, \sigma_3^E = -s_{13}^E / s_{33}^E$
Σ	поверхность в общем случае
φ	угол
χ	функция дифракции

Символ	Описание
$\omega, \omega_r, \omega_{ar}$	угловая частота, частоты резонанса и антирезонанса
$\Omega = f^2 / f_{1p}^2$	безразмерный коэффициент частоты
$\Omega = 2\Delta f / f_r$	нормированная ширина полосы
<p>1. Векторы выделены жирным шрифтом.</p> <p>2. Строчные буквы, обозначающие зависящие от времени величины, соответствуют мгновенным значениям; заглавные буквы - среднеквадратичным значениям.</p> <p>3. Черта над заглавной буквой обозначает комплексную величину.</p>	

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свойства пассивных материалов

(Приведен перевод с источников США. Нуждается в проверке на соответствие российским стандартам)

Таблица А. 1: Упругие свойства пассивных материалов ^{*)}.

Материал	γ (гра)		σ	$\rho \cdot 10^{-3}$ (кг/м ³)	c (м/с)	$\rho c \cdot 10^{-6}$ (кг/м ² с)
Алюминий	71		0.33	2.7	5130	13.5
Оксид алюминия (керамика)	300		0.21	3.7	9000	33.3
Окись бериллия, (BeO)	345		0.26	3.0	10,700	32.1
Бериллиевая бронза, (BeCu)	125		0.30	8.2	3900	32,0
Латунь	97		0.31	8.5	3400	29.0
Соргрне ¹⁾	0.23		0.43	1.1	460	0.51
Стекло	62		0.24	2.3	5200	12
G-10 стеклопластик	24		0.14	1.8	3600	6,6
Инвар	148		0.3	8.0	4300	34
Свинец	16.5		0.44	11,3	1200	13.6
Масог ²⁾	67		0.29	2.5	5180	13
Пирекс	64		0.24	2.3	5300	12
Нержавеющая сталь	193		0.28	7.9	4940	39
Олово	50		0.36	7.3	2600	19
Титан	104		0.36	4.5	4810	21.6

Материал	Y (гра)		σ	$\rho \cdot 10^{-3}$ (кг/м ³)	c (м/с)	$\rho c \cdot 10^{-6}$ (кг/м ² с)
Алюминий	71		0.33	2.7	5130	13.5
<p>*) Объемный модуль $B = Y / 3(1 - 2\sigma)$. Модуль сдвига $\mu = Y / 2(1 + \sigma)$</p> <p>1) Композиция из пробки и резины.</p> <p>2) Тип керамики.</p>						

Таблица А.2: Свойства жидкостей в комнатных условиях

Жид- кость	Воздух	Во- да	Мор- ская вода	Касторо- вое масло	Моторное масло SAE-30	Гидравличе- ская жидкость ISO 32	Кремние- вое масло
B , ГПа	$142 \cdot 10^{-6}$	2.15	2.34	2.1	1.5	1.8	2.1
$\rho \cdot 10^3$ кг/м ³	$1.2 \cdot 10^{-3}$	1.0	1.02	0.96	0.88	0.86	0.97
c , м/с	340	1500	1500	1470	1300	1450	1500

Таблица А.3: Свойства полиуретанов

Свойство		ρ , кг/м ³	c , м/с	B , ГПа	G , МПа
ПР1547	4°C	1.05	1650	2.9	6
	34°C		1500	2.3	4
GS960PU, 20°C		1.08	1700	3.3	1.2

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Свойства пьезоэлектрической керамики

Таблица В.1: Пьезоэлектрические постоянные.

Свойство	PZT-4	PZT-5A	PZT-8	PZT-5H
	Тип I	Тип II	Тип III	Тип VI
$s_{11}^E, 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$	12.3	16.4	11.5	16.5
s_{33}^E	15.5	18.8	13.5	20.7
s_{13}^E	-5.31	-7.22	-4.8	-8.45
s_{12}^E	-4.05	-5.74	-3.7	-5.7
s_{44}^E	39.0	47.5	31.9	-4.78
s_{11}^D	10.9	14.4	10.1	15.5
s_{33}^D	7.9	9.46	8.5	9.0
s_{13}^D	-2.1	-2.98	-2.5	-3.0
s_{12}^D	-5.42	-7.71	-4.5	-7.3
s_{44}^D	19.3	25.2	22.6	23.7
s_{66}^D	32.7	44.3	30.4	48.5
$c_{11}^E, 10^{10} \text{ Н}/\text{м}^2$	13.9	12.1	14.9	12.6
c_{33}^E	11.5	11.1	13.2	11.7
c_{13}^E	7.43	7.52	8.11	8.41
c_{12}^E	7.78	7.54	8.11	7.95
c_{44}^E	2.56	2.11	3.13	2.3
c_{11}^D	14.5	12.6	15.2	11.7
c_{33}^D	15.9	14.7	16.9	15.7
c_{13}^D	6.09	6.52	7.03	7.22
c_{12}^D	8.39	8.09	8.41	8.18
c_{44}^D	5.18	3.97	4.46	4.22

Свойство	PZT-4	PZT-5A	PZT-8	PZT-5H
	Тип I	Тип II	Тип III	Тип VI
c_{66}	3.06	2.26	3.40	2.26
$d_{31}, 10^{-12} \text{ C/N}$	-123	-171	-97	-274
d_{33}	289	374	225	593
d_{15}	496	584	330	741
$e_{31}, \text{ C/M}^2$	-5.2	-5.4	-4.1	-6.5
e_{33}	15.1	15.8	14.0	-23.3
e_{15}	12.7	12.3	10.3	17
$\varepsilon_{11}^S / \varepsilon_0^{1)}$	730	916	900	-
$\varepsilon_{33}^S / \varepsilon_0$	635	830	600	1470
$\varepsilon_{11}^T / \varepsilon_0$	1475	1730	1290	3130
$\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$	1300	1700	1000	3400
k_{31}	0.334	0.344	0.30	0.39
k_{33}	0.7	0.705	0.64	0.75
k_{15}	0.71	0.685	0.55	0.52
k_p	0.58	0.60	0.51	0.65
k_t	0.513	0.486	0.48	0.50
$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	7.5	7.75	7.6	7.5
$\tan \delta_e$	0.004	0.02	<0.002	0.02
Q_m	500	75	1000	65
$^1) \varepsilon_0 = \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ Значения всех параметров представлены при малых сигналах и при комнатной температуре. Зависимости их значений от условий эксплуатации и окружающей среды см. в Главе 11.				

ПРИЛОЖЕНИЕ С. Специальные функции

В этом приложении обобщены некоторые данные о свойствах специальных функций, необходимые для решения задач излучения и колебаний цилиндрических и сферических преобразователей. Более подробную информацию о свойствах функций и их численные значения можно найти в работах [1, 2], из которых приведенные здесь данные и заимствованы. Некоторые интегральные выражения, включающие специальные функции, взяты из работы [3], в которой также содержится много полезных сведений о специальных функциях.

С.1 Цилиндрические функции Бесселя

Определение

Цилиндрические функции $Z_n(x)$ являются решениями уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 Z_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n = 0. \quad (\text{C.1})$$

Частными решениями этого уравнения являются функции Бесселя (цилиндрические функции первого рода $J_n(x)$), функции Неймана (цилиндрические функции второго рода) $N_n(x)$ и функции Ханкеля (цилиндрические функции третьего рода) $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$, где $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + jN_n(x)$ и $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jN_n(x)$. Функции $H_n^{(1)}(x)$ либо $H_n^{(2)}(x)$ используются альтернативно в зависимости от вида временного множителя $e^{-j\omega t}$ или $e^{j\omega t}$ (последний принят в настоящей работе). В ходе наших расчетов принято считать, что n является натуральным целым числом, и для цилиндрических координат $x = kr$. Таким образом, ниже применена форма

$$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - jN_n(kr). \quad (\text{C.2})$$

Свойства

$$H_{-n}^{(2)}(x) = J_{-n}(x) - jN_{-n}(x), \quad (\text{C.3})$$

где

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x). \quad (\text{C.4})$$

Представление в виде ряда

$$J_n(x) = \frac{1}{0!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{1!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2!(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+4} - \dots \quad (\text{C.5})$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \quad (\text{C.6})$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{2x^3}{2 \cdot 4^2} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \quad (\text{C.7})$$

Приближения при малых значениях аргумента $x < 1$ (низкочастотные приближения при $x = kr \ll 1$)

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad J_1(x) \approx \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}, \quad (\text{C.8})$$

$$N_0 \approx \frac{2}{\pi} (\ln x - 0.11), \quad N_1 \approx -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x}, \quad (\text{C.9})$$

$$H_1^{(2)}(x) \approx \frac{x}{2} + j \frac{2}{\pi x}, \quad H_1^{(2)'}(x) \approx -j \frac{2}{\pi(x)^2}. \quad (\text{C.10})$$

При больших значениях аргумента $x \gg 1$ (высокочастотное приближение, большие расстояния от цилиндра при $x = kr \rightarrow \infty$)

$$H_n^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (\text{C.11})$$

$$J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{C.12})$$

$$N_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{C.13})$$

Функциональные уравнения

$$Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x) \quad (\text{C.14})$$

$$N_{n-1}J_n - N_nJ_{n-1} = \frac{2}{\pi x} \quad (\text{C.15})$$

Дифференциальные формулы

$$\frac{dZ_n}{dx} = -\frac{n}{x}Z_n + Z_{n-1} = \frac{n}{x}Z_n - Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_{n-1} - Z_{n+1}) \quad (\text{C.16})$$

$$Z'_0 = -Z_1, \quad Z'_1 = Z_0 - \frac{1}{x}Z \quad (\text{C.17})$$

Интегральные формулы

$$\int x^{-n+1}Z_n(x)dx = -x^{-n+1}Z_{n-1}(x), \quad \int x^{n+1}Z_n(x)dx = x^{n+1}Z_{n+1}(x) \quad (\text{C.18})$$

$$\int Z_1(x)dx = -Z_0(x), \quad \int xZ_0(x)dx = xZ_1(x) \quad (\text{C.19})$$

$$\int J_n^2(x)xdx = \frac{x^2}{2}[J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)] \quad (\text{C.20})$$

Интегральные представления

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi j^n} \int_0^{2\pi} e^{jx \cos \varphi} \cdot e^{jn\varphi} d\varphi \quad (\text{C.21})$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{jx \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) d\varphi \quad (\text{C.22})$$

Решением одного из вариантов уравнения Бесселя являются функции Струве [1,2]:

$$S_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \cos \varphi) d\varphi, \quad (\text{C.23})$$

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (\text{C.24})$$

Их представления в виде ряда

$$S_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[x - \frac{x^3}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{x^5}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \dots \right], \quad (\text{C.25})$$

$$S_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{1^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right], \quad (\text{C.26})$$

$$\int xS_0(x)dx = xS_1(x). \quad (\text{C.27})$$

Модифицированные функции Бесселя (функции Бесселя мнимых значений аргумента), $I_n(x)$ и $K_n(x)$

Модифицированные функции являются частными решениями уравнения (сравните с уравнением (С.1))

$$\frac{d^2 Z_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_n}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) = 0. \quad (\text{C.28})$$

Модифицированные функции определяются соотношениями:

$$I_n(x) = j^n J_n(-jx) \quad (\text{C.29})$$

для первого рода, и

$$K_n(x) = -\frac{j\pi}{2} e^{-j\frac{\pi n}{2}} H_n^{(2)}(-jx) \quad (\text{C.30})$$

для второго рода. При этом

$$K_0(x) = -\frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(-jx), \quad K_1(x) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(-jx). \quad (\text{C.31})$$

Свойства этих функций можно получить из формулировок соответствующих свойств функций $J_n(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$, а также путем замены $x \rightarrow -jx$. В частности

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad K_{-n}(x) = K_n(x), \quad (\text{C.32})$$

$$K'_0(x) = -K_1(x). \quad (\text{C.33})$$

С.2 Сферические функции Бесселя

Сферические функции Бесселя (или функции Бесселя для сферических координат) являются частными решениями уравнений

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dR}{dz} + \left[1 - \frac{m(m+1)}{z^2}\right] R = 0, \quad (\text{C.34})$$

где $z = kr$.

Сферические функции Бесселя порядка m определяются как:

функции первого рода

$$j_m(z) = \sqrt{\pi / 2z} J_{m+1/2}(z); \quad (\text{C.35})$$

функции второго рода (сферические функции Неймана)

$$y_m(z) = \sqrt{\pi / 2z} N_{m+1/2}(z); \quad (\text{C.36})$$

функции третьего рода (сферические функции Ханкеля) $h_m(z)$. Для исходящей волны

$$h_m^{(2)}(z) = j_m(z) - jy_m(z) = \sqrt{\pi/2z} H_{m+1/2}^{(2)}(z). \quad (\text{C.37})$$

В частности

$$\left. \begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z}, & y_0(z) &= -\frac{\cos z}{z}; \\ j_1(z) &= \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}, & y_1(z) &= -\frac{\sin z}{z} - \frac{\cos z}{z^2}; \\ j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right) \sin z - \frac{3}{z^2} \cos z, & y_2(z) &= -\frac{3}{z^2} \sin z - \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right) \cos z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.38})$$

Выражения для функции j_m и y_m имеют вид:

при $z < 0.3$

$$\left. \begin{aligned} j_m(z) &\approx \frac{(z)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}, & y_m(z) &\approx -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{(z)^{m+1}}, \\ h_1^{(2)} &\approx \frac{1}{3} \left[z + j \frac{3}{(z)^2} \right], & h_1^{(2)'} &\approx \frac{1}{3} \left[1 - j \frac{6}{(z)^3} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.39})$$

и при $z \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} j_m(z) &\rightarrow \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{m+1}{2} \pi\right), & y_m(z) &\rightarrow \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{m+1}{2} \pi\right), \\ h_m^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{z} e^{-j\left(z - \frac{m+1}{2} \pi\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.40})$$

$$y_{m-1}(z)j_m(z) - y_m(z)j_{m-1}(z) = z^{-2}. \quad (\text{C.41})$$

Следующие свойства одинаковы для функций j_m , y_m и h_m . Введем для них общее обозначение f_m .

Рекуррентные соотношения

$$f_{m-1}(z) + f_{m+1}(z) = (2m+1)z^{-1}f_m(z) \quad (\text{C.42})$$

$$mf_{m-1}(z) - (m+1)f_{m+1}(z) = (2m+1)\frac{d}{dz}f_m(z) \quad (\text{C.43})$$

$$h_1^{(2)'}(z) = \frac{1}{3}[h_0^{(2)}(z) - 2h_2^{(2)}(z)] \quad (\text{C.44})$$

$$\frac{d}{dz}[z^{m+1}f_m(z)] = z^{m+1}f_{m-1}(z), \quad \frac{d}{dz}[z^{-m}f_m(z)] = -z^{-m}f_{m-1}(z) \quad (\text{C.45})$$

Интегральные формулы

$$\int f_1(z)dz = -f_0(z), \quad \int f_0(z)z^2 dz = z^2 f_1(z) \quad (\text{C.46})$$

$$\int f_m^2(z)z^2 dz = \frac{z^2}{2} [f_m^2(z) - f_{m-1}(z)f_{m+1}(z)] \quad (\text{C.47})$$

С.3 Полиномы Лежандра

Частные решения уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + m(m+1)P = 0 \quad \text{или} \quad (x^2-1) \frac{d^2 P}{dx^2} + 2x \frac{dP}{dx} - m(m+1)P = 0. \quad (\text{C.48})$$

где m — целое число и $x = \cos \theta$, представляют собой полиномы Лежандра порядка m

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m. \quad (\text{C.49})$$

В частности

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x = \cos \theta, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2-3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.50})$$

$$P_m(-x) = (-1)^m P_m(x), \quad P_m(x) = P_{-(m+1)}(x) \quad (\text{C.51})$$

Рекуррентное соотношение

$$P_{m-1}(x) = \frac{2m+1}{m} x P_m(x) - \frac{m+1}{m} P_{m+1}(x) \quad (\text{C.52})$$

Дифференциальные формулы

$$m P_m(x) = x P_m'(x) - P_{m-1}'(x) \quad (\text{C.53})$$

$$(2m+1) P_m(x) = \frac{d}{dx} [P_{m+1}(x) - P_{m-1}(x)] \quad (\text{C.54})$$

Ортогональность

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2/(2m+1) & n = m \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

Полезные интегралы с многочленами Лежандра

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 1/(2m+1) & m = n \\ \frac{(-1)^{0.5(m+n+1)}}{2^{m+n+1}} \times \dots & m \neq n, \\ & m > n, \\ \frac{m!n!}{(m+n)(m+n+1)\{[(m/2)![(n-1)/2]!\}^2} & (m-n) \text{ even} \\ 0 & m \text{ even,} \\ & n \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{C.56})$$

$$\int_0^1 P_{2m}(x)dx = 0, \quad \int_0^1 P_{2m+1}(x)dx = \frac{(-1)(-3)\cdots(-2m+1)}{(2m+2)\cdot 2m\cdot(2m-1)} \quad (\text{C.57})$$

$$\int_{-1}^1 x^b P_m(x)dx = 0 \quad y \quad b < m \quad (\text{C.58})$$

$$\int_{-1}^1 [P'_m(x)]^2 dx = m(m+1) \quad (\text{C.59})$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)[P'_m(x)]^2 dx = \frac{2m(m+1)}{2m+1} \quad (\text{C.60})$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} P_m(x)dx = \frac{2^{3/2}}{2m+1} \quad (\text{C.61})$$

С.4 Литература

1. Справочник по математическим функциям, под редакцией М. Абрамовица и И. А. Стиган, - М.: Наука, 1979.
2. G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995)
3. I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, Series, and Products* (Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007)